

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Русе, 18 – 20 ноември 2005 г.
Специална тема

Задача 1. Точки на Лагранж.

Около звезда с маса M_1 по кръгова орбита обикаля планета с маса M_2 . Разстоянието между центровете на звездата и планетата е d . Намерете:

а) разстоянията от центъра на масата на системата звезда-планета съответно до звездата a_1 и планетата a_2 . [1 т]

б) ъгловата скорост ω , с която звездата и планетата обикалят около центъра на масата на системата звезда-планета. [2 т]

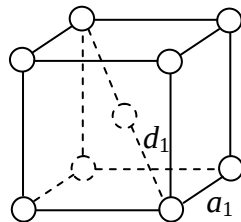
в) в пространството около така избраната система звезда-планета съществуват точки (точки на Лагранж), в които ако се намира трето тяло с маса m , много по-малка от масата на планетата, движещо се с подходяща скорост, то ще остава неподвижно спрямо планетата и звездата (на постоянни разстояния до тях). Три от тези точки лежат на правата звезда-планета. Ако $M_2 \ll M_1$ и допуснете, че разстоянието от тези точки до центъра на масата на системата звезда-планета е близко до a_2 , т.е. може да се представи във вида $a_2 + x_1$, $a_2 - x_2$ и $a_2 + x_3$ ($0 < x_i \ll a_2$), намерете x_1 , x_2 и x_3 . [6 т]

г) ако $d = 1,5 \cdot 10^8$ km, $M_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_2 = 6 \cdot 10^{24}$ kg, изчислете разстоянията от планетата до близките до нея точки на Лагранж. [1 т]

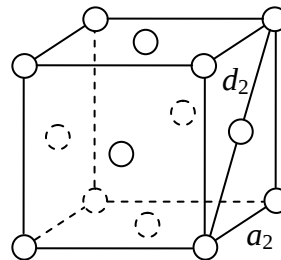
Задача 2. Кубичен кристал.

а) Някакво вещество, съдържащо само един тип атоми, може да съществува в две кристални фази – с обемно центрирана кубична (ОЦК) и със стенноцентрирана кубична (СЦК) кристална решетка. Ако при фазовия преход от едната към другата фаза, обемът на веществото не се променя, пресметнете отношението на разстоянията между най-

близките атоми $\frac{d_2}{d_1}$ (виж Фиг.1). [2 т]



ОЦК



СЦК

Фиг.1

б) Гледано от позицията на един атом, всички останали атоми от кристала могат да се разпределят в групи от атоми, които се намират на едно и също разстояние от избрания атом. Тези групи от атоми лежат на сфери (с център – избрания атом), които се наричат координационни сфери. Намерете радиусите r_i (като функция на ръбовете на клетките a_1 и a_2 и на разстоянията между най-близките атоми d_1 и d_2) на първите (най-малките) четири сфери, и броя атоми N_i , лежащи на тях ($i = 1, 2, 3, 4$) за посочените две кристални решетки – (ОЦК) и (СЦК). Представете резултатите в таблица, подобна на представената по-долу. [2 т]

i	ОЦК			СЦК		
	$r_i = f(a_1)$	$r_i = f(d_1)$	N_i	$r_i = f(a_2)$	$r_i = f(d_2)$	N_i
1						
2						
3						
4						

в) Нека потенциалната енергия на взаимодействие между два атома се задава със следния израз:

$$U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (1)$$

Пресметнете разстоянието r_0 (като функция на σ) между атомите и енергията E_0 на хипотетична двуатомна молекула при ниски температури (кинетичната енергия на системата се пренебрегва). [2 т]

г) Нека за едноатомен кристал със СЦК решетка потенциалната енергия между два атома от кристала се задава с формула (1), а енергията на кристала при ниски температури се задава със следната формула:

$$E(d_2) = \frac{1}{2} N 4\varepsilon \left[A \left(\frac{\sigma}{d_2} \right)^{12} - B \left(\frac{\sigma}{d_2} \right)^6 \right] \quad (2)$$

N – брой атоми в кристала, d_2 – разстоянието между най-близките съседи.

Отчитайки взаимодействието на всеки атом с атомите само от първите му 4 координационни сфери, изчислете константите A и B с пет значещи цифри. [3 т]

Намерете разстоянието между най-близко разположените атоми d_2 (като функция на σ). [1 т]

Задача 3. Свързани махала.

Две еднакви махала са закачени едно до друго на една и съща височина и са свързани с безмасова пружинка, която е неразтегната, когато махалата са вертикални. Всяко едно от махалата има маса m , инерчен момент I (спрямо точката на окачване) и разстояние между точката на окачване и центъра на масата му l . Въртящият момент M_D , с който пружинката действа на махалата, е пропорционален на ъгъла $|\alpha_2 - \alpha_1|$ (α_1, α_2 – ъгли на отклонение на махалата):

$$|M_D| = D|\alpha_2 - \alpha_1|, \quad D = \text{const.} < mgl \quad (2)$$

Земното ускорение е g .

а) Ако двете махала са отклонени еднакво на малък ъгъл от вертикалата в една и съща посока и се пуснат едновременно, намерете кръговата честота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ на тяхното

трептене. [1 т]

б) Ако двете махала са отклонени на един и същ малък ъгъл от вертикалата в противоположни посоки и се пуснат едновременно, намерете кръговата честота

$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ на тяхното трептене. [2 т]

в) Нека първото махало е отклонено на малък ъгъл от вертикалата, а второто махало е вертикално. Махалата се пускат едновременно. Ако зависимостите на техните ъгли на отклонение от времето изглеждат така:

$$\alpha_1(t) = C \cos(\omega_3 t) \cos(\omega_4 t)$$

$$\alpha_2(t) = C \sin(\omega_3 t) \sin(\omega_4 t), \quad \omega_3 < \omega_4,$$

напишете уравнението на движението за двете махала [2 т] и намерете ω_3 [2,5 т] и ω_4 [2,5 т].

Полезна математика: Ако $x \ll 1$, то $(1+x)^n \approx 1+nx$ и $\sin x \approx x$