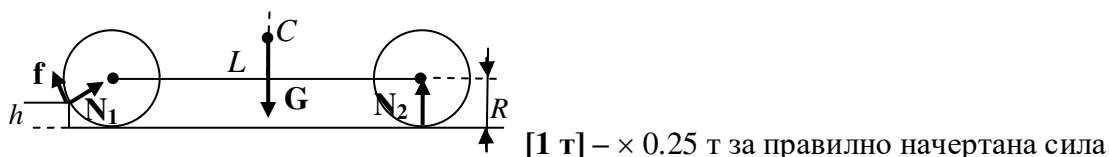


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Варна, 6 ноември 2010 г.
Решения на специална тема

Задача 1. Изкачване на бордюр

A1) На фигурата са показани силите, които действат на автомобила. Върху задната гума не действа сила на триене, защото тя се върти свободно.



От условието за баланс на силите по X:

$$(1) \quad N_1 \sin \alpha = f \cos \alpha ; \quad [0.5 \text{ т}]$$

и по Y:

$$(2) \quad N_1 \cos \alpha + f \sin \alpha + N_2 = mg . \quad [0.5 \text{ т}]$$

Записваме условие за уравнивяване на въртящите моменти спрямо предната ос:

$$(3) \quad fR + mg \frac{L}{2} = N_2 L \quad [0.5 \text{ т}]$$

От трите уравнения определяме:

$$(4) \quad f = \frac{mgL \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L)} \quad [0.25 \text{ т}]$$

и

$$(5) \quad N_1 = \frac{mgL \cos \alpha}{2(R \sin \alpha + L)} \quad [0.25 \text{ т}]$$

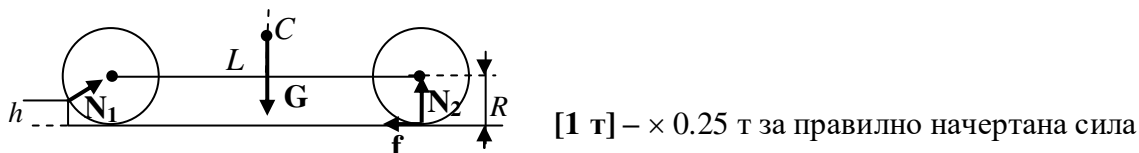
За да се движи автомобилът без боксуване, е нужно $f \leq \mu N_1$, откъдето определяме:

$$(6) \quad \mu \geq \tan \alpha \quad [0.5 \text{ т}]$$

A2) Разглеждаме предната гума като отделно тяло. От условието за уравнивяване на въртящите моменти върху гумата:

$$(7) \quad M = fR = \frac{mgLR \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L)} \quad [0.5 \text{ т}]$$

B1) Действащите в този случай сили са представени на чертежа:



От условието за баланс на силите по X:

$$(8) \quad N_1 \sin \alpha = f ; \quad [0.5 \text{ т}]$$

и по Y:

$$(9) \quad N_1 \cos \alpha + N_2 = mg . \quad [0.5 \text{ т}]$$

Записваме условие за уравновесяване на въртящите моменти спрямо предната ос:

$$(10) \quad fR + mg \frac{L}{2} = N_2 L \quad [0.5 \text{ т}]$$

От трите уравнения (8) – (10) определяме:

$$(11) \quad f = \frac{mgL \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)} \quad [0.25 \text{ т}]$$

$$(12) \quad N_1 = \frac{mgL}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)} \quad [0.25 \text{ т}]$$

$$(13) \quad N_2 = \frac{mg(2R \sin \alpha + L \cos \alpha)}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)} \quad [0.25 \text{ т}]$$

За да се движи автомобилът без боксуване е нужно $f \leq \mu N_2$, откъдето определяме:

$$(14) \quad \mu \geq \frac{L \sin \alpha}{L \cos \alpha + 2R \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + 2(R/L) \tan \alpha} \quad [0.25 \text{ т}]$$

Б2) Аналогично на т. А2) въртящият момент на двигателя се уравновесява от въртящия момент на силата на триене:

$$(15) \quad M = fR = \frac{mgLR \sin \alpha}{2(R \sin \alpha + L \cos \alpha)} \quad [0.5 \text{ т}]$$

В) При зададената височина h имаме:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \approx 0.667 ; \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745 ; \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.12 \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като използваме останалите числени данни, попълваме таблицата:

Задвижване на	μ	N_1 (N)	M (N·m)
предни колела	1.12	3060	1030
задни колела	0,88	6610	1480

[1.5 т] – по 0.25 т за всяка правилно пресметната стойност

Задача 2. Газова турбина

А) По време на процеса 1–2–3 газът се загрява, а по време на 3–4–1 – се охлажда. Следователно, най-висока е температурата в т. 3. [1.0 т]

Б) От теоремата на Карно:

$$\eta \leq 1 - T_{\min} / T_{\max} = 0.7 \quad [1.0 \text{ т}]$$

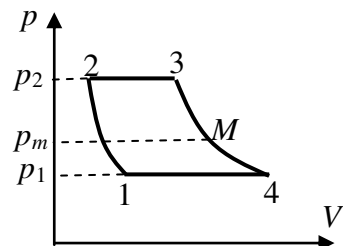
В) Газът приема топлина само по време на процеса 2–3:

$$Q^{(+)} = Q_{2-3} = C_p (T_3 - T_2) \quad [0.5 \text{ т}]$$

и отдава топлина по време на процеса 4–1:

$$Q^{(-)} = |Q_{4-1}| = C_p (T_4 - T_1) \quad [0.5 \text{ т}]$$

КПД на процеса е:



$$\eta = 1 - \frac{Q^{(-)}}{Q^{(+)}} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} \quad [0.5 \text{ т}]$$

От адиабатните процеси 1–2 и 3–4 имаме/

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)^{1-1/\gamma} = k^{1-1/\gamma} \quad \text{и} \quad T_3/T_4 = (p_2/p_1)^{1-1/\gamma} = k^{1-1/\gamma} \quad [1.0 \text{ т}]$$

откъдето получаваме:

$$\eta = 1 - \frac{1}{k^{1-1/\gamma}} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Двуатомните молекули имат $i = 5$ степени на свобода. Затова:

$$\gamma = (i + 2)/i = 7/5. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че $k = 10$, намираме:

$$\eta = 1 - \frac{1}{10^{2/7}} \approx 0.48 \quad [0.5 \text{ т}]$$

Г) Общата работа, която извършва въздухът за един цикъл, е:

$$A = \eta Q^{(+)} = \eta C_p (T_3 - T_2) = 7/2 R \eta (T_3 - T_2). \quad [0.5 \text{ т}]$$

Полезната работа A' се получава, като от общата работа извадим работата A_{M-4} , която газът извършва при свободното си разширение в атмосферата от налягане p_m до налягане p_1 :

$$A_{M-4} = U_M - U_4 = 5/2 R (T_M - T_4). \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид, че $T_3 = T_{\max} = 1000 \text{ K}$, за адиабатния процес 3–4 имаме:

$$T_4 = T_3 / k^{2/7} = 518 \text{ K}, \quad T_M = T_3 / (p_2/p_m)^{2/7} = 631 \text{ K} \quad [1.0 \text{ т}]$$

От друга страна за адиабатния процес 1–2 имаме:

$$T_2 = T_1 k^{2/7} = 579 \text{ K}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Така намираме:

$$A' = 7/2 R \eta (T_3 - T_2) - 5/2 R (T_M - T_4) = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} (3.5 \times 0.48 \times 421 \text{ K} - 2.5 \times 113 \text{ K}) = 3530 \text{ J/mol} \quad [0.5 \text{ т}]$$

и

$$Q^{(+)} = 7/2 R (T_3 - T_2) = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} 3.5 \times 421 \text{ K} = 12\,300 \text{ J/mol} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Следователно КПД в този случай е:

$$\eta = \frac{A'}{Q^{(+)}} = 0.29 \quad [0.5 \text{ т}]$$

Задача 3. Ефект на Мьосбауер

А) От закона за запазване на импулса имаме:

$$m v = h v_1 / c \quad [0.5 \text{ т}]$$

а от закона за запазване на енергията:

$$\frac{m v^2}{2} + h v_1 + E_1 = E_0 \quad \text{или} \quad \frac{m v^2}{2} + h v_1 = h v_0 \quad [0.5 \text{ т}]$$

От двете уравнения получаваме връзката:

$$\frac{m v^2}{2} + m v c = h v_0,$$

откъдето:

$$v = c \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2}} \right) \approx \frac{h\nu_0}{mc} \quad [0.5 \text{ т}]$$

За кинетичната енергия на ядрото съответно получаваме:

$$E_R = \frac{mv^2}{2} \approx \frac{(h\nu_0)^2}{2mc^2} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Енергията на излъчения фотон е:

$$h\nu_1 = h\nu_0 - E_R \approx h\nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right). \quad [0.5 \text{ т}]$$

В процеса на поглъщане имаме:

$$mv = h\nu_2/c \quad [0.25 \text{ т}]$$

$$h\nu_2 = h\nu_0 + \frac{mv^2}{2}, \quad [0.25 \text{ т}]$$

откъдето аналогично намираме:

$$h\nu_2 \approx h\nu_0 \left(1 + \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right). \quad [0.5 \text{ т}]$$

Б) Времето на живот на ядрото във възбудено състояние е неопределено, като можем да приемем, че: $\Delta t \approx \tau$. Оттук следва, че възбуденото енергетично състояние има неопределена енергия $E_2 \pm \Delta E$, като според принципа за неопределеност за енергията:

$$\Delta E \Delta t \approx h, \quad [0.25 \text{ т}]$$

откъдето:

$$\Delta E \approx \frac{h}{\tau} \quad [0.25 \text{ т}]$$

Такава е неопределеността и на енергията на излъчения (погълнатия) фотон:

$$\Delta E = h\Delta\nu.$$

Следователно:

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau} = 10^7 \text{ Hz} \quad [0.5 \text{ т}]$$

За да може фотонът, излъчен от едно неподвижно ядро, да бъде погълнат от друго неподвижно ядро, е нужно:

$$\nu_2 - \nu_1 \leq 2\Delta\nu \text{ или } h\nu_2 - h\nu_1 \leq \frac{2h}{\tau}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Като използваме изразите от т. А) получаваме:

$$\frac{(h\nu_0)^2}{mc^2} \leq \frac{2h}{\tau}$$

или

$$h\nu_0 \leq c \sqrt{\frac{2hm}{\tau}} = c \sqrt{\frac{2hM}{N_A \tau}} = 1.1 \times 10^{-17} \text{ J} = 66 \text{ eV} \quad [1.0 \text{ т}]$$

В) Когато първоначално източникът се движи със скорост v , честотата ν' на фотоните, излъчени по посоката на движението, нараства спрямо ν_1 поради ефекта на Доплер:

$$\nu' = \nu_1 \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.5 \text{ т}]$$

За да може максимален брой фотони да бъдат погълнати от неподвижните ядра в мишената, е нужно $\nu' = \nu_2$:

$$h\nu_0 \left(1 + \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right) = h\nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2mc^2} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx h\nu_0 \left(1 - \frac{h\nu_0}{2mc^2} + \frac{v}{c} \right) \quad [0.5 \text{ т}]$$

оттук намираме:

$$v = \frac{h\nu_0}{mc} = 81 \text{ m/s} \quad [0.5 \text{ т}]$$

и

$$\omega = \frac{v}{R} = 1620 \text{ rad/s}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Г) Когато, източникът се движи нагоре със скорост v , честотата ν_1 на излъчените фотони е по-голяма от ν_0 поради ефекта на Доплер:

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

На фотона може да бъде съпоставена маса:

$$m = \frac{h\nu_1}{c^2} = \frac{h\nu_0}{c^2} \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

Ако приемем, че относителното изменение на енергията, а следователно и на масата на фотона е много малко, можем да считаме, че гравитационното поле извършва върху него работа:

$$A = -mgh = -\frac{h\nu_0 gh}{c^2} \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

Следователно, при издигане в гравитационно поле енергията на фотона намалява:

$$h\Delta\nu = A = -\frac{h\nu_0 gh}{c^2} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad [0.25 \text{ т}]$$

и той достига мишената с честота:

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu = \nu_0 \left(1 + v/c \right) \left(1 - gh/c^2 \right) \approx \nu_0 \left(1 + v/c - gh/c^2 \right). \quad [0.25 \text{ т}]$$

При условие, че атомите на желязото не търпят откат, за резонансно поглъщане на фотоните, е нужно:

$$\nu_2 = \nu_0 \quad [0.25 \text{ т}]$$

или

$$v = \frac{gh}{c} = 7.35 \times 10^{-7} \text{ m/s}. \quad [0.5 \text{ т}]$$