

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Русе, 18 – 20 ноември 2005 г.

Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Точки на Лагранж.

а) В произволна координатна система радиус-векторът $\vec{r}_C$ на центъра на масата на система от две материални точки с маси M_1 и M_2 и радиус-вектори $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ е:

$$\vec{r}_C = \frac{M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2}{M_1 + M_2}. \quad (1)$$

Ако началото на координатната система съвпада с центъра на масата на системата ($\vec{r}_C = 0$), то

$$\vec{r}_1 = -\frac{M_2}{M_1} \vec{r}_2 \quad (2)$$

Тъй като $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{d}$, то за разстоянията от центъра на масата на системата звезда-планета съответно до звездата a_1 и планетата a_2 се получава:

$$a_1 = \frac{M_2 d}{M_1 + M_2} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (3)$$

$$a_2 = \frac{M_1 d}{M_1 + M_2} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (4)$$

б) Прилагаме вторият закон на Нютон за движението на планетата по окръжност с радиус a_2 с ъглова скорост ω :

$$F = M_2 a,$$

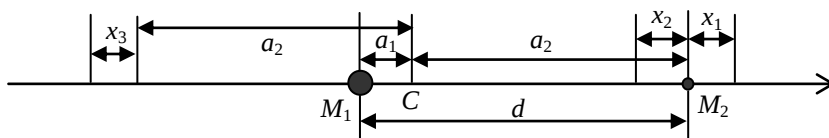
$$F = \frac{GM_1 M_2}{d^2} \quad [0,5 \text{ т}] \text{ и } a = \omega^2 a_2 \quad [0,5 \text{ т}], \text{ следователно}$$

$$\omega^2 = \frac{GM_1}{d^2 a_2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{d^3} \quad (5)$$

Ако се повторят същите разсъждения за движението на звездата, се получава същата ъглова скорост и за нейното движение. И така

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M_1 + M_2)}{d^3}} \quad [1 \text{ т}] \quad (6)$$

в) За да остава третото тяло на постоянни разстояния от звездата и планетата, то трябва да обикаля около центъра на масата на системата звезда-планета със същата ъглова скорост ω . При допускането, че то лежи на правата звезда-планета, то може да се намира в три участъка – отдясно на планетата, между планетата и звездата, и отляво на звездата (виж Фиг. 1).



Фиг. 1

Прилагаме вторият закон на Нютон за движението на третото тяло по окръжност с радиус $a_2 \pm x_1$ с ъглова скорост ω .

В първия случай:

$$-\frac{GM_1m}{(d+x_1)^2} - \frac{GM_2m}{x_1^2} = -m\omega^2(a_2+x_1) \quad [0,5 \text{ т}] \quad (7)$$

Замествайки ω^2 с израза от (5), a_2 с израза от (4) и съкращавайки на множителя Gm , се получава

$$-\frac{M_1}{(d+x_1)^2} - \frac{M_2}{x_1^2} = -\frac{M_1}{d^2} - \frac{(M_1+M_2)x_1}{d^3} \quad (8)$$

Използвайки, че $M_2 \ll M_1$, следва че $a_2 \approx d$, следователно $x_1 \ll d$. Представяйки

$$\frac{1}{(d+x_1)^2} = \frac{1}{d^2 \left(1 + \frac{x_1}{d}\right)^2} \approx \frac{1}{d^2} \left(1 - 2\frac{x_1}{d}\right), \text{ след съкращения, (8) се преобразува до}$$

$$\frac{2M_1x_1}{d^3} - \frac{M_2}{x_1^2} = -\frac{(M_1+M_2)x_1}{d^3} \quad (9)$$

откъдето

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1+M_2}}d \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}d \quad [1,5 \text{ т}] \quad (10)$$

Във втория случай

$$-\frac{GM_1m}{(d-x_2)^2} + \frac{GM_2m}{x_2^2} = -m\omega^2(a_2-x_2) \quad [0,5 \text{ т}] \quad (11)$$

След аналогични преобразувания, както между (8) и (10), за x_2 се получава

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1+M_2}}d \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}d \quad [1,5 \text{ т}] \quad (12)$$

В третия случай

$$\frac{GM_1m}{(a_2-a_1+x_3)^2} + \frac{GM_2m}{(2a_2+x_3)^2} = m\omega^2(a_2+x_3) \quad [0,5 \text{ т}] \quad (13)$$

След заместване на ω^2 с израза от (5), a_2 с израза от (4) и a_1 с израза от (3) и съкращавайки на Gm , уравнение (13) се преобразува до

$$\frac{M_1}{\left(\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}d+x_3\right)^2} + \frac{M_2}{\left(\frac{2M_1}{M_1+M_2}d+x_3\right)^2} = \frac{M_1}{d^2} + \frac{(M_1+M_2)x_3}{d^3} \quad (14)$$

Изваждайки подходящ множител от левите два знаменателя, такъв, че изразите в скобите да са от вида $(1+y)^2$, (14) се преобразува до

$$\frac{M_1}{\left(\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}d\right)^2 \left(1 + \frac{M_1+M_2}{M_1-M_2} \cdot \frac{x_3}{d}\right)^2} + \frac{M_2}{\left(\frac{2M_1}{M_1+M_2}d\right)^2 \left(1 + \frac{M_1+M_2}{2M_1} \cdot \frac{x_3}{d}\right)^2} = \frac{M_1}{d^2} + \frac{(M_1+M_2)x_3}{d^3} \quad (15)$$

Използвайки, че изразите след единиците в скобите са много по-малки от единица и приближената формула $(1+y)^{-2} \approx 1-2y$ при $y \ll 1$, и след умножение на двете страни на равенството по d^2 , то се преобразува до

$$\frac{M_1(M_1+M_2)^2}{(M_1-M_2)^2} \left(1 - \frac{2(M_1+M_2)}{(M_1-M_2)} \cdot \frac{x_3}{d} \right) + \frac{M_2(M_1+M_2)^2}{4M_1^2} \left(1 - \frac{M_1+M_2}{2M_1} \cdot \frac{x_3}{d} \right) = M_1 + \frac{(M_1+M_2)x_3}{d} \quad (16)$$

След разкриване на скобите и прехвърляне на всички членове, съдържащи $\frac{x_3}{d}$ отляво, а останалите - отляво, се получава

$$\frac{M_1(M_1+M_2)^2}{(M_1-M_2)^2} + \frac{M_2(M_1+M_2)^2}{4M_1^2} - M_1 = \frac{2M_1(M_1+M_2)^3}{(M_1-M_2)^3} \frac{x_3}{d} - \frac{M_2(M_1+M_2)^3}{8M_1^3} \frac{x_3}{d} + (M_1+M_2) \frac{x_3}{d} \quad (17)$$

Въвеждайки означение за отношението $\frac{M_2}{M_1} = \alpha$ и делене на двете страни на M_1 , горното равенство може да се преобразува до

$$\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{\alpha(1+\alpha)^2}{4} - 1 = \left[\frac{2(1+\alpha)^3}{(1-\alpha)^3} - \frac{\alpha(1+\alpha)^3}{8} + (1+\alpha) \right] \frac{x_3}{d} \quad (18)$$

Използвайки отново приближената формула $(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha$, при $\alpha \ll 1$ и отчитайки само най-големите членове, (18) се опростява до

$$1 + 4\alpha + \frac{\alpha}{4} - 1 = 3 \frac{x_3}{d} \quad (19)$$

Така за x_3 се получава

$$x_3 = \frac{17}{12} \frac{M_2}{M_1} d \quad [1,5 \tau] \quad (20)$$

г) Точките, близки до планетата са две – тези, съответстващи на разстояния от планетата x_1 и x_2 . Тъй като $x_1 = x_2$, то тези разстояния трябва да се пресмятат само веднъж. Използвайки (10) или (12) и дадените стойности

$$x_1 = x_2 \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^{24} kg}{3 \cdot 2 \cdot 10^{30} kg}} \cdot 1,5 \cdot 10^8 km = 1,5 \cdot 10^6 km \quad [1 \tau] \quad (21)$$

Използваните стойности са всъщност масите на Слънцето и Земята и разстоянието Слънце-Земя.

Задача 2. Кубичен кристал.

а) Разглеждайки Фиг. 1, можем да направим следните изводи: разстоянието между най-близките атоми в ОЦК d_1 е половината от телесния диагонал на елементарната клетка (нарисувания куб) като тя съдържа 2 атома. За СЦК d_2 е половината от диагонала на коя да е от стените на елементарната клетка (нарисувания куб) като тя съдържа 4 атома. [0,5 т]

Тъй като при фазовия преход обемът на веществото не се променя, то обемът V падащ се на един атом също не се променя. Нека означим с a_1 и a_2 и с $V_{ОЦК}$ и $V_{СЦК}$ съответно ръбовете и обемите на клетките на ОЦК и СЦК кристални решетки. Тогава за обемът V , падащ се на един атом от ОЦК, е

$$V = \frac{V_{ОЦК}}{2} = \frac{a_1^3}{2}, \text{ като } d_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \quad [0,5 \tau] \quad (22)$$

За СЦК той е

$$V = \frac{V_{СЦК}}{4} = \frac{a_2^3}{4}, \text{ като } d_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_2 \quad [0,5 \tau] \quad (23)$$

Приравнявайки двата обема и замествайки a_1 и a_2 с d_1 и d_2 , за отношението $\frac{d_2}{d_1}$ се получава

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a_2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{4V}}{\sqrt[3]{2V}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} \approx 1,029 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (24)$$

б) Разглеждайки Фиг. 1, търсените радиуси r_i на първите четири координационни сфери и броя атоми N_i , лежащи на тях, за двата случая на ОЦК и СЦК кристални решетки, можем да представим в следната таблица [2 т]:

i	ОЦК			СЦК		
	$r_i = f(a_1)$	$r_i = f(d_1)$	N_i	$r_i = f(a_2)$	$r_i = f(d_2)$	N_i
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}a_1$	d_1	8	$\frac{\sqrt{2}}{2}a_2$	d_2	12
2	a_1	$\frac{2}{\sqrt{3}}d_1$	6	a_2	$\sqrt{2}d_2$	6
3	$\sqrt{2}a_1$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d_1$	12	$\sqrt{\frac{3}{2}}a_2$	$\sqrt{3}d_2$	24
4	$\sqrt{3}a_1$	$2d_1$	8	$\sqrt{2}a_2$	$2d_2$	12

в) Разстоянието между двата атома в молекулата ще съответства на състояние с минимална енергия. Тъй като при ниски температури кинетичната енергия на системата се пренебрегва, то трябва да се намери при какво разстояние r_0 потенциалната енергия $U(r)$ е минимална. Намираме първата производна на $U(r)$ и я приравняваме на нула:

$$\frac{dU}{dr} = 4\varepsilon \left(-12 \frac{\sigma^{12}}{r^{13}} + 6 \frac{\sigma^6}{r^7} \right) = 0 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (25)$$

Откъдето

$$r_0 = \sqrt[6]{2}\sigma \approx 1,122\sigma \quad [0,5 \text{ т}] \quad (26)$$

Енергията $E_0 = U(r_0)$

$$E_0 = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{\sqrt[6]{2}\sigma} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt[6]{2}\sigma} \right)^6 \right] = 4\varepsilon \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\varepsilon \quad [1 \text{ т}] \quad (27)$$

г) От енергията на кристала $E(d_2)$ получаваме потенциалната енергия на един атом $U_1(d_2)$ в полето на останалите атоми:

$$U_1(d_2) = \frac{2}{N} E(d_2) = 4\varepsilon \left[A \left(\frac{\sigma}{d_2} \right)^{12} - B \left(\frac{\sigma}{d_2} \right)^6 \right] \quad [0,5 \text{ т}] \quad (28)$$

Отчитайки взаимодействието на всеки атом с атомите само от първите му 4 координационни сфери, потенциалната енергия на един атом $U_1(d_2)$ може да се представи в следния вид:

$$U_1(d_2) = \sum_{i=1}^4 \left\{ \sum_{j=1}^{N_i} 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^6 \right] \right\} = 4\varepsilon \sum_{i=1}^4 N_i \left[\left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^6 \right] \quad [0,5 \text{ т}] \quad (29)$$

Сравнявайки (28) и (29) следва, че

$$A = \sum_{i=1}^4 N_i \left(\frac{d_2}{r_i} \right)^{12} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (30)$$

$$B = \sum_{i=1}^4 N_i \left(\frac{d_2}{r_i} \right)^6 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (31)$$

Използвайки получените резултати от подусловие б) (от таблицата)

$$A = 12 + 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{12} + 24 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{12} + 12 \left(\frac{1}{2} \right)^{12} \approx 12,130 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (32)$$

$$B = 12 + 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^6 + 24 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 + 12 \left(\frac{1}{2} \right)^6 \approx 13,826 \quad [0,5 \text{ т}] \quad (33)$$

Разстоянието между най-близко разположените атоми d_2 намираме аналогично на разсъжденията в подусловие в). Енергията на кристала е минимална, когато първата ѝ производна по разстоянието между най-близко разположените атоми d_2 е нула:

$$\frac{dU}{d(d_2)} = \frac{1}{2} N 4 \varepsilon \left(-12A \frac{\sigma^{12}}{(d_2)^{13}} + 6B \frac{\sigma^6}{(d_2)^7} \right) = 0 \quad (34)$$

откъдето

$$d_2 = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}} \sigma \quad [0,5 \text{ т}] \quad (35)$$

Замествайки с получените стойности за A и B от (32) и (33)

$$d_2 = \sqrt[6]{\frac{2 \cdot 12,130}{13,826}} \sigma \approx 1,098 \sigma \quad [0,5 \text{ т}] \quad (36)$$

Задача 3. Свързани махала.

а) При еднакво отклонение еднаквите махала ще се движат по един и същ начин. Между тях няма да има взаимодействие и всяко от тях ще се движи независимо. Затова може да се разсъждава само за едното махало. При отклонение на ъгъл α , на него ще действа въртящ момент $M = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha$ (при малък ъгъл на отклонение). Следователно вторият закон на Нютон за въртелиното движение ще е

$$-mgl \alpha \approx M = I \varepsilon = I \ddot{\alpha} \quad (37)$$

Записвайки уравнението в стандартен вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0, \quad [0,5 \text{ т}] \quad (38)$$

чрез проста проверка се установява, че това уравнение описва хармонично трептене с кръгова честота

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (39)$$

б) При отклонение на махалата на равни ъгли, но в противоположни посоки, след като се пуснат едновременно, те ще се движат симетрично, т. е. във всеки момент ъглите им на отклонение ще бъдат равни по големина и противоположни по посока. [0,5 т] На всяко едно от тях, обаче, ще действа допълнителен въртящ момент, дължащ се на пружинката. Написвайки вторият закон на Нютон за въртелиното движение за едното от тях:

$$-mgl \alpha - D2\alpha = I \ddot{\alpha} \quad [1 \text{ т}] \quad (40)$$

се получава

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl + 2D}{I} \alpha = 0 \quad (41)$$

Следователно сега махалата пак ще трептят по хармоничен закон, но с честота

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl + 2D}{I}} \quad [1 \text{ т}] \quad (42)$$

в) В тази ситуация уравненията на движението за двете махала ще изглеждат така:

$$I\ddot{\alpha}_1 + (mgl + D)\alpha_1 - D\alpha_2 = 0 \quad [1 \text{ т}] \quad (43)$$

$$I\ddot{\alpha}_2 + (mgl + D)\alpha_2 - D\alpha_1 = 0 \quad [1 \text{ т}] \quad (44)$$

където α_1 и α_2 са ъглите на отклонение на двете махала в произволен момент време.

Използвайки дадената им в условието на задачата зависимост от времето

$$\alpha_1(t) = C \cos(\omega_3 t) \cos(\omega_4 t) \quad (45)$$

$$\alpha_2(t) = C \sin(\omega_3 t) \sin(\omega_4 t) \quad (46)$$

намираме техните втори производни:

$$\ddot{\alpha}_1 = -C(\omega_3^2 + \omega_4^2) \cos(\omega_3 t) \cos(\omega_4 t) + 2C\omega_3\omega_4 \sin(\omega_3 t) \sin(\omega_4 t) \quad (47)$$

$$\ddot{\alpha}_2 = -C(\omega_3^2 + \omega_4^2) \sin(\omega_3 t) \sin(\omega_4 t) + 2C\omega_3\omega_4 \cos(\omega_3 t) \cos(\omega_4 t) \quad (48)$$

Замествайки (45), (46), (47) и (48) в (43) и (44) се получава

$$((mgl + D) - I(\omega_3^2 + \omega_4^2))C \cos(\omega_3 t) \cos(\omega_4 t) + (2I\omega_3\omega_4 - D)C \sin(\omega_3 t) \sin(\omega_4 t) \quad (49)$$

$$((mgl + D) - I(\omega_3^2 + \omega_4^2))C \sin(\omega_3 t) \sin(\omega_4 t) + (2I\omega_3\omega_4 - D)C \cos(\omega_3 t) \cos(\omega_4 t) \quad (50)$$

И двете уравнения са изпълнени във всеки един момент време само, ако коефициентите пред тригонометричните функции са нули:

$$(mgl + D) - I(\omega_3^2 + \omega_4^2) = 0 \quad (51)$$

$$2I\omega_3\omega_4 - D = 0 \quad (52)$$

(51) и (52) е система от две уравнения за неизвестните ω_3 и ω_4 . От (52) намираме

$$\omega_3 = \frac{D}{2I\omega_4} \text{ и замествайки в (51): } (mgl + D) - I\left(\frac{D^2}{4I^2\omega_4^2} + \omega_4^2\right) = 0, \text{ което се преобразува}$$

до биквадратното уравнение:

$$\omega_4^4 - \frac{mgl + D}{I} \omega_4^2 + \frac{D^2}{4I^2} = 0 \quad (53)$$

Положителните решения на (53) са:

$$\omega_{41,2} = \sqrt{\frac{\frac{mgl + D}{I} \pm \sqrt{\left(\frac{mgl + D}{I}\right)^2 - \frac{D^2}{I^2}}}{2}} \quad (54)$$

Тъй като уравненията (51) и (52) са симетрични относно смяна на индексите на честотите, то това са и решения за ω_3 . При предположението, че $\omega_3 < \omega_4$ се получава

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{\frac{mgl + D}{I} + \sqrt{\left(\frac{mgl + D}{I}\right)^2 - \frac{D^2}{I^2}}}{2}} \quad [2,5 \text{ т}] \quad (55)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\frac{mgl + D}{I} - \sqrt{\left(\frac{mgl + D}{I}\right)^2 - \frac{D^2}{I^2}}}{2}} \quad [2,5 \text{ т}] \quad (56)$$