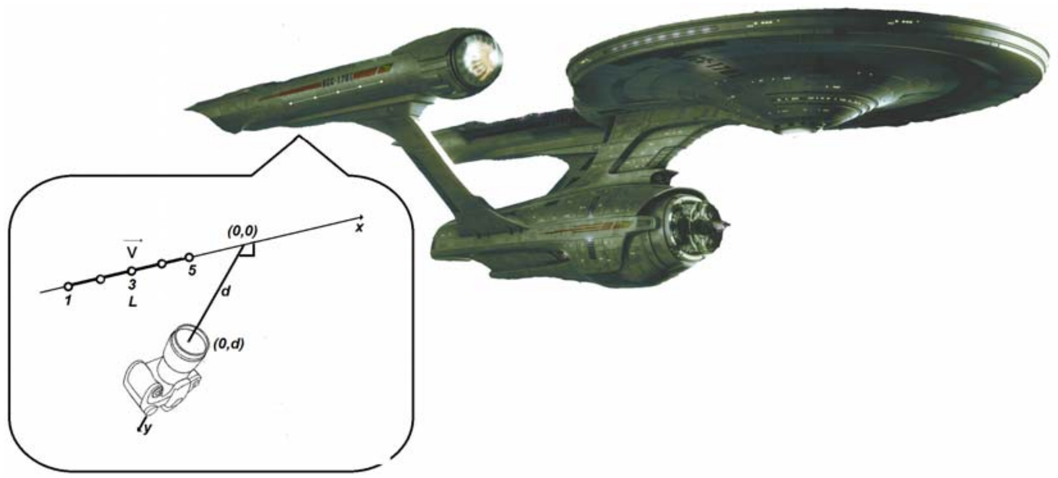
Problema teoretică nr. 3 - Supraveghere Star Trek (10 puncte)

Descrierea situației



Nava Stelară Enterprise are de-a lungul fiecăruia dintre cele două propulsoare warp câte o succesiune de cinci balize luminoase, numerotate, coliniare, echidistante, aşa cum se vede în figură (pentru propulsorul din dreapta).

Atunci când se mişcă, SS Enterprise se deplasează cu viteza constantă $\vec{v}$, astfel încât pentru întrebările care urmează, balizele de pe un propulsor se află tot timpul de-a lungul axei de coordonate Ox.

În camera de supraveghere a unei alte nave spațiale care supraveghează nava SS Enterprise, şi care se află în repaus, sunt analizate imagini al liniei de balize luminoase. Imaginile sunt luate de o cameră de luat vederi cu diafragma situată în punctul de coordonate $(0,d)$ în sistemului de coordonate ortogonale prezentat în detaliul din figura de mai sus. O Imagine a liniei de balize luminoase este produsă de raze care ajung simultan la diafragma camerei, care se deschide pentru un interval de timp foarte scurt.

Pe o imagine a navei SS Enterprise, luată atunci când aceasta este în repaus, lungimea liniei de balize este L. În condițiile problemei se pot considera balizele ca fiind punctiforme.

Viteza luminii în vid $c = 3{,}00 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$.

Foloseşte mărimile $\beta = v/c$ şi $\gamma = 1\big/\sqrt{1-\beta^2}$, dacă ele te ajută să exprimi într-o formă mai simplă răspunsurile la următoarele sarcini de lucru.

Sarcina de lucru nr. 1 - Legătura dintre imagine şi poziția reală

Poziția reală este poziția în sistemul de referință în care camera este în repaus).

În continuare, camera de luat vederi rămâne imobilă în punctul de coordonate $(0,d)$, iar SS Enterprise se deplasează cu viteza $\vec{v}$ pe direcția Ox. Pe o imagine dată de camera descrisă mai sus se observă că una dintre balizele luminoase se află în poziția x_i.

1.a. Determină expresia poziției x a balizei luminoase, în momentul în care imaginea sa se formează în camera de luat vederi.

1.b. Determină relația inversă, adică exprimă x_i în funcție de x, d, L, v şi c.

Sarcina de lucru nr. 2 - Lungimea aparentă a liniei de balize

Camera de luat vederi formează o imagine a liniei de balize în momentul în care centrul acesteia este într-un punct x_0.

2.a. Determină expresia pentru lungimea aparentă L_i a liniei de balize pe această imagine.
2.b. Descrie matematic modul cum variază lungimea aparentă a liniei de balize în timp, pe măsură ce SS Enterprise se deplasează de-a lungul axei Ox - venind de foarte departe, trecând prin originea sistemului şi apoi îndepărtându-se.

Sarcina de lucru nr. 3 - Imagine simetrică

Una dintre imaginile luate de cameră, arată balizele din capete la o aceeaşi distanță de diafragma camerei.

3.a. Dedu expresia pentru lungimea aparentă $L_{i,simetric}$ a liniei de balize în această imagine.

3.b. Determină expresia pentru poziția actuală a balizei din mijloc, în momentul în care s-a obținut această imagine.

3.c. Determină expresia pentru poziția balizei din mijloc în imagine.

Sarcina de lucru nr. 4 - Imagini ale SS Enterprise aflată foarte departe

Camera de luat vederi ia o imagine a liniei de balize atunci când SS Enterprise este foarte departe şi se apropie, şi o altă imagine, atunci când nava (şi linia de balize) este foarte departe şi se îndepărtează de cameră. Pe una dintre aceste imagini lungimea aparentă a liniei de balize este de $200\,m$, iar pe alta este de $600\,m$.

4.a. Precizează care dintre afirmațiile de mai jos este corectă. Justifică răspunsul.

i. Lungimea aparentă este de $200\,m$ pe imaginea navei „care vine" şi de $600\,m$ pe imaginea cu nava „care pleacă".

ii. Lungimea aparentă este de $600\,m$ pe imaginea navei „care vine" şi de $200\,m$ pe imaginea cu nava „care pleacă".

4.b. Determină valoarea vitezei v de deplasare a navei.

4.c. Calculează valoarea distanței L în repaus.

4.d. Calculează lungimea aparentă a liniei de balize în imaginea simetrică, menționată la sarcina de lucru 3.a.

.

Problema teoretică nr. 3 - Soluție

Sarcina de lucru nr. 1 - Legătura dintre imagine şi poziția reală

1.a. Imaginea apărută în cameră se datorează razelor de lumină care *ajung* în acelaşi moment şi nu razelor de lumină care *pleacă* simultan. Din acest motiv apare diferența dintre imaginea aparentă a unui punct de pe linia de balize şi poziția actuală, la momentul în care se formează imaginea, punctului de pe linia de balize.
O baliză, aflată în poziția notată cu x_i apare pe imaginea din camera obscură dacă lumina provenită de la ea a plecat înainte de momentul luării imaginii cu timpul T având expresia

$$T = \frac{\sqrt{d^2 + x_i^2}}{c} \qquad (1)$$

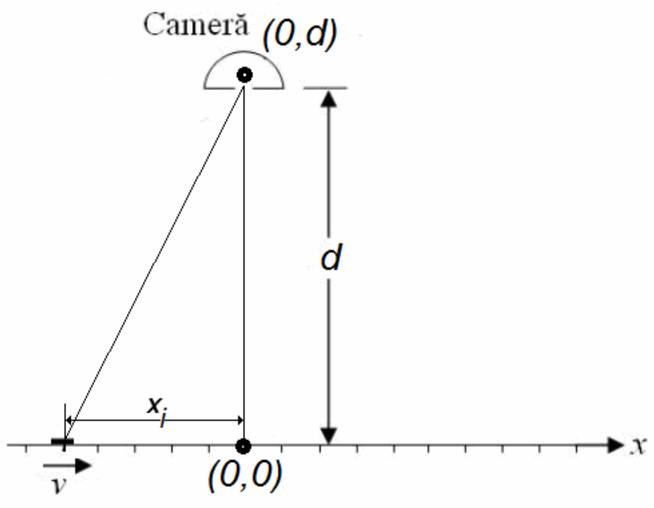


Figura 1

În timpul necesar luminii să ajungă de la baliză la camera obscură, baliza s-a deplasat pe distanța $v \cdot T$ astfel că „poziția actuală” a balizei la momentul la care este luată imaginea sa este

$$x = x_i + v \cdot T = x_i + \frac{v}{c}\sqrt{d^2 + x_i^2} = x_i + \beta \cdot \sqrt{d^2 + x_i^2} \qquad (2)^*$$

Baliza care se afla în poziția x_i apare pe imagine atunci când este în poziția x.

Expresia din relația (2) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.a.*

1.b. Prin ridicarea la pătrat a relației de mai sus rezultă succesiv

$$\begin{cases} x^2 - 2x \cdot x_i + x_i^2 = \beta^2 \cdot d^2 + \beta^2 \cdot x_i^2 \\ \left(1-\beta^2\right)x_i^2 - 2x \cdot x_i + \left(x^2 - \beta^2 \cdot d^2\right) = 0 \\ \left(1-\beta^2\right)x_i^2 - 2x \cdot x_i + \left(x^2 - d^2 + \left(1-\beta^2\right) \cdot d^2\right) = 0 \\ \frac{x_i^2}{\gamma^2} - 2x \cdot x_i + \left(x^2 - d^2 + \frac{d^2}{\gamma^2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Corespunzător,

$$\begin{cases} x_i = \gamma^2\left(x \pm \sqrt{x^2 - \frac{1}{\gamma^2}\left(x^2 - \beta^2 \cdot d^2\right)}\right) \\ x_i = \gamma^2\left(x \pm \frac{1}{\gamma}\sqrt{\beta^2 \cdot d^2 - \left(1-\gamma^2\right) \cdot x^2}\right) \end{cases} \qquad (4)$$

Deoarece

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{-\beta^2}{1-\beta^2} = -\beta^2 \cdot \gamma^2 \qquad (5)$$

din ultima relație din (5) rezultă

$$\begin{cases} x_i = \gamma^2\left(x \pm \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{d^2 + \gamma^2 \cdot x^2}\right) \\ x_i = \gamma\left(\gamma \cdot x \pm \beta\sqrt{d^2 + \gamma^2 \cdot x^2}\right) \end{cases} \qquad (6)$$

Deoarece se apropie de proiecția originea axei pe care se deplasează, selectarea firească a semnului în expresiile de mai sus, conduce la

$$x_i = \gamma\left(\gamma \cdot x - \beta \cdot \sqrt{d^2 + \gamma^2 \cdot x^2}\right) \qquad (7)^*$$

Baliza a cărei imaginea apare în poziția x_i se află în momentul formării imaginii în poziția x .

Expresia din relația (7) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 1.b.*

Sarcina de lucru nr. 2. - Lungimea aparentă a liniei de balize

2.a. Deoarece balizele se deplasează cu viteza $\vec{v}$ lungimea sa este – datorită contracției Lorentz - L/γ .
În momentul în care camera obscură formează imaginea liniei de balize având centrul în punctul x_0 , balizele din capete au respectiv pozițiile

$$x_{fața} = x_+ = x_0 + \frac{L}{2\gamma} \qquad (8)$$

şi

$$x_{spate} = x_- = x_0 - \frac{L}{2\gamma} \qquad (9)$$

Imaginile capetelor $x_{i,\pm}$ vor fi formate de camera obscură „ca şi cum" s-ar fi aflat în pozițiile

$$x_{i,\pm} = \gamma\left(\gamma \cdot x_0 \pm \frac{L}{2}\right) - \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 \pm \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (10)$$

În relația de mai sus s-a ținut seama de expresiile pozițiilor capetelor liniei de balize şi de relația (8).
Lungimea aparentă a liniei de balize, L_i , este diferența pozițiilor aparente ale capetelor adică

$$L_i(x_0) = x_{i,+} - x_{i,-} \qquad (11)$$

$$L_i(x_0) = \gamma \cdot L - \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} + \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (12)^*$$

Expresia din relația (12) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.a.*

2.b. Văzută ca funcție de x_0 , expresia polinomială de gradul 2

$$F_1 = \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2 + d^2 \qquad (13)$$

are un minim cu valoarea d^2 pentru

$$x_0 = -\frac{L}{2\gamma} \qquad (14)$$

Pentru valori ale variabilei x_0, $x_0 \geq -\frac{L}{2\gamma}$ funcția F_1 este monoton crescătoare.

Corespunzător, expresia

$$E_1 = -\beta \cdot \gamma \sqrt{F_1} \qquad (15)$$

este monoton crescătoare până la $x_0 = -\frac{L}{2\gamma}$, apoi monoton descrescătoare şi are un maxim în valoare de

$$E_{1,max} = E_1\left(x_0 = -\frac{L}{2\gamma}\right) = -\beta\,\gamma\,d \qquad (16)$$

Pentru

$$x_0 = \frac{L}{2\gamma} \quad (17)$$

$$E_1\left(x_0 = \frac{L}{2\gamma}\right) = -\beta \cdot \gamma\sqrt{d^2 + L^2} \quad (18)$$

Grafic, dependența $E_1(x_0)$ are aspectul prezentat în figura 2

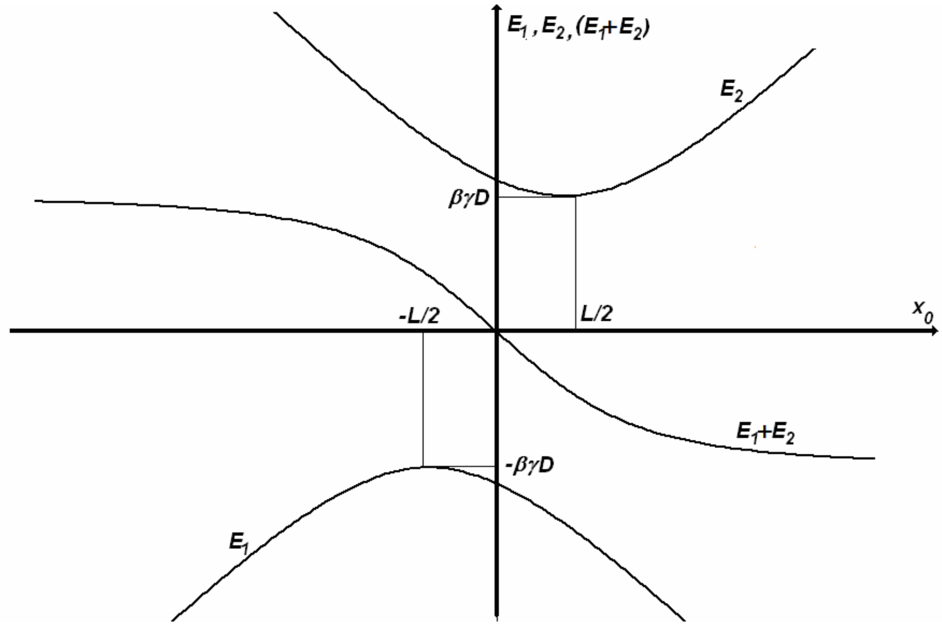


Figura 2 - Reprezentarea grafică a funcțiilor E_1, E_2 și $E_1 + E_2$

Analog, văzută ca funcție de x_0 expresia polinomială de gradul 2

$$F_2 = \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2 + d^2 \quad (19)$$

are un minim cu valoarea d^2 pentru

$$x_0 = \frac{L}{2\gamma} \quad (20)$$

Pentru valori ale variabilei x_0, $x_0 \geq \dfrac{L}{2\gamma}$ funcția F_2 este monoton crescătoare.

Corespunzător, expresia

$$E_2 = \beta \cdot \gamma\sqrt{F_2} \quad (21)$$

este monoton descrescătoare până la $x_0 = \dfrac{L}{2\gamma}$, apoi monoton crescătoare şi are un minim în valoare de

$$E_{2,min\,im} = E_2\left(x_0 = \frac{L}{2\gamma}\right) = \beta\gamma d \quad (22)$$

Pentru

$$x_0 = -\frac{L}{2\gamma} \quad (23)$$

$$E_2\left(x_0=-\frac{L}{2\gamma}\right)=\beta\cdot\gamma\sqrt{d^2+L^2} \tag{24}$$

Grafic, dependența $E_2(x_0)$ are aspectul prezentat în figura 2.
Expresia

$$\begin{cases} E=E_1+E_2=\gamma\beta\left(\sqrt{F_2}-\sqrt{F_1}\right) \\ E=\gamma\beta\dfrac{F_2-F_1}{\left(\sqrt{F_2}+\sqrt{F_1}\right)}=\dfrac{\left(\gamma\cdot x_0-\dfrac{L}{2}\right)^2+d^2-\left(\left(\gamma\cdot x_0+\dfrac{L}{2}\right)^2+d^2\right)}{\sqrt{\left(\gamma\cdot x_0-\dfrac{L}{2}\right)^2+d^2}+\sqrt{\left(\gamma\cdot x_0+\dfrac{L}{2}\right)^2+d^2}} \\ E=\gamma\beta\dfrac{-2}{\sqrt{\left(\gamma\cdot x_0-\dfrac{L}{2}\right)^2+d^2}+\sqrt{\left(\gamma\cdot x_0+\dfrac{L}{2}\right)^2+d^2}}\gamma\cdot x_0\,L \end{cases} \tag{25}$$

este monoton descrescătoare – aşa cum se vede în imaginea din figura 2.
Ultima relație din ansamblul de mai sus se poate scrie şi sub forma

$$E=\frac{-2\gamma^2\cdot\beta\cdot L}{\sqrt{\left(\gamma-\dfrac{L}{2x_0}\right)^2+\left(\dfrac{d}{x_0}\right)^2}+\sqrt{\left(\gamma+\dfrac{L}{2x_0}\right)^2+\left(\dfrac{d}{x_0}\right)^2}}\cdot\frac{x_0}{|x_0|} \tag{26}$$

Pentru valori negative ale variabilei x_0, expresia de mai sus se scrie

$$E_-=\frac{2\gamma^2\cdot\beta\cdot L}{\sqrt{\left(\gamma-\dfrac{L}{2x_0}\right)^2+\left(\dfrac{d}{x_0}\right)^2}+\sqrt{\left(\gamma+\dfrac{L}{2x_0}\right)^2+\left(\dfrac{d}{x_0}\right)^2}} \tag{27}$$

Evident, dacă x_0 evoluează monoton crescător între $-\infty$ şi 0 adică pentru $-\infty<x_0<0$, expresia din (27) evoluează de asemenea monoton dar descrescător între valorile

$$E_-(-\infty)=\frac{\gamma^2\cdot\beta\cdot L}{\sqrt{\gamma^2}}=\gamma\cdot\beta\cdot L \tag{28}$$

şi

$$E_-(0)=0 \tag{29}$$

Pentru valori pozitive ale variabilei x_0, expresia (26) se scrie

$$E_+=\frac{-2\gamma^2\cdot\beta\cdot L}{\sqrt{\left(\gamma-\dfrac{L}{2x_0}\right)^2+\left(\dfrac{d}{x_0}\right)^2}+\sqrt{\left(\gamma+\dfrac{L}{2x_0}\right)^2+\left(\dfrac{d}{x_0}\right)^2}} \tag{30}$$

Dacă x_0 evoluează monoton crescător între 0 şi ∞ adică dacă $0<x_0<\infty$, expresia din (30) evoluează de asemenea monoton, dar descrescător între

$$E_+(0)=0 \tag{31}$$

şi

$$E_+(\infty)=-\gamma\cdot\beta\cdot L \tag{32}$$

Studiul analitic al lungimii aparente

$$L_i(x_0) = \gamma \cdot L + E \qquad (33)$$

arată – de asemenea – că aceasta evoluează monoton descrescător atunci când x_0 creşte.

Prin urmare, lungimea aparentă a liniei de balize descreşte tot timpul.

Precizarea de mai sus reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 2.b.

Sarcina de lucru nr. 3 - Imagine simetrică

3.a. Dacă în imaginea luată de camera obscură capetele liniei de balize se află la aceeaşi distanță de diafragma camerei obscure, înseamnă că lumina provenită de la ambele capete ale liniei de balize parcurge drumuri egale pentru a ajunge în intervale de timp egale la diafragma camerei. Lumina care formează imaginea a plecat *simultan* din capetele liniei de balize. Lungimea aparentă a liniei de balize este în aceste condiții lungimea liniei de balize în mişcare – adică $\frac{L}{\gamma}$.

Răspunsul la întrebarea ***3.a.*** referitoare la lungimea aparentă a liniei de balize care apare în imaginea simetrică este deci

$$L_{i,simetric} = \frac{L}{\gamma} \qquad (34)^*$$

Expresia din relația (34) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.a.*

3.b. Imaginile capetelor sunt – conform enunțului – simetrice. Aceasta revine la

$$x_{i,+} = -x_{i,-} \qquad (35)$$

adică

$$x_{i,+} + x_{i,-} = 0$$

Ținând seama de (10) relația de mai sus devine

$$0 = x_{i,+} + x_{i,-} = 2\gamma^2 \cdot x_0 - \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} - \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \qquad (36)$$

Scriind şi lungimea aparentă a liniei de balize pentru situația analizată

$$\begin{cases} \frac{L}{\gamma} = x_{i,+} - x_{i,-} = L_i(x_0) \\ \frac{L}{\gamma} = \gamma \cdot L - \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} + \beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} \end{cases} \qquad (37)$$

şi adunând relațiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} \frac{L}{\gamma} = 2\gamma^2 \cdot x_0 + \gamma \cdot L - 2\beta \cdot \gamma \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} \\ \frac{2\gamma^2 \cdot x_0 + \gamma \cdot L - \frac{L}{\gamma}}{2\beta \cdot \gamma} = \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} \\ \sqrt{d^2 + \left(\gamma \cdot x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} = \frac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} + \frac{L\left(\gamma^2 - 1\right)}{2\beta \cdot \gamma^2} = \frac{x_0 \cdot \gamma}{\beta} + \frac{L \cdot \beta}{2} \end{cases} \qquad (38)$$

Prin urmare

$$\sqrt{d^2+\left(\gamma\cdot x_0+\frac{L}{2}\right)^2}=\frac{x_0\cdot\gamma}{\beta}+\frac{L\cdot\beta}{2} \qquad (39)$$

Scăzând (36) din (37) rezultă

$$\sqrt{d^2+\left(\gamma\cdot x_0-\frac{L}{2}\right)^2}=\frac{x_0\cdot\gamma}{\beta}-\frac{L\cdot\beta}{2} \qquad (40)$$

Din oricare dintre ultimele două relații se poate extrage valoarea poziției mijlocului liniei de balize.

Din (40) rezultă succesiv

$$\begin{cases} d^2+\left(\gamma\cdot x_0+\dfrac{L}{2}\right)^2=\left(\dfrac{x_0\cdot\gamma}{\beta}+\dfrac{L\cdot\beta}{2}\right)^2 \\ d^2+\gamma^2\cdot x_0^2+\dfrac{L^2}{4}+\gamma\cdot x_0\cdot L=\dfrac{x_o^2\cdot\gamma^2}{\beta^2}+\dfrac{L^2\cdot\beta^2}{4}+\gamma\cdot x_0\cdot L \\ \gamma^2\cdot x_0^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right)=\dfrac{L^2}{4}\left(\beta^2-1\right)-d^2 \\ \dfrac{1}{1-\beta^2}\cdot x_0^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{\beta^2}\right)=\dfrac{L^2}{4}\left(\beta^2-1\right)-d^2 \end{cases} \qquad (41)$$

şi deci

$$x_0=\beta\sqrt{\frac{L^2}{4\gamma^2}+d^2} \qquad (42)^*$$

*Expresia din relația (43)** reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.b.*

O alternativă a metodei de determinare a poziției centrului liniei de balize, pleacă de la ipoteza „capetelor dispuse simetric”, relația (36) - scrisă sub forma

$$2\gamma^2\cdot x_0-\beta\cdot\gamma\sqrt{d^2+\left(\gamma\cdot x_0+\frac{L}{2}\right)^2}=\beta\cdot\gamma\sqrt{d^2+\left(\gamma\cdot x_0-\frac{L}{2}\right)^2} \qquad (43)$$

din care rezultă succesiv prin două ridicări la pătrat şi alte prelucrări algebrice

$$\begin{cases} 4\gamma^4\cdot x_0^2+2\beta^2\cdot\gamma^3\cdot x_0\cdot L=4\beta\cdot\gamma^3\cdot x_0\cdot\sqrt{d^2+\left(\gamma\cdot x_0+\dfrac{L}{2}\right)^2} \\ 4\gamma^2\cdot x_0^4\left(1-\beta^2\right)+\beta^2\cdot x_0^2\cdot L^2\left(\beta^2-1\right)-4\beta^2\cdot x_0^2\cdot d^2=0 \\ 4\cdot x_0^4-\dfrac{\beta^2\cdot x_0^2\cdot L^2}{\gamma^2}-4\beta^2\cdot x_0^2\cdot d^2=0 \end{cases} \qquad (44)$$

Din ultima relație se poate regăsi relația (42).

3.c. Poziția mijlocului liniei de balize în imagine poate fi determinată folosind relația dintre pozițiile aparentă şi actuală (7)

$$\begin{cases} x_{i,0}=\gamma\left(\gamma\cdot x_0-\beta\cdot\sqrt{d^2+\gamma^2\cdot x_0^2}\right) \\ x_{i,0}=\gamma\left(\gamma\cdot\beta\sqrt{d^2+\left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2}-\beta\cdot\sqrt{d^2+\gamma^2\cdot\beta^2\left(d^2+\left(\dfrac{L}{2\gamma}\right)^2\right)}\right) \end{cases} \qquad (45)$$

Expresia poziției mijlocului liniei de balize *în imagine* este

$$x_{i,0} = \gamma \cdot \beta \left(\sqrt{(\gamma \cdot d)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(d \cdot \gamma)^2 + \left(\frac{L \cdot \beta}{2}\right)^2} \right) \qquad (46)$$

Capătul din față al liniei de balize are imaginea la $x_{i,+}$. Distanța dintre imaginea capătului şi imaginea centrului este

$$\ell = x_{i,+} - x_{i,0} = \frac{L}{2\gamma} - x_{i,0} = \frac{L}{2\gamma} - \gamma \cdot \beta \left(\sqrt{(\gamma \cdot d)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(d \cdot \gamma)^2 + \left(\frac{L \cdot \beta}{2}\right)^2} \right) \qquad (47)^*$$

Expresia din relația (47) reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 3.c.*

Sarcina de lucru nr. 4 - Imagini ale SS Enterprise aflată foarte departe

4.a. Relațiile (28) şi (33) permit să se scrie pentru lungimea aparentă a liniei de balize în imaginea „cu apropiere de departe" expresia

$$\begin{cases} L_{i,apropiere} = L_i(x_0 \to -\infty) = \gamma \cdot L + E_- = \gamma \cdot L + \gamma \cdot \beta \cdot L \\ L_{i,apropiere} = \gamma \cdot L \cdot (1+\beta) = L\dfrac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ L_{i,apropiere} = L\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} \end{cases} \qquad (48)$$

Analog, relațiile (32) şi (33) permit să se scrie pentru lungimea aparentă a liniei de balize în imaginea „cu îndepărtare" expresia

$$\begin{cases} L_{i,indepartare} = L_i(x_0 \to \infty) = \gamma \cdot L + E_+ = \gamma \cdot L - \gamma \cdot \beta \cdot L \\ L_{i,indepartare} = \gamma \cdot L \cdot (1-\beta) = L\dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ L_{i,indepartare} = L\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} \end{cases} \qquad (49)$$

Deoarece – evident –

$$L_{i,apropiere} = L\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > L_{i,indepartare} = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \qquad (50)^*$$

Se poate deci afirma că răspunsul corect la sarcina de lucru 4.a este ii. Lungimea aparentă este de $600\,m$ pe imaginea navei care vine şi de $200\,m$ pe imaginea navei care pleacă.

Expresia din relația (50) şi precizarea de mai sus reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4.a.*

4.b. Raportul lungimilor imaginilor timpurie şi târzie este

$$\frac{L_{i,apropiere}}{L_{i,indepartare}} = \frac{L\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}}{L\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}} = \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{3}{1}. \qquad (51)$$

Din această relație rezultă

$$\begin{cases} 1+\beta = 3 - 3\beta \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (52)$$

În consecință

$$\begin{cases} v = \dfrac{c}{2} \\ v = 1{,}50 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1} \end{cases} \qquad (53)^*$$

Valoarea numerică din relația (53) * reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4.b.*

4.c. Din expresia lungimii imaginii timpurii rezultă – ținând seama de viteza liniei de balize

$$600m = L_{i,apropiere} = L\sqrt{\frac{1+1/2}{1-1/2}} = L\sqrt{3} \qquad (54)$$

Prin urmare

$$L = 200\sqrt{3}\ m \cong 346\,m \qquad (55)^*$$

Valoarea numerică din relația (55) * reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4.c.*

4.d. Deoarece valoarea parametrului γ corespunzătoare valorii $\beta = \dfrac{1}{2}$ este

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (56)$$

lungimea aparentă a imaginii simetrice este – conform relației

$$\begin{cases} L_i = \dfrac{L}{\gamma} = 200\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ L_i = 300\,m \end{cases} \qquad (57)^*$$

Valoarea lungimii aparente a imaginii simetrice din relația (57) * reprezintă răspunsul la sarcina de lucru 4.d.*

© Soluție propusă de:
Prof. Dr. Delia DAVIDESCU
Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI