ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА

«Институтов много — ЗФТШ одна.»

СТЭМ ФОПФ МФТИ

Директор — **Тамара Алексеевна Чугунова**
Зам. директора — Ирина Юрьевна Политова
Зам. директора — Мария Дмитриевна Короткова

Телефоны: (095) 408-5145 (заочное отделение),
485-4227 (тел./факс, очно-заочное отделение),
408-7227 (тел./факс, директор ЗФТШ)
E-mail: zftsh@zftsh.mipt.ru
Internet: http://www.zftsh.mipt.ru
Адрес ЗФТШ: 141700, Московская облать, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9. МФТИ. ЗФТШ.

Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте (ЗФТШ при МФТИ) была организована в 1966 году. Подавляющее большинство ее выпускников — более 60 тысяч человек! — поступили в лучшие вузы страны: МФТИ, МГУ, МИФИ, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Ежегодно более 60% первокурсников Физтеха — выпускники ЗФТШ. **Обучение в ЗФТШ — бесплатное!**

ЗФТШ создана для тех, кто хочет более глубоко и основательно изучить физику и математику, кто готов к упорной самостоятельной работе. В школе обучаются ученики 8-х, 9-х, 10-х и 11-х классов. Полная программа рассчитана на 4 года, но поступить можно в любой из этих классов. Обучение на всех отделениях ведется по единым дополнительным образовательным программам.

Прием на все отделения ЗФТШ проводится на конкурсной основе по результатам вступительного задания по физике и математике. Вступительное задание вместе с условиями приема ежегодно издается отдельной афишей и публикуется в журналах «Квант», «Юный техник» и «Внешкольник». С января по март идет прием вступительных заданий. Не позднее 1 августа зачисленные ученики узнают результаты приема. Вне конкурса принимаются победители зональных и Всероссийских олимпиад по физике и математике.

Для школьников Москвы и Московской области в МФТИ и ряде московских школ ведется вечернее очное обучение по программе ЗФТШ. Занятия проводятся два раза в неделю в течение двух–трех академических часов. Преподавание ведут студенты, аспиранты и выпускники МФТИ. Прием на вечернее отделение проводится в сентябре по результатам собеседования.

F-2002 Теор

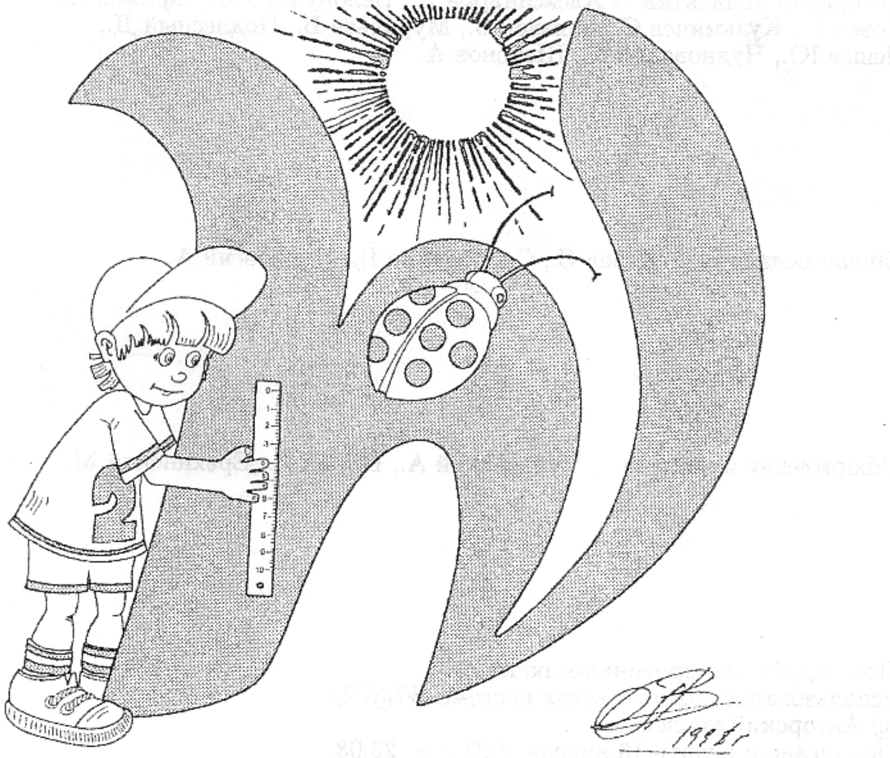
Министерство образования Российской Федерации
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Волгоград, 2001/2002 уч.г.

омплект задач подготовлен методической комиссией по физике
ентрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
инистерства образования Российской Федерации
ел.: (095) 408-80-77, 408-86-95.
-mail: vip@pop3.mipt.ru

Авторский коллектив — Александров Д., Белонучкин В., Ефимов В., Козел С., Кузьмичев С., Можаев В., Муравьев В., Подлесный Д., Чешев Ю., Чудновский А., Шеронов А.

к
Общая редакция — Козел С., Слободянин В., Чудновсий А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А., Ерехинский М.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX 2_\varepsilon$.

Подписано в печать 15 апреля 2002 г. в 23:08.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

Условия

9 класс

Задача 1. Космический зонд

Космический зонд «Шумейкер» на некоторое время должен стать спутником астероида Эрос. По расчетам он будет обращаться вокруг астероида на высоте, составляющей $n = 1/15$ радиуса Эроса, с периодом $T = 4{,}5$ часа. Определите предполагаемую среднюю плотность астероида ρ. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/ кг^2.

Задача 2. Жук на палочке

У вертикальной стенки стоит палочка AB длиной L (рис. 1). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью v, жук пополз по палочке с постоянной скоростью u относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?

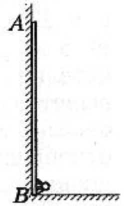


Рис. 1

Задача 3. Две проволоки

Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последовательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16°C выше комнатной температуры, а вторая — в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное подключение заменить на последовательное? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.

Задача 4. Нелинейный элемент

Электрическая цепь (рис. 2) состоит из резистора R и нелинейного элемента X, включенных последовательно. Вольтамперные характеристики (ВАХ) элементов R и X известны (рис. 3). На участке $0 \le U \le U_0$ ВАХ обоих элементов совпадают. На вход цепи подается некоторое напряжение V.

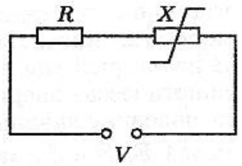


Рис. 2

1. Определите, какая доля η_1 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на нелинейный элемент в случаях $V \le 2U_0$ и $V = 4U_0$.

2. Включим последовательно в цепь еще один элемент X. Изобразите ВАХ двух последовательно включенных нелинейных элементов. Определите, какая доля η_2 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

3. А теперь подключим второй элемент X параллельно первому. Изобразите ВАХ двух параллельно включенных нелинейных элементов. Определите, какая доля η_3 теплоты, выделяющейся в цепи, приходится на оба нелинейных элемента в случае $V = 4U_0$.

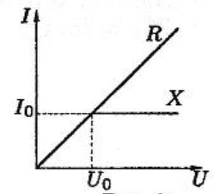


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Мощный автомобиль

Автомобиль массой $m = 1$ т движется по горизонтальной дороге. Коэффициент трения покрышек об асфальт $\mu = 0{,}1$. Трения в осях нет. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля: $F_{\text{сопр}} = kv^2$, где $k = 0{,}2$ Н·с^2/м^2. Определите, как зависит максимальная скорость v_{max}, которую может развить автомобиль, от мощности N установленного на нем двигателя. Нарисуйте график этой зависимости для $0 < N < 100$ кВт.

Задача 2. Кот Леопольд

Кот Леопольд сидел на самом краю крыши сарая. Два озорных мышонка решили выстрелить в него из рогатки, но кот заметил их и решил отстреливаться... Камни из рогаток мышат и кота вылетели одновременно и столкнулись в середине отрезка AB (рис. 4). Найдите высоту H сарая и отношение пути, пройденного камнем кота Леопольда, к пути, пройденному камнем мышат, если известно, что $\angle\varphi = 30°$, скорость камня, вылетевшего из рогатки мышат, $v_0 = 7$ м/с, а кот выстрелил горизонтально.

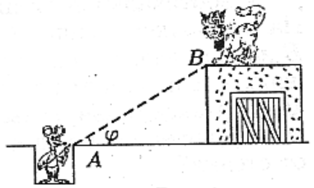


Рис. 4

Задача 3. Морозильник

Летом при температуре в помещении $t_1 = 27°$C промышленный морозильник при работе на полную мощность поддерживал температуру в камере $t_2 = -23°$C. Зимой температура в помещении упала до значения $t_3 = 7°$C. Из-за отказа реле агрегат вновь заработал на полную мощность. Какой при этом стала температура t_x в камере? Считайте агрегат идеальной машиной.

Задача 4. В полях

Частица массы m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряженностью E, магнитное с индукцией B и поле тяжести g (рис. 5). В некоторый момент поля E и B выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления полей $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $\vec{g}$ в момент выключения полей.

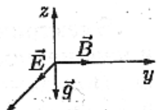


Рис. 5

Задача 5. Схема с диодом

В цепи (рис. 6) батарейки и диод идеальные. Ключи разомкнуты, конденсаторы разряжены. Сначала замыкают ключ K_1. После завершения переходных процессов в цепи замыкают ключ K_2. Найдите теплоты Q_1 и Q_2, выделившиеся на резисторах R_1 и R_2 с момента замыкания ключа K_1. Известно, что $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}$, $C_1 = C_2 = C$.

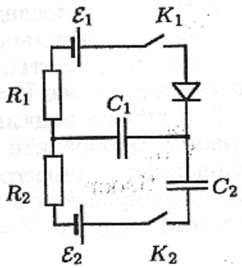


Рис. 6

11 класс

Задача 1. Бусинка

Гладкая проволока изогнута так, что если совместить ось Oy с одной ее частью, то другая часть проволоки будет совпадать с графиком функции $y = ax^3$ при $x > 0$ (рис. 7). Проволока равномерно вращается вокруг вертикальной оси Oy с угловой скоростью ω. На нее надета бусинка M, которая может скользить вдоль проволоки с пренебрежимо малым трением. Найдите координаты x_0 и y_0 равновесного положения бусинки и период T малых колебаний относительно этого положения.

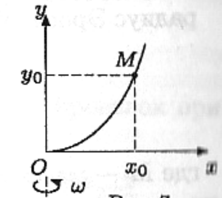


Рис. 7

Задача 2. Бензиновая горелка

С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3°$C при температуре на улице $t_2 = -23°$C. Предполагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0{,}4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу теплоту с улицы в комнату. Какую температуру t_3 удастся в таком случае поддерживать в помещении при прежнем расходе бензина? Движок находится вне помещения.

Задача 3. Коллекторный двигатель

Коллекторный двигатель питается от источника постоянного тока с напряжением $U = 12$ В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого электродвигателя, если магнитное поле в нем создается постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и механической нагрузки?

Задача 4. Заряд на конденсаторе

С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q. Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис. 8). Найдите зависимость тока в цепи от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора D, площадь поперечного сечения пластин S, индуктивность катушки L.

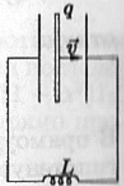


Рис. 8

Задача 5. Линза и крест

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис. 9). Из текста следует, что предмет и изображение были одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось была параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).

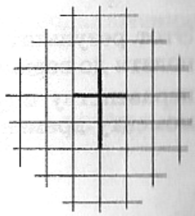


Рис. 9

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Космический зонд

Скорость спутника на рассчитываемой орбите $v = 2\pi(1+n)R/T$, где R — радиус Эроса. Ускорение спутника

$$a = \frac{v^2}{(n+1)R} = \frac{GM}{(1+n)^2R^2},$$

где M — масса Эроса. Подставив $M = 4/3\pi\rho R^3$, получим

$$\rho = \frac{3\pi(1+n)^3}{GT^2} \approx 653 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 2. Жук на палочке

Пусть G — место нахождения жука на палочке, M — середина палочки, $GK = h$ — высота жука над полом, $ON = H$ — расстояние от угла O до палочки (рис. 10), t — время, прошедшее с начала движения жука, тогда:

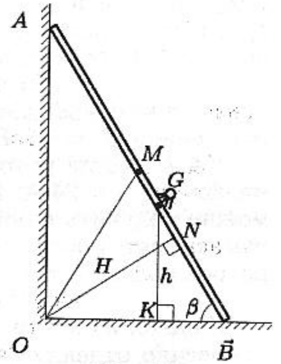


Рис. 10

$$OB = vt, \quad BG = ut, \quad AM = OM = L/2.$$

Треугольники ONB и GKB подобны, так как они прямоугольные и угол β общий, поэтому:

$$\frac{GK}{ON} = \frac{BG}{OB}, \qquad \text{или} \qquad \frac{h}{H} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

откуда

$$h = H\frac{u}{v}.$$

В прямоугольном треугольнике OMN катет $ON = H \le OM = L/2$ (OM — гипотенуза), причем равенство достигается при $\beta = 45°$. Следовательно,

$$h_{max} = H_{max}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}\frac{u}{v}.$$

Этот результат верен, если за время $t_{max} = L\cos 45°/v$ жук не успевает доползти до верхнего конца палочки, то есть когда $ut_{max} < L$, что эквивалентно неравенству $u \le v\sqrt{2}$. В противном случае высота h будет максимальной к моменту времени $t = L/u$ достижения жуком точки A:

$$h_{max} = \sqrt{L^2 - (vt)^2} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}$$

Задача 3. Две проволоки

Пусть r_1 и r_2 — радиусы проволок, l — их длина, тогда сопротивление проволок

$$R_1 = \frac{\rho l}{\pi r_1^2}, \qquad R_2 = \frac{\rho l}{\pi r_2^2}.$$

Мощности электричекого тока, выделяющиеся на каждой из проволок при параллельном соединении:

$$(1) \qquad N_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{U^2\pi r_1^2}{\rho l}, \qquad\qquad N_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2\pi r_2^2}{\rho l}, \qquad (2)$$

где U — напряжение на проволоках. В установившемся режиме, когда первая проволока нагрелась на Δt_1, а вторая — на Δt_2, вся мощность электрического тока уходит через боковые поверхности проволок на нагревание окружающей среды:

$$(3) \qquad N_1 = k \cdot 2\pi r_1 l \Delta t_1, \qquad\qquad N_2 = k \cdot 2\pi r_2 l \Delta t_2, \qquad (4)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Приравняв (1) к (3) и (2) к (4), получим:

$$U^2 r_1 = 2k\rho l^2 \Delta t_1, \qquad U^2 r_2 = 2k\rho l^2 \Delta t_2,$$

откуда $r_1/r_2 = \Delta t_1/\Delta t_2 = \alpha$. Следовательно, отношение токов через проволоки при параллельном соединении

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U/R_1}{U/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \alpha^2.$$

Поскольку сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, то при замене параллельного соединения на последовательное сила общего тока в цепи не изменится: $I = I_1 + I_2 = (1+\alpha^2)I_2$. Нагрев проволок (от комнатной температуры) в обоих случаях прямо пропорционален выделяющейся на них мощности электрического тока:

$$\frac{\Delta t_1'}{\Delta t_1} = \frac{N_1'}{N_1} = \frac{I^2R_1}{I_1^2R_1} = \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)^2, \qquad \frac{\Delta t_2'}{\Delta t_2} = \frac{N_2'}{N_2} = \frac{I^2R_2}{I_2^2R_2} = (\alpha^2+1)^2,$$

где штрихованные переменные относятся к последовательному подключению проволок. Отсюда получаем:

$$\Delta t_1' = \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)^2 \Delta t_1 = 25°\text{C}, \qquad \Delta t_2' = (\alpha^2+1)^2\frac{\Delta t_1}{\alpha} = 200°\text{C}.$$

Задача 4. Нелинейный элемент

1. Сопротивление резистора $R = U_0/I_0$, напряжение на нелинейном элементе $U = V - RI = V - U_0I/I_0$.

а) При $V \leq 2U_0$ нелинейный элемент ведет себя как резистор R. Следовательно, выделяющаяся в цепи теплота поровну распределяется между резистором и нелинейным элементом, то есть $\eta_{1а} = 0{,}5$.

б) При $V \geq 2U_0$ сила тока I достигает своего максимального значения I_0, а напряжение $U = V - U_0$; тогда

$$\eta_{1б} = \frac{P_X}{P_X + P_R} = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{(V - U_0)I_0}{(V - U_0)I_0 + U_0I_0} = 1 - \frac{U_0}{V} = 0{,}75.$$

2. ВАХ двух последовательно соединенных нелинейных элементов получается сложением напряжений для каждого фиксированного значения силы тока (рис. 11). Суммарное напряжение на нелинейных элементах $U = V - RI = V - U_0I/I_0$. Пусть при $V = 4U_0$ сила тока $I = I_0$, тогда $U = V - U_0 = 3U_0 > 2U_0$, значит, наше предположение о силе тока верно, поэтому

$$\eta_2 = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{(V - U_0)I_0}{(V - U_0)I_0 + U_0I_0} = 1 - \frac{U_0}{V} = 0{,}75.$$

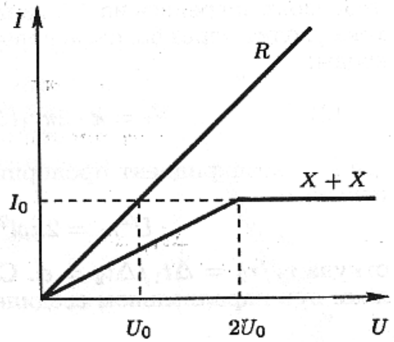


Рис. 11

Таким образом, в режиме насыщения доля теплоты, выделяющаяся на нелинейных элементах, не зависит от их числа.

3. ВАХ двух параллельно соединенных нелинейных элементов получается сложением сил токов для каждого фиксированного значения напряжения (рис. 12). Напряжение на каждом нелинейном элементе $U = V - RI = V - U_0I/I_0$. Пусть при $V = 4U_0$ сила тока $I = 2I_0$, тогда $U = V - U_0 = 2U_0 > U_0$, значит, наше предположение о силе тока верно, поэтому

$$\eta_3 = \frac{UI}{UI + RI^2} = \frac{4U_0I_0}{4U_0I_0 + 4U_0I_0} = 0{,}5.$$

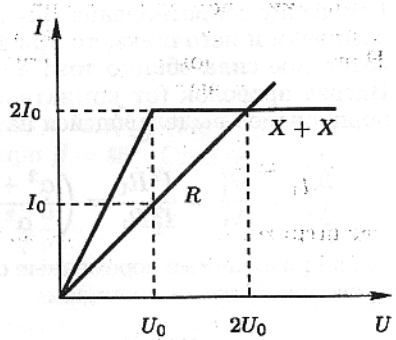


Рис. 12

10 класс

Задача 1. Мощный автомобиль

При движении с постоянной скоростью v на автомобиль по горизонтали действуют две силы: $F_{сопр} = kv^2$ (направлена назад), $F_{тр}$ (направлена вперед). Если скорость v велика настолько, что $F_{сопр} > F_{тр\ max} = \mu mg$, то движущая сила $F = F_{тр} < F_{сопр}$, и автомобиль будет тормозиться. Даже если мощность двигателя достаточно велика, колеса будут проскальзывать, и снова $F = F_{тр\ max} < F_{сопр}$. Значит, есть предельная скорость v_0, не зависящая от мощности двигателя. При этой скорости $F_{сопр} = F_{тр\ max}$, то есть $kv_0^2 = \mu mg$, откуда $v_0 = \sqrt{\mu mg/k} \approx 71$ м/с. С другой стороны, для поддержания постоянной скорости v требуется мощность $N = F_{сопр} \cdot v = kv^3$. Значит, $v_{max}(N) = (N/k)^{1/3}$. Обобщим полученные результаты (рис. 13):

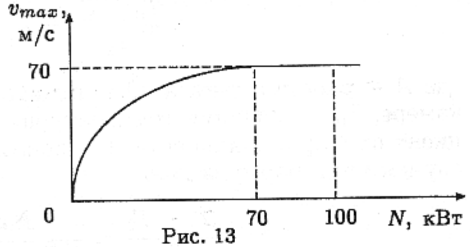


Рис. 13

$$v_{max} = min((N/k)^{1/3}; \sqrt{\mu mg/k}).$$

Начиная с мощности N_0, v_{max} перестает расти, то есть $v_{max} = v_0$ при $(N/k)^{1/3} \geq \sqrt{\mu mg/k}$, то есть при $N \geq \mu mg\sqrt{\mu mg/k} \approx 70$ кВт.

Задача 2. Кот Леопольд

Пусть t — время полета камней до столкновения, α — угол, образованный начальной скоростью камня мышат с горизонтом. Из условия столкновения камней в середине AB следует, что

$$v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = \frac{H}{2} = \frac{gt^2}{2},$$

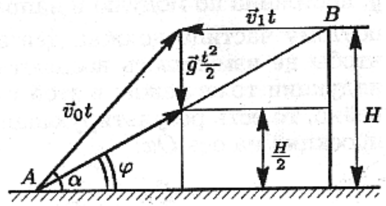


Рис. 14

откуда

$$t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}, \qquad H = gt^2 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}.$$

Перемещение камня мышат $\vec{S}_м = \vec{v}_0t + \vec{g}t^2/2$ (рис. 14). Из рисунка ясно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}30^\circ = 2/\sqrt{3}$, откуда $\sin\alpha = 2/\sqrt{7}$. Подставив значение $\sin\alpha$ в выражение для высоты сарая, получим $H \approx 2{,}8$ м.

Сравним обращенное во времени движение камня, брошенного котом Леопольдом, с движением камня, брошенного мышатами. У этих движений одинаковые перемещения $\vec{S}$, времена t и ускорения $\vec{g}$, поэтому

$$\vec{v}_0t + \vec{g}\frac{t^2}{2} = \vec{S} = \vec{v}_кt + \vec{g}\frac{t^2}{2},$$

где $\vec{v}_к$ — начальная скорость обращенного движения камня кота. Из этого уравнения следует, что $\vec{v}_к = \vec{v}_0$. Следовательно, совпадают траектории движений, а значит, и пройденные пути.

Задача 3. Морозильник

Идеальный холодильник работает по обратному циклу Карно, поэтому

$$\frac{T_н - T_х}{T_х} = \frac{A}{Q} = \frac{Nt}{k(T_н - T_х)t},$$

где A — работа агрегата, Q — отнятое у камеры тепло, $T_х$ — температура в камере, $T_н$ — внешняя температура, N — мощность агрегата, k — коэффициент пропорциональности, t — время. Применительно к первому и второму случаям эта формула дает:

$$\frac{T_1 - T_2}{T_2} = \frac{Nt}{k(T_1 - T_2)t} = \frac{N}{k(T_1 - T_2)}, \tag{1}$$

$$\frac{T_3 - T_х}{T_х} = \frac{N}{k(T_3 - T_х)}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим:

$$\frac{(T_1 - T_2)^2}{(T_3 - T_х)^2} = \frac{T_2}{T_х},$$

откуда $T_х = 232$ К, то есть $t_х = -41°$C. Второе решение $T_х = 338$ К отвечает работе агрегата в качестве теплового насоса.

Задача 4. В полях

Результирующая сила $\vec{F}$, действующая на частицу со стороны полей $\vec{E}$ и $\vec{g}$, постоянна по модулю и направлению. Сила Лоренца не совершает работы, поэтому частица должна двигаться в плоскости перпендикулярной силе $\vec{F}$, чтобы не изменялась абсолютная величина ее скорости. Вектор магнитной индукции тоже лежит в этой плоскости, значит, частица движется прямолинейно, то есть результирующая всех сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось Ox:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE - qv_zB = 0, \qquad \text{откуда} \qquad v_z = \frac{E}{B}.$$

Когда кинетическая энергия достигает минимума, скорость частицы направлена горизонтально. В начальный момент времени кинетическая энергия частицы в 2 раза больше, значит, вертикальная и горизонтальная составляющие начальной скорости одинаковые. Поэтому $v_0 = \sqrt{2}v_z = E\sqrt{2}/B$. При движении в скрещеных полях силы, действующие на частицу вдоль оси Oz, скомпенсированы:

$$mg = qv_xB,$$

$$\text{а это значит} \qquad v_x = \frac{m}{q}\frac{g}{B}.$$

Составляющую скорости v_y найдем из условия $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2$. Откуда следует

$$v_y = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 - \left(\frac{m}{q}\frac{g}{B}\right)^2}.$$

Задача 5. Схема с диодом

В промежуток времени, когда ключ K_1 замкнут, а K_2 разомкнут, диод открыт. К моменту замыкания ключа K_2 работа батареи $\mathcal{E}_1$ пошла на зарядку конденсатора C_1 и выделение тепла Q_1' на резисторе R_1:

$$\mathcal{E}_1 q_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} + Q_1',$$

где q_1 — заряд, прошедший через батарею. Конденсатор C_1 зарядится до напряжения $\mathcal{E}_1$, поэтому $q_1 = C_1\mathcal{E}_1$, откуда $Q_1' = C_1\mathcal{E}_1^2/2$. Поскольку $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, то после замыкания ключа K_2 напряжение на конденсаторе C_1 возрастает, поэтому диод будет все время закрыт. Следовательно, ток через резистор R_1 течь не будет, и $Q_1 = Q_1' = C\mathcal{E}^2/2$. К моменту завершения переходных процессов через батарею $\mathcal{E}_2$ пройдет заряд q_2, тогда работа источника

$$\mathcal{E}_2 q_2 = \frac{q_2^2}{2C_2} + \left(\frac{(q_1+q_2)^2}{2C_1} - \frac{q_1^2}{2C_1}\right) + Q_2. \tag{1}$$

Конденсаторы зарядятся до напряжений U_1 и U_2, которые находим из условий стационарности: $U_1 + U_2 = \mathcal{E}_2$, $\quad q_1 + q_2 = C_1U_1$, $\quad q_2 = C_2U_2$. Отсюда

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{2} = \frac{3}{2}\mathcal{E}, \qquad U_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{E}.$$

Подставляя q_1, q_2, U_1, U_2 в (1), находим $Q_2 = C\mathcal{E}^2/4$.

11 класс

Задача 1. Бусинка

Касательная к проволоке в точке (x_0, y_0) — положении равновесия бусинки — составляет угол α_0 с осью Ox, причем $\operatorname{tg}\alpha_0 = y'_x(x_0) = 3ax_0^2$. (1) Второй закон Ньютона в проекции на эту касательную имеет вид: $m\omega^2 x_0 \cos\alpha_0 = mg\sin\alpha_0$. (2)

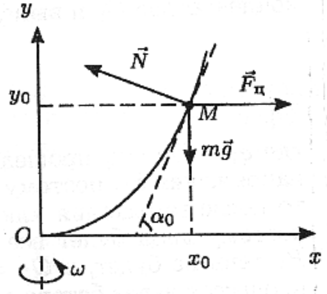


Рис. 15

Из (1) и (2) находим $x_0 = \dfrac{\omega^2}{3ag}$, $y(x_0) = \dfrac{\omega^6}{27a^2g^3}$.

Пусть Δx и Δy — смещения бусинки при малых колебаниях, тогда

$$\Delta y = a(x_0 + \Delta x)^3 - ax_0^3 \approx 3ax_0^2\Delta x + 3ax_0\Delta x^2.$$

Малое смещение бусинки вдоль проволоки

$$s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + y'_x(x_0)^2}\Delta x = \sqrt{1 + \frac{\omega^8}{9a^2g^4}}\Delta x.$$

В системе отсчета, вращающейся вместе с проволокой, кинетическая энергия бусинки

$$E_к = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2;$$

потенциальная энергия в полях силы тяжести и центробежной силы

$$E_п = mg(y_0 + \Delta y) - \frac{m\omega^2}{2}(x_0 + \Delta x)^2 =$$

$$= mgy_0 + mg(3ax_0^2\Delta x + 3ax_0\Delta x^2) - \left(\frac{m\omega^2}{2}x_0^2 + m\omega^2 x_0\Delta x + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2\right).$$

Из (1) и (2) следует $3ax_0^2 mg\Delta x = m\omega^2 x_0\Delta x$, поэтому

$$E_п = C + \frac{m\omega^2}{2}\Delta x^2, \qquad \text{где} \qquad C = mgy_0 - \frac{m}{2}\omega^2 x_0^2.$$

Выразим полную механическую энергию через s:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{s^2}{1 + \omega^8/(9a^2g^4)} + C.$$

Энергия гармонических колебаний имеет вид $E = mv^2/2 + kx^2/2 + C$, что соответствует нашему случаю (k — эффективная жесткость). Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1 + \frac{\omega^8}{9a^2g^4}}.$$

Задача 2. Бензиновая горелка

Мощность теплового потока из комнаты пропорциональна разности комнатной и уличной температур, то есть в установившемся режиме при использовании горелки $N = k(T_1 - T_2)$, где N — мощность горелки, k — коэффициент пропорциональности.

Идеальный холодильник работает по обратному циклу Карно. Пусть P — мощность, отнимаемая агрегатом у окружающей среды, тогда

$$\frac{\eta N}{P} = \frac{T_3 - T_2}{T_2}, \qquad \text{откуда} \qquad P = \frac{T_2\eta N}{T_3 - T_2}.$$

В установившемся режиме мощность теплового потока в комнату

$$N' = P + \eta N = k(T_3 - T_2).$$

Подставив сюда выражения для P и N и сократив на k, получим

$$\frac{T_2\eta(T_1 - T_2)}{T_3 - T_2} + \eta(T_1 - T_2) = T_3 - T_2,$$

откуда $T_3 = 299$ К ($t_3 = 26$°C). Второе решение $T'_3 = 209$ К ($t'_3 = -64$°C) отвечает работе агрегата на охлаждение комнаты.

Задача 3. Коллекторный двигатель

Возникающая в обмотках ротора ЭДС $\mathcal{E}$ прямо пропорциональна угловой скорости его вращения, то есть $\mathcal{E} = \alpha\omega$. Поэтому при полной остановке ротора ток через обмотки определяется только их активным сопротивлением $R = U/I_2$.

Пусть ω_1 — угловая скорость вращения ротора при работе двигателя на холостом ходу, тогда из закона Ома $U = \alpha\omega_1 + I_1R$ находим $\alpha = (U - I_1R)/\omega_1$. В этом случае работа источника идет на выделение тепла в обмотках и преодоление сил трения, поэтому из закона сохранения энергии $UI_1 = M\omega_1 + I_1^2R$ находим момент сил трения $M = (UI_1 - I_1^2R)/\omega_1$.

Когда двигатель нагружен и вращается с угловой скоростью ω, из закона Ома $U = \alpha\omega + IR$ находим силу тока в обмотках $I = (U - \alpha\omega)/R$. Полезная мощность двигателя в этом случае:

$$P(\omega) = UI - I^2R - M\omega = -\frac{\alpha^2}{R}\omega^2 + \left(\frac{\alpha U}{R} - M\right)\omega.$$

Это квадратичная функция, поэтому $P(\omega)$ будет максимальна при

$$\omega = \omega_m = \frac{\alpha U - MR}{2\alpha^2}.$$

Подставив в $P(\omega)$ выражения для R, α, M и ω_m, получим:

$$P_{max} = P(\omega_m) = \frac{UI_2}{4}\left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right)^2 = 50 \text{ Вт}.$$

Задача 4. Заряд на конденсаторе

Сразу после испарения слоя вещества ток в цепи будет равен нулю, заряд на левой пластинке будет равен q, а на правой заряда не будет. Теперь рассмотрим произвольный момент времени (рис. 16). По закону сохранения заряда, если на правой пластинке появится заряд Q, то на левой будет заряд $(-q-Q)$. Напряжение на конденсаторе будет создаваться полями трех заряженных пластин:

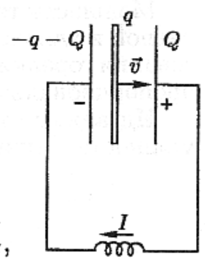


Рис. 16

$$U_c = \frac{(q+Q)}{2\varepsilon_0 S}D + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}D + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}vt - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}(D-vt) = \frac{2QD+2qvt}{2\varepsilon_0 S},$$

где t — время, которое отсчитывается от момента испарения слоя. Запишем закон Ома для нашей цепи;

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{QD}{\varepsilon_0 S} + \frac{qvt}{\varepsilon_0 S}.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по t:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{D}{\varepsilon_0 SL}I = \frac{qv}{\varepsilon_0 SL}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$I(t) = \frac{qv}{D}(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + 1), \qquad \text{где} \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{\varepsilon_0 SL}.$$

Из начальных условий $I = 0$ и $dI/dt = 0$ при $t = 0$ (так как $U_c(0) = 0$) следует, что решение имеет вид:

$$I(t) = \frac{qv}{D}(1-\cos\omega_0 t).$$

Задача 5. Линза и крест

Один из отрезков предмета перпендикулярен главной оптической оси линзы, поэтому его изображение тоже перпендикулярно ей. Чтобы поперечное увеличение этого отрезка было единичным, он должен находиться на расстоянии $2f$ от линзы, причем $f > 0$. Второй отрезок и его изображение параллельны главной оптической оси, а это возможно, лишь если они лежат на ней. Пусть l — длина отрезка креста вдоль главной оптической оси, x_1, x_2 — координаты его концов, d — часть отрезка между $2f$ и x_2 (рис. 17), a — размер клетки.

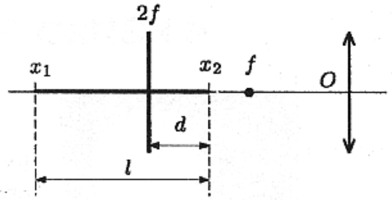


Рис. 17

В зависимости от ориентации креста относительно линзы возможны три значения отношения $\alpha = d/l$, а именно $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 2/3$, $\alpha_3 = 1/2$. Условие равенства длин отрезка креста вдоль оси и его изображения:

$$l = \frac{x_2 f}{x_2 - f} - \frac{x_1 f}{x_1 - f},$$

или после преобразований:

$$lx_1x_2 + lf^2 - lf(x_1+x_2) = (x_1 - x_2)f^2.$$

Подставив сюда $x_1 = x_2 + l$, получим

$$x_2(x_2 + l) - f(2x_2 - l) = 0.$$

Теперь подставим $x_2 = 2f - \alpha l$, тогда:

$$\alpha^2 l - 2\alpha f + f - \alpha l = 0, \qquad f = \frac{\alpha(1-\alpha)l}{1-2\alpha}.$$

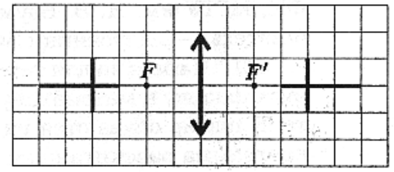


Рис. 18

Поскольку $f > 0$, то $\alpha = \frac{1}{3}$ (для других α величина $f < 0$), чему соответствует $l = 3a$. Отсюда $f = 2a$, после чего легко восстанавливается вся оптическая схема (рис. 18).