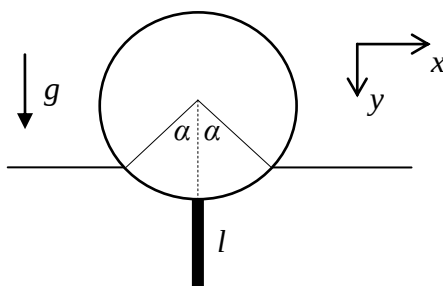


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Вършец, 10 ноември 2012 г.
Специална тема – решения на задачите

Задача 1. Люлееща се шамандура



Фигура 1

а) Уравнението за стойността на ъгъла α (виж Фигура 1), когато шамандурата е в равновесие, се получава директно от уравнението за равенство на силата на тежестта, която действа върху шамандурата, и Архимедовата сила

$$\frac{8\pi R^3 \rho g}{3} = \left(\frac{2\pi(1 - \cos \alpha)R^3}{3} - \frac{\pi R^2 \sin^2 \alpha R \cos \alpha}{3} \right) \rho_0 g. \quad [2\tau]$$

От горното уравнение след преобразувания се получава търсеното уравнение

$$\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2 - \frac{8\rho}{\rho_0} = 0. \quad [1\tau]$$

б) Считаме, че шамандурата е потопена на безкрайно малко разстояние dy надолу от равновесното ѝ положение. Архимедовата сила на допълнително изтласканата вода има квазиеластичен характер от вида

$$dF = -kdy = -\pi R^2 \sin^2 \alpha \rho_0 g dy \Rightarrow k = \pi R^2 \sin^2 \alpha \rho_0 g. \quad [2\tau]$$

Като използваме формулата за периода

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [0.5\tau]$$

където ефективната маса $m = \frac{32\pi R^3 \rho}{9}$, получаваме за периода на малките вертикални трептения на шамандурата

$$T = \frac{8\pi}{3 \sin \alpha} \sqrt{\frac{2R\rho}{\rho_0 g}} \cdot [0.5\tau]$$

в) Нека пръчката е отклонена на малък ъгъл φ от вертикалата. Тогава шамандурата започва да се люлее около равновесното си положение като физично махало с точка на окачване в центъра на кълбото. [0.5τ] Инерционният момент на шамандурата около оста, минаваща през центъра на кълбото, е

$$I = \frac{2}{5} \frac{4\pi R^3 \rho}{3} R^2 + \frac{1}{12} \frac{4\pi R^3 \rho}{3} l^2 + \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \left(R + \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{4\pi R^3 \rho}{45} (21R^2 + 15Rl + 5l^2). [1\tau]$$

Квазиеластичният въртящ момент е равен на

$$M = -\frac{4\pi R^3 \rho}{3} g \sin \varphi \left(R + \frac{l}{2}\right) \approx -\frac{4\pi R^3 \rho}{3} g \left(R + \frac{l}{2}\right) \varphi. [1\tau]$$

Следователно дирекционният момент на M е

$$D = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} g \left(R + \frac{l}{2}\right). [0.5\tau]$$

За периода на трептенията на пръчката получаваме

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{2(21R^2 + 15Rl + 5l^2)}{15g(2R + l)}}. [1\tau]$$

Задача 2. Електрични квадруполи

Полагаме $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

а) Точният израз за потенциала е

$$U = \frac{ke}{r+d} - \frac{2ke}{r} + \frac{ke}{r-d}. [0.5\tau]$$

Преобразуваме горното уравнение и получаваме приближен израз за потенциала на разстояние $r \gg d$ от централния заряд $(-2e)$ по правата, свързваща зарядите,

$$U = \frac{ke}{r} \left(\frac{1}{1+\frac{d}{r}} - 2 + \frac{1}{1-\frac{d}{r}} \right) \approx \frac{ke}{r} \left(1 - \frac{d}{r} + \frac{d^2}{r^2} - 2 + 1 + \frac{d}{r} + \frac{d^2}{r^2} \right) = \frac{2ked^2}{r^3}. [1.5\tau]$$

б) Точният израз за интензитета е (векторът на интензитета лежи на правата, свързваща зарядите)

$$E = \frac{ke}{(r+d)^2} - \frac{2ke}{r^2} + \frac{ke}{(r-d)^2} \cdot [0.5\tau]$$

Преобразуваме горното уравнение и получаваме приближен израз за интензитета на разстояние $r \gg d$ от централния заряд по правата, свързваща зарядите,

$$E = \frac{ke}{r^2} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{d}{r}\right)^2} - 2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{r}\right)^2} \right) \approx \frac{ke}{r^2} \left(1 - \frac{2d}{r} + \frac{3d^2}{r^2} - 2 + 1 + \frac{2d}{r} + \frac{3d^2}{r^2} \right) = \frac{6ked^2}{r^4} \cdot [1.5\tau]$$

Положителната му стойност показва, че интензитетът на електричното поле е насочен навън от квадрупола.

Алтернативно, интензитетът може да се получи от потенциала по формулата

$$E = -\frac{dU}{dr} \approx \frac{6ked^2}{r^4}.$$

в) Точният израз за потенциала е

$$U = \frac{2ke}{\sqrt{r^2 + d^2}} - \frac{2ke}{r} \cdot [0.5\tau]$$

Преобразуваме горното уравнение и получаваме приближен израз за потенциала на разстояние $r \gg d$ от централния заряд по правата, перпендикулярна на правата, свързваща зарядите,

$$U = \frac{2ke}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d^2}{r^2}}} - 1 \right) \approx \frac{2ke}{r} \left(\frac{1}{1 + \frac{d^2}{2r^2}} - 1 \right) \approx \frac{2ke}{r} \left(1 - \frac{d^2}{2r^2} - 1 \right) = -\frac{ked^2}{r^3} \cdot [0.5\tau]$$

г) Поради симетрията на постановката интензитетът има компонента само по правата, перпендикулярна на правата, свързваща зарядите. Точният израз за тази компонента на интензитета е

$$E = 2 \frac{ke}{r^2 + d^2} \cos\left(\arctan \frac{d}{r}\right) - \frac{2ke}{r^2} \cdot [0.5\tau]$$

Преобразуваме горното уравнение и получаваме приближен израз за интензитета на разстояние $r \gg d$ от централния заряд по правата, перпендикулярна на правата, свързваща зарядите,

$$E = \frac{2ke}{r^2} \left(\frac{\cos\left(\arctan\frac{d}{r}\right)}{1 + \frac{d^2}{r^2}} - 1 \right) \approx \frac{2ke}{r^2} \left[\left(1 - \frac{d^2}{2r^2}\right) \left(1 - \frac{d^2}{r^2}\right) - 1 \right] \approx \frac{2ke}{r^2} \left(1 - \frac{d^2}{r^2} - \frac{d^2}{2r^2} - 1\right) = -\frac{3ked^2}{r^4}. \quad [1.5\tau]$$

Алтернативно, интензитетът може да се получи от потенциала по формулата

$$E = -\frac{dU}{dr} \approx -\frac{3ked^2}{r^4}.$$

д) За да намерим силата на взаимодействие между квадруполите, използваме израза за интензитета, създаван от един дипол, който сме получили в б) подточка. За силата се получава

$$F = e \frac{6ked^2}{(r-d)^4} - 2e \frac{6ked^2}{r^4} + e \frac{6ked^2}{(r+d)^4} = \frac{6ke^2d^2}{r^4} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{r}\right)^4} - 2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{r}\right)^4} \right) \approx [1\tau]$$

$$\approx \frac{6ke^2d^2}{r^4} \left(1 + \frac{4d}{r} + \frac{10d^2}{r^2} - 2 + 1 - \frac{4d}{r} + \frac{10d^2}{r^2} \right) = \frac{120ke^2d^4}{r^6}. \quad [1\tau]$$

е) Добавянето на заземена проводяща равнина на разстояние r от централния заряд е еквивалентно на добавянето на квадрупол с противоположни на първия заряди и с централен заряд $(+2e)$, разположен на разстояние $2r$ от централния заряд на изходния квадрупол. Т.е. изразът за силата в този случай се получава като умножим резултата в д) подточка по -1 и заместим r с $2r$

$$F \approx -\frac{15ke^2d^4}{8r^6}. \quad [1\tau]$$

Задача 3. Разпад на K^+ -мезон

Част 1. В този случай частица с маса в покой m_0 и скорост v се разпада на две частици с известни импулси и пълни енергии. Нека първата от двете крайни частици да се движи по направление, сключващо ъгъл θ с направлението на движение на изходната частица. Тогава втората крайна частица ще се движи под ъгъл $\frac{\pi}{2} - \theta$ спрямо направлението на движение на изходната частица. От стойността на ъгъла θ ще разберем и направлението на движение на първоначалната частица. Разписваме уравненията за запазване на импулса (ще считаме, че абсцисата съвпада с направлението на движение на изходната частица) и енергията. Получаваме

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta \quad (\text{ЗЗИ по абсцисата}),$$

$$0 = p_1 \sin \theta - p_2 \cos \theta \text{ (ЗЗИ по ординатата),}$$

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_1 + E_2 \text{ (ЗЗЕ).}$$

Решаваме горните три уравнения спрямо m_0 , v и θ . Получаваме

$$m_0 = \frac{1}{c^2} \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - c^2(p_1^2 + p_2^2)}, \text{ [2т]}$$

$$v = \frac{c^2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{E_1 + E_2}, \text{ [1т]}$$

$$\tan \theta = \frac{p_2}{p_1}. \text{ [1т]}$$

Част 2. От закона за запазване на импулса следва, че π^+ -мезонът и π^0 -мезонът ще се движат в противоположни посоки и с равни големина на импулсите $p_{\pi^+} = p_{\pi^0} = p$. От закона за запазване на енергията преди и след разпадането на K^+ -мезона следва, че

$$m_K c^2 = \sqrt{m_{\pi^+}^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m_{\pi^0}^2 c^4 + p^2 c^2}. \text{ [0.5т]}$$

След двукратно вдигане на квадрат на горното равенство получаваме

$$p^2 = \frac{(m_K^2 - m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2)^2 - 4m_{\pi^+}^2 m_{\pi^0}^2}{4m_K^2} c^2, \text{ [0.5т]}$$

от което следва

$$E_{\pi^+} = \sqrt{m_{\pi^+}^2 c^4 + p^2 c^2} = \frac{m_K^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_K} c^2.$$

а) За да има максимална пълна енергия, крайният μ -мезон трябва да се движи по посоката на движение на π^+ -мезона, а неутриното – в противоположната посока. Тогава от ЗЗИ $p = p_\mu - p_\nu$. [0.5т] От закона за запазване на енергията преди и след разпадането на π^+ -мезона следва, че

$$E_{\pi^+} = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2} + p_\nu c. \text{ [0.5т]}$$

От ЗЗИ и ЗЗЕ получаваме

$$p_{\mu} = \frac{(E_{\pi^+} + pc)^2 - m_{\mu}^2 c^4}{2c(E_{\pi^+} + pc)}, \text{ [0.5т]}$$

от което следва за максималната пълна енергия на μ -мезона

$$E_{\max} = \sqrt{m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2} = 239 \text{ MeV} . \text{ [1т]}$$

б) За да има минимална пълна енергия, трябва неутриното да се движи по посоката на движение на π^+ -мезона. Тогава от ЗЗИ $p = p_{\nu} + p_{\mu}$. [0.5т] От закона за запазване на енергията преди и след разпадането на π^+ -мезона следва, че

$$E_{\pi^+} = \sqrt{m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2} + p_{\nu} c . \text{ [0.5т]}$$

От ЗЗИ и ЗЗЕ получаваме

$$p_{\mu} = \frac{m_{\mu}^2 c^4 - (E_{\pi^+} - pc)^2}{2c(E_{\pi^+} - pc)}, \text{ [0.5т]}$$

от което следва за минималната пълна енергия на μ -мезона

$$E_{\min} = \sqrt{m_{\mu}^2 c^4 + p_{\mu}^2 c^2} = 152 \text{ MeV} . \text{ [1т]}$$