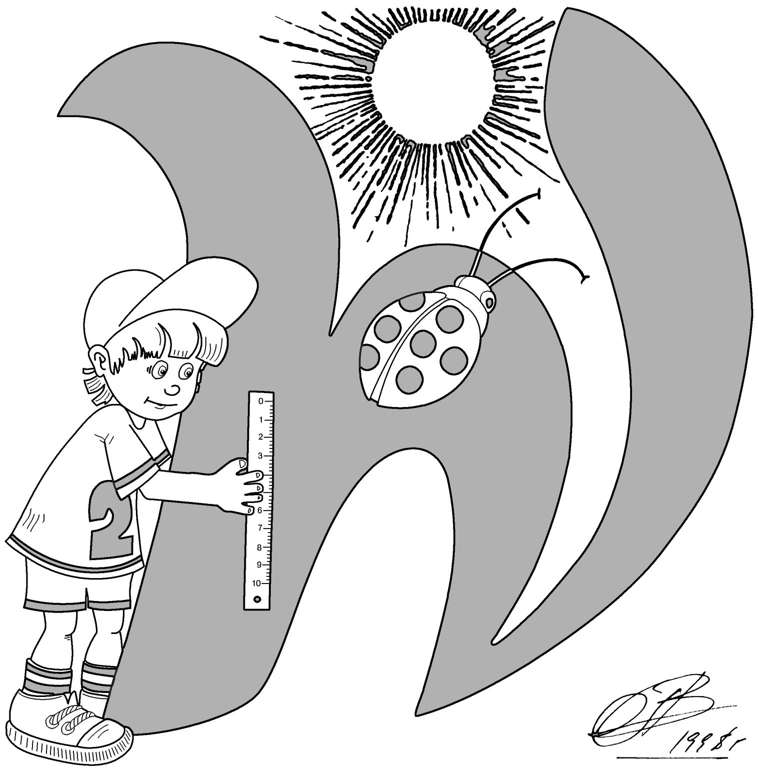
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Ярославль, 2003/2004 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторский коллектив — Александров Д., Бутиков Е., Воробьев И., Егоров М., Иоголевич И., Козел С., Муравьев В., Можаев В., Подлесный Д., Чивилев В., Чудновский А.

Общая редакция — Козел С.

Техническая редакция — Александров Д., Слободянин В., Чудновский А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Щербаков Р., Егоров М., Ильин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:43.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Катапульта

При осаде древней крепости осажденные вели стрельбу по наступавшему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой $h = 20{,}4$ м. Начальная скорость снарядов $v_0 = 25$ м/с. На каком максимальном расстоянии $S_{\max}$ от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульт? Сравните это расстояние с максимальной дальностью $L_{\max}$ снаряда катапульты. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Задача 2. Санки с цилиндром

Тонкостенный цилиндр массой m насажен с помощью легких спиц на горизонтальную ось O, закрепленную на санках (рис. 1), и может вращаться вокруг нее без трения. Масса цилиндра вместе с санками равна M. Мальчик тянет санки в горизонтальном направлении с постоянной силой F за легкий трос, намотанный на цилиндр. В результате за некоторое время санки из состояния покоя переместились по гладкой горизонтальной дороге на расстояние S.

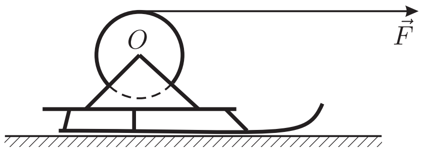


Рис. 1

1. Какой скорости V_1 достигли бы санки, пройдя путь S, если бы цилиндр был заторможен в оси и не мог вращаться?
2. Какой скорости V_2 достигли санки, пройдя путь S, при незаторможенном цилиндре?
3. Какую работу совершил мальчик при незаторможенном цилиндре?

Задача 3. Модель турбины

Любознательный ученик 9 класса соорудил на даче модель водяной турбины (рис. 2). Вода из широкой бочки вытекала через небольшое отверстие площадью $S = 1$ см^2 у дна и попадала на лопасти турбинки. С помощью нити, намотанной на тонкий вал турбины и перекинутой через блок, устройство могло поднимать вверх груз массой $m = 100$ г с некоторой скоростью.

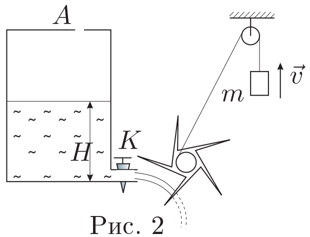


Рис. 2

1. Определите коэффициент полезного действия модели водяной турбины, принимая высоту столба воды в бочке $H = 0{,}2$ м, скорость груза $v_1 = 2$ см/с.
2. Выполнив первый эксперимент, ученик перекрыл кран K и герметичной пробкой закрыл отверстие A в крышке бочки. Когда он через некоторое время вернулся, бочка сильно нагрелась на солнце. Открыв кран K (при закрытом отверстии A), ученик с удивлением обнаружил, что его механизм работает более активно, и теперь тот же груз поднимается со скоростью $v_2 = 5$ см/с. Предполагая, что КПД устройства остался неизменным, а уровень воды в бочке по-прежнему $H = 0{,}2$ м, определите, насколько изменилось давление газа в бочке. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Задача 4. Двухпроводная линия

В некоторой точке двухпроводной телефонной линии неизвестной длины L произошло повреждение, в результате которого между проводами появилось сопротивление утечки R_x (рис. 3). К обоим концам линии прибыли операторы, имеющие в своем распоряжении приборы для измерения сопротивлений (омметры). Они замерили сопротивления линии при разомкнутых (R_1 и R_2) и закороченных (r_1 и r_2) противоположных концах линии и получили следующие значения:

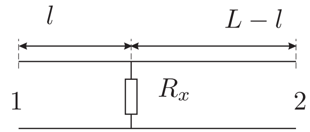


Рис. 3

$$R_1 = 4{,}0 \text{ Ом}, \qquad R_2 = 8{,}0 \text{ Ом},$$

$$r_1 = 3{,}5 \text{ Ом}, \qquad r_2 = ?$$

Из-за нарушения мобильной связи оператор на правом конце не успел передать оператору на левом конце линии, который должен был выполнить необходимые расчеты, значение сопротивления r_2. Помогите оператору на левом конце линии определить сопротивление утечки R_x, расстояние l до места повреждения, общую длину линии L, а также восстановить утраченное из-за плохой связи между операторами значение сопротивления r_2. Погонное сопротивление, то есть сопротивление единицы длины каждого проводника линии, $\rho = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Ом/м.

10 класс

Задача 1. Паровоз

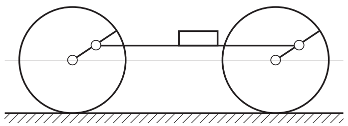


Рис. 4

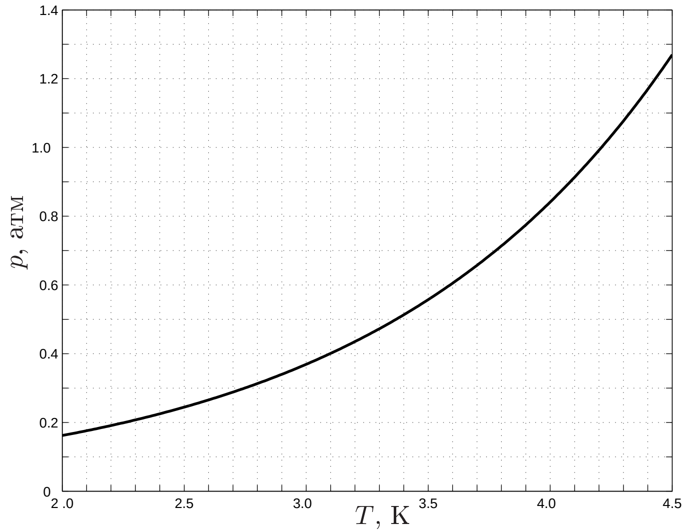
Ведущие колеса паровоза соединены реечной передачей, одно звено которой представляет собой плоскую горизонтальную штангу, шарнирно прикрепленную к спицам соседних колес на расстоянии от оси, равном половине радиуса R колеса (рис. 4). При осмотре паровоза механик поставил на эту штангу ящик с инструментами и по рассеянности забыл его там. Паровоз трогается с места и начинает медленно набирать скорость. При какой скорости v_1 паровоза ящик начнет проскальзывать относительно штанги? При какой скорости v_2 паровоза ящик начнет подпрыгивать? Коэффициент трения между ящиком и штангой равен μ. Числовой расчет проведите для значений $R = 1$ м, $\mu = 0{,}5$.

Задача 2. Жидкий гелий

Для хранения жидкого гелия применяется двойной дьюар, состоящий из внешнего дьюара, заполненного жидким азотом при температуре $T_a = 77$ К и внутреннего дьюара, заполненного жидким гелием. Передача теплоты от азота к гелию через вакуумный промежуток приводит к испарению гелия. Для поддержания постоянной температуры гелия производится непрерывная откачка его насыщенных паров из внутреннего сосуда. При некоторой скорости откачки в стационарном режиме температура гелия равна $T_0 = 4{,}0$ К. Скорость откачки увеличивают в полтора раза (по объему). Определите установившуюся температуру T гелия. Зависимость давления насыщенных паров гелия от температуры приведена на рисунке 5.

Примечание. Дьюаром называют сосуд с двойными стенками, из пространства между которыми откачан воздух для уменьшения теплопередачи.

Рис. 5



Задача 3. Повреждение линии связи

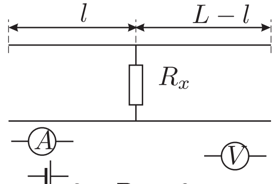
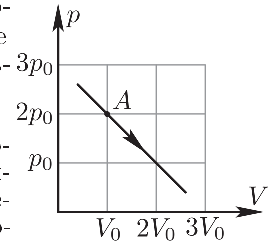


Рис. 6

В некоторой точке двухпроводной телефонной линии неизвестной длины L произошло повреждение, в результате которого между проводниками появилось сопротивление утечки R_x (рис. 6). К обоим концам линии прибыли операторы, причём оператор на левом конце имел в своём распоряжении только источник постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В и амперметр, а на правом — только вольтметр. Для связи операторы использовали мобильные телефоны. Погонные сопротивления линии, то есть сопротивления единицы длины каждого проводника линии, $\rho = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Ом/м. Используя возможные схемы подключений к концам линии, операторы получили 2 значения тока: $I_1 = 6$ А и $I_2 = 9$ А и одно значение напряжения $V = 9$ В. Помогите оператору на левом конце линии по этим данным определить сопротивление утечки R_x, расстояние l до места повреждения и общую длину линии L. Нарисуйте схемы измерений, которые использовали операторы. Измерительные приборы и источники постоянного тока, которые были в распоряжении операторов, можно считать идеальными.

Задача 4. Теплоемкость газа



С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс (рис. 7). Найдите теплоемкость газа в точке A. В какой точке процесса теплоемкость газа максимальна?

Задача 5. Высоковольтный генератор

Для ускорения «тяжелых» заряженных частиц (протоны, ионы) используют высоковольтный электростатический генератор Ван-де-Граафа (рис. 8). Заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод. Поверхностные заряды передаются ленте от источника вблизи нижнего шкива. Заряды стекают со сферического электрода через камеру, в которой ускоряются заряженные частицы (на рисунке она условно изображена в виде некоторого нагрузочного сопротивления).

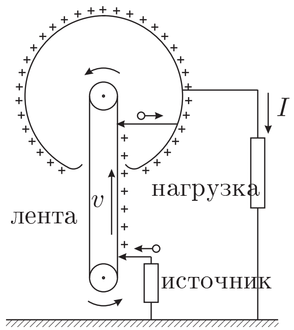


Рис. 8

Предположим, что радиус высоковольтного электрода $R = 1$ м, скорость движения ленты $v = 10$ м/с, а ширина ленты $l = 60$ см. Все устройство находится в воздухе, в котором электрический пробой наступает при напряженности электрического поля $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см. Найдите:

1. максимальный ток, который может протекать через нагрузку;
2. максимальный потенциал высоковольтного электрода;
3. минимальную (без учета трения) мощность электродвигателя, вращающего шкив ленты, при которой могут быть достигнуты максимальные значения тока и потенциала.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

11 класс

Задача 1. Футбол в сильный ветер

Футболист бьет по мячу массой m, сообщая ему начальную скорость v_1, направленную под углом α к горизонту навстречу ветру, дующему вдоль поверхности земли. Описав некоторую траекторию, мяч вернулся в исходную точку со скоростью v_2. Под каким углом β мяч упал на землю? Чему равна скорость u ветра? Какое время τ мяч находился в полете? Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости мяча относительно воздуха: $\vec{F}_{\text{сопр}} = -k \cdot \vec{V}_{\text{отн}}$, где коэффициент пропорциональности k — известная величина.

Задача 2. Остывающая планета.

Космонавты, высадившиеся на далекой планете, в ходе исследований обнаружили, что:

— планета так далека от всех звезд, что единственным источником энергии на ней являются протекающие в недрах планеты реакции радиоактивного распада;

— планета однородна, имеет форму шара, а радиоактивные элементы равномерно распределены по всему ее объему;

— период полураспада радиоактивных элементов равен 1 млн. лет (ход этого процесса не зависит от температуры);

— температура на поверхности планеты $t_1 = 0°\text{C}$, а в ее центре $t_2 = 100°\text{C}$;

— атмосфера отсутствует и планета непрерывно теряет энергию из-за теплового излучения.

Считая, что энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности планеты, пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры поверхности, а тепловой поток внутри планеты пропорционален перепаду температур на единицу расстояния $\Delta T/\Delta r$ определите:

1. температуру на расстоянии $r = R/2$ от центра планеты в момент исследований;
2. температуру поверхности планеты через 4 млн. лет;
3. температуру в центре планеты через 4 млн. лет.

Задача 3. Летающая катушка

Вблизи северного полюса вертикально расположенного намагниченного стержня (постоянного магнита) находится тонкая кольцевая катушка массой $m = 10$ г (рис. 9). Катушка может свободно перемещаться вдоль вертикальной оси z. Если катушку заставить колебаться по гармоническому закону около этого положения с амплитудой $A = 5$ мм и частотой $\nu = 50$ Гц, то на ее разомкнутых концах появится переменное напряжение с амплитудой $\mathscr{E}_0 = 1$ В. Какой постоянный ток (по величине и направлению) нужно пропустить через катушку, чтобы она зависла в исходном положении?

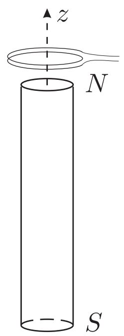


Рис. 9

Задача 4. Частицы в магнитном поле

Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ начинают с нулевыми начальными скоростями двигаться в однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном соединяющему их отрезку длины R (рис. 10).

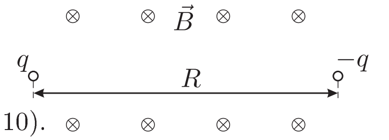


Рис. 10

1. Найдите минимальное значение индукции магнитного поля $B = B_0$ (критическое поле), при котором частицы не столкнутся друг с другом.

2. На каком расстоянии r друг от друга они окажутся при наибольшем сближении, если $B > B_0$?

3. Найдите скорости частиц и расстояние между ними в момент наибольшего сближения при критическом значении магнитного поля. Как в этом случае будут двигаться частицы после их наибольшего сближения. Нарисуйте качественный график траектории частиц.

Задача 5. Масс-спектрограф

Устройство для определения изотопного состава атомов состоит из двух основных частей: селектора скоростей C и масс-спектрографа M (рис. 11). В селектор скоростей через систему диафрагм с отверстиями влетают ионизированные атомы некоторого элемента, обладающие различными скоростями. Они движутся в селекторе в скрещенных однородных электрическом $\vec{E}_0$ и магнитном $\vec{B}_0$ полях и далее влетают через малое отверстие в масс-спектрограф, в котором создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Попадая на фотопластинку Ф, ионы оставляют на ней свой след на некотором расстоянии x от точки влёта в масс-спектрограф. Предположим, что эксперимент был выполнен при следующих значениях полей: $E_0 = 360$ В/см, $B_0 = 0{,}26$ Тл, $B = 0{,}24$ Тл. На фотопластинке были зарегистрированы следы ионов при $x_1 = 23{,}2$ см, $x_2 = 24{,}4$ см, $x_3 = 46{,}4$ см, $x_4 = 48{,}8$ см.

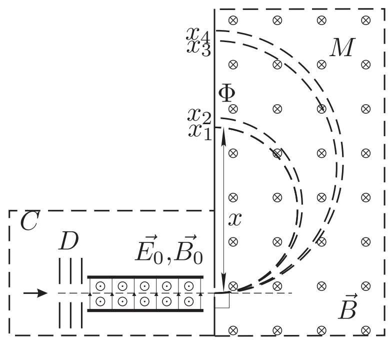


Рис. 11

Используя таблицу изотопов химических элементов, определите, ионы какого элемента оставили свои следы на фотопластинке. Запишите химические формулы ионов, соответствующих различным значениям x.

Элементарный заряд $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл,
атомная единица массы 1 а.е.м.$=1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг.

Примечание. Изотопами называются атомы одного и того же элемента, ядра которых обладают одинаковыми зарядовыми числами Z, но разными массовыми числами A.

Изотопный состав элементов

Z	Название	Хим.	Массовое число (содержание соответствующего изотопа в %)
1	Водород	H	1 (99,986); 2 (0,014)
2	Гелий	He	3 (10^{-5}); 4 (100)
3	Литий	Li	6 (7,93); 7 (92,07)
4	Бериллий	Be	9 (100)
5	Бор	B	10 (19,8); 11 (80,2)
6	Углерод	C	12 (98,9); 13 (1,1)
7	Азот	N	14 (99,62); 15 (0,38)
8	Кислород	O	16 (99,76); 17 (0,04); 18 (0,20)
9	Фтор	F	19 (100)
10	Неон	Ne	20 (90,0); 21 (0,27), 22 (9,73)
11	Натрий	Na	23 (100)
12	Магний	Mg	24 (77,4); 25 (11,5); 26 (11,1)
13	Алюминий	Al	27 (100)
14	Кремний	Si	28 (89,6); 29 (6,2); 30 (4,2)
15	Фосфор	P	31 (100)
16	Сера	S	32 (95,1); 33 (0,74): 34 (4,2); 36 (0,016)
17	Хлор	Cl	35 (75,4); 37 (24,6)
18	Аргон	Ar	36 (0,307); 38 (0,061); 40 (99,632)
19	Калий	K	39 (93,38); 40 (0,012); 41 (6,61)
20	Кальций	Ca	40 (96,96); 42 (0,64); 43 (0,15); 44 (2,06); 46 (0,0034); 48 (0,19)
21	Скандий	Sc	45 (100)
22	Титан	Ti	46 (7,95); 47(7,75); 48(73,45); 49(5,51); 50(5,34)
24	Хром	Cr	50 (4,49); 52 (83,78); 53 (9,43); 54 (2,30)
25	Марганец	Mn	55 (100)
26	Железо	Fe	54 (6,04); 56 (91,57), 57 (2,11); 58 (0,28)
27	Кобальт	Co	59 (100)
28	Никель	Ni	58 (67,4); 60 (26,7); 61 (1,2); 62 (3,8), 64 (0,88)
29	Медь	Cu	63 (70,13); 65 (29,87)
30	Цинк	Zn	64 (50,9); 66 (27,3); 67 (3,9); 68 (17,4); 70 (0,5)
31	Галлий	Ga	69 (61,2); 71(38,8)
32	Германий	Ge	70 (21,2); 72 (27,3); 73 (7,9); 74 (37,1); 76 {6,5},
33	Мышьяк	As	75 (100)
34	Селен	Se	74 (0,9); 76 (9,5); 77 (8,3); 78 (24,0); 80 (48,0); 82 (9,3)
35	Бром	Br	79 (50,6); 81 (49,4)
36	Криптон	Kr	78 (0,35); 80 (2,01); 82 (11,53); 83 (11,53); 84 (57,11);
			86 (17,47)
37	Рубидий	Rb	85 (72,8); 87 (27,2)
38	Стронций	Sr	84 (0,56); 86 (9,86); 87 (7,02); 88 (82,56)
39	Иттрий	Y	89 (100)
40	Цирконий	Zr	90 (48); 91 (11,5); 92 (22); 94 (17); 96 (1,5)
41	Ниобий	Nb	93 (100)
42	Молибден	Mo	92 (14,9); 94 (9,4); 95 (16,1); 96 (16,6); 97 (9,65); 98 (24,1);
			100 (9,25)
44	Рутений	Ru	96 (5,68); 98 (2,22); 99 (12,81); 100 (12,70); 101 (16,98);
			102 (31,34); 104 (18,27)
45	Родий	Rh	103 (100)
46	Палладий	Pd	102 (0,8); 104 (9,3); 103 (22,6); 106 (27,2); 108 (26,8); 110 (13,5)

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Катапульта

Максимальную дальность $S_{\max}$ обеспечивает единственная траектория, которая проходит над самой вершиной стены. В конечной точке скорость снаряда такая же, как и при вылете из катапульты. Пользуясь обратимостью движения, можно рассмотреть траекторию попятного движения, выходящую из цели и проходящую через вершину стены (рис. 12). Уравнения движения снаряда по горизонтальной и вертикальной осям имеют вид:

$$S = v_0 t\cos\alpha, \qquad h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

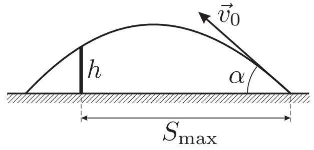


Рис. 12

Исключив из этих уравнений время t, выразим

$$h = S\operatorname{tg}\alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha).$$

Получилось квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$ (при заданных значениях h и S). Максимальной дальности $S = S_{\max}$ соответствует совпадение корней этого уравнения, так как максимальной дальности соответствует единственная траектория. Приравняв нулю дискриминант квадратного уравнения, найдем

$$S_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1-\frac{2gh}{v_0^2}} \approx 38{,}2 \text{ м} \approx 38 \text{ м}.$$

Максимальная дальность снаряда катапульты соответствует случаю $h = 0$:

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \approx 63{,}7 \text{ м} \approx 64 \text{ м}.$$

Задача 2. Санки с цилиндром

В обоих случаях ускорение санок $a = F/M = \text{const}$, поэтому их скорость

$$V_1 = V_2 = V = \sqrt{2aS} = \sqrt{\frac{2FS}{M}}.$$

Покажем, что для любой системы материальных точек массами m_i кинетическая энергия системы

$$K = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2,$$

где $m = \sum m_i$ — масса системы, V_c — скорость ее центра масс, v_i — скорость i-той материальной точки в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью центра масс. Пусть V_i — скорости точек в неподвижной системе отсчета, тогда кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{V}_c + \vec{v}_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i V_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + \vec{V}_c \sum m_i \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum m_i V_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2,$$

так как в системе отсчета центра масс импульс системы $\sum m_i \vec{v}_i = 0$.

Запишем закон сохранения механической энергии:

$$A = M\frac{V^2}{2} + m\frac{v^2}{2},$$

где v — скорость точек цилиндра в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью санок, откуда

$$\Delta A = F\Delta x = \frac{1}{2}M2V\Delta V + \frac{1}{2}m2v\Delta v.$$

За время Δt перемещение мальчика

$$\Delta x = V\Delta t + v\Delta t.$$

Запишем закон изменения импульса для санок с цилиндром:

$$F\Delta t = M\Delta V.$$

Из последних трех уравнений находим:

$$M\Delta V = m\Delta v.$$

В задаче $\Delta V = V$ и $\Delta v = v$, следовательно, $v = VM/m$. Тогда

$$A = FS\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Задача 3. Модель турбины

1. Скорость вытекающей воды определяется по формуле Торричелли:

$$u_1 = \sqrt{2gH} = 2 \text{ м/с}.$$

Мощность вытекающей струи

$$P_1 = \frac{\mu u_1^2}{2} = \frac{S\rho u_1^3}{2} = 0{,}4 \text{ Вт},$$

где $\mu = u_1 S\rho$ — расход воды. Полезная мощность турбины

$$N_1 = mgv_1 = 0{,}02 \text{ Вт}.$$

КПД турбины

$$\eta = N_1/P_1 = 5\%.$$

2. Во втором случае наличие избыточного давления газа над поверхностью воды эквивалентно добавочному столбу воды:

$$h = \frac{p - p_0}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

$$\text{Скорость вытекающей струи} \quad u_2 = \sqrt{2g(H+h)},$$

$$\text{откуда} \quad h = \frac{u_2^2}{2g} - H.$$

$$\text{Мощность струи} \quad P_2 = \frac{N_2}{\eta} = \frac{mgv_2}{\eta} = 1 \text{ Вт}.$$

$$\text{Скорость вытекающей струи} \quad u_2 = \sqrt[3]{\frac{2P_2}{S\rho}} \approx 2{,}7 \text{ м/с}.$$

Избыточное давление газа над водой

$$\Delta p = \rho g h = \frac{1}{2}\rho u_2^2 - \rho g H = 1600 \text{ Па} = 0{,}016 \text{ атм}.$$

Задачу можно также решить с помощью уравнения Бернулли.

Задача 4. Двухпроводная линия

При разомкнутом противоположном конце линии ее сопротивления выражаются формулами:

$$R_1 = 2\rho l + R_x, \qquad R_2 = 2\rho(L - l) + R_x. \tag{1}$$

При закороченных противоположных концах:

$$r_1 = 2\rho l + \frac{2\rho(L-l)R_x}{2\rho(L-l) + R_x}, \qquad r_2 = 2\rho(L-l) + \frac{2\rho l R_x}{2\rho l + R_x}. \tag{2}$$

Подставляя из (1) значения $2\rho l$ и $2\rho(L-l)$ в формулы (2), получим:

$$R_x^2 = R_2(R_1 - r_1), \qquad R_x^2 = R_1(R_2 - r_2),$$

$$r_2 = \frac{R_1R_2 - R_x^2}{R_1},$$

откуда

$$R_x = 2{,}0 \text{ Ом}, \qquad r_2 = 7{,}0 \text{ Ом}.$$

Далее, из (1) получим:

$$l = \frac{R_1 - R_x}{2\rho} = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ м}, \qquad L - l = \frac{R_2 - R_x}{2\rho} = 6{,}0 \cdot 10^3 \text{ м}, \qquad L = 8{,}0 \text{ км}.$$

10 класс

Задача 1. Паровоз

Перейдем в систему отсчета, равномерно движущуюся вместе с паровозом. Очевидно, что пока ящик не проскальзывает, он движется по окружности радиуса $l = R/2$. Вектор ускорения направлен к центру окружности и равен $\omega^2 l$. Пусть m — масса ящика, N — нормальная реакция опоры, ω — угловая скорость вращения колес, φ — угол, который спица в данный момент образует с горизонтом. Условие отсутствия проскальзывания ящика можно записать в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$Ox: \qquad m\omega^2 l\cos\varphi \leqslant \mu N,$$

$$Oy: \quad m\omega^2 l\sin\varphi = mg - N,$$

откуда

$$\omega^2 l\cos\varphi \leqslant \mu(g - \omega^2 l\sin\varphi), \qquad \text{или} \qquad \omega^2 l(\cos\varphi + \mu\sin\varphi) \leqslant \mu g.$$

Выражение $f(\varphi) = (\cos\varphi + \mu\sin\varphi)$ максимально при $\varphi = \varphi_0$, которое находится из условия

$$f'(\varphi_0) = -\sin\varphi_0 + \mu\cos\varphi_0 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}\varphi_0 = \mu$.

Но можно обойтись и без производных, введя вспомогательный угол ψ:

$$\operatorname{tg}\psi = \mu.$$

Тогда

$$f(\varphi) = \cos\varphi + \frac{\sin\psi}{\cos\psi}\sin\varphi = \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos\psi}.$$

Это выражение принимает максимальное значение при $\varphi = \psi$.

Выражая $\sin\varphi_0$ и $\cos\varphi_0$ через μ, найдем $f(\varphi_0) = \sqrt{1+\mu^2}$ и преобразуем условие отсутствия проскальзывания:

$$\frac{\omega^2 l}{g} \leqslant \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

откуда

$$v_1 = \omega_1 R = \sqrt{\frac{2gR\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}} \approx 3{,}0 \text{ м/с}.$$

Если скорость превысит это значение, ящик сдвинется относительно штанги.

Ящик начнет подпрыгивать, когда вертикальное ускорение штанги в верхней точке превысит ускорение свободного падения:

$$\omega^2 l \geqslant g, \qquad \text{откуда} \qquad v_2 = \omega_2 R = \sqrt{2gR} = 4{,}43 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Жидкий гелий

Температура гелия в обоих случаях намного меньше температуры азота. Поэтому количество теплоты Q_0, поступающее в единицу времени от азота к гелию через вакуумный промежуток из-за теплопроводности остаточных газов и излучения стенок, можно считать независящим от температуры гелия. Поступающая теплота идет на испарение гелия. Пусть вначале в единицу времени испаряется масса m_0 гелия, тогда согласно уравнению Клапейрона:

$$p_0 V_0 = \frac{m_0}{M_{\text{He}}} RT_0, \qquad \text{откуда} \qquad m_0 = \frac{p_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}},$$

где p_0 — давление насыщенных паров гелия при температуре T_0, V_0 — объем насыщенных паров гелия, откачиваемый в единицу времени, M_{He} — молярная масса гелия. Количество теплоты, отводимой от гелия,

$$Q_0 = rm_0 = r \cdot \frac{p_0 V_0}{RT_0} M_{\text{He}},$$

где r — удельная теплота испарения гелия. Аналогичное уравнение можно записать для второго случая:

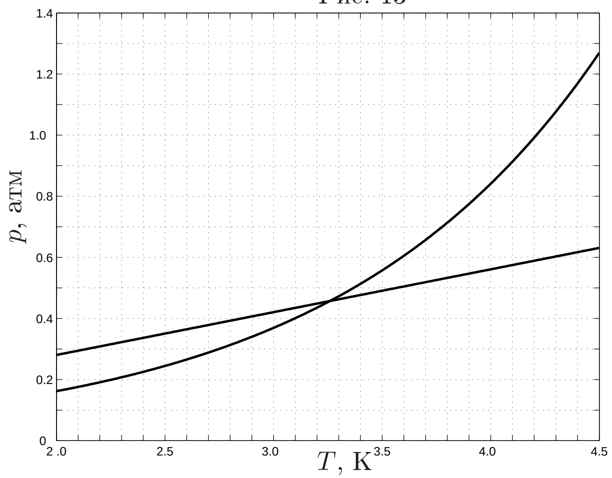
$$Q_0 = rm_1 = r \cdot \frac{pV_1}{RT} M_{\text{He}},$$

где p — давление насыщенных паров при температуре T, $V_1 = \frac{3}{2}V_0$ — новый объем паров, откачиваемый в единицу времени. Из этих двух уравнений находим:

$$p(T) = \frac{2}{3}\frac{p_0}{T_0}T. \tag{1}$$

Для получения температуры T находим из графика давление p_0. На том же графике строим зависимость (1). По точке пересечения графиков (рис. 13) определяем искомую температуру: $T = (3{,}25 \pm 0{,}05)$ K.

Рис. 13



Задача 3. Повреждение линии связи

1. Первая схема (рис. 14):

$$I_1(2\rho l + R_x) = \mathscr{E}, \qquad (1a)$$

$$V = \frac{\mathscr{E} R_x}{2\rho l + R_x}. \qquad (1b)$$

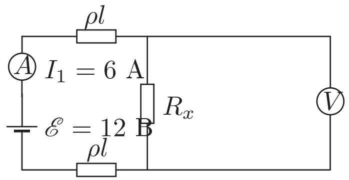


Рис. 14

Из (1a) и (1b) получаем

$$R_x = \frac{V}{I_1} = 1{,}5\ \text{Ом},$$

$$2\rho l = \frac{\mathscr{E}}{I_1} - R_x = \frac{\mathscr{E} - V}{I_1} = 0{,}5\ \text{Ом}, l = \frac{\mathscr{E} - V}{2\rho I_1} = 0{,}5 \cdot 10^3 \text{м} = 0{,}5\ \text{км}.$$

2. Для второй схемы (рис. 15) введем обозначения:

$$R = 2\rho(L - l). \qquad (2)$$

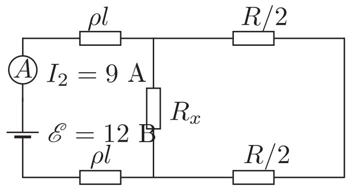


Рис. 15

Оператор на левом конце линии обнаружит силу тока

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{2\rho l + \frac{R_x R}{R_x + R}},$$

откуда

$$R = \frac{(\mathscr{E} - 2\rho l I_2) R_x}{2\rho l I_2 + R_x I_2 - \mathscr{E}} = 1{,}875\ \text{Ом}.$$

После подстановки выражений для R, l и ρ в (2) получим:

$$L = \frac{R}{2\rho} + l = 2375\ \text{м} \approx 2{,}4\ \text{км}.$$

Задача 4. Теплоемкость газа

Из определения теплоемкости, первого начала и формулы для внутренней энергии одного моля идеального газа $U = c_v T$ получаем для теплоемкости одного моля:

$$c = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T} = \frac{c_v \Delta T + p\Delta V}{\Delta T} = c_v + p\frac{\Delta V}{\Delta T}. \qquad (1)$$

Вычислим отношение $\Delta V/\Delta T$ в точке A заданного процесса. Для этого рассмотрим бесконечно малый участок процесса от точки A ($p_A = 2p_0$, $V_A = V_0$) до близкой точки B ($p_B = p_A + \Delta p$, $V_B = V_A + \Delta V$). Очевидно, Δp и ΔV имеют разные знаки.

Запишем уравнение процесса в виде

$$\frac{p}{p_0} + \frac{V}{V_0} = 3.$$

В точке A

$$\frac{p_A}{p_0} + \frac{V_A}{V_0} = 3, \qquad (2)$$

в точке B

$$\frac{p_A + \Delta p}{p_0} + \frac{V_A + \Delta V}{V_0} = 3. \qquad (3)$$

Вычитая (2) из (3), для малых изменений Δp и ΔV получаем

$$\frac{\Delta p}{p_0} + \frac{\Delta V}{V_0} = 0. \qquad (4)$$

Еще одно соотношение для малых изменений можно получить из уравнения Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$p_A V_A = RT_A, \qquad (p_A + \Delta p)(V_A + \Delta V) = R(T_A + \Delta T).$$

Раскроем скобки, вычтем из второго уравнения первое и пренебрежем $\Delta p \Delta V$:

$$p_A \Delta V + V_A \Delta p = R\Delta T, \qquad \text{или} \qquad 2p_0 \Delta V + V_0 \Delta p = R\Delta T. \qquad (5)$$

Теперь исключим Δp из (4) и (5):

$$p_0 \Delta V = R\Delta T, \qquad \text{или} \qquad p_0 \frac{\Delta V}{\Delta T} = R.$$

Теперь из формулы (1) для теплоемкости в точке A получаем

$$c = c_v + p_A \frac{\Delta V}{\Delta T} = c_v + 2p_0 \frac{\Delta V}{\Delta T} = c_v + 2R = \frac{7}{2}R.$$

График данного процесса касается изотермы в точке $(1{,}5p_0; 1{,}5V_0)$. Теплоемкость газа в этой точке равна бесконечности и, следовательно, максимальна.

Задача 5. Высоковольтный генератор

1. В стационарном режиме ток нагрузки определяется зарядом q, переносимым лентой за некоторое время τ:

$$I = \frac{q}{\tau} = \sigma l v,$$

где σ — поверхностная плотность заряда ленты.

Максимальное значение тока определяется электрической прочностью воздуха:

$$I_{\max} = \sigma_{\max} l v = (2\varepsilon_0 E_{\text{пр}}) l v \approx 0{,}32 \text{ мА}.$$

2. Максимальный потенциал сферы также определяется электрической прочностью воздуха. Для сферического электрода $\varphi = R \cdot E$, где E — напряженность электрического поля вблизи электрода. Поэтому

$$\varphi_{\max} = R \cdot E_{\text{пр}} = 3{,}0 \cdot 10^6 \text{ В}.$$

3. Минимальная мощность электродвигателя определяется электрической мощностью, выделяющейся в нагрузке:

$$P_{\min} \approx I_{\max} \cdot \varphi_{\max} = 960 \text{ Вт}.$$

В приведенной оценке минимальной мощности не учитывается эффект сложения полей ленты и сферы в области их максимального сближения. Этот эффект частично компенсируется перераспределением заряда на сфере, а также тем, что большая часть ленты находится вне сферы и вертикальная составляющая создаваемого ею поля направлена против поля сферы в рассматриваемой области.

11 класс

Задача 1. Футбол в сильный ветер

Пусть $\vec{v}$ — скорость мяча относительно земли, тогда

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{V}_{\text{отн}} = -k\vec{v} + k\vec{u}.$$

Возврат мяча в исходную точку возможен только в том случае, когда векторная сумма силы тяжести $m\vec{g}$ и вектора $k\vec{u}$ направлена противоположно вектору начальной скорости $\vec{v}_1$, то есть

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mg}{ku}. \qquad (1)$$

При этом мяч будет двигаться по прямой и упадет на землю под углом $\beta = \alpha$. Из (1) находим скорость ветра

$$u = \frac{mg}{k}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Время полета мяча найдем из уравнения его движения:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

Учитывая $v = dx/dt$, приходим к уравнению

$$mdv = -kdx - \frac{mg}{\sin\alpha}dt.$$

Интегрируя это уравнение за все время движения мяча, получаем

$$m(-v_2 - v_1) = 0 - \frac{mg}{\sin\alpha}\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{(v_1 + v_2)\sin\alpha}{g}.$$

Задача 2. Остывающая планета.

1. Рассмотрим тепловой поток внутри планеты через сферу радиусом $r < R$:

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_r = k \cdot 4\pi r^2 \cdot \left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right|.$$

где k — коэффициент, характеризующий теплопроводность планеты.

Поскольку охлаждение планеты происходит очень медленно, будем считать, что в каждый момент времени любой участок планеты находится в состоянии теплового равновесия. Тогда через нашу сферу в единицу времени проходит такое количество энергии, которое выделяется внутри нее, а через поверхность планеты — внутри всей планеты:

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_R = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T_1^4,$$

где σ — постоянная Стефана–Больцмана.

Поскольку радиоактивные элементы распределены равномерно по всему объему планеты, то

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_r = \frac{r^3}{R^3}\cdot\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}\right)_R = \frac{r^3}{R^3}\cdot\sigma\cdot 4\pi R^2\cdot T_1^4 = k\cdot 4\pi r^2\cdot\left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right|.$$

Из последнего равенства

$$\left|\frac{\Delta T}{\Delta r}\right| = \frac{\sigma}{k}\cdot\frac{T_1^4}{R}\cdot r.$$

После интегрирования найдем

$$T(r) - T_1 = \frac{\sigma T_1^4}{2kR}(R^2 - r^2).$$

Поскольку $T(0) = T_2$, последнее выражение можно привести к виду

$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{R^2 - r^2}{R^2}.$$

Отсюда $t_{r=R/2} = 75°\text{C}$.

2. Так как число радиоактивных элементов за 1 млн. лет уменьшается вдвое, то за 4 млн. лет оно уменьшится в $2^4 = 16$ раз. Это означает, что количество источников энергии и, следовательно, выделяемая ими энергия также уменьшится в 16 раз. Вся эта энергия излучается с поверхности планеты и, так как мощность излучения пропорциональна T^4, температура поверхности за 4 млн. лет уменьшится вдвое:

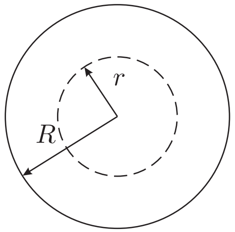


Рис. 16

$$T_1 = 273\,\text{K}, \qquad \text{откуда} \qquad T_1' = 136{,}5\,\text{K}, \qquad t_1' = -136{,}5°\text{C}.$$

3. Найдём температуру в центре планеты через 4 млн. лет. При $r = 0$ получаем:

$$(T_2 - T_1) = \frac{\sigma R}{2k}T_1^4.$$

Таким образом,

$$\frac{T_2' - T_1'}{T_2 - T_1} = \left(\frac{T_1'}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{16},$$

откуда

$$T_2' = T_1' + \frac{1}{16}(T_2 - T_1) \approx 143\text{ K}, \qquad t_2' \approx -130°\text{C}.$$

Задача 3. Летающая катушка

У северного полюса цилиндра вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ имеет горизонтальную составляющую, направленную по радиусу цилиндра. Обозначим эту составляющую в месте расположения витков катушки через B_r. Перемещение витков вдоль оси z можно записать в виде:

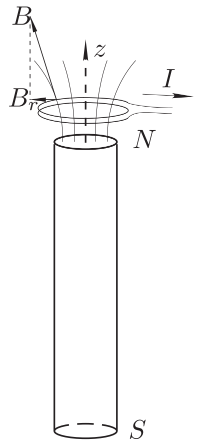


Рис. 17

$$z(t) = A\sin(2\pi\nu t).$$

Скорость катушки:

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} = 2\pi\nu A\cos(2\pi\nu t).$$

ЭДС индукции, наводимая в ней при колебаниях,

$$\mathscr{E}(t) = 2\pi RNB_r v_z = 2\pi RNB_r A\cdot 2\pi\nu\cos(2\pi\nu t),$$

где R — радиус витков, N — их число. Амплитуда переменного напряжения на концах катушки

$$\mathscr{E}_0 = 4\pi^2\nu RNB_r A.$$

Если теперь через нее пропустить постоянный ток I по часовой стрелке (если смотреть сверху), то на катушку вдоль оси z будет действовать направленная вверх сила Ампера

$$F_z = 2\pi RIB_r N = \frac{\mathscr{E}_0 I}{2\pi\nu A}.$$

Катушка зависнет, если сила Ампера будет равна силе тяжести:

$$\frac{\mathscr{E}_0 I}{2\pi\nu A} = mg,$$

откуда

$$I = \frac{2\pi\nu Amg}{\mathscr{E}_0} = 0{,}154\text{ A}.$$

Задача 4. Частицы в магнитном поле

Из закона сохранения энергии для обеих частиц находим:

$$mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \tag{1}$$

где v — их скорость в момент наибольшего сближения.

Пусть ось x направлена параллельно отрезку, соединяющему заряды, а ось y — перпендикулярна ему. Найдем проекцию ускорения левой частицы на ось y:

$$m\frac{dv_y}{dt} = qB\frac{dx}{dt},$$

где dx/dt — проекция ее скорости на ось x, откуда

$$mdv_y = qBdx.$$

Учитывая симметричный характер движения частиц относительно оси y, найдем полное изменение импульса вдоль оси y имеем:

$$mv = \frac{qB(R-r)}{2}. \tag{2}$$

Исключая из (1) и (2), получим уравнение:

$$\frac{B^2(R-r)^2}{m} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),$$

которое после сокращения на $(R-r)$ приводится к виду:

$$r^2 - Rr + \frac{m}{\pi\varepsilon_0 B^2 R} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$r = \frac{R}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 R^3 B^2}}\right).$$

Из этого соотношения видно, что решение задачи существует только при условии

$$B \geqslant B_0 = \sqrt{\frac{4m}{\pi\varepsilon_0 R^3}}. \tag{1}$$

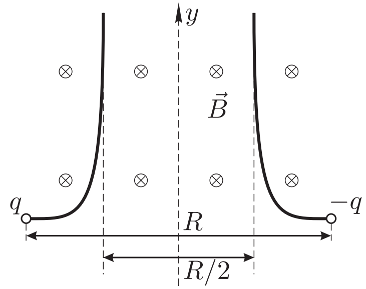


Рис. 18

Если $B < B_0$, то магнитная сила (сила Лоренца) недостаточна для разворота частиц и произойдет столкновение.

При выполнении условия (1) из двух корней квадратного уравнения следует выбрать больший корень:

$$\frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 R^3 B^2}}\right),$$

так как при достижении этого значения сближение частиц прекращается.

При критическом значении магнитного поля $B = B_0$ частицы сблизятся на расстояние $r = R/2$. В этом случае на них действует электрическая сила

$$F_e = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R^2},$$

и противоположная по направлению магнитная сила Лоренца

$$F_L = qvB_0. \tag{3}$$

Подставляя в (3) значения критического поля B_0 и скорости v (из закона сохранения энергии), найдем

$$F_L = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 R^2} = F_e.$$

Это значит, что при критическом поле частицы после максимального сближения на расстояние $r = R/2$ будут двигаться параллельно друг другу с постоянными скоростями (рис. 18).

Задача 5. Масс-спектрограф

1. Скорость, с которой ионы влетают в масс-спектрограф, не зависит от массы и заряда иона:

$$qE_0 = qvB_0, \qquad v = \frac{E_0}{B_0} \approx 1{,}38 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Скорости ионов являются нерелятивистскими: $v \ll c$.

2. Масса иона $M = A \cdot 1$ а.е.м., где A — массовое число. Заряд иона $q = n \cdot e$, где n — кратность ионизации.

3. В масс-спектрографе ионы движутся по полуокружностям:

$$\frac{Mv^2}{R} = qvB,$$

следовательно,

$$A = nR\frac{eB}{v \cdot 1 \text{ а.е.м.}} = nx\frac{eB}{2v \cdot 1 \text{ а.е.м.}}.$$

Здесь $x = 2R$.

4. Подставляя числовые данные, получим: $A \approx 84nx$, причем A — целое число.

5. Поскольку $x_1 = x_3/2$, $x_2 = x_4/2$, то можно предположить, что x_3 и x_4 соответствуют однозарядным ионам, а x_1 и x_2 — двухзарядным ионам соответствующих изотопов.

6. Для однозарядных ионов $n = 1$, $A = 84x$.
Для x_3: $A_3 = 84 \cdot 0{,}464 \approx 39$.
Для x_4: $A_4 = 84 \cdot 0{,}488 \approx 41$.
Для двухзарядных ионов $n = 2$, $A = 168x$.
Для x_1: $A_1 = 168 \cdot 0{,}232 \approx 39$.
Для x_2: $A_2 = 168 \cdot 0{,}244 \approx 41$.

7. С помощью таблицы изотопов определяем для x_1, x_2, x_3, x_4:

$$^{39}K^{++}, \quad ^{41}K^{++}, \quad ^{39}K^{+}, \quad ^{41}K^{+}.$$

Аналогично, рассматривая пару двухзарядных ионов и пару четырехзарядных, находим:

$$^{78}Se^{4+}, \quad ^{82}Se^{4+}, \quad ^{78}Se^{2+}, \quad ^{82}Se^{2+};$$

$$^{78}Kr^{4+}, \quad ^{82}Kr^{4+}, \quad ^{78}Kr^{2+}, \quad ^{82}Kr^{2+}.$$

Для заметок