МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Стара Загора, 22-23 ноември 2008 г.

Примерни решения на задачите от специалната тема

Задача 1. а) От равенството на силата на тежестта и Архимедовата сила получаваме:

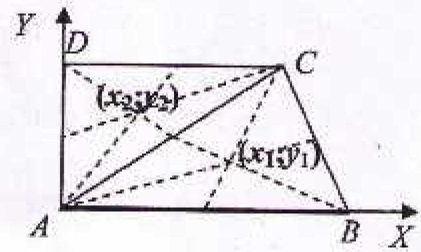
(1) $\rho L^2 Hg = \rho_0 L^2 hg$ **[0.5]**

(2) $h = H\dfrac{\rho}{\rho_0}$ **[0.5]**

б) Разделяме мислено пластинката на два триъгълника – ABC и ADC. Площите на двата триъгълника са съответно:

(3) $S_1 = \dfrac{aL}{2}$ и $S_2 = \dfrac{bL}{2}$,

а координатите на техните центрове на масите – съответно:



(4) $x_1 = \dfrac{1}{3}(a+b)$, $y_1 = \dfrac{1}{3}L$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}b$, $y_1 = \dfrac{2}{3}L$

Тъй като масите на двата триъгълника са пропорционални на техните площи, за центъра на масата на пластинката намираме:

(5) $x_M = \dfrac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1+S_2} = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$ **[1.0]**

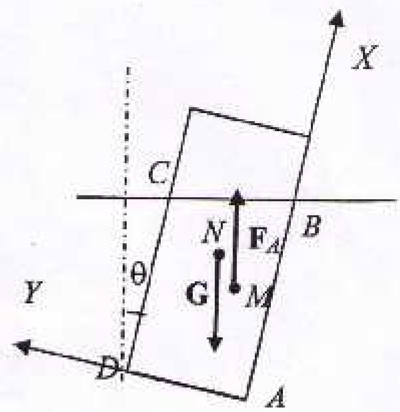
(6) $y_M = \dfrac{S_1y_1 + S_2y_2}{S_1+S_2} = \dfrac{L(a+2b)}{3(a+b)}$. **[1.0]**

в) Напречното сечение $ABCD$ на потопената част от тялото има трапецовидна форма. Означаваме $a = AB$; $b = CD$. Обемът на потопената част е:

(7) $V = \dfrac{(a+b)L^2}{2}$.

От условието $F_A = G$ за уравновесяване на силите имаме:

(8) $\dfrac{a+b}{2} = H\dfrac{\rho}{\rho_0} \equiv h$.



От друга страна:

(9) $a - b = L\tan\theta$,

откъдето намираме:

(10) $a = h + \dfrac{1}{2}L\tan\theta$ и $b = h - \dfrac{1}{2}L\tan\theta$.

Архимедовата сила е приложена в центъра M на масата на "изместената" вода (метацентъра), който съгласно с (5), (6) и (10) има координати:

(11) $$x_M = \frac{h}{2} + \frac{L^2 \tan^2\theta}{24h}$$ **[0.5]**

и

(12) $$y_M = \frac{L}{2} - \frac{L^2 \tan\theta}{12h}.$$ **[0.5]**

В същата координатна система координатите на центъра N на масата на паралелепипеда са:

(13) $$x_N = \frac{H}{2};$$ **[0.1]**

(14) $$y_N = \frac{L}{2}.$$ **[0.1]**

Силата на тежестта и Архимедовата сила образуват двойка сили с въртящ момент:

(15) $$M = mg\cos\theta(y_M - y_N) - mg\sin\theta(x_M - x_N),$$ **[1.0]**

като въртящият момент е приет за положителен, когато води до увеличаване на ъгъла θ, т.е. по посоката на въртене на часовниковата стрелка. Като използваме формулите (11) – (14), получаваме:

(16) $$M = \frac{mg\sin\theta}{24h\cos^2\theta}\left(12H^2\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\cos^2\theta - L^2(1+\cos^2\theta)\right).$$ **[0.8]**

г) Вертикалното положение е устойчиво, когато при малък ъгъл θ на отклонение знакът на въртящия момент е противоположен на знака на ъгъла. **[0.5]**

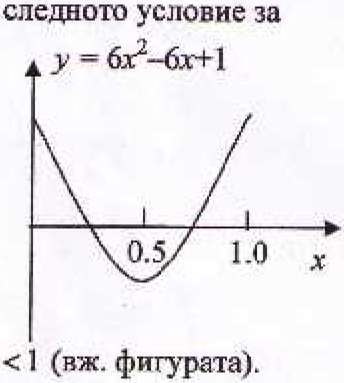
В приближение на малки ъгли $\sin\theta \approx \theta$ и $\cos\theta \approx 1$. Следователно в този случай:

(17) $$M \approx -\frac{mg\theta}{12h}\left(L^2 - 6H^2\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)$$ **[0.5]**

и условието за устойчивост е:

(18) $$\frac{L}{H} > \sqrt{6\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}.$$ **[1.0]**

д) За куб $L/H = 1$. Полагаме $x = \rho/\rho_0$ и получаваме следното условие за устойчивост:



(19) $$1 > \sqrt{6x(1-x)},$$

откъдето:

(20) $$6x^2 - 6x + 1 > 0.$$ **[0.5]**

Нулите на квадратния тричлен са:

(21) $$x_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{6} = \begin{cases} 0.211 \\ 0.789 \end{cases}.$$ **[0.5]**

Условието е изпълнено, когато $0 < x < x_1$ или $x_2 < x < 1$ (вж. фигурата).
Следователно плътността на материала трябва да бъде:

(22) $$0 < \rho < 211 \text{ kg/m}^3 \text{ или } 789 \text{ kg/m}^3 < \rho < 1000 \text{ kg/m}^3.$$ **[1.0]**

Задача 2. а) Уравнението (1) е уравнение на бягяща вълна с кръгова честота:

(1) $\omega = 2\pi\nu = 314\,\text{rad/s}$ **[0.5]**

и вълново число:

(2) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Понеже фазата на вълната се изменя със $120° = 2\pi/3$ на разстояние a, следва, че:

(3) $\lambda = 3a$

и

(4) $k = \dfrac{2\pi}{3a} = 1.05\,\text{rad/m}$ **[0.5]**

б) Потокът на магнитното поле през рамката е:

(5) $\Phi(t) = L\int_{-L/2}^{L/2} B_0 \sin(\omega t - kx)dx = \dfrac{2LB_0}{k}\sin(\omega t)\sin\left(\dfrac{kL}{2}\right)$ **[0.5]**

Според закона на Фарадей индуцираното напрежение е:

(6) $U(t) = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt} = -\dfrac{2LB_0\omega}{k}\cos(\omega t)\sin\left(\dfrac{kL}{2}\right)$. **[1.0]**

в) От закона на Ом следва, че токът, който тече през рамката се дава с израза:

(7) $I(t) = -\dfrac{2LB_0\omega}{kR}\cos(\omega t)\sin\left(\dfrac{kL}{2}\right)$ **[0.5]**

За положителна е приета посоката на тока, която съответства на правилото на свитите пръсти на дясната ръка. В този случай, магнитната сила, действаща в направление на оста X е:

(8) $F(t) = IB_z(t, L/2)L - IB_z(t, -L/2)L = \dfrac{4B_0^2L^2\omega}{kR}\cos^2(\omega t)\sin^2\left(\dfrac{kL}{2}\right)$. **[1.0]**

Понеже:

(9) $\overline{\cos^2(\omega t)} = 1/2$, **[0.5]**

следва, че средната магнитна сила е:

(10) $\overline{F} = \dfrac{2B_0^2L^2\omega}{kR}\sin^2\left(\dfrac{kL}{2}\right)$. **[1.0]**

г) Ако свържем отправна система с ос X' с движещия се влак, от преобразованията на Галилей следва:

(11) $x = x' + vt$.

Като заместим в уравнението на бягащата вълна, получаваме:

(12) $B_z = B_0\sin((\omega - kv)t - kx)$, **[1.0]**

т.е. в отправна система, свързана с влака, магнитното поле се изменя с кръгова честота:

(13) $\omega' = \omega - kv$. **[1.0]**

В този случай средната сила, действаща на локомотива е:

(14) $\overline{F} = \dfrac{2B_0^2L^2}{R}\left(\dfrac{\omega}{k} - v\right)\sin^2\left(\dfrac{kL}{2}\right)$. **[1.0]**

д) Влакът достига максимална скорост, при която магнитната сила се уравновесява със силата на съпротивление на въздуха:

(15) $$\frac{2B_0^2L^2}{R}\left(\frac{\omega}{k}-v_{\max}\right)\sin^2\left(\frac{kL}{2}\right)=Cv_{\max}^2$$ [0.5]

След като заместим с числените данни, получаваме:

(16) $$2v_{\max}^2+720v_{\max}-2.16\times10^5=0,$$

Уравнението има само един положителен корен:

(17) $v_{\max}\approx 195$ m/s = 700 km/h. [1.0]

Задача 3. а) От уравнението на адиабатен процес:

(1) $$p_0V_0^{\gamma}=p_1V_1^{\gamma}.$$ [0.5]

Въздухът се състои основно от двуатомни молекули с $i=5$ степени на свобода. Затова, показателят на адиабатата на въздуха е:

(2) $$\gamma=\frac{i+2}{i}=\frac{7}{5}.$$ [0.5]

От двете уравнения намираме:

(3) $$p_1=p_0k^{\gamma}.$$ [1.0]

б) В процеса 0→1 двигателят извършва работа:

(4) $$A_{01}=U_0-U_1=\frac{i}{2}Rn(T_0-T_1).$$ [0.5]

Като вземем предвид, че $pV=nRT$, получаваме:

(5) $$A_{01}=\frac{i}{2}(p_0V_0-p_1V_1)=-\frac{i}{2}p_0V_0(k^{\gamma-1}-1).$$ [0.5]

Работата за процеса 1→0 може да бъде пресметната като площта на трапецовидния участък под отсечката 1–0:

(6) $$A_{10}=\frac{(p_1+p_0)}{2}(V_0-V_1)=\frac{p_0V_0}{2}(1+k^{\gamma})(1-1/k).$$ [0.5]

Общата работа за един цикъл е:

(7) $$A=A_{10}+A_{01}=\frac{p_0V_0}{2}\left[(1+k^{\gamma})(1-1/k)-i(k^{\gamma-1}-1)\right].$$ [0.5]

Мощността на двигателя е равна на работата за единица време, т.е.

(8) $$P=\nu A=\frac{\nu p_0V_0}{2}\left[(1+k^{\gamma})(1-1/k)-i(k^{\gamma-1}-1)\right].$$ [0.5]

Като заместим с $\nu=30$ цикъла/s, $p_0=1.0\times10^5$ Pa, $V_0=2.0\times10^{-3}$ m^3, $k=10$, пресмятаме:

(9) $P=47.8$ kW. [0.5]

в) Ъгловият коефициент на отсечката 1-0 е:

(10) $$C=\frac{p_1-p_0}{V_1-V_0}=-\frac{p_0}{V_0}\frac{(k^{\gamma}-1)}{(1-1/k)}$$ [0.5]

Тогава, за произволен обем налягането се дава с формулата:

(11) $$p = p_0 + C(V - V_0) = p_0\left[1 + \frac{k^\gamma - 1}{1 - 1/k}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)\right].$$ **[0.5]**

Като вземем предвид, че $T = \dfrac{pV}{nR}$, получаваме:

(12) $$T = T_0\left[1 + \frac{k^\gamma - 1}{1 - 1/k}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)\right]\frac{V}{V_0}.$$ **[0.5]**

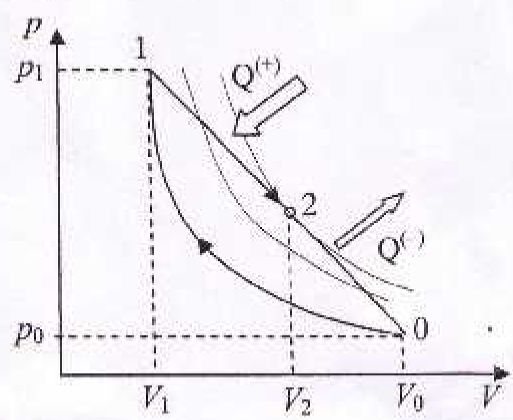
г) КПД на топлинната машина се пресмята като:

(13) $$\eta = \frac{Q^{(+)}}{A},$$

където $Q^{(+)}$ е общото количество топлина, получено от газа по време на работния цикъл. При малко изменение на обема, газът обменя количество топлина:

(14) $$\delta Q = \frac{i}{2}nRdT + pdV = nR\left(\frac{i}{2}dT + \frac{T}{V}dV\right).$$

[0.5]



Газът получава топлина, когато $\delta Q > 0$, т.е.

(15) $$\frac{i}{2}\frac{dT}{dV} + \frac{T}{V} = 2.5\frac{dT}{dV} + \frac{T}{V} > 0.$$

[0.5]

Удобно е да заместим k и γ с техните числени стойности и да представим израза (12) във вида:

(16) $$T = T_0\left(a - b\frac{V}{V_0}\right)\frac{V}{V_0},$$

където $a = 27.8$, $b = 26.8$. Тогава, $dT/dV = T_0/V_0(a - 2bV/V_0)$ и газът получава топлина, когато:

(17) $$2.5\left(a - 2b\frac{V}{V_0}\right) + \left(a - b\frac{V}{V_0}\right) = 3.5a - 6b\frac{V}{V_0} > 0$$ т.е.

(18) $$V < V_2 \equiv V_0\frac{3.5a}{6b} = 0.605V_0$$ (участъкът 1-2 от отсечката 1-0). **[0.5]**

Като вземем предвид, че $V_1 = V_0/10$, $p_1 = 25.1p_0$ и $p_2 = 11.6p_0$, намираме:

(19) $$A_{12} = \frac{(p_1 + p_2)}{2}(V_2 - V_1) = 9.27\,p_0V_0$$

(20) $$\Delta U = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 11.3p_0V_0$$

(21) $$Q^{(+)} = Q_{12} = A_{12} + \Delta U = 20.6\,p_0V_0$$ **[1.0]**

От уравнение (7) намираме общата работа за един цикъл:

(22) $$A = 7.97\,p_0V_0,$$

откъдето пресмятаме КПД:

(23) $$\eta = \frac{Q^{(+)}}{A} = 0.387$$ **[1.0]**