

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Варна, 30 Октомври 2011 г.

Специална тема

Задача 1. Интерференция от три процепа

а) Нека електричните полета далеч от екрана и създавани от всеки процеп в направление θ да са:

$$E_1 = E_0 e^{i\omega x + i\phi_1}$$

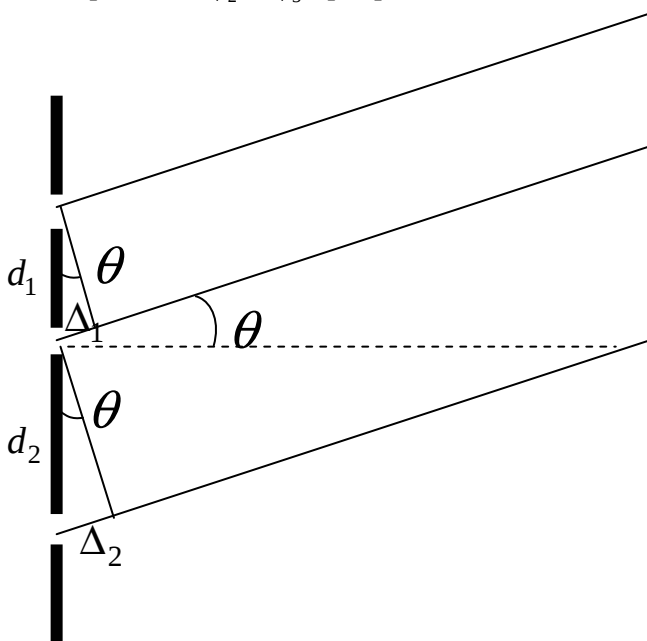
$$E_2 = E_0 e^{i\omega x + i\phi_2} \quad [0.5\tau]$$

$$E_3 = E_0 e^{i\omega x + i\phi_3}$$

Тогава пълното електрично поле е

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad [0.5\tau]$$

За простота нека изберем $\phi_1 = 0$. Изразяваме ϕ_2 и ϕ_3 чрез разликата в оптичните пътища (виж *Фигура 1*.)



Фигура 1

Тогава за интензитета имаме:

$$I \sim |E|^2 = E_0^2 (3 + 2 \cos \phi_2 + 2 \cos \phi_3 + 2 \cos(\phi_2 + \phi_3)) \quad [0.5\tau]$$

Или окончателно имаме:

$$I = I_0 \left(3 + 2 \cos \frac{2\pi d_1 \sin \theta}{\lambda} + 2 \cos \frac{2\pi d_2 \sin \theta}{\lambda} + 2 \cos \frac{2\pi (d_1 + d_2) \sin \theta}{\lambda} \right) \quad [0.5\tau]$$

б) Очевидно интензитетът осцилира за двете функции и ще е максимално голям когато и двете функции са максимални, тоест:

$$I_{\max} = 9I_0 \quad [2\tau]$$

Освен абсолютния максимум ще има и по-малки максимуми.

в) За да имаме абсолютен максимум в направление θ , трябва да се удовлетворяват следните две равенства

$$\frac{2\pi d_1}{\lambda} \sin \theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad [0.5\tau]$$

$$\frac{2\pi(d_1 + d_2)}{\lambda} \sin \theta = 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{d_1 + d_2} = \frac{n}{d_1} \quad [0.5\tau]$$

Окончателно имаме:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m}{n} - 1 \quad [1\tau]$$

г) За $d_1 = d_2 = d$ имаме абсолютен максимум в направление θ , когато:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad [0.5\tau]$$

$$\frac{4\pi d}{\lambda} \sin \theta = 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Очевидно нулевият максимум е при $n = 0$ и $m = 0$, което отговаря на $\theta_0 = 0$ [0.5τ]

А първият до него максимум е при $n = 1$ и $m = 2$, което отговаря на $\theta_1 = \text{Arc sin} \left(\frac{\lambda}{d} \right)$ [1τ]

д) Аналогично на първата точка за електричното поле имаме

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

$$\Rightarrow I_{\max} = 16I_0 \quad [1\tau]$$

Вече лесно може да се обобщи за N процепа

$$I_{\max} = N^2 I_0 \quad [1\tau]$$

Задача 2. Черна дупка

Част 1. а) Разглеждаме тяло с маса m , изстреляно от радиуса на черната дупка R . Втора космическа скорост може да се изчисли чрез изравняване на кинетичната енергия и гравитационната потенциална енергия:

$$\frac{mV^2}{2} = G \frac{mM}{R} \quad [1\tau]$$

За черна дупка имаме $V = c \Rightarrow$

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad [1\tau]$$

б) Използваме последната формула, като заместим в нея масата на Земята $\Rightarrow$

$$R = \frac{2GM_{\text{з}}}{c^2} = \frac{2.6,6742 \cdot 10^{-11} \cdot 5,9742 \cdot 10^{24}}{9 \cdot 10^{16}} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 9 \text{ mm} \quad [2\tau]$$

Част 2. в) Тъй като фотонът е локализиран в черната дупка (в област с размер радиуса на Шварцшилд R), неговият импулс P не е точно определен. Като оценка ще приемем, че импулсът P е от порядъка на неопределеността в импулса ΔP .

От съотношение за неопределеност на Хайзенберг следва:

$$P \approx \hbar / R \quad [0.5\tau]$$

тогава енергията на фотона е

$$E = Pc \approx \hbar c / R \quad [0.5\tau]$$

Следователно, средната температура на черната дупка е

$$E = Pc = kT \Rightarrow$$

$$T \approx \frac{\hbar c}{Rk} \text{ [1т]}$$

г) Ще намерим минималната маса $M_{\min}$, при която все още може да се формира черна дупка. За целта разглеждаме тяло с маса m , затворено в черната дупка с радиус $R \Rightarrow$ импулс P на тялото не е точно определен, а имаме

$$P \approx \hbar / R \text{ [0.5т]}$$

След което приемаме, че импулсът на тялото е от порядъка $P \approx mc \Rightarrow$

$$mc \approx \frac{\hbar}{R} \text{ [0.5т]}$$

Сега заместваме и радиуса на Шварцшилд $R = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow$

$$mc \approx \frac{\hbar c^2}{2GM} \Leftrightarrow M \approx \frac{\hbar c}{2Gm} \text{ [1т]}$$

Най-малка долна граница за масата $M_{\min}$ на черната дупка имаме, когато m е най-голямо, а най-голямата маса на частицата може да е масата на самата черна дупка

$$\Rightarrow M_{\min} \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{2G}} \text{ [1т]}$$

Или числено имаме

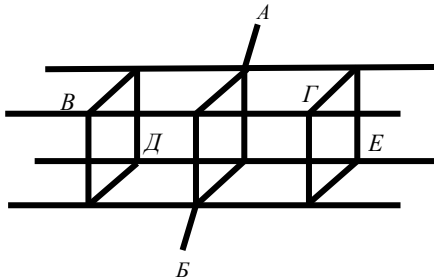
$$M_{\min} \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ kg [1т]}$$

Тоест за тяло с маса по-малка от минималната съществуват квантови ограничения и тялото не може да стане черна дупка независимо от силата, с която го свиваме.

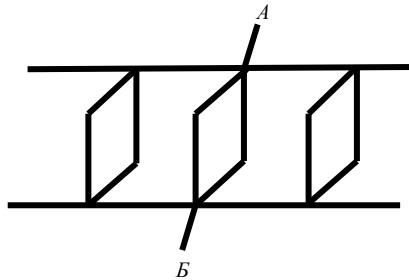
Забележка: В таблицата от условието на задачата са дадени масата на електрона и масата на протона, но те не са нужни при решаването на задачата.

Задача 3. Съпротивление на безкрайни вериги

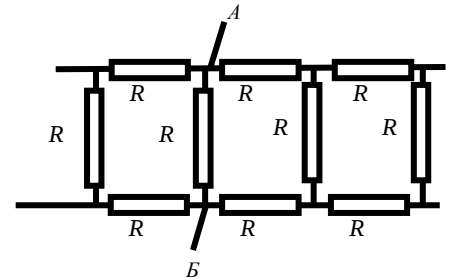
а) При включване на източник на напрежение между точки А и Б, ребрата В-Г и Д-Е имат еднакъв потенциал (Фигура 2а) и могат да се махнат, понеже по тях не тече ток (Фигура 2б). След което схемата се опростява до две безкрайни дълги схеми свързани успоредни помежду си (Фигура 2в).



Фигура 2а



Фигура 2б



Фигура 2в

Сега вече можем да пресметнем съпротивлението между точки А и Б:

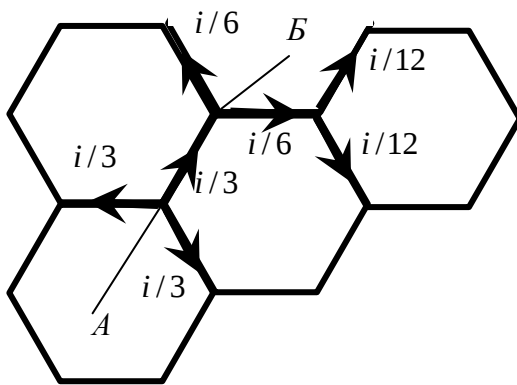
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{r} \text{ [1т]}$$

където r е съпротивлението на полубезкрайната верига. Използваме добре познатия трик, че съпротивлението на безкрайно дълга верига не се променя, ако махнем едно повтарящо се звено. Тогава за r имаме:

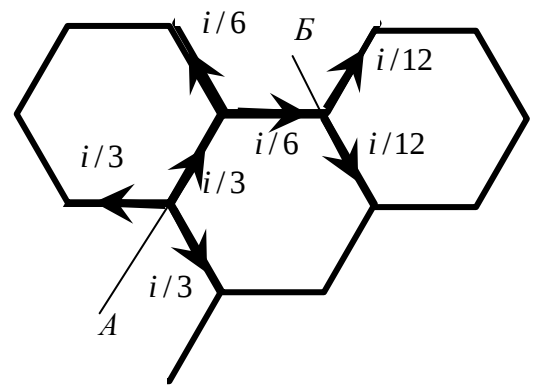
$$r = 2R + \frac{Rr}{r+R} [1\tau] \Rightarrow$$

$$R_{AB} \approx \frac{R}{\sqrt{3}} [1\tau]$$

б) Ако в точка А от веригата приложим положителен потенциал, от съображение на симетрия, към точка Б ще протича ток $i/3$ [0.5τ] от общия ток (Фигура 3б). Аналогично, ако към точка Б приложим отрицателен потенциал, то към точка Б ще протича ток $i/3$ [0.5τ] от общия ток. Използвайки принципа на суперпозицията и прилагайки едновременно и положителното напрежение към точка А и отрицателното към точка Б, то ще получим ток $2i/3$ [0.5τ], който ще протече между точки А и Б $\Rightarrow$ Използвайки закона на Ом, имаме $U_{AB} = R2i/3$ [0.5τ] или за ефективното съпротивлението между точки А и Б, имаме $R_{AB} = 2R/3$ [1τ]



Фигура 3б



Фигура 3в

в) Аналогично на точка б) разглеждаме тока, който протича по отделните клонове, като ток в близките клонове е $i/3$ [0.5τ], докато в по-далечните е $i/6$ [0.5τ] (Фигура 3в). При едновременно подаване на потенциал към точки А и Б, токът, който протича между тях, е

$$I = i/3 + i/6 = i/2 [1\tau]$$

а падът на напреженията между точки А и Б е

$$U = Ri/3 + Ri/6 = Ri/2$$

Аналогично общият пад на напрежението е

$$U = Ri [1\tau]$$

Следователно ефективното съпротивление между точки А и Б ще е $R_{AB} = U/i = R$ [1τ]