

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Сливен, 16-17 ноември 2013 г.

Специална тема

Задача 1: Съотношение за неопределеност в астрофизиката

а) Разглеждаме атома на водорода. Енергията на атома на водорода е сума от кинетичната енергия на движение на електрона и потенциалната енергия на взаимодействие между електрона и протона:

$$E(r, p) = \frac{p^2}{2m} - k \frac{e^2}{r^{n-2}} \quad [0.5\text{т}]$$

Като оценка ще приемем, че импулсът на електрона p е равен на неопределеността в импулса Δp . Тогава от съотношението за неопределеност на Хайзенберг следва:

$$p \approx \hbar / r \quad [0.5\text{т}]$$

Енергията на атома на водорода като функция на r ще има вида

$$E(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - k \frac{e^2}{r^{n-2}} \quad [0.5\text{т}]$$

Намираме първата производна на $E(r)$ спрямо r , приравняваме я на нула и намираме:

$$r^{n-4} = \frac{kme^2(n-2)}{\hbar^2} \quad [0.5\text{т}]$$

Намираме и втората производна на $E(r)$ спрямо r :

$$\frac{d^2 E(r)}{dr^2} = 3 \frac{\hbar^2}{mr^4} - k(n-2)(n-1) \frac{e^2}{r^n} = \frac{\hbar^2}{r^4 m} (4-n) \quad [1\text{т}]$$

Следователно енергията има минимум, когато $n < 4$ (имаме стабилен атом на водорода само ако $n < 4$). [1т]

б) Тъй като електроните в бялото джудже образуват електронен газ, който е изроден, те не са локализирани в един атом, а обикалят колективно между всички атоми. Атомите са плътно прилепнали помежду си и разстоянията между тях са от порядъка на размера на самите атоми. Тогава може да приемем, че осреднено всеки електрон се намира в сфера с радиус R . Импулса определяме от съотношението за неопределеност на Хайзенберг:

$$P \approx \hbar / R \quad [0.5\text{т}]$$

Тогава за кинетичната енергия на всеки електрон имаме

$$E = \frac{P^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \quad [0.75\text{т}]$$

За налягането S , което създават електроните, имаме

$$S = - \frac{dE}{dV} \quad [0.75\text{т}],$$

където $dV = 4\pi R^2 dR$ е изменението на обема $\Rightarrow$

$$S \approx \frac{\hbar^2}{4\pi m_e R^5} \approx 9,6 \cdot 10^{10} \text{ N} / \text{m}^2 \quad [0.5\text{т}]$$

Аналогично за неутронната звезда имаме, че неутроните се движат в едно голямо „ядро” и на всеки неутрон се пада сфера с радиус $R \approx \hbar 10^{-15} \text{ m}$. Тогава за налягането, което създават неутроните, имаме:

$$S \approx \frac{\hbar^2}{4\pi m_n R^5} \approx 5,25 \cdot 10^{32} \text{ N / m}^2 \text{ [0.5т]}$$

в) Решаваме аналогично на предишната подточка, като сега вместо класическата формула между кинетична енергия и импулс ($E = \frac{P^2}{2m_e}$) ползваме ултрарелативистко приближение $E = Pc$ [0.5т] $\Rightarrow$

$$E = Pc \approx \frac{\hbar c}{R} \text{ [0.75т]}$$

Тогава за налягането S , което създават електроните, имаме

$$S = -\frac{dE}{dV} \text{ [0.75т]},$$

където $dV = 4\pi R^2 dR$ е изменението на обема $\Rightarrow$

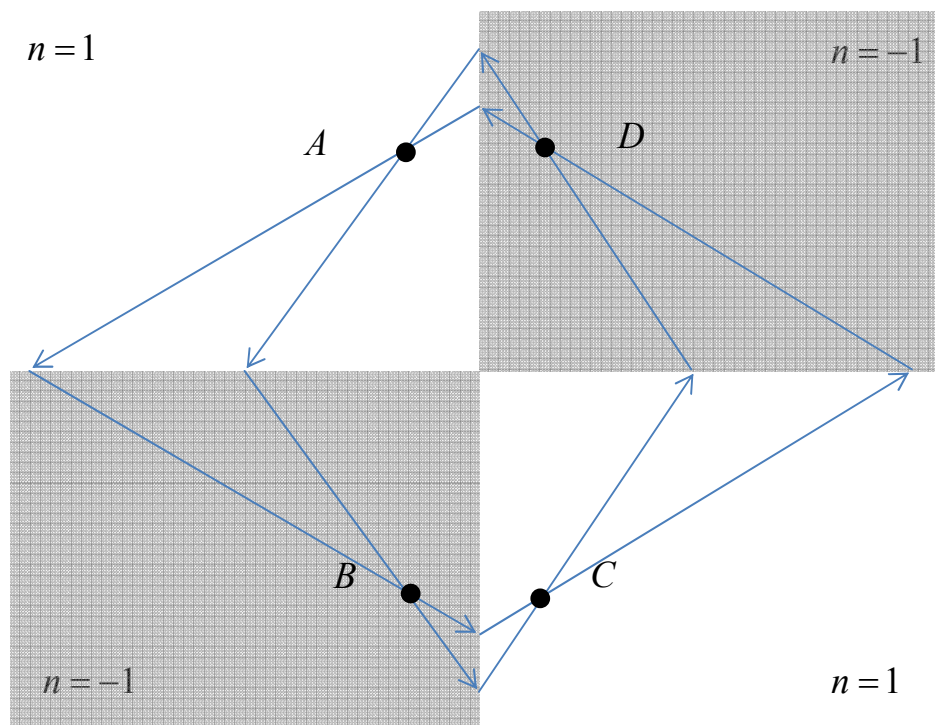
$$S \approx \frac{\hbar c}{4\pi R^4} \approx 2,5 \cdot 10^{13} \text{ N / m}^2 \text{ [0.5т]}$$

Аналогично за неутронната звезда ($R \approx 10^{-15} \text{ m}$) имаме:

$$S \approx \frac{\hbar c}{4\pi R^4} \approx 2,5 \cdot 10^{33} \text{ N / m}^2 \text{ [0.5т]}$$

Задача 2: Метаматериали

а) Ходът на лъчите е даден на Фигура 1 [2т]



Фигура 1

б) Тръгваме от Лоренцовите трансформации за енергията

$$E' = \frac{E - P_x u}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \text{ [0.25т]}$$

и заместваме $E = \hbar \omega$, $E' = \hbar \omega'$ [0.25т], а импулса с $P_x = P \cos \vartheta = \frac{nE}{c} \cos \vartheta$ [0.5т] $\Rightarrow$

$$\omega' = \omega \frac{1 - nu \cos \vartheta / c}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \text{ [0.25т]},$$

където n е показателят на пречупване, ϑ е ъгълът, под който наблюдател в K вижда фотоните спрямо оста x . $\Rightarrow$

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 - \frac{nu \cos \vartheta}{c}} \text{ [0.75т]}$$

в) При $n = -1$ и $\vartheta = \pi$ (източникът се отдалечава от наблюдателя в K) имаме

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 - \frac{u}{c}} = \omega' \frac{\sqrt{(1 - u/c)(1 + u/c)}}{\sqrt{(1 - u/c)^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \text{ [0.75т]}$$

Тоест имаме синьо отместване.

г) При $n = -1$ и $\vartheta = 0$ (източникът се приближава към наблюдателя в K) имаме

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 + \frac{u}{c}} = \omega' \frac{\sqrt{(1 - u/c)(1 + u/c)}}{\sqrt{(1 + u/c)^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} \text{ [0.75т]}$$

Тоест имаме червено отместване.

д) Записваме закона за запазване на енергията заедно с релятивисткия инвариант за енергията и импулса на частицата:

$$E_1 = E_\gamma + E_2 \Leftrightarrow E_2 = E_1 - E_\gamma$$

$$E_1^2 = E_0^2 + P_1^2 c^2, \quad E_2^2 = E_0^2 + P_2^2 c^2 \text{ [0.25т]}$$

където E_1, P_1 и E_2, P_2 са пълната релятивистка енергия и импулса на частицата, съответно преди и след излъчването. E_0 е енергията на частицата в покой, а E_γ е енергията на излъчения фотон. Ако повдигнем на квадрат закона за запазване на енергията и в него заместим енергията от релятивисткия инвариант за енергията и импулса, получаваме:

$$P_2^2 c^2 = P_1^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E_1 \text{ [0.25т]}$$

а от закона за запазване на импулса имаме

$$P_2^2 = P_\gamma^2 + P_1^2 - 2P_\gamma P_1 \cos \vartheta \text{ [0.25т]}$$

След като умножим горното равенство с c^2 и отчетем, че $P_\gamma = nE_\gamma / c$ [0.25т], получаваме:

$$P_2^2 c^2 = E_\gamma^2 n^2 + P_1^2 c^2 - 2ncE_\gamma P_1 \cos \vartheta \text{ [0.25т]}$$

Последното уравнение вадим от $P_2^2 c^2 = P_1^2 c^2 + E_\gamma^2 - 2E_\gamma E_1 \Rightarrow$

$$(n^2 - 1) \frac{E_\gamma}{2E_1} + 1 = \frac{ncP_1}{E_1} \cos \vartheta \text{ [0.25т]}$$

Сега можем да отчетем, че $E_\gamma / E_1 \ll 1 \Rightarrow$

$$\cos \vartheta = \frac{E_1}{ncP_1} = \frac{c}{nu} \quad [0.5\tau]$$

следователно за $n > 0$, $\cos \vartheta > 0$, и излъчването е насочено по посока на движение на заредената частица, а при $n < 0$, $\cos \vartheta < 0$, и излъчването е насочено в посока обратна на движение на заредената частица.

е) Понеже ударът на фотона с честота 2ω е в решетката на кристала, импулсът и енергията, които придобива кристалът, могат да се пренебрегнат спрямо енергията на фотона. От съображение за симетрия и закона за запазване на импулса имаме, че двата новородени фотона с честота ω трябва да се движат под еднакви ъгли α спрямо първоначалната посока на фотона с честота 2ω .

От закона за запазване на импулса имаме:

$$P_{2\omega} = 2P_{\omega} \cos \alpha \quad [0.4\tau]$$

От закона за запазване на енергията имаме:

$$E_{2\omega} = 2E_{\omega} \quad [0.35\tau]$$

Също така имаме връзката между енергия и импулс на фотона с честота 2ω и фотоните с честота ω

$$\begin{aligned} E_{2\omega} &= \frac{P_{2\omega} c}{n_{2\omega}} \\ E_{\omega} &= \frac{P_{\omega} c}{n_{\omega}} \\ \frac{P_{2\omega} c}{n_{2\omega}} &= 2 \frac{P_{\omega} c}{n_{\omega}} \quad [0.35\tau] \end{aligned} \quad [0.4\tau] \Rightarrow$$

И окончателно за ъгъла α имаме

$$\cos \alpha = \frac{n_{2\omega}}{n_{\omega}} = -1 \Rightarrow \alpha = \pi \quad [1\tau]$$

Следователно фотоните с честота ω се движат в обратна посока на падналия фотон с честота 2ω (действа като нелинейно огледало).

Задача 3: Билярдна топка

а) Законите за запазване на импулса и на момента на импулса спрямо центъра на топката са

$$\begin{aligned} mv(t=0) &= P \Rightarrow v(0) = P / m \\ \omega(t=0)I &= 0 \Rightarrow \omega(0) = 0 \end{aligned} \quad [0.75\tau]$$

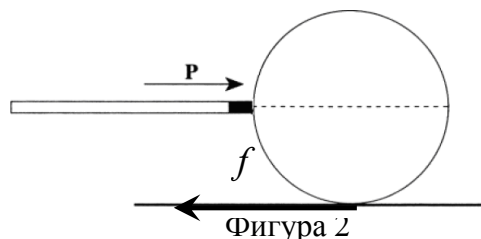
където $v(0)$ и $\omega(0)$ са началната линейна и ъглова скорост на топката, а инерчният момент на топката спрямо нейния център е

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \quad [0.5\tau]$$

На топката действа сила на триене (Фигура 2) $f = -\mu mg \quad [0.5\tau]$, която променя линейната и ъгловата скорост на топката

$$v(t) = v(0) - \mu g t$$

$$\omega(t) = \omega(0) + \frac{5\mu g}{2R} t \quad [0.75\tau]$$



В момента, в който линейната скорост на центъра на масите и линейната скорост на допирната точка в система център на масите се изравнят, приплъзването спира $v(t) = \omega(t)R$ [0.5τ] Оттук намираме и времето, за което става това

$$T = \frac{2}{7} \frac{P}{\mu m g} \quad [0.5\tau]$$

б) Крайната скорост на центъра на топката се дава като

$$v(T) = \frac{P}{m} - \frac{2}{7} \frac{P}{m} = \frac{5}{7} \frac{P}{m} \quad [1\tau]$$

в) Законите за запазване на импулса и на момента на импулса спрямо центъра на топката дават

$$mv(0) = P \Rightarrow v(0) = P / m$$

$$\omega(0)I = hP \Rightarrow \omega(0) = hP / I \quad [0.75\tau]$$

За да няма прихлъзване, линейната и ъгловата скорост на топката в началния момент трябва да изпълняват $v(0) = \omega(0)R$ [0.5τ] $\Rightarrow$

$$\frac{P}{m} = \frac{hPR}{I} \Rightarrow h = \frac{2}{5} R \quad [0.75\tau]$$

г) При удар под екваториалната равнина топката започва да се върти обратно на часовниковата стрелка. Отново от законите за запазване на импулса и на момента на импулса спрямо центъра на топката имаме

$$mv(0) = P \Rightarrow v(0) = P / m$$

$$\omega(0)I = HP \Rightarrow \omega(0) = HP / I \quad [0.5\tau]$$

Промяната на линейната и ъгловата скорост на топката се дава като

$$v(t) = v(0) - \mu g t$$

$$\omega(t) = \omega(0) - \frac{5\mu g}{2R} t \quad [0.5\tau]$$

От последното равенство намираме момента T_1 , в който топката спира да се върти

$$T_1 = \frac{PH}{\mu m g R} \quad [1\tau]$$

Намираме времето T , за което топката започва да се движи без хлъзгане от момента, в който нямаме въртене

$$T = \frac{2P}{7\mu m g} \left(1 - \frac{H}{R} \right) \quad [0.5\tau]$$

И окончателно за T_2 имаме

$$T_2 = T_1 + T = \frac{PH}{\mu m g R} + \frac{2P}{7\mu m g} \left(1 - \frac{H}{R} \right) = \frac{P}{7\mu m g} \left(2 + \frac{5H}{R} \right) \quad [1\tau]$$