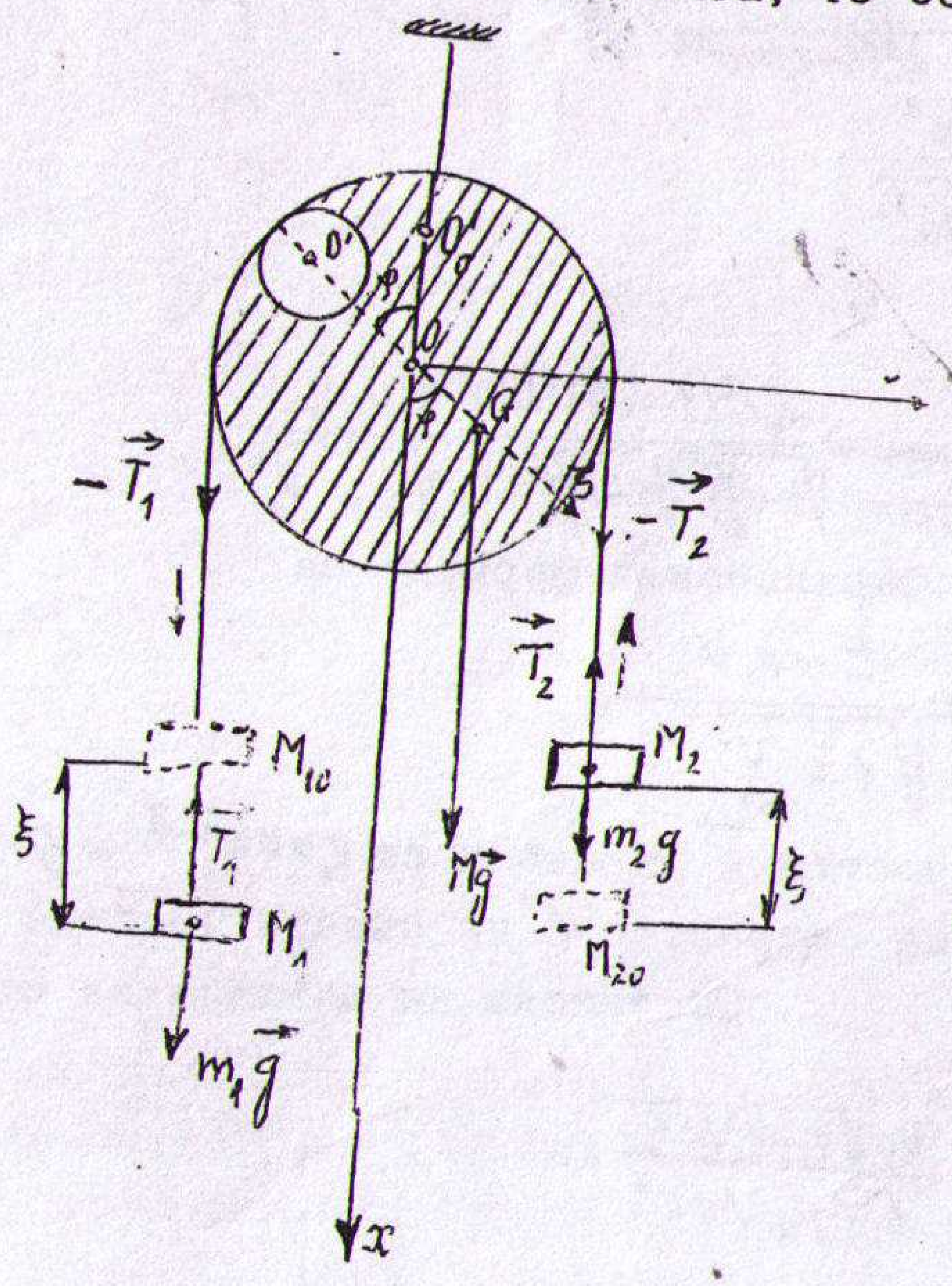
НА ЗАДАЧИТЕ

Решение на 1. задача: а/ Тъй о ускоренията не зависят от началните условия на задачата, то без ограничение на общността на нашите разглеждания можем да считаме, че началното положение на центъра O' е върху оста Ox – положението O'_0. Тогава преместванията в даден момент на M_1 и M_2 имат големина ξ и

$$\xi = \varphi R. \qquad /1/$$



фиг. 1.

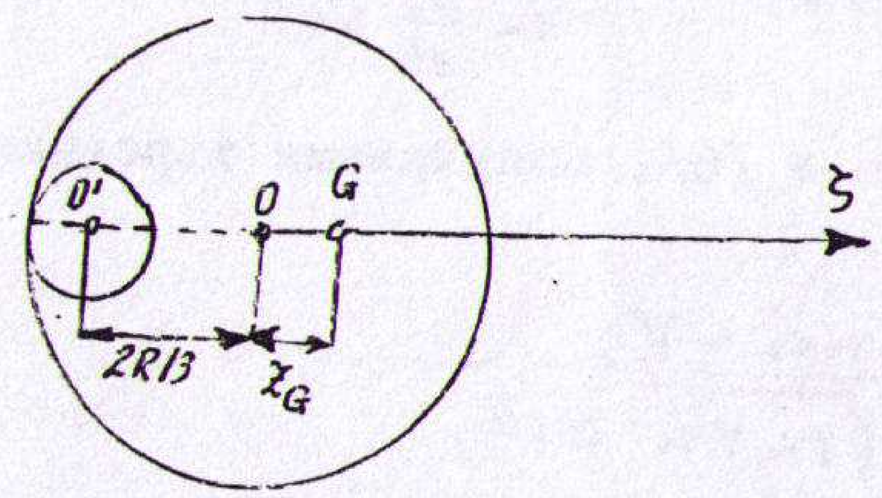
Уравненията на движение на трите тела са (фиг. 1)

10т.
$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \\ J\varepsilon = (T_1 - T_2)R - Mg|OG|\sin\varphi \\ a = \varepsilon R \end{cases} \qquad /2/$$

където J е инерчния момент на диска спрямо оста $Q'Q''$, а G е центъра на масите му.

За да намерим $|OG|$ разглеждаме фиг. 2. От определението на център на масите имаме

$$0 = Mz_G - \frac{\rho\pi R^2 \ell}{9} 2R, \qquad /3/$$



фиг. 2.

където

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 \ell (1 - \frac{1}{9})} = \frac{9M}{8\pi R^2 \ell}, \qquad /4/$$

е плътността на диска, а ℓ е дебелината му. От /3/ и /4/ получаваме

10т.
$$|OG| = z_G = \frac{R}{12}. \qquad /5/$$

За да определим инерчния момент J на диска, използваме адитивността на инерчния момент и теоремата на Щайнер. Получаваме

10т.
$$J + \frac{\pi R^2 \rho \ell}{9}\left(\frac{R^2}{2} + \frac{4R^2}{9}\right) = \frac{1}{2}\pi\rho\ell R^4 = \frac{4}{9}MR^2. \qquad /6/$$

От първото и второто уравнение на системата /2/ получаваме

$$T_1 = m_1(g - a), \quad T_2 = m_2(g + a), \qquad /7/$$

а от третото ѝ уравнение и като използваме /7/ и /5/ намираме

$$a = \frac{12(m_1 - m_2)g - Mg\sin\varphi}{12\left(\frac{4}{9}M + m_1 + m_2\right)} \qquad /8/$$

Следователно ускорението на M_1 е $\vec{a}_1 = (a, 0)$, а ускорението на M_2 е $\vec{a}_2 = (-a, 0)$. Големината на ъгловото ускорение на диска е $\varepsilon = a/R$.

Като имаме предвид /8/ и /1/ при $m_1 = m_2 = m$ уравнението на движение на диска добива вида

10т.
$$\varepsilon = -\frac{3Mg\sin\varphi}{8R(2M + 9m)},$$

което е уравнение на движение на физично махало.

в/ При $m_1 = m_2 = \frac{M}{2}$ големините на ускоренията на телата M_1 и M_2 са равни на

5т.
$$a = \frac{3g\sin\varphi}{52}.$$

Тогава от /7/ получаваме

5т. $-\vec{T}_1 = \left(\frac{M}{2}g(1 - \frac{3}{52}\sin\varphi), 0\right)$, $-\vec{T}_2 = \left(\frac{M}{2}g(1 + \frac{3}{52}\sin\varphi), 0\right)$.

г/ Периодът е

10т.
$$T = 4\pi\sqrt{\frac{13R}{3g}}$$

5т. д/ Възможно е, защото при малки трептения енергията на махалото малко се отличават енергията му в стабилно равновесно състояние. Когато O' е в положение O'_0 махалото е в стабилно равновесно състояние, защото тогава масовият му център има най-малка височина.

Решение на 2. задача. а) Понеже изменението на вътрешната енергия на едно тяло при кръгов процес е равно на нула, то извършената работа при дадения кръгов процес е равно на обмененото при него количество топлина –

5т.
$$A = Q. \qquad /1/$$

Ясно е, че обмененото количество топлина $Q_{ГА}$ при процеса ГА е равно на A. Поради това, че вътрешната енергия на идеален газ не зависи от обема му /закон на Джаул/, обмененото количество топлина при изотермен процес в идеален газ е равно на извършената при него работа –

5т.
$$Q_{AB} = RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} = 2{,}3RT\lg\frac{V_B}{V_A} = A_{AB}. \qquad /2/$$

Като използваме съотношението

15т.
$$\frac{\delta Q}{T} = dS, \qquad /3/$$

където S е ентропията на системата и го приложим за дадения кръгов процес, получаваме

5т.
$$\frac{\Delta Q_{ГА}}{T_1} + \frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CDE}}{T_2} = 0, \qquad /4/$$

от където като имаме предвид /2/ получаваме

5т. $$Q_{C2E} = -\frac{T_2}{T_1}\left(\lambda + RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}\right) = -\frac{T_2}{T_1}\left(\lambda + 2{,}3\,RT_1 \lg\frac{V_B}{V_A}\right). \qquad /5/$$

Тогава

5т. $$A = Q = \left(\lambda + 2{,}3.\,RT_1 \lg\frac{V_B}{V_A}\right).\,\frac{T_1 - T_2}{T_1} = 2319{,}7\,J. \qquad /6/$$

б/Кпд η се дефинира така

5т. $$\eta = \frac{A}{Q_1}, \qquad /7/$$

където Q_1 е приетото за един цикъл количество топлина. Очевидно

10т. $$Q_1 = Q_{ГА} + Q_{АВ} = \lambda + RT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}. \qquad /8/$$

От /6/, /7/ и /8/получаваме

5т. $$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}50.$$

в/ Уравнението за адиабатен процес в идеален газ може да се напише и така

10т. $$TV^{\gamma-1} = const. \qquad /9/$$

Приложено за адиабатния процес BC получаваме уравнението

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1},$$

откъдето получаваме

10т. $$\gamma = 1 + \frac{\lg\frac{T_1}{T_2}}{\lg\frac{V_C}{V_B}} = 1{,}40.$$

г/ Изменението ΔU на вътрешната енергия по кръговия процес АВСДА е равно на 0 -

5т. $$0 = \Delta U = \Delta U_{ДА} + \Delta U_{BC} = \Delta U_{ДА} - A_{BC}.$$

Работата A_{BC} по адиабатния процес ВС е известна

10т. $$A_{BC} = \frac{P_C V_C^{\gamma}}{1-\gamma}\left[\frac{1}{V_C^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_B^{\gamma-1}}\right] = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

Следователно

5т. $$\Delta U_{ДА} = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = 8{,}3.10^3\,J.$$

<u>Решение на задача 3.</u>а)Като имаме предвид, че

5т. $$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \qquad /1/$$

където m_0 е масата при покой, а v_x е проекцията на скоростта $\vec{v}$ на тялото върху оста Ох, за проекцията p_x' на импулса на тялото върху оста О'х' получаваме последователно

$$p_x' = \frac{m_0 v_x'}{\sqrt{1 - \frac{v_x'^2}{c^2}}} = \frac{m_0(v_x - V)}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)\sqrt{1 - \frac{(v_x - V)^2}{c^2\left(1 - \frac{(v_x - V)^2}{c^2(1 - v_x V/c^2)^2}\right)}}} = \frac{m_0(v_x - V)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2 - \frac{(v_x - V)^2}{c^2}}} =$$

5т. $$= \frac{m_0(v_x - V)}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)}} = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad /2/$$

За енергията имаме

5т. $$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x'^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{(v_x - V)^2}{c^2(1 - v_x V/c^2)^2}}} = \frac{m_0 c^2 (1 - v_x V/c^2)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad /3/$$

Следователно търсените трансформационни формули са

5т. $$p_x' = \frac{p_x - \frac{EV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad /4/$$

б/ Компонентите на скоростта $\vec{v}$ спрямо К са $v_x = v\sin\tilde{\theta}$ и $v_y = v\cos\tilde{\theta}$, където $v = |\vec{v}|$. Компонентите на скоростта $\vec{v}'$ на същата частица спрямо К' са $v_x' = v'\sin\tilde{\theta}'$ и $v_y' = v'\cos\tilde{\theta}'$. От закона на Айнщайн за събиране на скоростите

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \qquad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \qquad /5/$$

имаме

10т. $$v'\sin\tilde{\theta}' = \frac{v\sin\tilde{\theta} - V}{1 - \frac{vV}{c^2}\sin\tilde{\theta}}, \qquad v'\cos\tilde{\theta}' = \frac{v\sqrt{1 - V^2/c^2}\cos\tilde{\theta}}{1 - \frac{vV}{c^2}\sin\tilde{\theta}}. \qquad /6/$$

Като разделим двете равенства в /6/, получаваме търсения закон за трансформация

$$tg\,\tilde{\theta}' = \frac{v\sin\tilde{\theta} - V}{v\sqrt{1 - V^2/c^2}\cos\tilde{\theta}}. \qquad /7/$$

Ако θ е ъгълът между $\vec{v}$ и оста Ох, то от /5/ имаме /$v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$)

5т. $$v'\cos\theta' = \frac{v\cos\theta - V}{1 - \frac{vV}{c^2}\cos\theta}, \qquad v'\sin\theta' = \frac{v\sqrt{1 - V^2/c^2}\sin\theta}{1 - \frac{vV}{c^2}\cos\theta}. \qquad /8/$$

Като разделим равенствата /8/ получаваме закона за трансформация

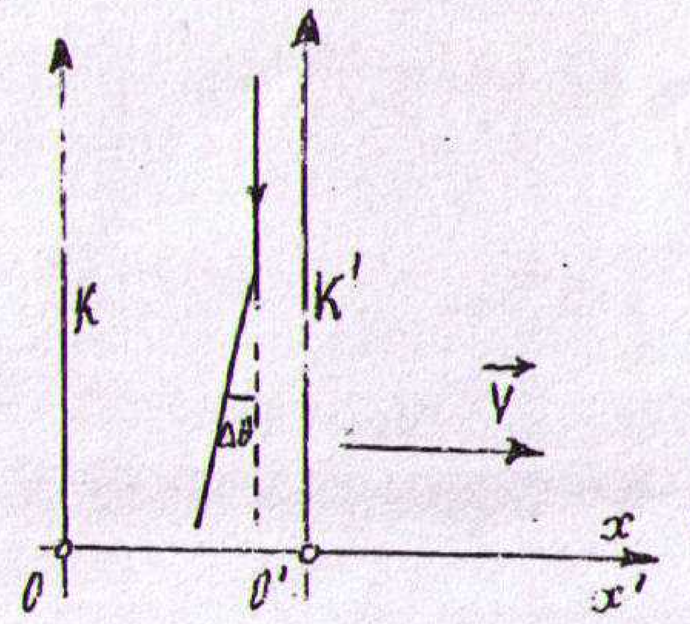
5т. $$tg\,\theta' = \frac{v\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\sin\theta}{v\cos\theta - V}. \qquad /9/$$

За фотон, при $v = c$, законът /9/ добива вида

5т. $$tg\,\theta' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}\sin\theta}{\cos\theta - \frac{V}{c}}. \qquad /10/$$

5т. в/ Ако $\theta = \frac{3\pi}{2}$, то от /10/ получаваме, че $tg\,\theta' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\theta' = \frac{7\pi}{6}$, така че $\Delta\theta = -\frac{\pi}{3}$. Ако $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\theta' = \frac{5\pi}{6}$ и $\Delta\theta = \frac{\pi}{3} = 60°$.

Ако $V \ll c$, то от /10/ и·аме $(\;\; x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x, \; (|x| \ll 1)$



$$tg\theta' - tg\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\sin\theta}{\cos\theta - \frac{V}{c}} - tg\theta \approx \left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right)tg\theta\left(1+\frac{V}{\cos\theta}\right) - tg\theta \approx$$

5т. $$\approx \frac{V}{c}\sin\theta,$$

5т. $$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta \approx \frac{V}{c}\sin\theta'.$$

г/ Получения закон за трансформация в а/ е аналогичен на трансформациите на Лоренц. Подобно както при последните остава инвариантна формата $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, така и при преход от K в K' инвариантна е квадратичната форма $E^2-c^2p^2$. Така в сила е равенството

10т. $$E'^2 - c^2p_x'^2 = E^2 - c^2p_x^2. \qquad /11/$$

Прилагаме го за системата от двете частици. Спрямо K' сумарния импулс $\vec{p}' = 0$, така че

10т. $$E'^2 = (E_k + 2m_0c^2)^2 - \frac{c^2m_0^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad /12/$$

Скоросттаѓна първата частица спрямо K намираме от формфлата за кинетичната енергия

10т. $$E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \Longrightarrow v = c\,\frac{\sqrt{E_k(E_k+2m_0c^2)}}{m_0c^2+E_k} = \frac{\sqrt{15}}{4}c, \; (E_k = 3m_0c^2), \qquad /13/$$

и тогава от /12/ следва, че

10т. $$E' = \sqrt{10}\,m_0c^2 = \frac{\sqrt{10}}{3}E_k = 1{,}69.10^{-10}\,J. \qquad /14/$$

Прилагайки закона /11/ за неподвижната спрямо K частица имаме

10т. $$m_0^2c^4 = \frac{1}{4}E'^2 - c^2p_x'^2 \qquad /15/$$

откъдето получаваме, че големините на импулсите и на двете частици спрямо K'са равни на

5т. $$p' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}m_0c = \frac{E_k}{\sqrt{6}\,c} = 2{,}18.10^{-19}\,\frac{kg.m}{s}.$$

За да определим големината на скоростта V, използваме трансформационната формула /4/ за импулса на втората частица

10т. $$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}m_0c = -\frac{m_0c^2V}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}} \Longrightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}c = 2{,}32.10^8\,\frac{m}{s}.$$

<u>Решение на 4.задача</u>: а/ Реалните части на въ ните на Дьо Бройл, аташирани към частица, която се движи със скорост $v-\Delta v$ и със скорост $v+\Delta v$ са

10т $$Re\,\psi_1 = A\cos(k_1x-\omega_1t) = A\cos\left(\frac{P_1x}{\hbar}-\frac{E_1t}{\hbar}\right),$$
$$Re\,\psi_2 = A\cos(k_2x-\omega_2t) = A\cos\left(\frac{P_2x}{\hbar}-\frac{E_2t}{\hbar}\right), \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right), \qquad /1/$$

къ о A е амплитудата на вълните

$$E_1 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{(v-\Delta v)^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2}} \approx \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{1-\frac{v\Delta v}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}\right\} = \qquad /2/$$

15т. $$= E_0\left\{1-\frac{v\Delta v}{c^2(1-v^2/c^2)}\right\}, \qquad E_0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$$E_2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v+\Delta v)^2/c^2}} = E_0\left\{1+\frac{v\Delta v}{c^2(1-v^2/c^2)}\right\}, \qquad /3/$$

са енергиите на частицата, когато скоростите й са $v-\Delta v$ и $v+\Delta v$ съответно, а

$$P_1 = \frac{m_0(v-\Delta v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{\Delta v}{v}\right)^2}} \approx \frac{m_0(v-\Delta v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{1-\frac{v\Delta v}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}\right\} = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{1-\frac{\Delta v}{v(1-v^2/c^2)}\right\}, \qquad /4/$$

5т. $$P_2 = P_0\left\{1+\frac{\Delta v}{v(1-v^2/c^2)}\right\}, \qquad P_0 = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

са съответните й импулси. От /2/, /3/ и /4/ получаваме

5т. $$\omega_1 = \frac{E_1}{\hbar} = \omega_0 - \Delta\omega, \quad \omega_2 = \frac{E_2}{\hbar} = \omega_0 + \Delta\omega, \quad k_1 = \frac{P_1}{\hbar}(k_0-\Delta k), \quad k_2 = \frac{P_2}{\hbar} = (k_0+\Delta k), \qquad /5/$$

където

$$k_0 = \frac{m_0v}{\hbar\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \Delta\omega = \frac{m_0c^2\frac{v^2}{c^2}}{\hbar(1-v^2/c^2)^{3/2}}\,\frac{\Delta v}{v}, \qquad /6/$$

5т. $$\omega_0 = \frac{E_0}{\hbar} = \frac{m_0c^2}{\hbar\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \Delta k = \frac{m_0\Delta v}{\hbar(1-v^2/c^2)^{3/2}}. \qquad /7/$$

Така наслагващите се вълни но Дьо Бройл са

10т. $$Re\,\psi_1 = A\cos\{(k_0-\Delta k)x - (\omega_0-\Delta\omega)t\},$$
$$Re\,\psi_2 = A\cos\{(k_0+\Delta k)x - (\omega_0+\Delta\omega)t\}. \qquad /8/$$

Като използваме тригонометричната формула

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad /9/$$

за реалната част на вълната ψ получаваме

15т. $$Re\,\psi = Re\,\psi_1 + Re\,\psi_2 = 2A\cos(x\Delta k - t\Delta\omega)\cos(k_0x-\omega_0t). \qquad /10/$$

б/ Фазовата скоростина вълната ψ се определя от условието

$$k_0\Delta x = \omega_0\Delta t,$$

Следователно

10т. $$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c^2}{v} > c.$$

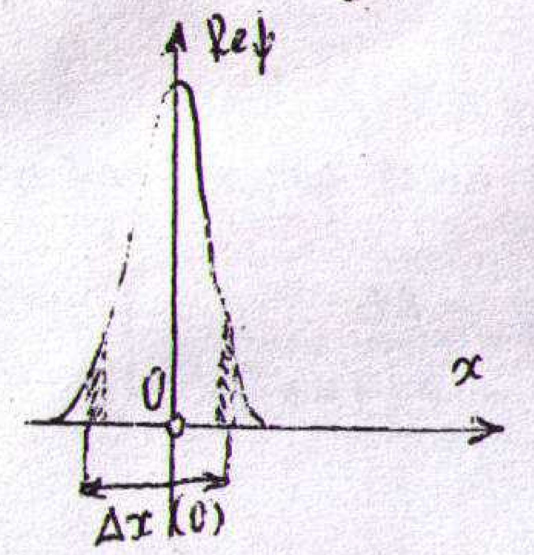
в/ Максимумите на модулиращата функция се движат със скорост, определена от условието

$$\Delta x.\Delta k - \Delta t.\Delta\omega = 0.$$

Следователно

10т. $$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v.$$

г/ Когато една частица е локализирана в дадена област, скоростта й не е определена точно и се характеризира с неопределеност, която се определя от съотношенията за неопределеност на Хайзенберг. Това ни дава основание да считаме, че различни части ва един вълнов пакет има различни скорости /вж. фигурата, която само ни дава представа за същността на явленията/. Нека груповите скорости на двата защриховани вълнови пакета се различават с Δv_g . Разстоянието между пакетите при $t=0$ е приблизително равно на ширината $\Delta x(0)$ на пакета. В момента t ширината на пакета очевидно ще е равна на



10т.
$$\Delta x(t) = t.\Delta v_g, \qquad /11/$$

при което считаме, че $\Delta x(0) \ll \Delta x(t)$. От друга страна

$$\Delta v_g \approx \frac{\Delta v_g}{\Delta p}\Delta p, \qquad /12/$$

където p е импулса на частицата. Но както знаем /вж. в// v_g е равна на скоростта v на частицата. Тогава от /12/ получаваме

10т.
$$\Delta v_g = \frac{\Delta p}{m_0}. \qquad /13/$$

От съотношението за неопределеност

5т.
$$\Delta p.\Delta x(0) \approx h,$$

следва, че

5т.
$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x(0)}. \qquad /14/$$

Като заместим /14/ в /11/ получаваме

5т.
$$\Delta x(t) = \frac{ht}{\Delta x(0).m_0} \qquad /15/$$

Функцията /15/ е линейна.

$$\Delta x(0,5) \approx 2km.$$