МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Плевен, 26 – 28 ноември 2004 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Математично махало с променлива дължина.

а) Нека изберем за нулево ниво на потенциалната енергия на топчето точката на окачване. Използвайки закона за запазване на пълната механична енергия и сравнявайки механичата енергия в началния момент време, когато топчето е неподвижно и отклонено на ъгъл α и момента, когато топчето е отклонено на ъгъл β и има скорост v, се получава:

$$-mgl\cos\alpha = -mgl\cos\beta + \frac{mv^2}{2} \qquad (1)$$

Решавайки уравнение (1) спрямо скоростта v се получава:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\beta - \cos\alpha)} \qquad [2\ т] \qquad (2)$$

б) В момента, когато топчето е отклонено на ъгъл β и има скорост v, тъй като то се движи по дъга от окръжност, то има центростремително (нормално) ускорение a_n. Това ускорение се определя от проекцията по направление на нишката на равнодействащата сила, действаща на топчето. Равнодействащата сила е сума на две сили: силата на тежестта на топчето mg и силата на опъване на нишката T. Така получаваме:

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{T - mg\cos\beta}{m} \qquad (3)$$

Решавайки уравнение (3) спрямо T и заместваийки скоростта v с полученото в уравнение (2) се получава:

$$T = mg\cos\beta + \frac{mv^2}{l} = mg\cos\beta + 2mg(\cos\beta - \cos\alpha) = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) \quad [2\ т] \qquad (4)$$

в) При малки ъгли, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} \approx 1 - \frac{\beta^2}{2}$. Замествайки с тази приближена формула в уравнение (4), за силата на опъване T получаваме:

$$T = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) = mg[3(1-\frac{\beta^2}{2}) - 2(1-\frac{\alpha^2}{2})] = mg(1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\beta^2) \qquad (5)$$

При малки ъгли махалото трепти хармонично по закона:

?

$$\beta = \alpha\cos(\omega t)\ , \qquad (6)$$

където $\omega = \frac{2\pi}{t_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$. С t_0 е означен периодът на махалото

Замествайки (6) в (5) намираме

$$T = mg(1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\beta^2) = mg[1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^2\cos^2(\omega t)] \qquad (7)$$

Опростявайки последния израз, получаваме:

$$T = mg\{1 + \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^2\frac{[1+\cos(2\omega t)]}{2}\} = mg[1 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3}{4}\alpha^2\cos(2\omega t)] \quad [3\ т] \qquad (8)$$

г) При издърпване на нишката през малката дупка (точка на окачване) външна сила извършва работа

$$A = F_{cp}\,\Delta s \qquad (9)$$

Средната сила F_{cp} е равна усреднената по времето сила на опъване на нишката T. От уравнение (8) се вижда, че

$$F_{cp} = mg(1 + \frac{\alpha^2}{4}) \qquad (10)$$

Това води до промяна на пълната енергия на махалото. За да намерим тази промяна, най-удобно е да сравним енергията на махалото в две положения на максимално отклонение, когато пълната енергия съдържа само потенциална енергия. Следователно промяната на енергията на махалото ΔE след скъсяване на нишката с Δl е

$$\Delta E = -mg(l - \Delta l)\cos(\alpha + \Delta\alpha) - (-mgl\cos\alpha) \qquad (11)$$

Преработвайки (11), получаваме:

$$\Delta E = -mg(l - \Delta l)[1 - \frac{(\alpha + \Delta\alpha)^2}{2}] + mgl(1 - \frac{\alpha^2}{2}).$$

След като се разкрият скобите и се пренебрегнат членовете от втори порядък, (които са много по-малки от други членове в сумата), се получава:

$$\Delta E = mgl\alpha\Delta\alpha + mg(1 - \frac{\alpha^2}{2})\Delta l \qquad (12)$$

Приравнявайки (12) с (9) се получава:

$$mgl\alpha\Delta\alpha + mg(1 - \frac{\alpha^2}{2})\Delta l = mg(1 + \frac{\alpha^2}{4})\Delta l \qquad (13)$$

Опростявайки уравнение (13) се стига до следната връзка:

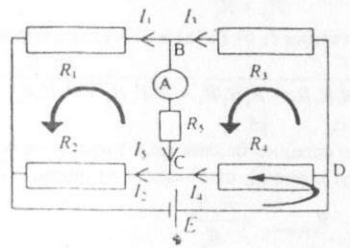
$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{3}{4}\frac{\Delta l}{l} \qquad [4\ т] \qquad (14)$$

Задача 2. Уитстонов мост.

а) Нека означим токовете, течащи през съпротивленията R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5 съответно с I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5. Когато токът I_5 е нула, $I_1 = I_3$ и $I_2 = I_4$. Ако изразим тези токове от закона на Ом, получаваме:

$\frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{U_{BD}}{R_3}$ и $\frac{U_{AC}}{R_2} = \frac{U_{CD}}{R_4}$. Тъй като потенциалите на точка C и точка D в този случай са равни, следва че $U_{AB} = U_{AC}$ и $U_{BD} = U_{CD}$. Разделяйки горните уравнения и съкращавайки равните напрежения, получаваме:

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ или $R_1 = R_3\frac{R_2}{R_4}$. При зададените стойности за съпротивленията се получава: $R_1 = \frac{300\Omega . 100\Omega}{200\Omega} = 150\Omega$ [1 т]



Фиг 1

б) Нека токовете I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5, течащи през съпротивленията R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5, имат посоки, както са означени на Фиг 1. Тъй като имаме 5 неизвестни (токовете), трябва да използваме 5 независими уравнения, които могат да се получат от законите (правилата) на Кирхоф. Нека те да са следните

$$I_3 = I_1 + I_5 \quad \text{(първо правило приложено за точка B)} \qquad (15а)$$

$$I_2 = I_4 + I_5 \quad \text{(първо правило приложено за точка C)} \qquad (15б)$$

$$R_1I_1 - R_2I_2 - R_5I_5 = 0 \quad \text{(второ правило приложено за контура BAC)} \qquad (15в)$$

$$R_3I_3 + R_5I_5 - R_4I_4 = 0 \quad \text{(второ правило приложено за контура DBC)} \qquad (15г)$$

$$R_4I_4 + R_2I_2 = E \quad \text{(второ правило приложено за контура DCAE)} \qquad (15д)$$

Тази система от 5 уравнения с 5 неизвестни решаваме чрез последователно елиминиране на неизвестните. Първо от (15а) елиминираме тока I_3:

$$I_3 = I_1 + I_5 \qquad (16а)$$

$$I_2 = I_4 + I_5 \qquad (16б)$$

$$R_1I_1 - R_2I_2 - R_5I_5 = 0 \qquad (16в)$$

$$R_3(I_1 + I_5) + R_5I_5 - R_4I_4 = 0 \qquad (16г)$$

$$R_4I_4 + R_2I_2 = E \qquad (16д)$$

След това от (16б) елиминираме тока I_2:

$$I_2 = I_4 + I_5 \qquad (17б)$$

$$R_1I_1 - R_2(I_4 + I_5) - R_5I_5 = 0 \qquad (17в)$$

$$R_3I_1 + (R_5 + R_3)I_5 - R_4I_4 = 0 \qquad (17г)$$

$$R_4I_4 + R_2(I_4 + I_5) = E \qquad (17д)$$

След това от (17в) елиминираме тока I_1:

$$I_1 = \frac{R_2I_4 + (R_2 + R_5)I_5}{R_1} \qquad (18в)$$

$$R_3\frac{[R_2I_4 + (R_2 + R_5)I_5]}{R_1} + (R_3 + R_5)I_5 - R_4I_4 = 0 \qquad (18г)$$

$$(R_4 + R_2)I_4 + R_2I_5 = E \qquad (18д)$$

Опростявайки уравнение (18г) се получава:

$$(R_2R_3 - R_1R_4)I_4 + (R_1R_3 + R_1R_5 + R_2R_3 + R_3R_5)I_5 = 0 \qquad (19г)$$

От уравнение (18д) може да се изрази тока I_4:

$$I_4 = \frac{E - R_2I_5}{R_2 + R_4} \qquad (19д)$$

Замествайки I_4 от (19д) в (19г) след опростяване се получава:

$$I_5 = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)E}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 + R_1R_2R_5 + R_2R_3R_5 + R_3R_4R_5 + R_4R_1R_5}$$

... (20г) [5 т]

в) При идеално балансиран Уитстонов мост ($I_5 = 0$) съгласно получения резултат в подусловие а), стойността на неизвестното съпротивление е

$$R_{1идеално} = \frac{R_2R_3}{R_4} \qquad (20)$$

На практика, обаче, токът през амперметъра никога не е точно нула, а е само по-малък от чувствителността на амперметъра ($I_5 << I_{5max}$). В този случай стойността на съпротивлението R_1 ще се различава от $R_{1идеално}$ с ΔR_1:

$$R_1 = R_{1идеално} + \Delta R_1 \qquad (21)$$

равенство (20г) може да се представи във вида

$$I_5 = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)E}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 + (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_4 + R_4R_1)R_5} \qquad (22)$$

Тъй като в този случай $R_5 << R_1, R_2, R_3, R_4$, равенство (22) се опростява до

$$I_5 = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)E}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4} \qquad (23)$$

Замествайки в (23) R_1 с резултата от (21) и (20), и отчитайки, че $R_2 = R_4$ се получава:

$$I_5 = \frac{[R_2R_3 - (R_3 + \Delta R_1)R_2]E}{(R_3 + \Delta R_1)R_2R_3 + (R_3 + \Delta R_1)R_2^2 + (R_3 + \Delta R_1)R_3R_2 + R_2^2R_3} \qquad (24)$$

Ако допуснем, че $\Delta R_1 << R_1$ (което е естествено за точен експеримент)

$$I_5 \approx -\frac{\Delta R_1R_2E}{R_2R_3^2 + R_3R_2^2 + R_3^2R_2 + R_2^2R_3} = -\frac{\Delta R_1E}{2(R_2 + R_3)R_3} \qquad (25)$$

Следователно относителната грешка е

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} \approx \frac{\Delta R_1}{R_3} = \frac{2(R_2 + R_3)I_{5max}}{E} \qquad (26)$$

При зададените стойности на величините се получава.

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{2(10k\Omega + 10k\Omega)10^{-6}A}{2V} = 0{,}02 = 2\% \qquad [2\ т] \qquad (30)$$

г) В това подусловие разсъждавайки по същия начин като в подусловие в), но отчитайки сега, че съпротивлението на амперметъра е много по-голямо от останалите съпротивления във веригата ($R_5 >> R_1, R_2, R_3, R_4$) равенство (22) се опростява до:

$$I_5 = \frac{(R_2R_3 - R_1R_4)E}{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_4 + R_4R_1)R_5} \qquad (31)$$

Отчитайки отново (21) и (20), и отчитайки, че $R_2 = R_4$, равенство (31) се преобразува до:

$$I_5 = \frac{[R_2R_3 - (R_3 + \Delta R_1)R_2]E}{[(R_3 + \Delta R_1)R_2 + R_2R_3 + R_3R_2 + R_2(R_3 + \Delta R_1)]R_5} \approx -\frac{\Delta R_1R_2E}{4R_2R_3R_5} =$$

$$= \frac{\Delta R_1E}{4R_3R_5} \qquad (32)$$

Следователно относителната грешка е

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} \approx \frac{\Delta R_1}{R_3} = \frac{4R_5I_{5max}}{E} \qquad (33)$$

При зададените стойности на величините се получава

$$\varepsilon = \frac{\Delta R_1}{R_1} \approx \frac{4.500\Omega\,10^{-6}A}{2V} = 0{,}001 = 0{,}1\% \qquad [2\ т] \qquad (34)$$

<u>Задача 3</u>. **Слънце.**

а) Ако допуснем, че слънчевата повърхност излъчва като идеално черно тяло, то излъчената от нея енергия от единица площ за единица време съгласно закона на Стефан-Болцман ще бъде

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \sigma T^4 \quad , \tag{35}$$

а от цялата слънчева повърхност излъчената мощност ще бъде

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \sigma T^4 4\pi R_C^{\,2} \tag{36}$$

Тази мощност равномерно се разпределя на сфера с радиус разстоянието Земя-Слънце a. Следователно падащата мощност на единица площ на Земята (т.е. Слънчевата константа A) ще бъде

$$A = \frac{\sigma T^4 4\pi R_C^{\,2}}{4\pi a^2} = \frac{\sigma T^4 R_C^{\,2}}{a^2} \tag{37}$$

Така за температурата на повърхността на Слънцето се получава

$$T = \left(\frac{Aa^2}{\sigma R_C^{\,2}}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{38}$$

След заместване се получава

$$T = \left(\frac{1400\,\frac{W}{m^2}.150^2.10^{18}\,m^2}{5{,}67.10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4}.6{,}96^2.10^{16}\,m^2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 5800K \qquad [3\ \text{т}] \tag{39}$$

б) Съгласно формулата на Айнщайн

$$E = mc^2 \ , \tag{40}$$

всяко тяло, което излъчва енергия, губи от своята маса. Използвайки тази формула, получаваме:

$$\frac{\Delta M}{M_C} = \frac{\Delta E}{c^2 M_C} = \frac{\sigma T^4 4\pi R_C^{\,2} t}{c^2 M_C} \tag{41}$$

Използвайки (38) за T, можем да представим отговора и в друг вид:

$$\frac{\Delta M}{M_C} = \frac{\sigma T^4 4\pi R_C^{\,2} t}{c^2 M_C} = \frac{\sigma \frac{Aa^2}{\sigma R_C^{\,2}} 4\pi R_C^{\,2} t}{c^2 M_C} = \frac{4\pi A a^2 t}{c^2 M_C} \tag{42}$$

Замествайки с дадените стойности получаваме:

$$\frac{\Delta M}{M_C} = \frac{4\pi A a^2 t}{c^2 M_C} = \frac{4.3{,}14.1400\,\frac{W}{m^2}.150^2 10^{18}\,m^2.10^9.365.24.3600s}{3^2 10^{16}\,\frac{m^2}{s^2}\,2.10^{30}\,kg} = 6{,}9.10^{-5} \quad [2\text{т}] \tag{43}$$

Важният извод, който може да се направи е, че една звезда по време на своя живот променя малко своята маса. С други думи масата на звездата е един от параметрите (константите), които определят нейното развитие.

в) Нека с N_H бележим броя водородни атоми в Слънцето. Следователно масовата концентрация на водорода в Слънцето е (ако приемем че масата на водорода е приблизително равна на масата на протона):

$$n_H = \frac{N_H m_p}{M_C} \tag{44}$$

Поради излъчването, за време t броят на водородните атоми ще намалее с

$$\Delta N_H = \frac{4E}{E_0} \ . \tag{45}$$

където E_0 е енергията отделена при превръщането на 4 протона в ядро хелий, а E е излъчената енергия за време t. Следователно след време t водородната концентрация ще бъде

$$n_H' = \frac{N_H' m_p}{M_C} = \frac{(N_H - \Delta N_H) m_p}{M_C} = \frac{(N_H - \frac{4E}{E_0}) m_p}{M_C} = n_H - \frac{4\sigma T^4 4\pi R_C^{\,2} t m_p}{M_C E_0} \tag{46}$$

Замествайки с дадените стойности, получаваме

$$n_H' = n_H - \frac{4\sigma T^4 4\pi R_C^{\,2} t m_p}{M_C E_0} =$$

$$= 0{,}75 - \frac{4.5{,}67.10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4}\,5800^4\,K^4\,4.3{,}14\,6{,}96^2\,10^{16}\,m^2.10.10^9.365.24.3600s\,1{,}67.10^{-27}\,kg}{2.10^{30}\,kg.26{,}7.10^6.1{,}6.10^{-19}\,J} =$$

$$= 0{,}75 - 0{,}096 \approx 0{,}65 = 65\% \quad [3\ \text{т}] \tag{47}$$

г) При свиването на звездата, нейния инерчен момент намалява, в резултат на което ъгловата скорост силно нараства. При постоянна плътност инерчният момент на кълбо е пропорционален на квадрата на радиуса на кълбото: $I \propto r^2$ или $I = kr^2$ (за кълбо $k = 2/5$, но конкретната стойност не е нужна за решението). Следователно, използвайки закона на запазване на момента на импулса, получаваме:

$$I_3 \omega_3 = I_H \omega_H \quad \text{или} \quad kr_3^{\,2}\frac{2\pi}{T_3} = kr_H^{\,2}\frac{2\pi}{T_H} \tag{48}$$

След съкращаване се получава:

$$r_H = r_3 \sqrt{\frac{T_H}{T_3}} \tag{49}$$

Замествайки с дадените стойности, получаваме

$$r_H = 6{,}96.10^8\,m\sqrt{\frac{10^{-3}\,s}{25.24.3600s}} \approx 15\ \text{km} \qquad [2\ \text{т}] \tag{50}$$