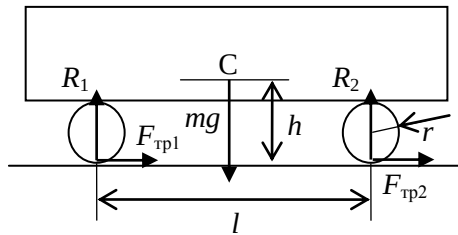


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
София, 17 – 19 ноември 2006 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Спиране на автомобил.

а) Силите, действащи на спирация автомобил са следните (виж Фиг. 1 [1 т])



Фиг. 1

Ускорението на колата се създава от силите на триене $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$, действащи съответно на предните и задните колела. Следователно,

$$F_{мп1} + F_{мп2} = ma \quad (1.1)$$

При хлъзгане

$$F_{mpi} = kR_i \quad i = 1, 2. \quad (1.2)$$

Вертикалните сили се уравновесяват:

$$R_1 + R_2 = mg \quad (1.3)$$

От (1.1), (1.2) и (1.3) следва

$$a = kg \quad (1.4)$$

При начална скорост v_0 и ускорение a , спирачния път L е

$$L = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2kg} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.5)$$

б) за да не се отлепят задните колела от шосето, не трябва да има въртене около хоризонтална ос при спирането. Следователно сумата от моментите на силите, действащи на колата, спрямо нейният център на масата, трябва да е нула.

$$F_{мп1} \cdot h + F_{мп2} \cdot h + R_2 \cdot \frac{l}{2} = R_1 \cdot \frac{l}{2} \quad (1.6)$$

Замествайки силите на триене от (1.2), (1.6) се преобразува до

$$kR_1 \cdot h + kR_2 \cdot h + R_2 \cdot \frac{l}{2} = R_1 \cdot \frac{l}{2} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.7)$$

откъдето

$$R_2 = R_1 \frac{\frac{l}{2} - kh}{\frac{l}{2} + kh} \quad (1.8)$$

замествайки в (1.3), за R_1 се получава

$$R_1 = \frac{mg \left(\frac{l}{2} + kh \right)}{l} = mg \left(\frac{1}{2} + \frac{kh}{l} \right) \quad [1 \text{ т}] \quad (1.9)$$

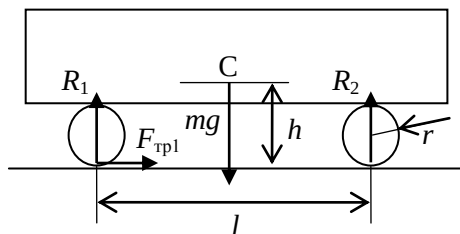
тъй като и двете реакции на опорите са положителни, то

$$R_1 < mg. \quad (1.10)$$

От (1.10) и (1.9) за интервала стойности на коефициента на триене се получава

$$0 < k < \frac{l}{2h} \quad [1 \tau] \quad (1.11)$$

в) Силите, действащи на спиращия автомобил, в този случай са следните (виж Фиг. 2 [0,5 τ])



Фиг. 2

Ускорението на колата се създава само от силата на триене $F_{тр1}$, действаща на предните колела. Следователно,

$$F_{мп1} = ma_1 \quad (1.12)$$

уравнение (1.7) в този случай изглежда така

$$kR_1 \cdot h + R_2 \cdot \frac{l}{2} = R_1 \cdot \frac{l}{2} \quad (1.13)$$

откъдето

$$R_2 = R_1 \left(1 - \frac{2kh}{l} \right) \quad [0,5 \tau] \quad (1.14)$$

замествайки в (1.13)

$$R_1 = \frac{mg}{2 \left(1 - \frac{kh}{l} \right)} \quad (1.15)$$

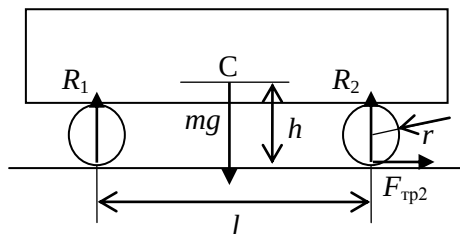
използвайки (1.2) и замествайки в (1.12)

$$a_1 = \frac{kg}{2 \left(1 - \frac{kh}{l} \right)} \quad (1.16)$$

а спирачния път L_1 :

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2a_1} = 2L \left(1 - \frac{kh}{l} \right) \quad [1 \tau] \quad (1.17)$$

г) Силите, действащи на спиращия автомобил, в този случай са следните (виж Фиг. 3 [0,5 τ])



Фиг. 3

Ускорението на колата се създава само от силата на триене $F_{тр2}$, действаща на задните колела. Следователно,

$$F_{мп2} = ma_2 \quad (1.18)$$

уравнение (1.7) в този случай изглежда така

$$kR_2 \cdot h + R_2 \cdot \frac{l}{2} = R_1 \cdot \frac{l}{2} \quad (1.19)$$

откъдето

$$R_1 = R_2 \left(1 + \frac{2kh}{l} \right) \quad (1.20)$$

замествайки в (1.19)

$$R_2 = \frac{mg}{2 \left(1 + \frac{kh}{l} \right)} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.21)$$

използвайки (1.2) и замествайки в (1.18)

$$a_2 = \frac{kg}{2 \left(1 + \frac{kh}{l} \right)} \quad (1.22)$$

а спираният път L_2 :

$$L_2 = \frac{v_0^2}{2a_2} = 2L \left(1 + \frac{kh}{l} \right) \quad [1 \text{ т}] \quad (1.23)$$

д) при дадените стойности за L_1 и L_2 се получава съответно

$$L_1 = 2.20m \left(1 - \frac{0,8}{4} \right) = 32m \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.24)$$

$$L_2 = 2.20m \left(1 + \frac{0,8}{4} \right) = 48m \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.25)$$

Задача 2. Токове на Фуко.

а) В тънък слой от цилиндъра с радиус r ще се индуцира напрежение E_i , равно на

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \omega B_0 \cos(\omega t) \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.1)$$

Това напрежение ще доведе до протичането на ток dI , равен на

$$dI = \frac{E_i}{R} = \frac{\pi r^2 \omega B_0 \cos(\omega t)}{\frac{\rho 2\pi r}{dS}}, \text{ където } dS = h \cdot dr \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.2)$$

Плътноста на тока $j(r)$ е равна на

$$j(r) = \frac{dI}{dS} = \frac{r \omega B_0 \cos(\omega t)}{2\rho} \quad [1 \text{ т}] \quad (2.3)$$

б) мощността $dP(r)$, отделяща се в този тънък слой, е равна на:

$$dP(r) = dI^2 \cdot R = \frac{E_i^2}{R} = \frac{\pi^2 r^4 \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t)}{\frac{\rho 2\pi r}{dS}} = \frac{\pi r^3 \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t) h dr}{2\rho} \quad [1 \text{ т}] \quad (2.4)$$

в) моментната мощност $P(t)$, отделяща се в целия цилиндър е

$$P(t) = \int_0^{r_0} dP(r) dr = \frac{\pi \omega^2 B_0^2 \cos^2(\omega t) h}{2\rho} \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi \omega^2 B_0^2 r_0^4 h \cos^2(\omega t)}{8\rho} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.5)$$

Усреднената по времето мощност $\langle P \rangle$, отделяща се в целия цилиндър е равна на

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\pi \omega^2 B_0^2 r_0^4 h}{8\rho} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi \omega^2 B_0^2 r_0^4 h}{16\rho} \quad [0,5 \text{ т}]$$

(2.6)

г) При термодинамично равновесие цялата топлинна мощност, образувана от токовете на Фуко, се изразходва за излъчване. Тъй като ($h \gg r_0$), то може да приемем, че

$$\langle P \rangle = \sigma T(r_0)^4 \cdot S(r_0) \text{ или} \quad (2.7)$$

$$\frac{\pi \omega^2 B_0^2 r_0^4 h}{16\rho} = \sigma T(r_0)^4 \cdot 2\pi r_0 h, \text{ откъдето} \quad (2.8)$$

$$T(r_0) = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 B_0^2 r_0^3}{32\rho\sigma}} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.9)$$

при дадените стойности

$$T(r_0) = \sqrt[4]{\frac{(314\text{s}^{-1})^2 (1\text{T})^2 (5 \cdot 10^{-3}\text{m})^3}{32 \cdot (1,55 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) (5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4})}} = 193 \text{ K} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.10)$$

д) намираме първата производна на $T(r)$:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -4Br^3 \quad (2.11)$$

намираме втората производна на $T(r)$:

$$\frac{d^2 T(r)}{dr^2} = -12Br^2 \quad (2.12)$$

Намираме отделената мощност от токовете на Фуко в единица обем на разстояние r от

оста $\frac{dP(r)}{dV}$ (използвайки (2.4)):

$$\left\langle \frac{dP(r)}{dV} \right\rangle = \frac{\pi^3 \omega^2 B_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle h dr}{2\rho \cdot 2\pi drh} = \frac{\omega^2 B_0^2 r^2}{8\rho} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.13)$$

замествайки в даденото в условието уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{dT(r)}{dr} + \frac{d^2 T(r)}{dr^2} = -\frac{1}{\kappa} \frac{dP(r)}{dV}, \text{ се получава} \quad (2.14)$$

$$-4Br^2 - 12Br^2 = -\frac{\omega^2 B_0^2 r^2}{8\rho\kappa}, [1 \text{ т}] \quad \text{откъдето} \quad (2.15)$$

$$B = \frac{\omega^2 B_0^2}{128\rho\kappa} \quad (2.16)$$

Тъй като $T(r) = A - Br^4$, разликата ΔT между температурата на оста на цилиндъра $T(0)$ и на неговата повърхност $T(r_0)$ е

$$\Delta T = T(0) - T(r_0) = Br_0^4 = \frac{\omega^2 B_0^2 r_0^4}{128\rho\kappa} \quad [1 \text{ т}] \quad (2.17)$$

след заместване с дадените стойности

$$\Delta T = \frac{(314\text{s}^{-1})^2 (1\text{T})^2 (5 \cdot 10^{-3}\text{m})^4}{128 \cdot (1,55 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) (400\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1})} = 0,078\text{K} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.18)$$

е) амплитудата на магнитното поле B_{i0} , което създават индуцираните токове на оста на цилиндъра, може да се намери като се използва теоремата за циркуляцията, уравнение (2.3) и се интегрира по сечението на проводника (т.е. правоъгълника със страни h и r_0):

$$B_{i0} \cdot h = \mu_0 \int_0^{r_0} \frac{r \omega B_0}{2\rho} h dr \quad [0,5 \text{ т}], \text{ откъдето} \quad (2.19)$$

$$B_{i0} = \frac{\mu_0 \omega B_0 r_o^2}{4\rho} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.20)$$

отношението $\frac{B_{i0}}{B_0}$ ни показва колко пъти магнитното поле, индуцирано от възникналите токове е по-малко от външното магнитно поле. В нашия случай

$$\frac{B_{i0}}{B_0} = \frac{\mu_0 \omega r_o^2}{4\rho} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 314 \text{ s}^{-1} (5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4,155 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}} \approx 0,16 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.20)$$

Следователно при дадените параметри на задачата, това пренебрегване е приемливо. [0,5 т]

Задача 3. Елементарни частици и кварки.

Подходът, използващ съставяне на уравнения (всяко едно представляващо закон за запазване на даден вид заряд), в които неизвестните са броя кварки от даден вид, изграждащ дадена елементарна частица, е дълъг и тромав. Решението, дадено тук, е евристично:

а) тъй като омега-минус-хиперонът Ω^- има странност $S = -3$, то единствената възможност е той да изграден от три s кварка, т.е

$$\Omega^- = (sss) \quad [1 \text{ т}] \quad (3.1)$$

б) ка-плюс-мезонът K^+ като мезон трябва да е изграден от 2 кварка. Тъй като има странност $S = +1$, задължително трябва да включва антикварка $\tilde{s}$. Тъй като електричният му заряд е $Q = 1$, вторият кварк трябва да е кваркът u , т.е.

$$K^+ = (u\tilde{s}) \quad [1 \text{ т}] \quad (3.2)$$

в) тъй като ламбда-нула-хиперонът Λ^0 има странност $S = -1$, задължително трябва да включва кварка s . Тъй като електричния му заряд е $Q = 0$, единствената комбинация е останалите два кварка да са u и d , т.е.

$$\Lambda^0 = (uds) \quad [1 \text{ т}] \quad (3.3)$$

г) в реакцията $\pi^- + p \rightarrow K^+ + K^- + ?$ трябва да се запазват всички видове заряди. Прилагаме закона за запазване на тези заряди последователно.

От закона за запазване на електричния заряд Q следва

$$-1 + 1 = +1 - 1 + Q_? \quad (3.4)$$

т.е. $Q_? = 0$

От закона за запазване на барионния заряд B следва

$$0 + 1 = 0 + 0 + B_? \quad (3.5)$$

т.е. $B_? = 1$

От закона за запазване на странността S следва

$$0 + 0 = 1 - 1 + S_? \quad (3.6)$$

т.е. $S_? = 0$

Проверявайки в Таблица 2, единствената частица, имаща такива заряди, е неутрона n [1.5 т].

д) в реакцията $K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + ?$ трябва да се запазват всички видове заряди. Прилагаме закона за запазване на тези заряди последователно.

От закона за запазване на електричния заряд Q следва

$$-1 + 1 = -1 + 1 + Q_? \quad (3.7)$$

т.е. $Q_? = 0$

От закона за запазване на барионния заряд B следва

$$0 + 1 = 1 + 0 + B_? \quad (3.8)$$

т.е. $B_{\gamma} = 0$

От закона за запазване на странността S следва

$$-1 + 0 = -3 + 1 + S_{\gamma} \quad (3.9)$$

т.е. $S_{\gamma} = 1$

Проверявайки в Таблица 2, единствената частица, имаща такива заряди, е ка-нула-мезона K^0 [1,5 т].

е) при разпада на неподвижният положителен мюон μ^+ на позитрон и две неутрини се запазва релятивистката енергия и импулс на системата:

$$E_{0\mu^+} = E_{e^+} + E_{\nu 1} + E_{\nu 2} \quad (3.10)$$

$$0 = \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_{\nu 1} + \vec{p}_{\nu 2} \quad (\text{общо [0,5 т]}) \quad (3.11)$$

Импулсът (оттам и кинетичната енергия) на позитрона ще бъде максимален, когато импулсите на двете неутрини са противоположни на импулса на позитрона [0,5 т]:

$$|p_{e^+}| = |p_{\nu 1}| + |p_{\nu 2}| \quad (3.12)$$

Уравненията, свързващи релятивистките енергия и импулс за позитрона и неутрините, са:

$$E_{e^+}^2 = E_{0e^+}^2 + p_{e^+}^2 \cdot c^2 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (3.13)$$

$$E_{\nu i}^2 = p_{\nu i}^2 \cdot c^2 \quad (i=1,2) \quad [0,5 \text{ т}] \quad (3.14)$$

Замествайки (3.12), (3.13) и (3.14) в (3.10) се получава

$$E_{0\mu^+} = E_{e^+} + p_{\nu 1} \cdot c + p_{\nu 2} \cdot c = E_{e^+} + p_{e^+} \cdot c = E_{e^+} + \sqrt{E_{e^+}^2 - E_{0e^+}^2} \quad (3.15)$$

Решавайки (3.15) след преобразувания, за E_{e^+} резултатът е:

$$E_{e^+} = \frac{E_{0\mu^+}^2 + E_{0e^+}^2}{2E_{0\mu^+}} [1 \text{ т}] \quad (3.16)$$

а за кинетичната енергия:

$$E_{e^+ \text{ кин}} = E_{e^+} - E_{0e^+} = \frac{(E_{0\mu^+} - E_{0e^+})^2}{2E_{0\mu^+}} = \frac{(m_{0\mu^+} - m_{0e^+})^2 \cdot c^2}{2m_{0\mu^+}} [0,5 \text{ т}] \quad (3.17)$$

След заместването със стойностите от Таблица 2, се получава

$$E_{e^+ \text{ кин}} = \frac{(105,7 \text{ MeV} - 0,5 \text{ MeV})^2}{2 \cdot 105,7 \text{ MeV}} = 52,4 \text{ MeV} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (3.18)$$