Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Слободянин В	1. Александров Д.	1. Воронов А.
2. Александров Д.	2. Воронов А.	2. Шеронов А.
3. Подлесный Д.	3. Варгин А.	3. Шведов О.
4. Шведов О.	4. Чивилев В.	4. Чивилев В.
	5. Воробьев И.	5. Шведов О.

Ответственные за классы

9 класс	10 класс	11 класс
Шведов О.	Чудновский А.	Чивилев В.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В., Чудновский А., Самокотин А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Самокотин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 13 марта 2005 г. в 21:05.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Гонки

С линии старта одновременно в момент $t = 0$ ушли две гоночные машины с ускорениями

$$a_1(t) = a_0\left(1 + \sqrt{2 - \frac{t}{t_1}}\right) \quad \text{и} \quad a_2(t) = a_0\sqrt{2 - \frac{t}{t_1}}$$

соответственно. Начиная с момента времени t_1 скорость первой машины не изменялась, а вторая машина продолжила разгоняться с постоянным ускорением, пока в момент t_2 ее скорость не сравнялась со скоростью первой машины. Каково расстояние ΔS между автомобилями в этот момент времени?

Задача 2. Лобовое столкновение

Небольшая шайба, движущаяся со скоростью v_1 по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на вторую шайбу, лежащую неподвижно, и после абсолютно упругого удара отскакивает со скоростью v_2 в противоположном направлении. Найдите скорость V второй шайбы после удара. Массы шайб не заданы, но известно, что они различны.

Задача 3. Ракета в пылевом облаке

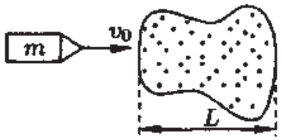

Рис. 1

Ракета массой m, летящая в космическом пространстве с выключенным двигателем со скоростью v_0, попадает в облако пыли средней плотностью ρ, имеющее протяженность L в направлении движения ракеты (рис. 1). Пылинки неподвижны и прилипают к ракете при столкновении с ней. Площадь поперечного сечения ракеты S. Какую скорость v_1 будет иметь ракета при вылете из облака пыли? Сколько времени τ займет пролет через это облако?

Задача 4. Нагревание воды

В стакан с водой с начальной температурой $t_1 = 20°C$ поместили электронагреватель и включили его в сеть. Вода стала нагреваться со скоростью $\mu_1 = 0{,}03°C/\text{мин}$, однако с течением времени скорость μ уменьшалась, и вода нагрелась только до температуры $t_2 = 80°C$. Нагреватель выключили. Вода начала остывать со скоростью $\mu_2 = -0{,}04°C/\text{мин}$. Чему равна температура окружающей среды t_0? Во сколько раз нужно увеличить мощность электронагревателя, чтобы все-таки довести воду до кипения? Считайте, что теплоотдача в окружающую среду пропорциональна разности температур тела и среды.

10 класс

Задача 1. Столкновение

Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности, налетела на вторую шайбу, покоившуюся на той же поверхности. После абсолютно упругого удара шайб их скорости v_1 и v_2 оказались направлены под углом φ друг к другу. Найдите скорость v_0 первой шайбы до удара. Массы шайб не заданы, но известно, что они различны.

Задача 2. Процесс над газом

Идеальный одноатомный газ расширяется квазистатически, причем давление и объем газа линейно зависят от времени. Когда температура достигла своего максимального значения T_0, давление и объем газа были равны p_0 и V_0 соответственно. Каким будет давление p_1 и температура T_1 в момент времени, когда объем газа достигнет величины $V_1 = \alpha V_0$.

Задача 3. Падение со ступеньки

На край ступеньки высотой H положили тонкостенную трубу радиусом R и массой m (рис. 2). Труба начала скатываться со ступеньки. Определите вертикальную составляющую v_y скорости центра масс трубы непосредственно перед ударом о горизонтальную поверхность. Считайте, что труба не проскальзывает.

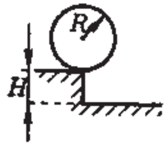

Рис 2

Задача 4. Заряд и полый шар

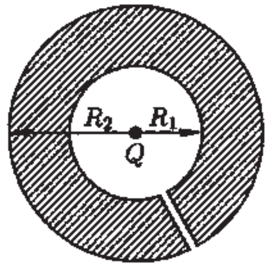

Рис. 3

Маленький шарик с зарядом Q находится в центре закрепленного незаряженного проводящего полого шара (рис. 3) с радиусами концентрических поверхностей R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить шарик через узкий канал в проводнике на расстояние от полого шара, значительно большее R_2?

Задача 5. «Электростатический» двигатель

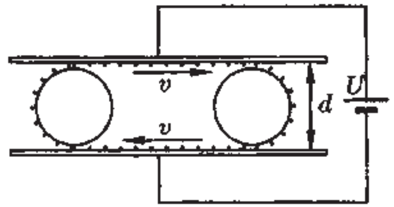

Рис 4

Тонкая гибкая замкнутая лента, состоящая из проводящих пластин шириной a, разделенных изолирующими промежутками шириной b ($b \gg a$), с помощью шкивов приведена в соприкосновение с обкладками плоского конденсатора (рис. 4). Расстояние между обкладками равно d ($d \gg b$), ширина ленты l. Конденсатор подключили к батарее, создающей напряжение U между обкладками. С помощью внешнего воздействия шкивы провернули на несколько оборотов, после чего воздействие устранили, а лента продолжила движение с установившейся скоростью v. Считайте, что трение есть только между лентой и нижней обкладкой.

1. Какой ток I протекает через батарею?
2. Какую мощность P затрачивает батарея при движении ленты?
3. Какая сила трения F действует на ленту?

11 класс

Задача 1. Муха-Цокотуха

Между линзой и зеркалом параллельно плоскости зеркала летит Муха-окотуха. Линза отстоит от зеркала на расстоянии $L = 20$ см, а ее главная тическая ось перпендикулярна его плоскости. В момент, когда муха перекает ось, скорости ее изображений в линзе и в системе линза-зеркало одиковы по модулю. Найдите фокусное расстояние F линзы и расстояние a от нзы до мухи.

Задача 2. Лодка

Круглую резиновую лодку оттолкнули от берега озера со скоростью v_0 она проплыла расстояние S_0 до остановки. Такую же лодку оттолкнули от рега речки так, что ее скорость в начале свободного плавания оказалась рав- v_0 и была направлена перпендикулярно течению. К моменту остановки отсительно воды лодка проплыла путь $S_1 = \alpha S_0$ в системе отсчета, связанной зодой. С какой скоростью V относительно берега плыла лодка в тот момент, гда она достигла середины речки, ширина которой $H = \alpha S_0$. Считайте, что $= \frac{5}{4}$, сила сопротивления движению лодки в воде прямо пропорциональна скорости, а скорость течения реки всюду одинакова.

Задача 3. Изменчивое равновесие

В цилиндре под поршнем находятся газы X_2 и Y_2 и соединение X_2Y. В стеме протекает химическая реакция $2X_2 + Y_2 \leftrightarrow 2X_2Y$. В равновесном соянии (когда скорости химической реакции в прямом и обратном направлеях равны) при давлении p система занимала объем V, а количества веществ Y_2 и X_2Y были равны ν_1, ν_2 и ν_3 соответственно. Давление на систему менили на малую величину Δp. Найдите изменения объема системы ΔV количеств веществ $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_2$, $\Delta\nu_3$ после установления нового равновесия. мпература все время поддерживается постоянной.

Примечание. Известно, что скорость химической реакции пропорциональ- произведению концентраций ν_i/V реагирующих веществ. Соответственно орости прямой и обратной реакций пропорциональны

$$\left(\frac{\nu_1}{V}\right)^2\left(\frac{\nu_2}{V}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\nu_3}{V}\right)^2.$$

эффициенты пропорциональности могут быть разными, но зависят только температуры. Газы можно считать идеальными.

Задача 4. Заряд, полый шар и диэлектрик

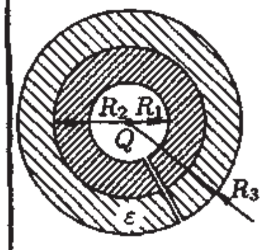

Рис. 5

Маленький шарик с зарядом Q находится в центре закрепленного незаряженного проводящего полого шара с радиусами концентрических поверхностей R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Полый шар окружен снаружи концентрическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε и радиусом наружной поверхности R_3 (рис. 5). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить шарик через узкий канал в слоях проводника и диэлектрика на расстояние от полого шара, значительно большее R_3?

Задача 5. Три батарейки

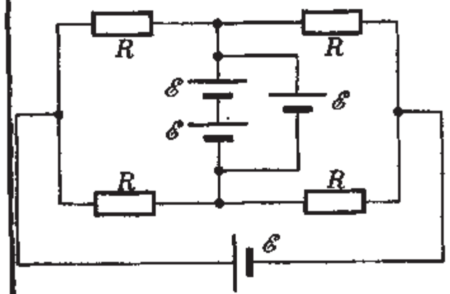

Рис. 6

Экспериментатор Глюк собрал электрическую цепь (рис. 6), подключив по ошибке одну из батареек параллельно, а не последовательно двум другим. Найдите токи через резисторы в получившейся цепи. Каждый резистор имеет сопротивление R. Все батарейки одинаковы и имеют ЭДС $\mathscr{E}$. Внутренние сопротивления батареек малы по сравнению с R.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Гонки

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым автомобилем. В ней пер-ый автомобиль ехал с постоянным ускорением a_0. К моменту t_1 он удалился т второго автомобиля на расстояние

$$\Delta S_1 = \frac{a_0}{2}t_1^2,$$

имел относительную скорость $u = a_0 t_1$. В момент времени t_1 относительное скорение первой машины изменилось. Следовательно, когда скорости машин равнялись, расстояние между ними увеличилось на

$$\Delta S_2 = \frac{u}{2}(t_2 - t_1) = \frac{a_0 t_1}{2}(t_2 - t_1).$$

аким образом, общее расстояние между машинами

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{a_0 t_1 t_2}{2}.$$

Задача 2. Лобовое столкновение

Пусть m_1 и m_2 — массы шайб. Законы сохранения энергии и импульса для их имеют вид:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_2^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{2},$$
$$m_1 v_1 = m_2 V - m_1 v_2.$$

реобразуем уравнения:

$$m_1(v_1^2 - v_2^2) = m_2 V^2,$$

$$m_1(v_1 + v_2) = m_2 V,$$

разделим первое на второе:

$$V = v_1 - v_2.$$

Другое решение. В системе отсчета, связанной с центром масс, скорости айб при ударе меняются на противоположные, сохраняя свои величины. Поэтому относительная скорость шайб не изменяется по величине:

$$v_1 = V + v_2, \qquad \text{откуда} \qquad V = v_1 - v_2.$$

Задача 3. Ракета в пылевом облаке

После того как ракета пройдет внутри облака расстояние x, к ней прилипнет пыль массой

$$\Delta m = \rho S x.$$

Запишем закон сохранения импульса:

$$m v_0 = (m + \Delta m)v, \qquad \text{откуда} \qquad v = \frac{v_0}{1 + \rho S x/m}. \qquad (1)$$

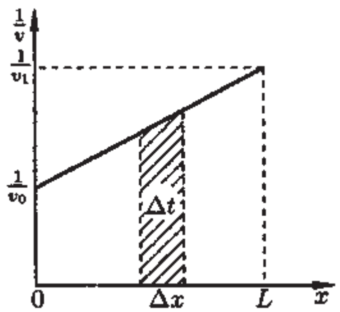

Рис. 7

Искомую скорость найдем, положив $x = L$:

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \rho S L/m}.$$

Перепишем (1) в виде

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{\rho S}{m v_0}x$$

и построим график зависимости $1/v$ от x (рис. 7). Поскольку малое расстояние Δx ракета пролетит за малый промежуток времени $\Delta t = \frac{1}{v}\Delta x$, то площадь под графиком будет численно равна времени движения, поэтому

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}\right)L = \frac{L}{v_0}\left(1 + \frac{\rho S L}{2m}\right).$$

Задача 4. Нагревание воды

Поскольку вода за единицу времени получает постоянное количество теплоты от нагревателя и отдает в окружающую среду количество теплоты, пропорциональное разности температур, то скорость μ нагревания воды при температуре t также складывается из постоянной составляющей μ_0 и переменной составляющей $-\lambda(t - t_0)$, где λ — константа:

$$\mu = \mu_0 - \lambda(t - t_0). \qquad (2)$$

При температуре $t = t_2$ нагревание прекратилось, следовательно, $\mu_0 = \lambda(t_2 - t_0)$. Подставив в (2) выражение для μ_0, получим $\mu = \lambda(t_2 - t)$. В начальный момент

$$\mu_1 = \lambda(t_2 - t_1). \qquad (3)$$

Если нагреватель выключить, температура воды будет изменяться со скоростью $\mu = -\lambda(t - t_0)$, в частности,

$$\mu_2 = -\lambda(t_2 - t_0). \qquad (4)$$

Решая (3) и (4) совместно, находим

$$t_0 = t_2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}(t_2 - t_1) = 0°\text{C}.$$

При температуре воды $t_3 = 100°$C теплоотдача в окружающую среду возрастет в $(t_3 - t_0)/(t_2 - t_0) = 1{,}25$ раза по сравнению с рассмотренным случаем $t_2 = 80°$C. Как минимум в такое же количество раз нужно увеличить мощность нагревателя, чтобы довести воду до кипения.

10 класс

Задача 1. Столкновение

В системе отсчета, связанной с центром масс, скорость каждой шайбы после удара остается такой же по величине, но изменяет направление на противоположное. Поэтому в системе центра масс модуль относительной скорости шайб при ударе не изменяется. Это верно и в любой другой системе отсчета, так как относительная скорость не зависит от выбора системы отсчета. Следовательно,

$$|\vec{v}_0| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|, \qquad \text{откуда} \qquad v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\varphi}.$$

Задача 2. Процесс над газом

Будем отсчитывать время с момента, когда температура была максимальна, тогда линейные зависимости p и V от времени примут вид:

$$V = V_0 + at, \qquad p = p_0 - bt.$$

Газ расширяется, поэтому $a > 0$. Чтобы температура могла достичь максимума и начать убывать, необходимо выполнение условия $b > 0$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{1}{\nu R}(p_0V_0 + p_0at - V_0bt - abt^2).$$

Поскольку $T(t)$ — парабола и максимум достигается при $t = 0$, то

$$p_0a - V_0b = 0, \qquad \text{откуда} \qquad \frac{a}{V_0} = \frac{b}{p_0}.$$

Из условия $V_1 = \alpha V_0$ находим

$$\frac{a}{V_0}t_1 = \alpha - 1,$$

где t_1 — время, когда $V_1 = \alpha V_0$. Искомое давление

$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{b}{p_0}t_1\right) = p_0\left(1 - \frac{a}{V_0}t_1\right) = (2-\alpha)p_0.$$

Искомая температура

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = \frac{(2-\alpha)p_0\alpha V_0}{\nu R} = \alpha(2-\alpha)T_0.$$

Задача 3. Падение со ступеньки

1. Допустим, что высота ступеньки достаточно большая, так что труба сначала отрывается от края, а затем касается основания ступеньки. Рассмотрим момент отрыва трубы от ступеньки (рис. 8). Пусть к этому моменту она повернулась на угол α, а ее центр масс приобрел скорость v_0, тогда из закона сохранения энергии

$$mv_0^2 = mgR(1 - \cos\alpha). \qquad (5)$$

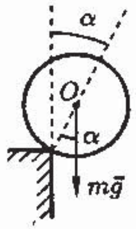

Рис 8

Множитель $\frac{1}{2}$ в формуле для кинетической энергии отсутствует, так как полная кинетическая энергия трубы складывается из энергий поступательного и вращательного движений. Когда проскальзывания нет, они равны между собой.

В момент отрыва центростремительное ускорение трубы создает только сила тяжести:

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg\cos\alpha. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \qquad v_0^2 = \frac{gR}{2}.$$

Поскольку скорость $\vec{v}_0$ перпендикулярна радиусу трубы, направленного в точку касания, вертикальная составляющая скорости центра масс в момент отрыва будет равна $v_{0y} = v_0\sin\alpha$. К моменту падения она увеличится за счет потенциальной энергии трубы. Вращательная энергия и горизонтальная составляющая скорости после отрыва изменяться не будет.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_{0y}^2}{2} + mgH + mgR\cos\alpha = \frac{mv_y^2}{2} + mgR,$$

откуда искомая скорость

$$v_y = \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gH - 2gR(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2gH - \frac{5}{8}gR}.$$

Этот ответ справедлив, если

$$H > R(1-\cos\alpha) = \frac{R}{2}.$$

2. Если же $H < R/2$, то труба коснется основания ступеньки, еще не оторвавшись от ее края. Тогда из закона сохранения энергии

$$mv_1^2 = mgH.$$

Скорость v_1 направлена под углом α_1 к вертикали:

$$\cos\alpha_1 = \frac{R-H}{R}.$$

Ее вертикальная составляющая скорости в этот момент

$$v_y = v_1\sin\alpha_1 = \sqrt{gH}\sqrt{1-\left(\frac{R-H}{R}\right)^2} = \frac{H}{R}\sqrt{g(2R-H)}.$$

Задача 4. Заряд и полый шар

Минимальная работа равна изменению энергии электрического поля. Энергия поля увеличится на энергию поля точечного заряда Q в объеме между сферами с радиусами R_1 и R_2 (заряд Q в центре сфер). Эта энергия равна энергии сферического конденсатора с радиусами обкладок R_1 и R_2 и зарядом Q. Напряжение между обкладками такого конденсатора

$$U = \left(k\frac{Q}{R_1} + k\frac{-Q}{R_2}\right) - 0 = kQ\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}, \qquad \text{где} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Емкость конденсатора

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{R_1R_2}{k(R_2-R_1)},$$

его энергия

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{kQ^2(R_2-R_1)}{2R_1R_2}.$$

Искомая работа

$$A = W = \frac{kQ^2(R_2-R_1)}{2R_1R_2}.$$

Задача 5. «Электростатический» двигатель

1. Напряженность поля в конденсаторе $E = U/d$. Во время касания ленты и пластин конденсатора на ленту переходит заряд с такой же поверхностной плотностью, какая была на пластинах конденсатора:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_0 U}{d}.$$

Погонный заряд ленты

$$\rho = \frac{a}{a+b}\sigma l = \varepsilon_0 U\frac{al}{(a+b)d} \approx \varepsilon_0 U\frac{al}{bd}.$$

Переносимый лентой заряд создает ток

$$I = 2v\rho = 2v\varepsilon_0 U\frac{al}{bd}.$$

2. Мощность батареи

$$P = UI = 2v\varepsilon_0 U^2\frac{al}{bd}.$$

3. Поскольку скорость ленты не изменяется, то мощность суммарной силы трения $P' = Fv$ по абсолютной величине равна мощности батареи, откуда

$$F = 2\varepsilon_0 U^2\frac{al}{bd}.$$

11 класс

Задача 1. Муха-Цокотуха

Систему линза-зеркало можно рассматривать как линзу, предметом для торой является мнимое изображение M_1 мухи M в зеркале. Пусть M' и { — изображения M и M_1, создаваемые линзой. Поскольку скорости «мух» и M_1 одинаковы, равенство модулей скоростей их изображений возможно, лько если линза собирающая, изображение M' — мнимое, а M_1' — действильное. При этом равны поперечные увеличения предметов M и M_1:

$$\frac{F}{F-a} = \frac{F}{a_1 - F}.$$

есь a и a_1 — расстояния от линзы до мухи и ее изображения в зеркале ответственно. Из этого уравнения получаем $a + a_1 = 2F$. Следовательно, кало находится в фокусе линзы, то есть $L = F = 20$ см.

Результат не зависит от расстояния a, поэтому оно может принимать любое ачение из интервала $(0; L)$.

Задача 2. Лодка

Пусть Δv — изменение скорости v лодки за малый промежуток времени Δt. пишем второй закон Ньютона для движения лодки в озере:

$$\frac{m\Delta v}{\Delta t} = -kv,$$

m — масса лодки, k — коэффициент пропорциональности между силой сотивления воды и скоростью лодки. Заметим, что $v\Delta t = \Delta S$ — перемещение дки за промежуток времени Δt, поэтому полученное соотношение можно леисать в виде $m\Delta v = -k\Delta S$. Просуммировав последнее уравнение по всему мени движения лодки, получим $mv_0 = kS_0$. Рассмотрим движение лодки ечке. В системе отсчета, связанной с водой, лодка до остановки движется молинейно с начальной скоростью

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + u^2}, \qquad (7)$$

u — скорость течения речки (рис. 9).

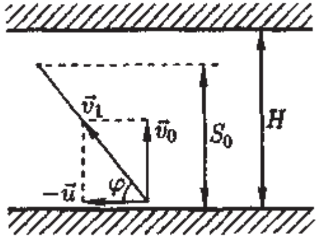

Рис 9

Как и для движения лодки в озере имеет месоотношение $mv_1 = kS_1$, из которого легполучить $v_1 = \alpha v_0$. Учитывая (7), найдем $v_0\sqrt{\alpha^2 - 1}$. Угол φ между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{u}$ определяется соотношениями

$$\sin\varphi = \frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}.$$

Просуммировав уравнение $m\Delta v = -k\Delta S$ по времени движения лодки до середины речки, получим:

$$m(v_1 - v_1') = k\frac{H}{2\sin\varphi}$$

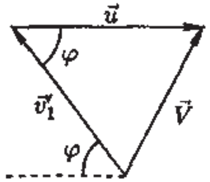

Рис. 10

Отсюда скорость лодки на середине речки

$$v_1' = v_1 - \frac{kH}{2m\sin\varphi} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)v_0.$$

Скорость лодки относительно берега в тот же момент времени найдем из теоремы косинусов для треугольника скоростей (рис. 10):

$$V = \sqrt{u^2 + v_1'^2 - 2uv_1'\cos\varphi} = \sqrt{1 - \alpha + \frac{\alpha^4}{4}}v_0 = \frac{3}{32}\sqrt{41}v_0 \approx 0{,}6v_0.$$

Задача 3. Изменчивое равновесие

Пусть к моменту установления нового равновесного состояния в прямом направлении произошло на $N_A x$ реакций больше, чем в обратном, тогда

$$\Delta\nu_1 = -2x, \qquad \Delta\nu_2 = -x, \qquad \Delta\nu_3 = 2x, \qquad (8)$$

$$\Delta\nu = \Delta\nu_1 + \Delta\nu_2 + \Delta\nu_3 = -x.$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для равновесных состояний:

$$pV = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)RT, \qquad (p + \Delta p)(V + \Delta V) = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - x)RT.$$

Решая эти уравнения с учетом малости изменений параметров, получим

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = -\frac{x}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}. \qquad (9)$$

Теперь выведем второе уравнение для нахождения $\Delta V/V$ и x. Величина

$$\frac{(\nu_1/V)^2(\nu_2/V)}{(\nu_3/V)^2}$$

пропорциональна отношению скоростей реакций и зависит только от температуры, следовательно, она одинакова в обоих равновесных состояниях:

$$\frac{\nu_1^2\nu_2}{\nu_3^2 V} = \frac{(\nu_1 + \Delta\nu_1)^2(\nu_2 + \Delta\nu_2)}{(\nu_3 + \Delta\nu_3)^2(V + \Delta V)},$$

откуда $$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta\nu_1}{\nu_1} + \frac{\Delta\nu_2}{\nu_2} - 2\frac{\Delta\nu_3}{\nu_3}.$$

Используя (8), получим

$$\frac{\Delta V}{V} = -x\left(\frac{4}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{4}{\nu_3}\right). \qquad (10)$$

Решая (9) и (10) совместно, найдем:

$$x = \frac{\Delta p}{p}\left(\frac{4}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{4}{\nu_3} - \frac{1}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}\right)^{-1},$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{p}\,\frac{\dfrac{4}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2} + \dfrac{4}{\nu_3}}{\dfrac{4}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2} + \dfrac{4}{\nu_3} - \dfrac{1}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}}.$$

Зная x, из (8) можно найти $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_2$, $\Delta\nu_3$.

Задача 4. Заряд, полый шар и диэлектрик

Минимальная работа равна изменению энергии электрического поля. Сравнив мысленно картины полей в начале и в конце опыта, можно заключить, что это изменение энергии есть разность $W_2 - W_1$, где W_1 — энергия поля в слое диэлектрика с радусами поверхностей R_2 и R_3 (поле создано зарядом Q, помещенным в центр этого слоя), W_2 — энергия поля в «пустом» объеме между сферами с радиусами R_1 и R_3 (поле создано зарядом Q, помещенным в общий центр этих сфер). Энергии W_1 и W_2 удобно искать как энергии соответствующих сферических конденсаторов с емкостями C_1 и C_2, имеющих на обкладках заряд Q.

Найдем C_2 и W_2. Напряжение на конденсаторе с радиусами обкладок R_1 и R_3:

$$U = \left(k\frac{Q}{R_1} + k\frac{-Q}{R_3}\right) - 0 = kQ\frac{R_3 - R_1}{R_1 R_3}, \qquad \text{где} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Емкость конденсатора

$$C_2 = \frac{Q}{U} = \frac{R_1 R_3}{k(R_3 - R_1)},$$

его энергия

$$W_2 = \frac{Q^2}{2C_2} = \frac{kQ^2(R_3 - R_1)}{2R_1 R_3}.$$

Аналогично находим

$$C_1 = \frac{\varepsilon R_2 R_3}{k(R_3 - R_2)}, \qquad W_1 = \frac{kQ^2(R_3 - R_2)}{2\varepsilon R_2 R_3}.$$

Искомая работа

$$A = W_2 - W_1 = \frac{kQ^2}{2R_3}\left(\frac{R_3 - R_1}{R_1} - \frac{R_3 - R_2}{\varepsilon R_2}\right).$$

Задача 5. Три батарейки

Прежде всего, исследуем подробнее систему одинаковых батареек в центре схемы (рис. 11). Напряжение U_{12} между точками 1 и 2 можно рассчитать по двум формулам

$$U_{12} = 2\mathcal{E} - 2Ir, \qquad U_{12} = \mathcal{E} + (I - \Delta I)r,$$

откуда $U_{12} = \frac{4}{3}\mathcal{E} - \frac{2}{3}\Delta I r$. Это означает, что система ведет себя как одна батарейка с ЭДС $\frac{4}{3}\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $\frac{2}{3}r$, которым в дальнейшем можно пренебречь. Заменим схему на эквивалентную (рис. 12). Из соображений симметрии $I_1 = I_2$. Следовательно,

$$\mathcal{E} = U_{14} = I_1 R + (I_1 + \Delta I)R,$$

$$I_1 R = U_{13} = U_{12} + U_{23} = (I_2 + \Delta I)R - \frac{4}{3}\mathcal{E},$$

$$\text{откуда} \qquad I_1 = -\frac{1}{6}\frac{\mathcal{E}}{R}, \qquad \Delta I = \frac{4}{3}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Таким образом, токи через резисторы

$$I_1 = I_2 = -\frac{1}{6}\frac{\mathcal{E}}{R}, \qquad I_1 + \Delta I = I_2 + \Delta I = \frac{7}{6}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

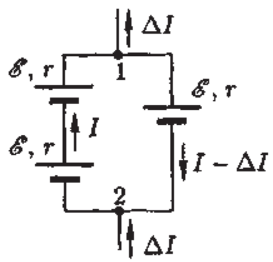

Рис. 11

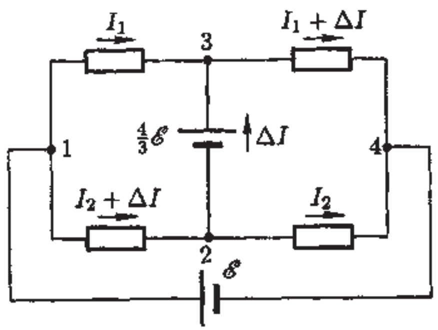

Рис 12

Для заметок

Справочные данные

Скорость света в вакууме .... $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Планка .... $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Гравитационная постоянная .... $\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2

Элементарный заряд .... $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная .... $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная .... $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Постоянная Стефана-Больцмана .... $\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)

Масса электрона .... $m_e = 9{,}110 \cdot 10^{-31}$ кг
Атомная единица массы .... 1 а.е.м. $= 1{,}661 \cdot 10^{-27}$ кг
Универсальная газовая постоянная .... $R = 8314$ Дж/(кмоль · К)
Постоянная Авогадро .... $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$
Постоянная Больцмана .... $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Абсолютный нуль температур .... $T_0 = -273{,}15$°С

Ускорение свободного падения (стандартное) .... $g = 9{,}807$ м/с^2
Атмосферное давление (нормальное) .... $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па
Средняя молярная масса воздуха .... $\mu = 29$ кг/кмоль
Масса Солнца .... $1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Солнца .... $6{,}960 \cdot 10^8$ м
Расстояние от Солнца до Земли (среднее), астр. единица .... $1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
Масса Земли .... $5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Земли (экваториальный) .... $6{,}378 \cdot 10^6$ м
Расстояние от Земли до Луны (среднее) .... $3{,}844 \cdot 10^8$ м
Масса Луны .... $7{,}350 \cdot 10^{22}$ кг
Радиус Луны (средний) .... $1{,}738 \cdot 10^6$ м

Молярная масса воды .... $\mu = 18$ кг/кмоль
Плотность воды (при 4°С) .... 1000 кг/м^3
Плотность льда (при 0°С) .... 917 кг/м^3
Теплоемкость льда .... $2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °С)
Теплота плавления льда .... $3{,}350 \cdot 10^5$ Дж/кг
Теплоемкость воды .... $4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °С)
Теплота парообразования воды .... $2{,}256 \cdot 10^6$ Дж/кг