5

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Стара Загора, 28 – 30 ноември 2003 г
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1.

а) Нека вертикалните координати на топчетата А и Б са съответно x^A и $x^Б$. Нека времето, за което топчето Б се връща на повърхността, без да се удря с топчето А, е $t_Б$. То се определя от уравнението

(1) $x^Б = x_0^Б + v_0^Б t - \frac{gt^2}{2}$

По условие $x_0^Б = 0$, а $t = t_Б$, когато $x^Б = 0$, следователно $0 = v_0^Б t_Б - \frac{gt_Б^2}{2}$, откъдето получаваме

(1') $t_Б = \frac{2v_0^Б}{g}$.

Нека t_1 е времето до удара между двете топчета. За да могат двете топчета да се ударят преди топчето Б да се върне на повърхността, $t_1 < t_Б$.

Времето t_1 можем да намерим от уравнение (1) и уравнението за движение на топчето А:

(2) $x^A = x_0^A + v_0^A t - \frac{gt^2}{2}$, където $x_0^A = h_0$, $v_0^A = 0$, следователно уравнение (2) се опростява до

(2') $x^A = h_0 - \frac{gt^2}{2}$.

Така приравнявайки $x^A = x^Б$, получаваме $v_0^Б t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = h_0 - \frac{gt_1^2}{2}$, откъдето $t_1 = \frac{h_0}{v_0^Б}$. Топчетата ще се ударят помежду си преди топчето Б да се удари в повърхността, когато $t_1 < t_Б$ или $\frac{h_0}{v_0^Б} < \frac{2v_0^Б}{g}$, следователно $v_0^Б > \sqrt{\frac{gh_0}{2}}$. При дадените числени стойности за скоростта $v_0^Б$ се получава $v_0^Б > \sqrt{\frac{10m/s^2 \, 6{,}05m}{2}} = 5{,}5$ m/s

б) При идеално еластичен удар в повърхността скоростта на топчето Б ще се запазва. Следователно движението му ще бъде периодично с период $t_Б$. В такъв случай броят на ударите N на топчето Б в повърхността преди да се удари с топчето А определяме от условието

(3) $N < \frac{t_A}{t_Б} < N+1$, където t_A е времето за падане на топче А, без да се удари с топче Б, а $t_Б$ е времето за падане на топче Б, без да се удари с топче А. $t_Б$ е намерено в подусловие а), а t_A намираме от уравнение (2'). При $t = t_A$, $x_A = 0$,

236

получаваме $0 = h_0 - \frac{g t_A^2}{2}$, $t_A = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$. Така получаваме $\frac{t_A}{t_Б} = \frac{\sqrt{\frac{2h_0}{g}}}{\frac{2v_0^Б}{g}} = \sqrt{\frac{gh_0}{2}} \frac{1}{v_0^Б}$

При дадените числени стойности $\frac{t_A}{t_Б} = \sqrt{\frac{10m/s^2 \, 6{,}05m}{2}} \frac{1}{1{,}5m/s} = 3\frac{2}{3}$. Броят на ударите е $N = 3$.

в) За да намерим височината на удара h при условията, дадени в подусловие б), уместно е да се разгледа движението на топчетата като се приеме за начален момент момента време, когато топчето Б вече се е ударило N пъти в повърхността. Ако старото време е t, то новото време $t' = t - Nt_Б$. В такъв случай от тук нататък задачата прилича на подусловие а) с тази разлика, че сега топчето А в този момент се намира на височина h_0^A и има скорост v_0^A. h_0^A и v_0^A се намират от равенствата

(4) $h_0^A = h_0 - \frac{g(Nt_Б)^2}{2}$

(5) $v_0^A = g(Nt_Б)$

Височината на удара h определяме от законите на движение на двете топчета

(6) $x^A = h_0^A - v_0^A t' - \frac{g t'^2}{2}$

(7) $x^Б = v_0^Б t' - \frac{g t'^2}{2}$

В момента на удара $t'_{уд}$, $x^A = x^Б = h$. Тогава

(8) $h_0^A - v_0^A t'_{уд} - \frac{g t'^2_{уд}}{2} = v_0^Б t'_{уд} - \frac{g t'^2_{уд}}{2}$, следователно $t'_{уд} = \frac{h_0^A}{v_0^A + v_0^Б}$. Оттук като заместим в уравнение (7), получаваме

(9) $h = \frac{v_0^Б h_0^A}{v_0^A + v_0^Б} - \frac{g h_0^{A2}}{2(v_0^A + v_0^Б)^2} = \frac{h_0^A}{v_0^A - v_0^Б}[v_0^Б - \frac{g h_0^A}{2(v_0^A + v_0^Б)}]$

Използвайки дадените числени стойности последователно намираме от формули (1'), (4), (5) и (9)

$t_Б = \frac{2.1{,}5m/s}{10m/s^2} = 0{,}3s$, $h_0^A = 6{,}05m - \frac{10m/s^2(3.0{,}3s)^2}{2} = 6{,}05m - 4{,}05m = 2m$

$v_0^A = 10m/s^2(3.0{,}3s) = 9m/s$,

$h = \frac{2m}{9m/s + 1{,}5m/s}[1{,}5m/s - \frac{10m/s^2 \, 2m}{2(9m/s + 1{,}5m/s)}] = 0{,}104m$

6

Задача 2.

а) Токът във верига, на която е подадено синусово напрежение, е също синусов. Амплитудите на напрежението U_0 и тока I_0 са свързани с техните ефективни стойности така:

(1) $I_{eff} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$

(2) $U_{eff} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$

Ефективните стойности на тока и напрежението са свързани с импеданса Z на веригата с уравнението:

(3) $U_{eff} = I_{eff} Z$

Импедансът на верига, състояща се от последователно включени кондензатор с капацитет C и проводници с индуктивност L е равна на

(4) $Z = \sqrt{(\omega L)^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}$

Следователно амплитудата на тока I_0 е равна на

(5) $I_0 = \dfrac{U_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}}}$

б) Промяната на заряда върху плочите на кондензатора (дисковете) $\dfrac{dQ(t)}{dt}$ е свързана с моментната стойност на тока $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ по следния начин:

(6) $\dfrac{dQ(t)}{dt} = I(t)$

След интегриране се намира, че

(7) $Q(t) = \int \dfrac{dQ(t)}{dt} dt = \int I_0 \sin(\omega t) dt = \dfrac{I_0}{\omega} \int \sin(\omega t) d(\omega t) = -\dfrac{I_0}{\omega} \cos(\omega t) + C$, където $C = 0$.

Следователно максималната стойност на натрупания заряд Q_0 е

(8) $Q_0 = \dfrac{I_0}{\omega}$

в) Моментната сила $F_C(t)$, с която ще си взаимодействат двата диска (двете плочи на кондензатора), е равна на

(9) $F_C(t) = Q(t) E_{диск}(t)$, където $E_{диск}(t) = \dfrac{E_C(t)}{2}$, $E_C(t)$ – електричното поле в кондензатора, съставено от електричните полета, които създават двата диска.

$E_C(t)$ е свързано с напрежението $U_C(t)$, $E_C(t) = \dfrac{U_C(t)}{d_C}$, а $U_C(t) = \dfrac{Q(t)}{C}$, където

$C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_C} = \dfrac{\varepsilon_0 \pi R_C^2}{d_C}$. Следователно

(10) $F_C(t) = \dfrac{Q(t)^2 d_C}{2 d_C \varepsilon_0 \pi R_C^2} = \dfrac{Q(t)^2}{2 \varepsilon_0 \pi R_C^2}$ Формулата е аналогична на формулата за отделено количество топлина върху съпротивление при променлив ток.

235

(11) $Q(t)=I^2(t)R$, $Q_{cp}=I_{ef}^2R$. Аналогично можем да въведем ефективна стойност на заряда $Q_{ef}=\frac{Q_0}{\sqrt{2}}$. Тогава за средната сила F_C ще получим

(12) $F_C=\frac{I_0^2}{4\pi\varepsilon_0\omega^2R_C^2}$

г) Моментната сила $F_L(t)$ с която ще си взаимодействат двата проводника може да се получи приближено по следния начин: тъй като разстоянието между проводниците $d_L \ll R_L$, може да се приеме, че магнитното поле, което създава всеки един от проводниците в точка от другия проводник е приблизително същото, каквото би създавал прав безкраен проводник, а то е

(13) $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d_L}$

Моментната сила, която ще действа на всеки един от проводниците по закона на Ампер (тя ще е сила на привличане) ще е равна на

(14) $F_L(t)=B(t)I(t)2\pi R_L=\frac{\mu_0 I^2(t)R_L}{d_L}$

Използвайки разсъжденията в подточка в) по същия начин се получава за средната сила

(15) $F_L=\frac{\mu_0 I_{ef}^2R_L}{d_L}=\frac{\mu_0 I_0^2R_L}{2d_L}$

д) Везната ще бъде в равновесие, когато двете сили F_C и F_L се уравновесяват. От равенства (12) и (15) получаваме

(16) $\frac{I_0^2}{4\pi\varepsilon_0\omega_{рез}^2R_C^2}=\frac{\mu_0 I_0^2R_L}{2d_L}$ След опростяване получаваме

(17) $\omega_{рез}=\sqrt{\frac{d_L}{2\varepsilon_0\mu_0\pi R_C^2R_L}}=c\sqrt{\frac{d_L}{2\pi R_C^2R_L}}$. При измерена честота $\nu_{рез}=9{,}525$ MHz, за скоростта на светлината c се получава

(18)
$$c=\omega_{рез}\sqrt{\frac{2\pi R_C^2R_L}{d_L}}=2\pi\nu_{рез}\sqrt{\frac{2\pi R_C^2R_L}{d_L}}=$$
$$2.\pi.9{,}525.10^6s^{-1}\sqrt{\frac{2\pi.(2.10^{-1}m)^2\,2.10^{-1}m}{2.10^{-3}m}}=3{,}000.10^8m/s$$

е) Тъй като силата F_C на зависи от разстоянието между дисковете, а силата F_L зависи от разстоянието d_L между проводниците като $F_L\propto\frac{1}{d_L}$, равновесието ще е неустойчиво.

Задача 3.

а) Нека ъгъл α е ъгълът, който наклонените ивици на горната повърхност сключват с хоризонталата. Следователно $tg\alpha = \frac{a}{d}$. При $a << d$, $tg\alpha << 1$,

$tg\alpha \approx \alpha$, $\alpha \approx \frac{a}{d}$. Нека лъч се движи в пластинката, сключвайки ъгъл γ с вертикалата, а излизайки отгоре сключва ъгъл φ с вертикалата. Нека той пресича пластинката в точка разположена над ивица В. Тогава от закона на Снелиус се получава:

(1) $\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} = n$. Ъгълът φ е минимален, когато ъгълът $\beta = 0$. Тогава от ивицата, разположена над рисунка В, под ъгъл φ_{min} ще се вижда рисунка В.

От (1) получаваме $\frac{\sin(\varphi_{min}+\alpha)}{\sin(\alpha)} = n \approx \frac{\varphi_{min}+\alpha}{\alpha}$, $\varphi_{min} = (n-1)\alpha = (n-1)\frac{a}{d}$.

Забележете, че $\varphi_{min} < \alpha$. Числената стойност ще бъде

$$\varphi_{min} = \frac{(1.6-1).25}{200} = 0.075rad = 4.297^0$$

За да се вижда само рисунката В и от ивицата, разположена над ивица А, трябва лъчите пресичащи тази ивица, да се движат вътре в пластинката под ъгъл β_1, удовлетворяващ условията

(2) $\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha-\beta_1)} = n$ и

(3) $tg\beta_1 = \frac{d}{h+a}$

Тъй като $\alpha - \varphi << 1 \Rightarrow \alpha - \beta_1 << 1 \Rightarrow \beta_1 << 1$. Следователно

(4) $tg\beta_1 = \frac{d}{h+a} \approx \beta_1 \approx \frac{d}{h}$

От (2) получаваме

(5) $\beta_1 = \frac{2(n-1)\alpha}{n} = 0.09375rad = 5.371^0$

От (4) и (5) се получава

(6) $h = \frac{d}{\beta_1} = 2133\mu m$

б) Нека предположим, че сноп лъчи, излизащи от ивица, разположена над рисунка В, идват от рисунка В и тя се вижда най-добре за втори път. Това означава, че лъчите вътре в пластинката сключват ъгъл β_2 с вертикалата, който се определя от следното условие

(7) $tg\beta_2 = \frac{2d}{h}$. При дадено $d = 200\mu m$ и изчислено в подусловие а) $h = 2133\mu m$,

получаваме за $\beta_2 = 10,621^0$. Прилагайки закона на Снелиус от уравнение (1) намираме ъгъла φ_2, под който лъчите излизат от пластинката

(8) $\frac{\sin(\varphi_2+\alpha)}{\sin(\beta_2+\alpha)} = n$, $\alpha = arctg\frac{a}{d} = 7.125^0$ $\varphi_2 = \arcsin[n\sin(\beta_2+\alpha)] - \alpha = 22,063^0$

234

Под същия ъгъл φ_2 трябва да излизат лъчите и от ивицата, разположена над рисунка А. Това означава, че те ще се движат вътре в пластинката под ъгъл β_2, определен от условието

(9) $\dfrac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\sin(\beta_2 - \alpha)} = n$. Следователно $\beta_2 = \arcsin[\dfrac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{n}] + \alpha = 16.396^0$.

Така можем да получим от каква част на основата идват лъчите, излизащи от ивица, разположена над рисунка А. Нека най-десния лъч на снопа идва от основата от точка, отместена надясно на разстояние x. Тогава

(10) $\dfrac{x}{h+a} = tg\beta_2$, $x = (h+a)tg\beta_2 = 635$ μm.

Разделяйки това отместване на ширината на ивиците d получаваме, че лъчът ще идва от точка, отместена на $3.175d$. Следователно, докато първият сноп идва изцяло от рисунка В, вторият сноп ще дава 0.175 части от рисунка А и 0.825 части от рисунка В.

в) Когато ъгълът на гледане е максимален и равен на 90^0, лъчът вътре ще се движи под ъгъл β_{max}, определен от условието

(11) $\dfrac{\sin(90 - \alpha)}{\sin \beta_{max}} = n$. Оттук се получава $\beta_{max} = 38.329^0$. При такъв ъгъл лъчът ще идва от точка от основата, отместена на разстояние $x = kd$, като

(12) $\dfrac{x}{h+a} = tg\beta_{max}$. Оттук се получава за k

(13) $k = \dfrac{(h+a)tg\beta_{max}}{d} = 8.53$. Следователно ще се наблюдават последователно 8 рисунки. От другата страна броят ще е същия и общия брой ще бъде 16.