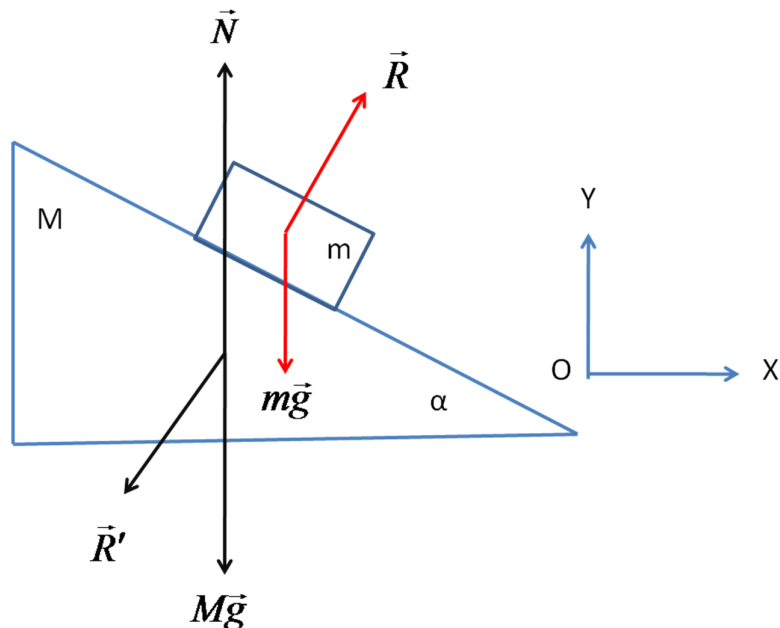


Решение на Задача 1

а) Имайки в предвид, че призмата ще се движи по хоризонталната равнина, въвеждаме координатната система по указания начин на Фиг. 16.



Фиг. 16

На призмата действат силата на тежестта $M\vec{g}$, реакцията на хоризонталната равнина $\vec{N}$ и силата на натиск от страна на трупчето $\vec{R}'$ ($\vec{R}' = -\vec{R}$). Вторият принцип на Нютон във векторна форма, записан за призмата, има вида:

$$M\vec{g} + \vec{R}' + \vec{N} = m\vec{a}_1, \quad (1.1)$$

където $\vec{a}_1$ е ускорението на призмата. Скаларните уравнения, съответстващи на (1.1), са:

$$\begin{aligned} -R \sin \alpha &= Ma_{1X} \\ -R \cos \alpha - Mg + N &= Ma_{1Y} \end{aligned} \quad (1.2a-b)$$

Тъй като призмата не се движи във вертикална посока

$$a_{1Y} = 0 \quad (2 \text{ точки}) \quad (1.3)$$

На трупчето действат силата на тежестта $m\vec{g}$ и реакцията на призмата $\vec{R}$ ($\vec{R} = -\vec{R}'$). Вторият принцип на Нютон във векторна форма, записан за трупчето, има вида:

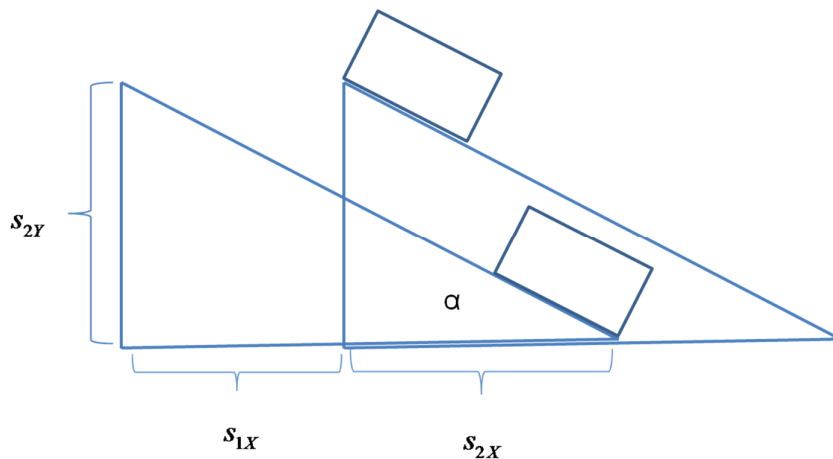
$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}_2, \quad (1.4)$$

където $\vec{a}_2$ е ускорението на трупчето. Скаларните уравнения, съответстващи на (1.4) са:

$$\begin{aligned} R \sin \alpha &= ma_{2X} \\ R \cos \alpha - mg &= ma_{2Y} \end{aligned} \quad (1.5a-b)$$

Уравненията (1.2) и (1.5) представляват система от четири уравнения за петте неизвестни величини: $R, N, a_{1X}, a_{2X}, a_{2Y}$.

Последното необходимо уравнение може да бъде получено чрез кинематичните величини описващи движението на двете тела.



От фигурата се вижда, че

$$\frac{s_{2Y}}{s_{1X} + s_{2X}} = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.6)$$

И двете тела се движат равноускорително $a_{1X} < 0, a_{2X} > 0, a_{2Y} < 0$ с нулеви начални скорости.

$$s_{1X} = \left| \frac{a_{1X} t^2}{2} \right| = -\frac{a_{1X} t^2}{2}, s_{2X} = \frac{a_{2X} t^2}{2}, s_{2Y} = \left| \frac{a_{2Y} t^2}{2} \right| = -\frac{a_{2Y} t^2}{2} \quad (1.7)$$

Използвайки (1.7), (1.6) може да бъде записано във вида:

$$\frac{a_{2Y}}{a_{1X} - a_{2X}} = \operatorname{tg} \alpha \quad (1.8)$$

Последното уравнение представлява и петото необходимо уравнение за намиране на неизвестните величини: $R, N, a_{1X}, a_{2X}, a_{2Y}$.

Решение на получената система от 5 уравнения:
Разделяйки (1.2a) на (1.5a), получаваме:

$$a_{1X} = -\frac{m}{M} a_{2X}. \quad (1.9)$$

Замествайки (1.9) в (1.8) получаваме:

$$\frac{a_{2Y}}{a_{2X}} = -\left(1 + \frac{m}{M}\right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.10)$$

Разделяйки (1.5b), на (1.5a) получаваме:

$$\frac{a_{2Y}}{a_{2X}} = \frac{R \cos \alpha - mg}{R \sin \alpha}. \quad (1.11)$$

От приравняването на (1.10) и (1.11) получаваме

$$R = \frac{Mmg \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (2 \text{ точки}) \quad (1.12)$$

Замествайки в (1.10), $a_{2X} = \frac{R \sin \alpha}{m}$ от (1.5a) и R с израза (1.12) получаваме:

$$a_{2Y} = -\frac{(M + m)}{(M + m \sin^2 \alpha)} g \sin^2 \alpha \quad (2 \text{ точки}) \quad (1.13)$$

Замествайки в (1.5a), (1.12) получаваме:

$$a_{2X} = \frac{Mg \sin \alpha \cos \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)} \quad (1 \text{ точка}) \quad (1.14)$$

От (1.13) и (1.14) получаваме за ускорението на трупчето:

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = \frac{g \sin^2 \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)} \sqrt{(2Mm + m^2) \sin^2 \alpha + M^2}. \quad (1 \text{ точка})$$

(1.15)

Използвайки (1.2a), и (1.12) получаваме:

$$a_1 = -a_{1x} = \frac{mg \cos \alpha \sin \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)} \quad (2 \text{ точки})$$

(1.16)

Решение на Задача 2

а) Параметрите на състоянието на въздуха в страната, ограничена с изпъкналата част на буталото, ще обозначаваме с индекса 1. Параметрите на състоянието на въздуха в страната, ограничена с плоската част на буталото, ще обозначаваме с индекса 2.

Ако цилиндърът се постави вертикално така, че изпъкналата част на буталото да е надолу, то заема равновесно положение, при което изпъкналата му част слиза до дъното на цилиндъра, без да се опира в него (виж Фиг. 2a).

Уравнението за състоянието на идеалния газ в страната 2 има вида:

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT_2$$

$$\text{Обемът } V_2 \text{ е равен на } V_2 = (\pi r^2)(5r) = 5\pi r^3. \quad (1$$

точка)

Уравнението за състоянието на идеалния газ в страната 1 има вида:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT_1$$

$$\text{Обемът } V_1 \text{ е равен на } V_1 = (\pi r^2)(r) - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3. \text{ Тук } \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ е обемът на буталото.} \quad (1$$

точка)

За да бъде буталото в равновесие, векторната сума от силите, които му действат, трябва да бъде равна на нула:

$$p_2 \pi r^2 + G = p_1 \pi r^2,$$

където G е силата на тежестта, действаща върху буталото. С други думи, налягането на въздуха от страната 2 плюс налягането дължащо се на буталото трябва да бъде равно на налягането на въздуха от страна 1:

$$p_2 + p_{\text{БУТАЛО}} = p_1, \text{ където } p_{\text{БУТАЛО}} = G/(\pi r^2).$$

Следователно

$$p_{\text{БУТАЛО}} = p_1 - p_2 = \frac{R}{M} \left(3 \frac{m_1 T_1}{\pi r^3} - \frac{m_2 T_2}{5\pi r^3} \right) = \frac{R}{M \pi r^3} \left(3m_1 T_1 - \frac{m_2 T_2}{5} \right). \quad (1 \text{ точка})$$

(2.1)

Ако цилиндърът се преобърне и пак е вертикален, равновесното положение на буталото е такова, че плоската му част се намира на средата на цилиндъра (виж Фиг. 2б).

Уравнението за състоянието на идеалния газ в страната 2 има вида:

$$p'_2 V'_2 = \frac{m_2}{M} RT_2$$

$$\text{Обемът } V'_2 \text{ е равен на } V'_2 = (\pi r^2)(3r) = 3\pi r^3. \quad (1$$

точка)

Уравнението за състоянието на идеалния газ в страната 1 има вида:

$$p'_1 V'_1 = \frac{m_1}{M} RT_1$$

$$\text{Обемът } V'_1 \text{ е равен на } V'_1 = (\pi r^2)(3r) - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{7}{3}\pi r^3. \quad (1$$

точка)

Налягането на въздуха от страната 1 плюс налягането дължащо се на буталото трябва да бъде равно на налягането на въздуха от страна 2:

$$p'_1 + p_{\text{БУТАЛО}} = p'_2.$$

Следователно

$$p_{\text{БУТАЛО}} = p'_2 - p'_1 = \frac{R}{M} \left(\frac{m_2 T_2}{3\pi r^3} - \frac{3}{7} \frac{m_1 T_1}{\pi r^3} \right) = \frac{R}{M\pi r^3} \left(\frac{1}{3} m_2 T_2 - \frac{3}{7} m_1 T_1 \right). \quad (1 \text{ точка})$$

(2.2)

Приравняването на двата израза за налягането на буталото дава:

$$3 \cdot \frac{8}{7} m_1 T_1 = \frac{8}{15} m_2 T_2.$$

$$\text{Отчитайки, че } T_1/T_2 = n, \text{ получаваме: } \frac{m_1}{m_2} = \frac{7}{45} \frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{45} \frac{1}{n} \quad (1$$

точка)

б)

Уравнението за състоянието на идеалния газ в страната 2 има вида:

$$p_2'' V_2'' = \frac{m_2}{M} R T_2$$

Обемът V_2'' е равен на $V_2'' = (\pi r^2)(5r) = 5\pi r^3$.

Уравнението за състоянието на идеалния газ в страната 1 има вида:

$$p_1'' V_1'' = \frac{m_1}{M} R T_1$$

$$\text{Обемът } V_1'' \text{ е равен на } V_1'' = (\pi r^2)(r) - \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^3. \quad (1$$

точка)

Налягането на въздуха от страната 1 плюс налягането дължащо се на буталото трябва да бъде равно на налягането на въздуха от страна 2:

$$p_1'' + p_{\text{БУТАЛО}} = p_2''.$$

Следователно

$$p_{\text{БУТАЛО}} = p_2'' - p_1'' = \frac{R}{M} \left(\frac{m_2 T_2}{5\pi r^3} - 3 \frac{m_1 T_1}{\pi r^3} \right) = \frac{R}{M\pi r^3} \left(\frac{1}{5} m_2 T_2 - 3 m_1 T_1 \right).$$

(1 точка)

Приравняването на получения израз за налягането на буталото с някой от предишните два израза (2.1) или (2.2) дава:

$$p_{\text{БУТАЛО}} = \frac{R}{M\pi r^3} \left(3m_1 T_1 - \frac{m_2 T_2}{5} \right) = \frac{R}{M\pi r^3} \left(-3m_1 T_1 + \frac{m_2 T_2}{5} \right) \Rightarrow T_2 = \frac{11}{3} T_1.$$

(1 точка)

Решение на задача 3.

а) Центростремителната сила е равна на кулоновата сила:

$$\frac{m_e u^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow r = k \frac{e^2}{m_e u^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.1)$$

Използвайки, че на кръгова стационарна орбита се нанасят цяло число дължини на вълната на Дьо Бройл, т.е. е в сила съотношението $2\pi r = n h / p$, получаваме за скоростта на електрона:

$$r m_e u = n \hbar \Rightarrow u = \frac{n \hbar}{r m_e}. \quad (3.2)$$

Замествайки (3.2) в (3.1) получаваме следната формула за радиусите на стационарните орбити на електроните във водородния атом

$$r = k \frac{e^2}{m_e} \left(\frac{r m_e}{n \hbar} \right)^2 \Rightarrow r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{k e^2 m_e} = n^2 r_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2 \text{ точки})$$

(3.3)

$$\text{б) } r_1 = \frac{\hbar^2}{k e^2 m_e} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{4\pi^2 \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})} = 0,528 \cdot 10^{-10} [\text{m}] \quad (1$$

точка)

в) Пресмятаме пълната енергия на електрона. Кинетичната енергия на електрона е $E_K = \frac{1}{2} m_e u^2 = \frac{1}{2} k \frac{e^2}{r}$. Потенциалната енергия на електрона е $E_P = -k \frac{e^2}{r}$. Следователно

пълната енергия на електрона е: $E_P = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{r}$. (2 точки)

(3.4)

Замествайки (3.3) в (3.4) получаваме формулата за енергията на електрона на различните стационарни орбити във водородния атом:

$$E_n = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} k \frac{e^2}{n^2 r_1} = -\frac{1}{n^2} k \frac{(ke^2)^2 m_e}{2\hbar^2} = \frac{1}{n^2} E_1, \quad E_1 = -\frac{(ke^2)^2 m_e}{2\hbar^2} \quad (1 \text{ точка})$$

(3.5)

г) Замествайки зададените физични константи в (3.5) получаваме:

$$E_1 = -\frac{(ke^2)^2 m_e}{2\hbar^2} = -\frac{\left(9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)^2 (1,6 \cdot 10^{-19} C)^4 (9,1 \cdot 10^{-31} kg) 4\pi^2}{2(6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s)^2} = -2,17 \cdot 10^{-18} J$$

$$1J = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} eV \Rightarrow E_1 = -2,17 \cdot 10^{-18} J = -2,17 \cdot 10^{-18} \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} eV = -13,55 eV$$

(1 точка)

д) Използвайки втория постулат на Бор за излъчената или погълната енергия при преход на електрона от една стационарна орбита на друга, и използвайки изведената формула за енергиите на електрона на различните стационарни орбити във водородния атом (3.5) получаваме:

$$\nu = \frac{1}{h} (E_m - E_n) = \frac{E_1}{h} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), m > n.$$

Съпоставяйки този израз със зададената формула $\nu_{nm} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), n < m$, се вижда, че

стойността на константата на Ридберг е:

$$R = \frac{-E_1}{h} = \frac{2,17 \cdot 10^{-18} [J]}{6,626 \cdot 10^{-34} [J \cdot s]} = 3,29 \cdot 10^{15} \left[\frac{1}{s} \right].$$