Problema teoretică nr. 1 (10 puncte)

Maşina lui Fred şi Barney

Fred şi Barney şi-au construit o maşină având ca „roţi” două prisme pătrate identice (figura 1). Roţile sunt perfect adaptate formei drumului (care este o succesiune periodică a unor denivelări identice), astfel încât centrul de masă al maşinii nu se deplasează pe verticală, atunci când Fred şi Barney parcurg un astfel de drum.
Consideră că roţile nu alunecă niciodată pe drum. În cursul mişcării maşinii, muchia lungă a unei roţi ajunge mereu într-o „vale” a drumului; „culmile” drumului sunt atinse după linii care trec prin mijloacele feţelor dreptunghiulare ale „roţilor”. Mişcarea maşinii începe din vârfurile a două denivelări. Iniţial, viteza de translaţie orizontală este v_0.

Figura 1

Greutatea totală a vehiculului, excluzând „roţile” este $M \cdot g$, distribuită egal pe axele celor două roţi. Presupune că singurele forţe care acţionează asupra maşinii sunt gravitaţia şi forţa de reacţiune normală.

Sarcina de lucru nr. 1 - Energia cinetică a maşinii

1.a. Determină expresia momentului de inerţie J a uneia dintre roţi faţă de axa proprie. Fiecare roată are masa m şi o secţiune transversală cu latura de lungime $2a$.

1.b. Dedu expresiile pentru energia cinetică a maşinii şi pentru viteza unghiulară a roţilor acesteia, atunci când:

i. maşina se află pe vârful denivelărilor;

ii. maşina trece cu fiecare roată în câte o vale.

Sarcina de lucru nr. 2 - Forma drumului

În schiţa din figura 2 este prezentată mişcarea laturii de jos a secţiunii pătrate a roţii pe relieful elementar (curba care trece prin punctele x_s, T, x_d).

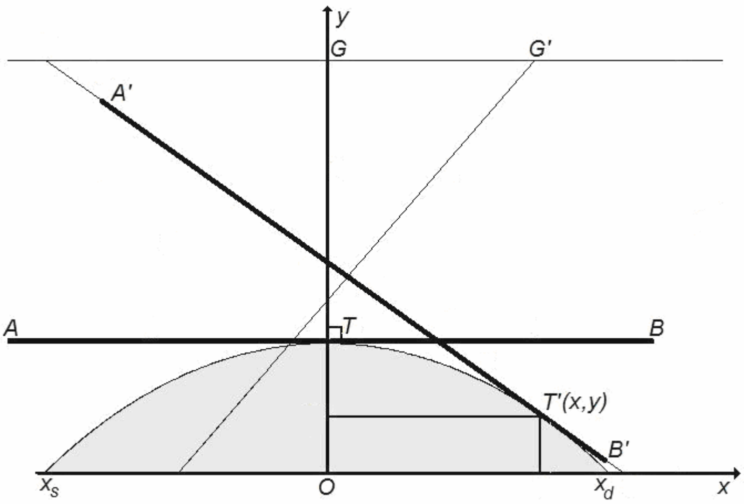

Figura 2

Drumul reprezintă repetarea periodică a unor astfel de reliefuri elementare.
În secțiune, axa Ox a sistemului de coordonate trece prin văile reliefului, iar axa Oy trece prin vârful denivelării. AB reprezintă latura roții, T este punctul de contact dintre roată şi drum, iar G reprezintă poziția axului în poziția inițială. $A'B'$, T', G' au aceleaşi semnificații – pentru o poziție oarecare a roții.
Se constată că, în secțiune, axul roții se află întotdeauna pe verticala punctului de contact dintre roată şi drum.

2.a. Scrie o scurtă explicație referitoare la constatarea că axul roții se află întotdeauna pe verticala punctului de contact dintre roată şi drum.

2.b. Determină forma analitică $y = y(x)$ a secțiunii drumului.

Indicație:

Derivata $y'(x)$ a funcției $y = y(x)$ este panta tangentei la graficul funcției în punctul x.

Dacă îți este necesar, ai în vedere că $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$.

Îți recomandăm să foloseşti notațiile $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *cu proprietatea* $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

2.c. Dedu expresia pentru lungimea (pe orizontală) a unui relief elementar.

2.d. Determină expresia distanței minime între axele roților maşinii lui Fred şi Barney.

2.e. Precizează dacă o maşină cu roți în formă de prismă hexagonală regulată convenabil aleasă ar putea circula pe drumul a cărui formă a fost determinată în cadrul sarcinii de lucru 2.b., fără ca centrul de masă al roții să se deplaseze pe verticală. Justifică răspunsul.

Sarcina de lucru nr. 3 - Accident

Presupune că expresia analitică a formei drumului este de tipul $y = k - h \cdot ch(x/a)$, unde k şi h sunt două constante.

3.a. Determină domeniul de valori ale vitezei orizontale de deplasare a maşinii, în condițiile stabilite în enunțul problemei.

3.b. Precizează modul în care depinde - de poziția obstacolului - cantitatea de căldură care se poate degaja prin ciocnirea plastică dintre maşina lui Fred şi acel obstacol. Imediat după ciocnire maşina se opreşte. Justifică răspunsul.

3.c. Determină expresia căldurii eliberate în urma ciocnirii.

Sarcina de lucru nr. 1 - Energia cinetică a maşinii - Soluție

1.a. Densitatea materialului roții presupusă de lungime L este

$$\rho = \frac{m}{4a^2 \cdot L} \qquad (1)$$

Considerând o prismă elementară cu laturile (L, dx, dy), momentul de inerție elementar, al acestei prisme față de axul propriu al „roții” este

$$dJ = \rho \iint r^2 \cdot L \cdot dx \cdot dy \qquad (2)$$

cu

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (3)$$

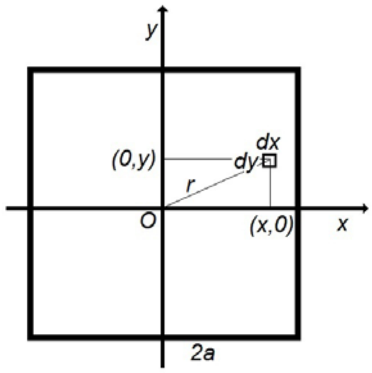

Figura 3- Determinarea momentului de inerție

Deoarece

$$\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right)dy = \left(x^2\cdot y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = 2a\cdot x^2 + 2\frac{a^3}{3} \qquad (4)$$

rezultă

$$\int_{-a}^{a}\left(2a\cdot x^2 + 2\frac{a^3}{3}\right)dx = \left(2a\cdot\frac{x^3}{3} + 2\frac{a^3}{3}\cdot x\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4a^4}{3} + \frac{4a^4}{3} = \frac{8a^4}{3} \qquad (5)$$

momentul de inerție al roții are expresia

$$\begin{cases} J = \dfrac{m}{4a^2L}\cdot L\cdot\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx = \frac{m}{4a^2}\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx = \frac{m}{4a^2}\cdot\frac{8a^4}{3} \\ J = \dfrac{2a^2\cdot m}{3} \end{cases} \qquad (6)$$

Expresia din relația (6) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.a.

1.b. În momentele în care roata maşinii este „în vârf” sau „în vale” viteza de translație a axului de rotire $v(t)$ - (care este şi viteza de translație a automobilului) - şi raza instantanee de girație $r(t)$ sunt perpendiculare. Legătura cu viteza unghiulară instantanee $\omega(t)$ se face prin relația

$$v(t) = r(t)\cdot\omega(t) \qquad (7)$$

i. Deoarece în punctul de plecare raza instantanee de girație este a, viteza unghiulară instantanee în acest punct, ω_T ,are expresia

$$\omega_T = \frac{v_0}{a} \qquad (8)$$

Energia cinetică de translație T_t este

$$T_t = \frac{M+2m}{2}v^2 \qquad (9)$$

iar energia cinetică de rotație T_r în acelaşi punct are expresia

$$T_r = 2\frac{J}{2}\omega^2 = J\omega^2 = \frac{2a^2\cdot m}{3}\cdot\omega^2 . \qquad (10)$$

Energia cinetică totală T a maşinii este

$$T = T_t + T_r = \frac{M+2m}{2} v^2 + \frac{2a^2 \cdot m}{3} \cdot \omega^2 \qquad (11)$$

La momentul inițial când $v = v_0$ şi $\omega_T = \frac{v_0}{a}$

$$T_0 = v_0^2 \cdot \left(\frac{M}{2} + m + \frac{2m}{3} \right) = v_0^2 \cdot \frac{3M+10m}{6} \qquad (12)$$

Expresiile din relațiile (8) şi (12) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.b.i.

ii. În vale, viteza de translație v_v este legată cu viteza unghiulară instantanee prin relația

$$\omega_V = \frac{v_v}{a\sqrt{2}};\ v_v = \omega_V \cdot a\sqrt{2} \qquad (13)$$

Astfel, în punctul „din vale" energia cinetică totală are expresia

$$T_v = \left(\frac{(M+2m)\cdot 2a^2}{2} + \frac{2a^2 \cdot m}{3} \right) \cdot \omega_V^2 = \left(M + 2m + \frac{2 \cdot m}{3} \right) \cdot \omega_V^2 \cdot a^2 = \omega_V^2 \cdot a^2 \cdot \frac{3M+8m}{3} \qquad (14)$$

Energia potențială a maşinii nu variază deoarece - conform enunțului - nu există deplasare pe verticală a centrului de masă. Întrucât nu există forțe exterioare, energia cinetică totală a automobilului trebuie să se conserve.
Deoarece energia cinetică se conservă, din relațiile (12) şi (14) rezultă

$$\left(\frac{3M + 8 \cdot m}{3} \right) \cdot \omega_V^2 \cdot a^2 = v_0^2 \cdot \left(\frac{3M+10m}{6} \right) \qquad (15)$$

Astfel

$$\omega_v = \frac{v_0}{a} \cdot \sqrt{\frac{3M+10m}{6M+16m}} \qquad (16)$$

O analiză a rezultatului permite următorul set de comentarii.

- Dacă $M >> m$, din relația (16) rezultă

$$\omega_v = \frac{v_0}{a\sqrt{2}}\ ;\ v_v = v_0 \qquad (17)$$

Rezultatul este firesc. Viteza de translație este constantă dacă roțile nu contează.

- Dacă $M << m$, din relația (16) rezultă

$$\omega_v = \frac{v_0}{a} \cdot \sqrt{\frac{5}{8}} \qquad (18)$$

- Dacă $M = m$, din relația (16) rezultă

$$\omega_v = \frac{v_0}{a} \cdot \sqrt{\frac{13}{22}} \qquad (19)$$

Expresiile din relațiile (12) şi (16) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.b.ii.

Sarcina de lucru nr. 2 - Forma drumului - Soluție

2.a. Dacă forța de greutate ar avea un moment față de punctul de contact, s-ar produce un transfer de energie potențială gravitațională către energie cinetică sau invers - ceea ce ar contrazice ipoteza constanței energiei potențiale.

2.b. În imaginea din figura 4 este prezentată mişcarea laturii de jos a secțiunii pătrate a roții pe relieful elementar – curba care trece prin punctele x_s, T, x_d.
Folosind indicația rezultă că

$$tg\alpha = -y'(x) \qquad (20)$$

Deoarece

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \qquad (21)$$

rezultă că

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad (22)$$

şi deci

$$G'T' = \frac{a}{\cos\alpha} = a\cdot\sqrt{1+y'^2} \qquad (23)$$

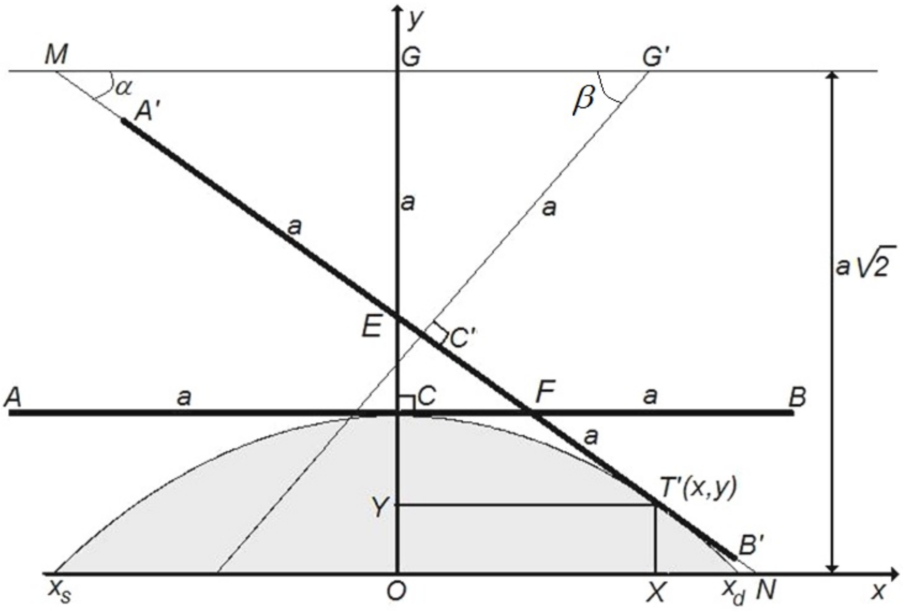

Figura 4. Vederea în secţiune a deplasării roţii pe relieful elementar al drumului. Verticala centrului de greutate al roţii trece prin punctul de contact dintre roată şi drum. Roata nu alunecă niciodată pe drum.

Coliniaritatea pe verticală a punctelor G' şi T' revine la

$$y + a\cdot\sqrt{1+y'^2} = a\sqrt{2} \qquad (24)$$

sau

$$y' = \sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{y}{a}\right)^2 - 1} \qquad (25)$$

de unde

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{y}{a}\right)^2 - 1}} = \pm dx \qquad (26)$$

Din integrarea relaţiei (26) se obţine că

$$\pm\frac{x}{a} + \wp = ln\left|\left(\sqrt{2}-y/a\right) + \sqrt{\left(\sqrt{2}-y/a\right)^2 - 1}\right| \qquad (27)$$

Deoarece pentru

$$x = 0,\; y = a\cdot\left(\sqrt{2}-1\right), \qquad (28)$$

constanta de integrare este nulă,

$$\wp = 0 \qquad (29)$$

şi deoarece

$$y < a\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad (30)$$

ceea ce conduce la concluzia că modulul este aplicat unei cantități pozitive, expresia (27) se poate rescrie succesiv că

$$\left(\sqrt{2}-y/a\right)+\sqrt{\left(\sqrt{2}-y/a\right)^2-1}=e^{\pm\frac{x}{a}} \qquad (31)$$

$$\left(e^{\pm\frac{x}{a}}-\left(\sqrt{2}-y/a\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}-y/a\right)^2-1 \qquad (32)$$

$$\frac{e^{\pm\frac{2x}{a}}+1}{e^{\pm\frac{x}{a}}}=2\left(\sqrt{2}-y/a\right);\frac{e^{\pm\frac{2x}{a}}+e^{\mp\frac{2x}{a}}}{2}=\sqrt{2}-\frac{y}{a} \qquad (33)$$

sau

$$y = a\left(\sqrt{2}-ch\left(x/a\right)\right) \qquad (34)$$

Graficul funcției reprezentând „relieful elementar” al drumului este prezentat în figura 5.

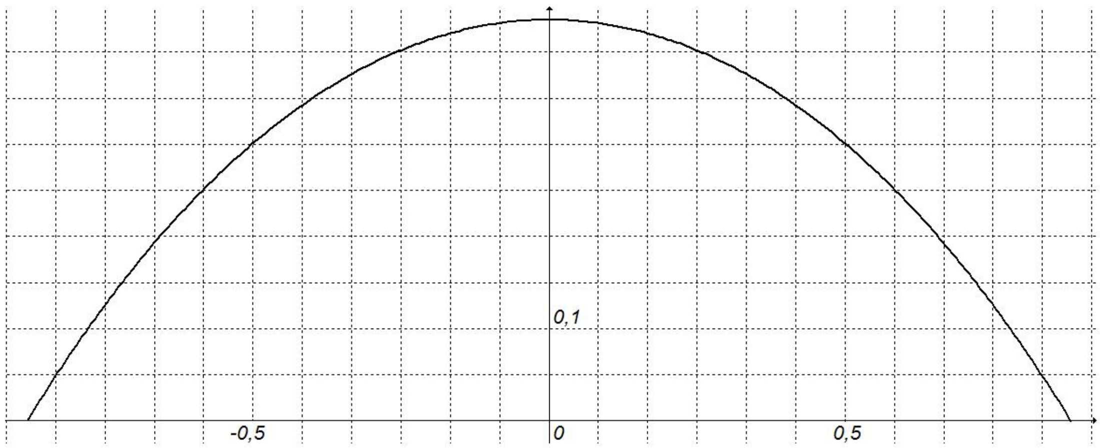

Figura 5 Relieful elementar al drumului

Expresia din relația (34) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.b.

2.c. Din forma (31) a funcției care descrie relieful drumului rezultă că pentru $y = 0$

$$\pm x = a\cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad (35)$$

Punctele extreme ale reliefului elementar al funcției sunt deci

$$\begin{cases} x_s = -a\cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right) \\ x_d = \ \ a\cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right) \end{cases} \qquad (36)$$

Întinderea pe orizontală a unui element al drumului, notată $2d$, este

$$2d = \left|x_d - x_s\right| = 2a\cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad (37)$$

Expresia din relația (37) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.c.

2.d. Deoarece

$$2a\cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right)\cong 1{,}76a < 2\sqrt{2}a \qquad (38)$$

cele două roți nu s-ar putea roti dacă s-ar afla pe două elemente de drum succesive.

Distanța minimă dintre axe d_{min} trebuie să acopere poziționarea la distanța dintre două elemente de drum separate de un al treilea, adică

$$d_{min} = 4a \cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad (39)$$

Expresia din relația (39) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.d.

2.e. Corespunzător expresiei funcției care dă forma drumului rezultă că,

$$y' = -sh\left(x/a\right) \qquad (40)$$

În consecință

$$\begin{cases} y'\left(x_d\right) = -1 \\ y'\left(x_s\right) = 1 \end{cases} \qquad (41)$$

Rezultatul, care înseamnă că unghiul dintre tangentele la relief pentru două „dealuri” succesive este de $\frac{\pi}{2}$ asigură „potrivirea” exactă a pătratului în valea dintre două reliefuri elementare şi trecerea de pe unul pe celălalt, dar nu permite folosirea de roți cu secțiunea hexagonală – oricare ar fi dimensiunea acestora pentru că, în secțiune, unghiul dintre laturile prismei hexagonale este $\frac{2\pi}{3}$.

Precizările de mai sus reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.e.

Sarcina de lucru nr. 3 – Accident - Soluție

3.a. Viteza de deplasare a centrului de greutate satisface relația

$$v_{G'} = \frac{d}{dt}(GG') = \frac{dx}{dt} \qquad (42)$$

În cursul deplasării raza girației GC ajunge în poziția $G'C'$ rotindu-se cu unghiul

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad (43)$$

Deoarece conform enunțului

$$\alpha = arctg\left(-y'(x)\right) \qquad (44)$$

viteza unghiulară a roții este

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[arctg\left(-y'\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[arctg\left(y'\right)\right] \qquad (45)$$

$$\omega = -\frac{d}{dt}\left(arctg\left(sh\left(x/a\right)\right)\right) = -\frac{\left(ch\left(x/a\right)\right)}{1+\left(sh\left(x/a\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (46)$$

$$\omega = -\frac{1}{a \cdot ch\left(x/a\right)} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad (47)$$

atunci când roata evoluează de-a lungul reliefului din deal în vale

$$0 < x < d = a \cdot ln\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad (48)$$

şi corespunzător

$$1 < ch\left(x/a\right) < \sqrt{2} \qquad (49)$$

Între viteza unghiulară şi viteza de translație a „roții” există relația

$$\omega = -\frac{1}{a \cdot ch\left(x/a\right)} \cdot v_{G'} \qquad (50)$$

În cursul deplasării maşinii energia potențială a acesteia este invariabilă.
Energia sa cinetică T este suma dintre energia cinetică de translație - (9) $T_t = \left(M+2m\right) \cdot v_{G'}^2 / 2$ şi energia cinetică de rotație (10) - $T_r = J \cdot \omega^2$. Astfel,

$$T = T_t + T_r = \frac{(M+2m)}{2} v_{G'}^2 + J \cdot \omega^2 \qquad (51)$$

$$T = \frac{(M+2m)}{2} v_{G'}^2 + \frac{2a^2 \cdot m}{3} \cdot \left(\frac{1}{a \cdot ch(x/a)} \cdot v_{G'} \right)^2 \qquad (52)$$

$$T = v_{G'}^2 \cdot \left(\frac{(M+2m)}{2} + \frac{2}{3} m \cdot \frac{1}{ch^2(x/a)} \right) \qquad (53)$$

La momentul inițial când $x = 0$

$$v_{G'}(0) = v_0 \;;\; ch(x/a) = 1 \qquad (54)$$

$$T_0 = v_0^2 \cdot \left(\frac{M}{2} + \frac{5m}{3} \right) \qquad (55)$$

ceea ce verifică relația (12)

În general, dependența de poziție a vitezei de translația a maşinii este dată de

$$v_{G'} = \frac{v_0 \cdot \sqrt{\left(\frac{M}{2} + \frac{5m}{3} \right)}}{\sqrt{\frac{(M+2m)}{2} + \frac{2}{3} m \cdot \frac{1}{ch^2(x/a)}}} \qquad (56)$$

La deplasarea din deal în vale, $0 < x < a \cdot ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ şi corespunzător $1 < ch\frac{x}{a} < \sqrt{2}$.

În domeniul considerat $ch\frac{x}{a}$ este o funcție monoton crescătoare (derivata sa în acest domeniu, $sh\frac{x}{a}$, este pozitivă) şi valorile extreme sunt cele din capete.

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{ch^2(x/a)} < 1 \qquad (57)$$

Valorile extreme ale acestei viteze sunt respectiv viteza inițială v_0 şi viteza „în vale”

$$v_{G'}(d) = \frac{v_0 \cdot \sqrt{3M+10m}}{\sqrt{3M+8m}} > v_0 \qquad (58)$$

Precizarea de mai sus şi expresia din relația (58) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.a.

3.b. Cantitatea de căldură apărută NU depinde de poziția punctului de ciocnire deoarece în proces toată energia cinetică (constantă) a automobilului se transformă în căldură.

Precizarea de mai sus reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.b.

3.c. Cantitatea de căldură Q degajată este egală cu energia cinetică totală inițială a maşinii.

$$Q = v_0^2 \cdot \left(\frac{3M+10m}{6} \right) \qquad (59)$$

Expresia din relația (59) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.c.

© Soluție propusă de:
Prof. Dr. Delia DAVIDESCU
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI