

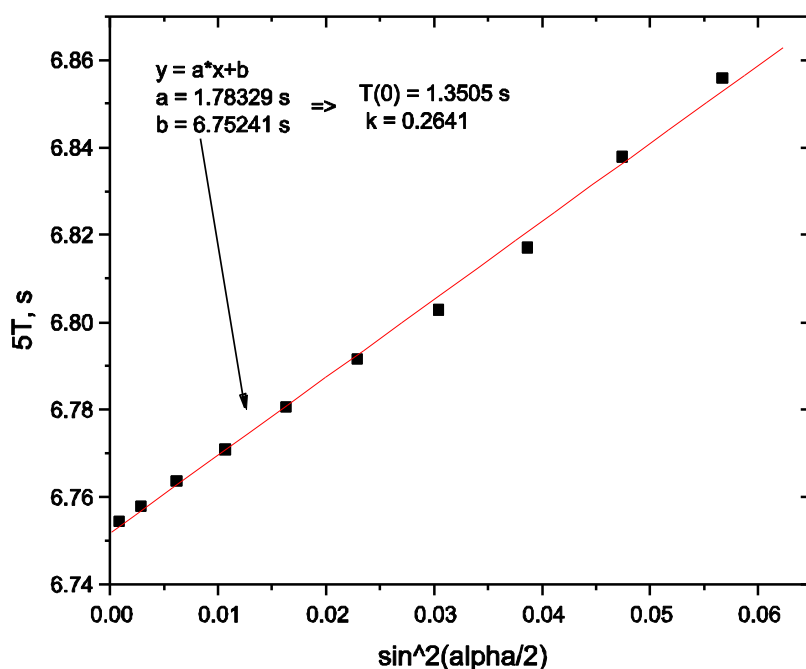
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Враца, 16 – 18 ноември 2007 г.

Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Махало – нелинейност и затихване. а, б) За да се обработи най-лесно графичната зависимост, трябва да се изберат такива координати, че графиката да е права линия. За да се извършват най-малко пресмятания, най-удобно е да се изчертае зависимостта $5T = f[\sin^2(\alpha_0/2)]$. Тогава, ако правата се описва с уравнението $y = ax + b$, то $b = 5T(0)$, а $a = 5T(0)k$. За всички измервания пресмятаме $\sin^2(\alpha_0/2)$ (виж. Табл.1 [1т.]). $\alpha_0 = \arctan(x/h)$ ($h = 48.0$ cm). Начертаваме графиката [1т.] (виж. Фиг.1).



x, cm	5T, s	$\sin^2(\frac{\alpha_0}{2}) \times 10^{-4}$
2.5	6.75475	6.77
5.0	6.75825	26.9
7.5	6.76400	59.9
10.0	6.77125	105.1
12.5	6.78100	161.4
15.0	6.79200	227.6
17.5	6.80325	302.5
20.0	6.81750	384.6
22.5	6.83825	472.7
25.0	6.85625	565.4

Фиг.1

Табл.1

От параметрите на получената права се получава за периода при малки амплитуди $T(0) = 1.3505$ s [1т.], а за

неизвестния коефициент $k = 0.2641$ [1т.] Теоретичната стойност е $k = 0.25$.

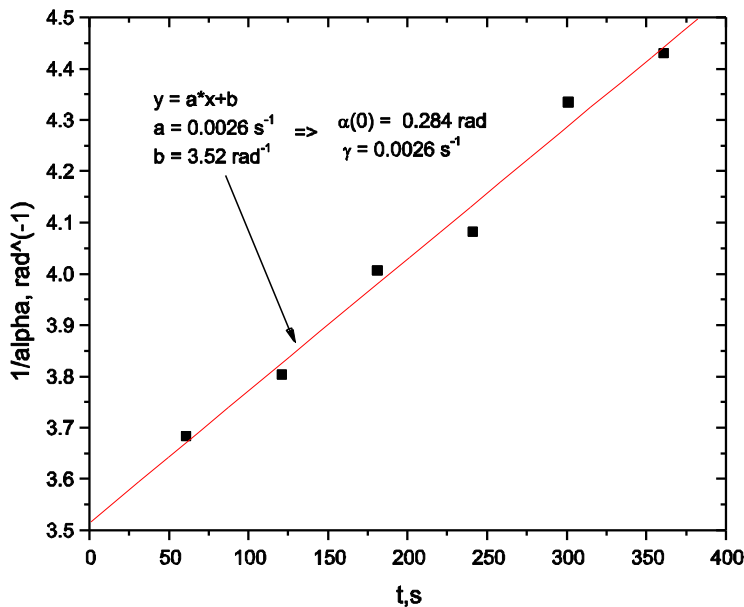
в,г) От получената в първите две подусловия на задачата линейна зависимост между времето за 5 периода на трептене T на махалото и $\sin^2(\alpha_0/2)$ [$5T = 6.75241 + 1.78329 \cdot \sin^2(\alpha_0/2)$] се намира зависимостта на амплитудата на трептене $\alpha_0(t)$ като функция на времето Табл.2 t (виж Табл.2) [1т.]. Ур-ие (1.2) може да се преобразува до:

$$\frac{1}{\alpha_0(t)} = \frac{1}{\alpha_0(0)} + \gamma t. \text{ Следователно, реципрочната стойност на моментната амплитуда } \alpha_0(t) \text{ на}$$

трептене е линейна функция на времето. Начертаваме графиката [1т.] (виж. Фиг.2). От параметрите на получената права се получава за началния ъгъл $\alpha_0(0) = 0.284$ rad [1т.], а за неизвестния коефициент $\gamma = 0.0026$ s⁻¹ [1т.]

t, s	5T, s	$\sin^2\left(\frac{\alpha_0(t)}{2}\right)$	$\alpha_0(t)$, rad	$\alpha_0(t)^{-1}$, rad ⁻¹
60	6.785	0.01828	0.2712	3.68729
120	6.783	0.01715	0.2627	3.80664
180	6.78	0.01547	0.24941	4.0094
240	6.779	0.01491	0.24483	4.08448
300	6.776	0.01323	0.23054	4.33765
360	6.775	0.01267	0.22558	4.43304

д) за намиране на зависимостта на амплитудата на трептене $\alpha_0(t)$ от времето първо намираме извършената работа на силата на съпротивление $F_{\text{сърп}} = bv^2$ за четвърт период:



$$A_{T/4} = \int_0^{\alpha_0(t)} dA = \int_0^{\alpha_0(t)} -F_{\text{cъnp}} dx =$$

$$= - \int_0^{\alpha_0(t)} b v^2 l d\alpha \quad (1.1)$$

Използвайки закона за запазване на енергията, който при слабо затихване е спазен за интервал време от порядъка на един период, скоростта $v(\alpha)$ е:

$$v(\alpha) = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0)} \quad (1.2)$$

За работата $A_{T/4}$ получаваме:

Фиг. 2

$$A_{T/4} = -2bgl^2 \int_0^{\alpha_0(t)} (\cos \alpha - \cos \alpha_0) d\alpha = -2bgl^2 [\sin \alpha_0(t) - \alpha_0(t) \cos \alpha_0(t)] \quad (1.3)$$

Използвайки дадените приближени формули за тригонометричните функции, (1.3) се преобразува до

$$A_{T/4} = -2bgl^2 \left\{ \left[\alpha_0(t) - \frac{\alpha_0(t)^3}{6} \right] - \alpha_0(t) \left[1 - \frac{\alpha_0(t)^2}{2} \right] \right\} = -2bgl^2 \frac{\alpha_0(t)^3}{3} \quad (1.4)$$

$$\text{Работата } A_T \text{ за един период е } A_T = 4A_{T/4} = -\frac{8}{3} bgl^2 \alpha_0(t)^3 \quad [0.5 \text{ т.}] \quad (1.5)$$

За време, равно на един период, енергията на махалото ще намалее с

$$\Delta E = \frac{dE}{dt} T = \frac{dE}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} T = \frac{d}{d\alpha} \{ mgl[1 - \cos \alpha_0(t)] \} \frac{d\alpha_0(t)}{dt} T = mglT \sin \alpha_0(t) \frac{d\alpha_0(t)}{dt} \quad [0.5 \text{ т.}] \quad (1.6)$$

Приравнявайки (1.5) и (1.6) при малки ъгли ($\sin \alpha_0 \approx \alpha_0$) се получава

$$-\frac{8}{3} bgl^2 \alpha_0(t)^3 = mglT \alpha_0(t) \frac{d\alpha_0(t)}{dt} \quad (1.7)$$

$$\text{След преобразования (1.7) изглежда така:} \quad \frac{d\alpha}{\alpha_0(t)^2} = -\frac{8}{3} \frac{bl}{mT} dt \quad [0.5 \text{ т.}] \quad (1.8)$$

$$\text{След интегриране на двете страни на равенството се получава:} \quad -\frac{1}{\alpha_0(t)} = -\frac{8}{3} \frac{bl}{mT} t + C \quad (1.9)$$

$$\text{От началните условия } (t = 0, -\frac{1}{\alpha_0(0)} = C), \text{ следователно} \quad -\frac{1}{\alpha_0(t)} = -\frac{8}{3} \frac{bl}{mT} t - \frac{1}{\alpha_0(0)} \quad (1.10)$$

$$\text{или } \alpha_0(t) = \frac{\alpha_0(0)}{1 + \alpha_0(0) \frac{8}{3} \frac{bl}{mT} t}. \text{ Сравнявайки с дадената зависимост } \gamma = \frac{8}{3} \frac{bl}{mT} \quad [0.5 \text{ т.}] \quad (1.11)$$

Задача 2. Автомобилен двигател.

а) при равновесен адиабатен процес (без обмен на топлина) работата A , която извършват n мола идеален газ върху бутало при промяна на обема на газа от начални температура T_1 и обем V_1 до крайни температура T_2 и обем V_2 е:

$$A = -\Delta U = -nC_V(T_2 - T_1) \quad [0.5 \text{ т.}] \quad (2.1)$$

От уравнението за идеален газ следва:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (2.2)$$

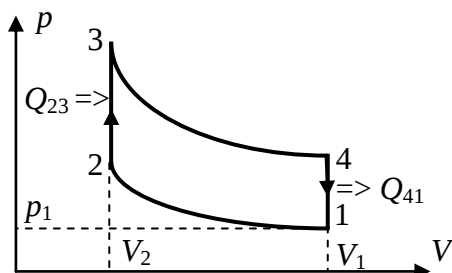
За адиабатния процес е изпълнено:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad (2.3)$$

Изразявайки $\frac{p_1}{p_2}$ от (2.3) и замествайки в (2.2) се получава: $T_1 = T_2 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma}$ (2.4)

Замествайки (2.4) в (2.1), $A = nC_V T_2 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] = nC_V T_2 (r^{1-\gamma} - 1)$ [0.5т] (2.5)

б) Топлинният цикъл на p - V диаграма изглежда така (виж Фиг. 3):



Коефициентът на полезно действие η е:

$$\eta = \frac{A_{1 \rightarrow 2} + A_{3 \rightarrow 4}}{Q_{23}} \quad (2.6)$$

Използвайки (2.5) за η се получава

$$\eta = \frac{nC_V T_2 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] - nC_V T_3 \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma} - 1 \right]}{nC_V (T_3 - T_2)}$$

Фиг. 3

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma} = 1 - r^{1-\gamma} \quad [1т] \quad (2.7)$$

в) масата на горивото $\Delta m / \Delta t$, което се подава към цилиндрите за 1 s е

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_{\text{г}} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho_{\text{г}} \frac{\Delta V}{\Delta l} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho_{\text{г}} v \frac{\Delta V}{\Delta l} \quad (2.8)$$

Тъй като цилиндрите са 4 и на всеки 2 оборота на колянвия вал на един цилиндър се подава веднъж гориво, то броя обороти за секунда $\omega = N_{\text{об}} / \Delta t$ е два пъти по-малък от броя впръсквания в един цилиндър за секунда $\Delta N_{\text{цил}} / \Delta t$: $\Delta N_{\text{цил}} / \Delta t = 2\omega$ (2.9)

Следователно, $\frac{\Delta m}{\Delta N_{\text{цил}}} = \frac{\Delta m / \Delta t}{\Delta N_{\text{цил}} / \Delta t} = \frac{\rho_{\text{г}} v \Delta V}{2\omega \Delta l}$ [0.5т] (2.10)

При дадените стойности се получава

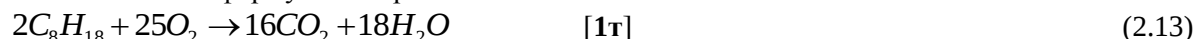
$$\frac{\Delta m}{\Delta N_{\text{цил}}} = \frac{730 \text{ kg/m}^3 \cdot 120 \text{ km/h}}{2.3200 \text{ об/мин}} \cdot \frac{8.3 \text{ l}}{100 \text{ km}} = 1.89 \cdot 10^{-5} \text{ kg/цил.} \quad [0.5т] \quad (2.11)$$

г) От уравнението за идеалния газ следва: $pV = \frac{m}{\mu} RT$. Използвайки дадените стойности и резултата

от предното подусловие:

$$p_{\text{г}} = \frac{m}{\mu_{\text{г}}} \frac{RT_1}{V_1} = \frac{\Delta m / \Delta N_{\text{цил}}}{N_A \cdot m_{\text{г}}} \frac{RT_1}{V_{\text{двуз.}} / 4} = \frac{1.89 \cdot 10^{-5} \text{ kg}}{6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 114.166 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \frac{8.31 \text{ J/mol.K} \cdot (90 + 273) \text{ K}}{1570 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 / 4} = 1275 \text{ Pa} = 0.0126 \text{ atm} = 1.26 \% \text{ atm} \quad [1т] \quad (2.12)$$

д) изравнената химична формула за горенето на бензина е:



Следователно отношението на молекулите бензин и кислород в реакцията е 1:12.5. Тъй като парциалните налягания на компонентите на газа са пропорционални на броя частици (молекули) на всяка компонента, то частта кислород, която участва в горенето е

$$\alpha = \frac{12.5 \cdot p_{\text{г}}}{0.21(p_1 - p_{\text{г}})} = \frac{12.5 \cdot 0.0126 \text{ atm}}{0.21 \cdot 0.9874 \text{ atm}} \approx 76.0 \% \quad [1т] \quad (2.14)$$

е) Ще изчислим първо температурата на газа T_2 при минимален обем (V_2) преди запалването на

горивото. От (2.4) следва $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = (90 + 273) \text{ K} \cdot 8.5^{1.4-1} = 854 \text{ K} \quad [1т] \quad (2.15)$

След изгарянето на бензина температурата се покачва до T_3 . Тази температура се намира така:

$$Q_{23} = \lambda m_{\phi} = c_v \frac{m_{\phi}}{\mu_{\phi}} (T_3 - T_2) \quad (2.16)$$

От уравнението на идеалния газ $p_1 V_1 = \frac{m_{\phi}}{\mu_{\phi}} RT_1$, откъдето замествайки $\frac{m_{\phi}}{\mu_{\phi}}$ в (2.16) се получава

$$T_3 = T_2 + \frac{\lambda m_{\phi} RT_1}{c_v p_1 V_1} = T_2 + \frac{\lambda m_{\phi} RT_1}{\frac{5}{2} R p_1 \frac{V_{\text{двиг}}}{4}} = T_2 + \frac{8}{5} \frac{\lambda m_{\phi} T_1}{p_1 V_{\text{двиг}}} \quad [0.5\tau] \quad (2.17)$$

След заместване с дадените стойности се получава

$$T_3 = 854K + \frac{8}{5} \frac{48,7 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \cdot 1,89 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot 363K}{1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1570 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = 854K + 3362K = 4216K \quad [0.5\tau] \quad (2.18)$$

$$\text{ж) тъй като } \eta = \frac{A}{Q_{\text{вх}}} = \frac{P \Delta t}{Q_{\text{вх}}}, \text{ то } P = \frac{\eta Q_{\text{вх}}}{\Delta t} = \eta \lambda \frac{\Delta m_{\phi}}{\Delta t} = \eta \lambda 2\omega \frac{\Delta m_{\phi}}{\Delta N_{\text{цил}}} \quad (2.19)$$

$$\text{От (2.7) за коефициента на полезно действие се получава } \eta = 1 - r^{1-\gamma} = 1 - 8,5^{1-1,4} = 0,575 \quad [0.5\tau] \quad (2.20)$$

$$\text{Замествайки с дадените и вече намерените стойности} \\ P_{3200} = 0,575 \cdot 48,7 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \cdot 2,53 \cdot 3s^{-1} \cdot 1,89 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 56,5 \text{ kW} = 76,8 \text{ к.с.} \quad [0.5\tau] \quad (2.21)$$

$$\text{з) Мощността } P_{\text{ср.}} = \frac{\Delta E_{\text{кин}}}{t} = \frac{mv^2}{2t}, \text{ откъдето } t = \frac{mv^2}{2P_{\text{ср}}} = \frac{1150 \text{ kg} (100/3,6)^2 (\text{m/s})^2}{2 \cdot 56,5 \cdot 10^3 \text{ W}} \approx 7,8s \quad [1\tau] \quad (2.22)$$

и) Данните за обема на двигателя, степента на съгъстяване и разходът на гориво са за Москвич 2141 (Алеко). Поради направените приближения в задачата [идеален цикъл на Ото (липса на топлообмен между газовата смес и цилиндрите), неотчитане на триене на буталата в цилиндрите, както и в останалите движещи се части на автомобила и неотчитане на съпротивлението на въздуха при движението на автомобила] получените резултати в подусловия ж) и з) не отговарят на експериментално измерените параметри на автомобила (мощност $P_{5600} = 76 \text{ к.с.}$ и $t_{0 \rightarrow 100 \text{ km/h}} = 15,5 \text{ s}$).

Задача 3. Клистрон.

$$\text{а) От закона за запазване на енергията следва: } eU_K = mv_0^2 / 2, \text{ откъдето } v_0 = \sqrt{2eU_K / m}. \quad (3.1)$$

$$\text{След заместване с дадените стойности } v_0 = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ V} / 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 1,87 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad [1\tau] \quad (3.2)$$

Изчислената скорост е много по-малка от скоростта на светлината, така че нататък може да се използва класическа механика.

$$\text{б) Времето } \tau = d/v_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 1,87 \cdot 10^7 \text{ m/s} = 5,35 \cdot 10^{-11} \text{ s}. \quad [0.25\tau] \text{ Периодът на променливото} \\ \text{напрежение } U_1 \text{ е } T = 1/\nu = 1/10 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}. \quad [0.25\tau] \text{ От дадената формула } M = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} =$$

$$= \frac{\sin(\pi\tau/T)}{\pi\tau/T} = \frac{\sin(\pi \cdot 5,35 \cdot 10^{-11} \text{ s} / 1 \cdot 10^{-10} \text{ s})}{\pi \cdot 5,35 \cdot 10^{-11} \text{ s} / 1 \cdot 10^{-10} \text{ s}} = 0,591. \quad [0.25\tau] \text{ Следователно } U_{\text{eff}} = MU_1 = 0,591 \cdot 10V$$

$$= 5,91 \text{ V} \quad [0.25\tau]$$

в) Скоростта $v(t)$ на електрона след преминаването му през първия кондензатор е

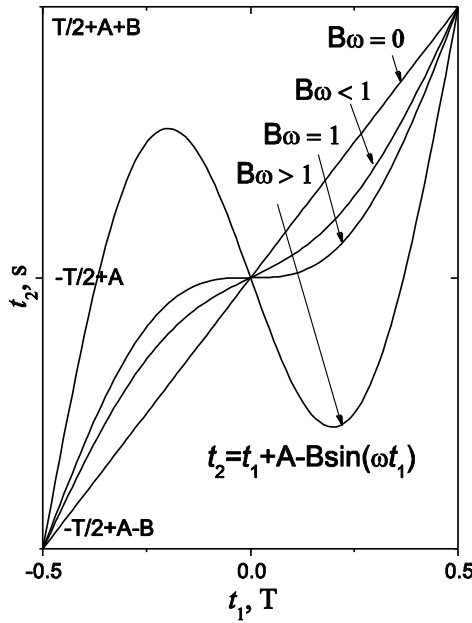
$$v(t) = \sqrt{2e(U_K + U_{\text{eff}} \sin(\omega t)) / m} \approx \sqrt{2eU_K / m} \left(1 + \frac{U_{\text{eff}}}{2U_K} \sin(\omega t) \right) = v_0 \left(1 + \frac{U_{\text{eff}}}{2U_K} \sin(\omega t) \right) \quad [1\tau] \quad (3.3)$$

г) Моментът време t_2 , в който електрон преминава през втория кондензатор, ако е преминал през първия в момент време t_1 е $t_2 = t_1 + l/v(t_1)$. Използвайки (3.3) получаваме

$$t_2 = t_1 + l / \left[v_0 \left(1 + \frac{U_{\text{eff}}}{2U_K} \sin(\omega t_1) \right) \right] \approx t_1 + \frac{l}{v_0} \left(1 - \frac{U_{\text{eff}}}{2U_K} \sin(\omega t_1) \right) = t_1 + \frac{l}{v_0} - \frac{lU_{\text{eff}}}{2v_0 U_K} \sin(\omega t_1) \quad [1\tau] \quad (3.4)$$

д) Графиката на функцията $t_2 = f(t_1)$ за стойности на $t_1 \in [-T/2, T/2]$ изглежда така (виж Фиг. 4): [1τ] Забелязва се, че в зависимост от големината на константата пред синуса, в интервала време от един период функцията може да няма локални екстремуми, да има един при $t_1 = 0$ или да има два.

е) Количеството заряд, който преминава през първия кондензатор за време dt_1 , ще премине през втория кондензатор за време



$$dt_2 = \frac{dt_2}{dt_1} dt_1 = \left[1 - \frac{IU_{eff}\omega}{2v_0U_K} \cos(\omega t_1) \right] dt_1. \text{ Тъй като}$$

$$I_2(t_2)dt_2 = I_1(t_1)dt_1, \text{ то } I_2(t_2) = \frac{I_1(t_1)}{\frac{dt_2}{dt_1}}, \text{ или}$$

$$I_2(t_2) = \frac{I_1(t_1)}{1 - \frac{IU_{eff}\omega}{2v_0U_K} \cos(\omega t_1)} \quad [1\tau] \quad (3.5)$$

ж) Моментната стойност на $I_2(t_2)$ ще клони към безкрайност, когато знаменателя в (3.5) стане равен на нула, т.е

$$1 - \frac{IU_{eff}\omega}{2v_0U_K} \cos(\omega t_1) = 0, \text{ откъдето } l_{min} = \frac{2v_0U_K}{U_{eff}\omega} \quad [0.5\tau] \quad (3.6)$$

$$\text{При дадените стойности } l_{min} = \frac{2.1,87 \cdot 10^7 \text{ m/s} \cdot 10^3 \text{ V}}{5,91 \text{ V} \cdot 2\pi \cdot 10^{10} \text{ Hz}} \approx 10,0 \text{ cm} \quad [0.5\tau] \quad (3.7)$$

Фиг.3 з) Капацитетът C на кръглият кондензатор е $C = \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}$. [0.25τ] (3.8)

Индуктивността L на тороидалния кух проводник може да се намери така: по определение

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{B\pi r^2}{I}. \quad [0.25\tau] \text{ Магнитната индукция } B \text{ се намира от теоремата за циркуляцията (при}$$

пренебрегване на кривината магнитното поле вътре е равномерно): $B \cdot 2\pi(r+r) = \mu_0 I$ [0.25τ],

$$\text{откъдето } L = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{2\pi \cdot 2r \cdot I} = \frac{\mu_0 r}{4} \quad [0.25\tau] \quad (3.9)$$

$$\text{и) резонансната честота на трептящ кръг е } \omega_{pez} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [0.25\tau] \quad (3.10)$$

$$\text{Използвайки (3.8) и (3.9) } \omega_{pez} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 r}{4} \cdot \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d}}} = 2c \sqrt{\frac{d}{\pi^3}} \quad [0.5\tau] \quad (3.11)$$

$$\text{Следователно } r = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{d \left(\frac{c}{v} \right)^2} \approx 3,1 \text{ mm} \quad [0.25\tau] \quad (3.12)$$

й) Ефективното напрежение $U_{eff} \sin(\omega t_1)$ може да се намери така:

$$U_{eff} \sin(\omega t_1) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1-\tau/2}^{t_1+\tau/2} U_1 \sin(\omega t) dt = \frac{U_1}{\omega \tau} \int_{t_1-\tau/2}^{t_1+\tau/2} \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{U_1}{\omega \tau} \left(-\cos(\omega t) \right) \Big|_{t_1-\tau/2}^{t_1+\tau/2} \quad [0.5\tau] \quad (3.13)$$

След тригонометрични преобразувания

$$U_{eff} \sin(\omega t_1) = \frac{U_1}{\omega \tau} \left(-\cos(\omega t) \cdot \cos(\omega \tau / 2) + \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega \tau / 2) + \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega \tau / 2) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega \tau / 2) \right) = \frac{\sin(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2} U_1 \sin(\omega t) \quad (3.14)$$

$$\text{Следователно } M = \frac{\sin(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2} \quad [0.5\tau] \quad (3.15)$$