

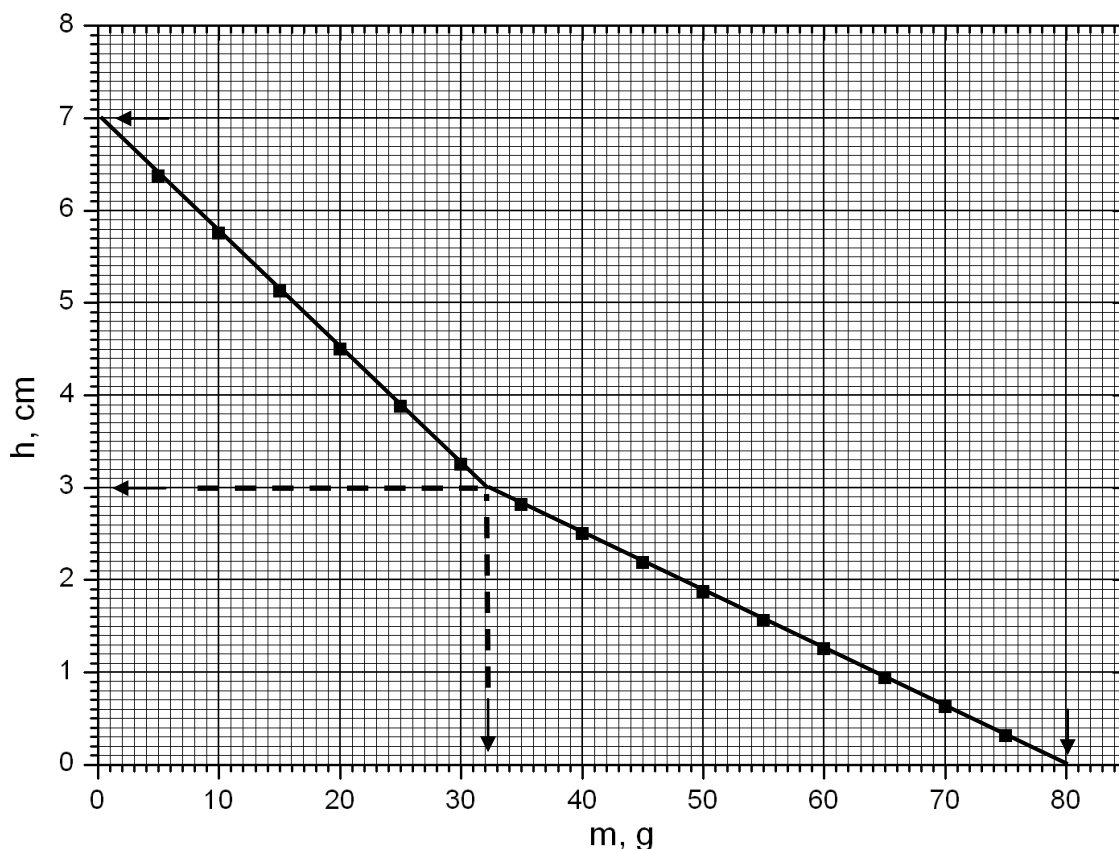
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Варна, 6 ноември 2010 г.
Решения на темата за 9 клас

Задача 1. Потапяне на цилиндър в несмесващи се течности.

а) от графиката на зависимостта за $m = 0$ се получава за дължината на стърчащата над повърхността част на цилиндъра $h_0 = 7,0$ cm. [1 т]

б) от графиката на зависимостта за $h = 0$ се получава за максималната маса $m_{\max}$, която може да се постави в цилиндъра, $m_{\max} = 80$ g. [1 т]

в) вижда се, че графиката на зависимостта е съставена от два линейни участъка. Пресечната точка на тези два участъка съответства на поставена тежест, когато дъното на цилиндъра достига границата между двете течности. Съответно дължината на стърчащата над повърхността част на цилиндъра, когато дъното му достига границата между двете течности, е $h_1 = 3,0$ cm. [1 т]



г) за масата на допълнителната тежест, която трябва да се постави в цилиндъра, за да достигне дъното му границата между двете течности, се получава $m_1 = 32$ g. [1 т]

д) площта S на сечението на цилиндъра може да се намери от условието за равновесие на цилиндъра в различни положения. Когато е празен, силата на тежестта му се уравновесява с Архимедовата сила:

$$Mg = \rho_1 S(H - h_0)g \quad [0,25 \text{ т}] \quad (1.1)$$

Когато дъното му достига границата между двете течности,

$$(M + m_1)g = \rho_1 S(H - h_1)g \quad [0,25 \text{ т}] \quad (1.2)$$

При изваждането на (1.1) от (1.2) се получава $m_1 g = \rho_1 S(h_0 - h_1)g$, откъдето

$$S = \frac{m_1}{\rho_1(h_0 - h_1)} [0,5 \text{ т}] = \frac{32g}{0,8g/cm^3(7,0cm - 3,0cm)} = 10 \text{ cm}^2 \quad [1 \text{ т}]$$

е) дължината H на цилиндъра може да се намери от (1.1):

$$H = h_0 + \frac{M}{\rho_1 S} = 7,0 \text{ cm} + \frac{64g}{0,8g/cm^3 \cdot 10 \text{ cm}^2} = 15,0 \text{ cm} \quad [1 \text{ т}]$$

ж) дебелината на горния слой течност е $d = H - h_1 = 15,0 \text{ cm} - 3,0 \text{ cm} = 12,0 \text{ cm}$ [1 т]

з) при маса $m_{\max}$ на поставената тежест и напълно потопен цилиндър условието за равновесие

е:

$$(M + m_{\max})g = \rho_1 S d g + \rho_2 S(H - d)g \quad [0,5 \text{ т}] \quad \text{Оттук}$$

$$\rho_2 = \frac{M + m_{\max} - \rho_1 S d}{S(H - d)} [0,5 \text{ т}] = \frac{64g + 80g - 0,8g/cm^3 \cdot 10 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm}}{10 \text{ cm}^2 (15 \text{ cm} - 12 \text{ cm})} = 1,6 \text{ g/cm}^3 \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 2. Бягане на 100 m.

а,б) Проблемът в задачата е, че не се знае кога и къде всяко от момчетата достига своята максимална скорост. Ако допуснем, че до 50-ия метър те не успяват да достигнат максимална скорост и до там бягат равноускорително, тогава от уравненията

$$l_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \text{ и } l_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 \text{ следва, че } \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^2. \quad (2.1)$$

Проверявайки със съответните времена на двете момчета за разстоянията 16 m и 50 m, виждаме, че (2.1) не е изпълнено за нито едно от тях. Следователно и двете момчета достигат своята максимална скорост преди 50-ия метър. [0,5 т]

Нека да допуснем, че всяко от момчетата достига своята максимална скорост преди 16-ия метър. Тогава и до 16-ия метър, и до 50-ия метър, изминатия път ще се дава със следните формули:

$$l_1 = v_{\max} (t_1 - T_a) + \frac{1}{2} a T_a^2 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.2)$$

$$l_2 = v_{\max} (t_2 - T_a) + \frac{1}{2} a T_a^2, \quad (2.3)$$

където l_1 и l_2 са съответно 16 m и 50 m, t_1 и t_2 са времената на тези разстояния, а с T_a бележим интервала време, през който момчето се движи равноускорително. Очевидно при направените предположения $T_a < t(16\text{m})$. Ако извадим (2.2) от (2.3), получаваме

$$v_{\max} = \frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1} [0,5 \text{ т}]. \text{ Замествайки с дадените стойности за Тодор и Ники получаваме}$$

съответно $v_{\max T} = 9,71 \text{ m/s}$ и $v_{\max H} = 8,00 \text{ m/s}$ [0,5 т].

Ако използваме връзката $v_{\max} = a T_a$ (2.4), то уравнението (2.2) може да се запише във вида

$$l_1 = v_{\max} \left(t_1 - \frac{v_{\max}}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_{\max}}{a} \right)^2 = v_{\max} t_1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\max}^2}{a}. \quad (2.5)$$

От (2.5) получаваме

$$a = \frac{v_{\max}^2}{2(v_{\max} t_1 - l_1)} [1 \text{ т}]. \text{ Замествайки с дадените стойности за 16 m и 50 m (ускорението можем}$$

да пресметнем независимо за двете разстояния) за Тодор и Ники като пресмятаме също T_a от (2.4) получаваме (виж таблицата)

Име	$V_{\max}$, m/s	$a(16\text{m})$, m/s ²	$a(50\text{m})$, m/s ²	T_a , s
Тодор	9,71	2,07	2,07	4,69
Ники	8,00	4,00	4,00	2,00

Вижда се, че получените стойности съответстват на направеното предположение само за Ники [1 т]. За Тодор се получава $T_a > t(16\text{m})$, което противоречи на предположението.

Можем да наравим и обратното предположение, т.е. и двете момчета бягат равноускорително до 16-ия метър. Тогава изминатия път ще се дава със следните формули:

$$l_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \quad (2.6)$$

$$l_2 = v_{\max} (t_2 - T_a) + \frac{1}{2} a T_a^2, \quad (2.7)$$

където l_1 и l_2 са съответно 16 m и 50 m, t_1 и t_2 са времената на тези разстояния, а с T_a бележим интервала време, през който момчето се движи равноускорително, и сега $T_a > t(16\text{m})$. От (2.6)

намираме ускорението $a = \frac{2l_1}{t_1^2}$. (2.8)

Съответно за Тодор и Ники получаваме $a_T = 2,00 \text{ m/s}^2$ и $a_H = 32/9 \text{ m/s}^2 \approx 3,56 \text{ m/s}^2$. Използвайки (2.8) и (2.4), уравнението (2.7) се преобразува до квадратното уравнение за $v_{\max}$:

$$\frac{t_1^2}{4l_1} v_{\max}^2 - t_2 v_{\max} + l_2 = 0 \quad [1 \text{ т}] \quad (2.9), \text{ чиито решения са:}$$

$$v_{\max 1,2} = \frac{2l_1}{t_1^2} \left(t_2 \pm \sqrt{t_2^2 - t_1^2 \frac{l_2}{l_1}} \right), \text{ които могат да се преобразуват и до}$$

$$v_{\max 1,2} = \frac{2l_1}{t_1} \left(\frac{t_2}{t_1} \pm \sqrt{\left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 - \frac{l_2}{l_1}} \right) [1 \text{ т}]. \text{ Замествайки с дадените стойности получаваме следните}$$

резултати (виж таблицата по-долу):

Име	$a(16\text{m})$, m/s ²	$V_{\max 1}$, m/s	$V_{\max 2}$, m/s	T_{a1} , s	T_{a2} , s
Тодор	2,00	20,0	10,0	10,00	5,00
Ники	3,56	43,36	8,20	12,18	2,30

Вижда се, че нито едно от получените решения за Ники не може да е вярно ($T_{a1H} > t(50\text{m})$, а $T_{a2H} < t(16\text{m})$). Съответно първото решение за Тодор също не е вярно ($T_{a1H} > t(50\text{m})$). Следователно $v_{\max H} = 10,0 \text{ m/s}$ и $a_H = 2,00 \text{ m/s}^2$. [2 т].

в) времето на 100 m намираме от уравнението:

$$l(100\text{m}) = \frac{1}{2} a T_a^2 + v_{\max} (t(100\text{m}) - T_a), \text{ откъдето}$$

$$t(100\text{m}) = T_a + \frac{l(100\text{m}) - \frac{1}{2} a T_a^2}{v_{\max}} \quad [1 \text{ т}]. \text{ Замествайки с получените стойности получаваме}$$

$t_T(100\text{m}) = 12,5 \text{ s}$ [0.5 т] и $t_H(100\text{m}) = 13,5 \text{ s}$ [0.5 т]. Окончателният вид на таблицата е

Име	$t(16\text{m})$, s	$t(50\text{m})$, s	$t(100\text{m})$, s	v_m , m/s	a , m/s ²
Тодор	4,00	7,50	12,5	10,0	2,00
Ники	3,00	7,25	13,5	8,00	4,00

Задача 3. Парен локомотив.

а) количеството въглища $m_{\text{въгл}}$ (в kg), необходимо да се получи от студена вода 1 kg пара при описаните условия, може да се пресметне така: водата трябва да се загрее от началната температура t_0 до температура t_{II} и след това да се превърне в пара. Следователно необходимото количество топлина е $Q = cm(t_{\text{II}} - t_0) + \lambda_{\text{кип}} m$ [0,5 т] (3.1). Това количество топлина ще се получи от изгарянето на $m_{\text{въгл}}$ количество въглища като $Q = \lambda_{\text{изг}} m_{\text{въгл}}$ [0,5 т] (3.2). От приравняването на (3.1) и (3.2) се получава

$$m_{\text{въгл}} = \frac{cm(t_{\text{II}} - t_0) + \lambda_{\text{кип}} m}{\lambda_{\text{изг}}} [0,5 \text{ т}] \quad (3.3) = \frac{4,2 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (210 - 20)^\circ \text{C} + 1,9 \cdot 10^6 \text{ J/kg}}{20 \cdot 10^6 \text{ J}} \approx 0,135 \text{ kg}$$

[0,5 т]

б) При завъртането на колелото на един оборот, буталото прави 2 хода и се връща в началното си положение. Следователно извършената работа е $A = 2F \cdot d = 2pSd$ [1 т] (3.4) = $2 \cdot 20 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,1 \text{ m}^2 \cdot 0,5 \text{ m} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ J}$ [1 т].

в) коефициента на полезно действие на парната машина е $\eta = \frac{A}{Q}$ [0,5 т], където A е работата от (3.4), а Q е необходимото количество топлина за получаването на изразходваната за един оборот на колелото пара. $Q = [c(t_{\text{II}} - t_0) + \lambda_{\text{кип}}] \rho 2Sd$ [1 т] = $[4,2 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot 190^\circ \text{C} + 1,9 \cdot 10^6 \text{ J/kg}] 10 \text{ kg/m}^3 \cdot 2,0 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 0,5 \text{ m} \approx 2,7 \cdot 10^6 \text{ J}$ [0,5 т]. Така $\eta = \frac{2,0 \cdot 10^5 \text{ J}}{2,7 \cdot 10^6 \text{ J}} \approx 0,074 = 7,4\%$ [1 т].

г) за два хода на буталото, колелото прави един оборот и локомотивът изминава път $s = \pi D$ като изразходва пара с маса, равна на $m_{\text{пара}} = \rho_{\text{пара}} 2Sd$ [0,5 т]. Следователно разходът на вода на локомотива за изминатото разстояние $l = 10 \text{ km}$ е $M_{\text{вода}} = \frac{\rho_{\text{пара}} 2Sd l}{\pi D} =$ [0,5 т] $\frac{10 \text{ kg/m}^3 \cdot 2,0 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ m}}{\pi \cdot 1 \text{ m}} \approx 3200 \text{ kg}$ [1 т]

д) разходът на въглища $M_{\text{въгл}}$ на локомотива за изминатото разстояние $l = 10 \text{ km}$ е $M_{\text{въгл}} = M_{\text{вода}} \cdot \frac{m_{\text{въгл}}}{1 \text{ kg}}$ [0,5 т] = $3200 \text{ kg} \cdot \frac{0,135 \text{ kg}}{1 \text{ kg}} \approx 430 \text{ kg}$ [0,5 т]