1. Магнетостатика

Магнетодвижещата сила по крива се дефинира като интеграл по контур на проекцията на магнитната индукция B върху кривата,

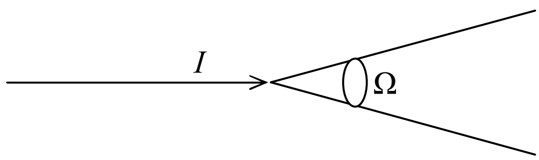
$$\int_{\text{curve}} \vec{B}\overrightarrow{dl}\,.$$

Законът на Ампер гласи, че магнетодвижещата сила по затворена крива (намотка) е пропорционална на тока, пресичащ КОЯ ДА Е повърхнина чиято граница е тази крива. Коефициентът на пропорционалност се нарича *магнитна проницаемост на вакуума* (μ_0).

$$\oint_{\text{loop}} \vec{B}\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\text{across}}$$

Положителната посока на тока се определя от начина на обхождане на контура по правилото на дясната ръка.

a. По безкрайно дълъг прав проводник тече постоянен ток I. Намерете големината и посоката на магнитната индукция B, създадена от тока на разстояние r от проводника. Изразете резултата в термини на I, r, и μ_0.
b. Тънка еднородна пръчка с маса m и дължина L е разположена успоредно на проводника , на разстояние d от него. Пръчката може да се върти единствено по ос, перпендикулярна на равнината, определена от проводника и пръчката. Оста минава през средата на пръчката. По пръчката тече постоянен ток I' в посока противоположна на I. Пръчката е отклонена на малък ъгъл от равновесното си положение и оставена да осцилира свободно. Намерете периода на малки осцилации чрез I, I', m, L, d и μ_0.
c. Полубезкраен проводник преминава в безкрайна проводяща конична повърнина, чиято ос съвпада с проводника, както е показано на картинката. По системата тече постоянен ток I. Намерете големината и ориентацията на магнитната индукция B на разстояние r от оста, вътре и извън коничния проводник. Изразете резултата в термини на I, r, и μ_0.



d. Полубезкраен прав проводник преминава в своя край в безкрайна проводяща равнина, която е перпендикулярна на проводника. По системата тече постоянен ток I. Намерете големина и посоката на магнитната индукция B на разстояние r от оста на проводника, от двете страни на равнината. Изразете резулата в термини на I, r, и μ_0.
e. Разгледайте линейната плътност на тока $\vec{J}$, течащ по равнината от предишната подточка, като:

$$J \overset{\text{def}}{=} \frac{dI}{dl}\,,$$

където dl е елементарен линеен елемент, перпендикулярен на направлението, носещо елементарен ток dI.

Въведете единичния вектор $\vec{n}$ перпендикулярен на равнината, който да определи положителната посока на преминаване от едната към другата й страна. Векторното произведение $\vec{J}\times\vec{n}$ определя положителната посока за тази компонентата на B, която е успоредна на равнината.
Покажете, че при пресичане на равнината, разликата в големините на компонента на B , успоредна на равнината, е пропорционална на големината на J в точката на преминаване и намерете константа на пропорциалност.
f. Безкрайна проводяща равнина е успоредна на хомогенно магнитно поле. От двете страни на равнината магнитната индукция има еднаква посока, но различни големини : B_1 и B_2 . Намерете налягането, което изпитва равнината. Изразете отговора чрез B_1, B_2 и μ_0.
g. Куха проводяща сфера е свързана в своите "полюси" с два полубезкрайни прави прави проводника, ориентири по оста на полюсите. По системата тече постоянен ток I. Намерете големината и посоката на магнитната индукция B на разстояние r от оста на полюсите, вътре и извън сферата. Изразете резултата в термини на I, r и μ_0.
h. Полюсите на куха проводяща сфера са свързани от вътрешен прав проводник. По повърхността на сферата тече постоянен ток I от единия към другия полюс и след това обратно по проводника. Намерете големината и ориентацията на магнитната индукция B на разстояние r от оста на полюсите, вътре и извън сферата. Изразете резултата чрез I, r и μ_0.

Законът на Био-Савар изразява магнитната индукция, създадена в точка от пространството от електричен ток, течащ по елементарен линеен елемент dl:

$$\overrightarrow{dB}=\frac{\mu_0 I\left(\overrightarrow{dl}\times\vec{r}\right)}{4\pi r^3},$$

където r е радиус-векторът на точката спрямо елементарния ток.
i. По прав проводник с дължина L тече постоянен ток I. Проводникът се наблюдава от точка от симетралната равнина под ъгъл 2α. Изразете големината на магнитната индукция в тази точка чрез L, I, α и μ_0.
j. Постояннен ток I тече хомогенно по повърхността на проводяща сфера с радиус R, от единия към другия й полюс. Намерете големината на магнитната индукция по екваториалната равнина на сферата, в точка на разстояние r от оста на полюсите, вътре и извън сферата. Изразете резултата в термини на I, R, r и μ_0.

2. ОСЦИЛАЦИИ НА ЕЛАСТИЧНИ ТЕЛА

В тази задача пренебрегваме гравитационните ефекти. Освен, ако не е казано друго, средите да се считат хомогенни и изотропни.

A. Разгледайте много тънка еластична пръчка, която не може да се огъва. Пръчката е с дължина L, плътност ρ и модул на Юнг E . Сечението на пръчката остава постоянно. Пръчката е леко разтеглена в двата си края и оставена да осцилира свободно.
a. Запишете кинетичната енергия на пръчката в произволен момент в термини на масата й m , дължината й L и степента на промяна на напрежението на опън ε (ε-напрежението на опън).
b. Запишете потенциалната еластична енергия на пръчката в произволен момент в термини на m, ρ, E и ε.
c. Покажете, че запазването на механичната енергия на пръчката води до характерното диференциално уравнение за незатихващи хармонични трептения. Правейки аналогия с точкова маса m , на която действа сила σS (σ е еластичното напрежение, S е сечението), определете величината, която в тази задача играе ролята на координата.
d. Запишете израза за периода на малки надлъжни трептения на пръчката в термини на L, ρ и E.

B. Разгледайте еластична сфера с радиус R, направена от същия материал, както и пръчката. Нека ε е напрежението на опън $\Delta R/R$. Сферата е леко и хомегенно свита и след това оставена да осцилира свободно.
e. Запишете механичната енергия на сферата в произволен момент в термини на m, R, ρ, E, ε и степента на изменение на ε.
f. Запишете израза за периода на малки радиални осцилации на сферата в термини на R, ρ и E.

C. Разгледайте много тънка правоъгълна еластична пластина, която не се огъва. Пластината има линейни размери L и l. Дебелината на пластината да се счита за постоянна.
Ефектите от еластичните напрежения σ_x и σ_y, действащи на пластината НЕ са независими, в смисъл, че разтягането по едното направление води до свиване по другото. В границите на закона на Хук, това може да се запише като:

$$\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}, \qquad \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

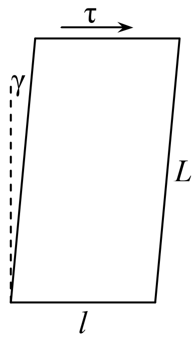
където безразмерният множител μ (коефициент на Поасон) е от порядъка на 0.3.
g. Изразете σ_x и σ_y в термини на ε_x, ε_y, E и μ.
h. Запишете системата от диференциални уравнения за движението на точкова маса m в две ортогонални направления, използвайки като координати еквивалента на намереното в подточка **c**.
i. Намерете възможните стойности на ω, за които решенията на горната система са прости незатихващи хармонични осцилации (моди):

$$\varepsilon_x = A\sin\omega t$$
$$\varepsilon_y = B\sin\omega t\,.$$

Изразете резултатите в термини на L, l, ρ, E и μ.

j. В общия случай, решението на горната система уравнения е суперпозиция от два намерени мода. За квадратна пластина ($L = l$) и малък коефициент на Поасон ($\mu^2 << 1$), изразете периода на биенето в термини на μ и на периода T_{long} на надлъжните осцилации на пръчка със същата дължина.

D. Сега, вместо да е разтегната, пластината е леко приплъзната в едно направление под действието на напрежение при хлъзгане, както е показано на диаграмата. Деформацията при хлъзгане се дефинира като tan γ ≈ γ, а законът на Хук приема вида:



$$\gamma = \frac{1}{G}\tau\ ;\ [\tau]_{\text{SI}} = [G]_{\text{SI}} = \text{N/m}^2\,,$$

Където G е така нареченият *модул на хлъзгане.*

k. Изразете G в термини на E и μ.

l. Намерете периода на малки осцилации при хлъзгане на пластината в термини на L, ρ и G. Изразете същия период в термини на μ и на периода T_{long} на пръчка със същата дължина, извършваща надлъжни осцилации.

E. Цилиндър с радиус R и дължина L, направен от същия материал, е леко усукан и оставен да осцилира свободно. Деформацията на усукване се дефинира като ъгъла θ, на който цилиндърът е усукан под действие на въртящ момент. В този случай, законът на Хук приема вида:

$$\theta = \frac{1}{C}M\ ;\ [C]_{\text{SI}} = [M]_{\text{SI}} = \text{Nm}\,,$$

където C е така наречената *константа на еластично усукване*.

m. Намерете периода на малки усукващи осцилации на цилиндъра в термини на L, ρ и G.

n. Изразете константата на еластично усукване чрез R, L, E и μ.

3. ОСНОВИ НА ОБЩАТА ТЕОРИЯ НА ОТНОСИТЕЛНОСТТА

Айнщайн признава, че идеята за Принципа на еквивалентност (1907) е била "най-щастливата мисъл в живота ми". Той си спомня: "Седях в стола си на служител в патентното бюро в Берн, когато изведнъж ме осени мисъл: ***ако човек пада свободно, той няма да усеща теглото си.*** Бях поразен. Тази простичка мисъл ми направи силно впечатление. Тя ме подтикна към теорията на гравитацията."
Така че, ако наблюдател е в състояние на свободно падане, той може да бъде разглеждан като инерциална отправна система, в която гравитационното поле липсва. За нещастие, тъй като различните наблюдатели в пространството и времето ще падат с различна скорост и/или в различни направления, Айнщайн осъзнал, че трябва да се използват само ***локални*** отправни системи, така че във всяка от тях, ускорението, вследствие на гравитацията, да бъде постоянно по стойност и направление.
Нека разгледаме точков наблюдател с пренебрежима, но не нулева маса, в близост до масивен обект с маса M. Ако гравитационното поле на масивния обект не е много силно и няма други сили, наблюдателят ще се движи по силова линия на гравитационното поле с ускорение (в дадена точка) равно на гравитационното ускорение в тази именно точка. Ако, обаче, масата M е достатъчно голяма, горните разсъждения са неприложими, така че трябва да се работи с концепцията на общата относителност. Вярно е, обаче, че в ситуации със симетрия на плоскост, елементарният пространствено-времеви интервал може да се запише като:

$$ds^2 = -c^2\left(\mathrm{d}t'\right)^2 = -fc^2\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\left(\mathrm{d}x\right)^2}{g} + \left(\mathrm{d}y\right)^2 + \left(\mathrm{d}z\right)^2,$$

където $\mathrm{d}t'$ е безкрайно малкият времеви интервал, измерен по часовника на наблюдателя. В общия случай f и g са функции на пространствено-времевите координати. По този начин, наблюдаваните елементарни премествания $\mathrm{d}x$ могат да бъдат разглеждани като повлияни от някакъв локален свиващ коефициент. Съответно, времената, необходими да се извършат споменатите премествания, могат да се разглеждат като повлияни от някакъв локален разтягащ фактор.
Трудността в Общата теория на относителността е, че известният ни израз за $\mathrm{d}s^2$ (наречен *метрика на Минковски*), в който не се съдържат никакви променливи, вече не е в сила. По-долу ще разгледаме най-простата възможна ситуация и ще се опитаме да опишем събитията в пространство-времето, използвайки нов набор от координати (или по-точно параметри), които отчитат свиващите/разтягащите фактори. Това ще ни доведе до други, по-подходящи изрази за $\mathrm{d}s^2$.

Нека разгледаме точков обект с маса на покой m_0, първоначално ($t = t' = 0$ s) неподвижен върху оста x в точка $x_0 = c^2/a'$. Нека сега той "пада свободно" в положителното направление на оста, така че във всеки момент собственото му ускорение, изпитано в инерциална отправна система, която се движи заедно с обекта, да е константа, a'.

a. Напишете израз за ускорението на тялото в отправна система, свързана с "гравитационното поле", в термини на неговата скорост на "падане" v, a' и c. Покажете, че равнодействащата сила на тялото е постоянна.

b. Намерете израз за v в термини на t, a' и c.

(Упътване: достигайки до интеграла, вземете v да бъде пропорционална на тригонометрична функция.)

Поради това, което следва, трябва да дефинираме хиперболичните функции sinh, cosh and tanh:

$$\sinh x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ;\ \cosh x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;\ \tanh x \overset{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Разбира се, съществуват подходящи дефиниции за обратните хиперболични функции arcsinh, arccosh and arctanh.

c. Намерете израз за собственото време t' на "падащото" тяло в термини на t, a' и c.

(*Упътване*: достигайки до интеграла, вземете t да бъде пропорционално на хиперболична функция. Означете с τ аргумента на тази функция.)

Както виждате, τ е пропорционално на t'. С други думи, τ = const описва събития, които се случват едновременно от гледна точка на "падащия" наблюдател. Така че, следващата стъпка ще бъде да се опитаме да въведем един друг параметър, да кажем ρ, така че ρ = const да описва събития в покой относно "падащия" наблюдател.

d. Използвайки метриката на Минковски и намерените трансформации за времето, намерете израз за положението x на тялото в термини на a', τ и c.

e. Напишете уравнение за траекторията на тялото в двумерно пространство-време ct-x (координатите y и z не представляват интерес тук). Начертайте графика на ct от x, изчертавайки също миналите и бъдещите светлинни конуси на неподвижен наблюдател, който се намира в началото на координатната система. (Светлинният конус на миналото е областта от пространство-времето, от която светлинните сигнали могат да достигнат координатното начало; светлинният конус на бъдещето е областта от пространство-времето, до която светлинните сигнали, излъчени в координатното начало, могат да достигнат). На същата диаграма начертайте траекторията на неподвижен обект с координата $x_1 > x_0$, който "падащият" обект ще подмине в някакъв момент.

f. В светлината на това, което казахме по-горе, ще се окаже удобно да изберем големината на константата ρ, свързана с нашето тяло **в покой** в отправна система без гравитация, да кажем ρ_0 , да бъде равна на пространствено постоянния член, появяващ се в уравнението, намерено в предишната подточка. Изразете ρ_0 в термини на a' и c.

g. Сега естествено ще разширим тези нови "координати", намерени за "падащото" тяло, за (почти) произволно събитие в пространство-времето. Изразете x и ct в термини на ρ и τ. Съответно, изразето ρ и τ в термини на x и ct. Каква е максималната област от пространство-времето, която може да бъде параметризирана, използвайки тези координати?

h. Трансформирайте метриката на Минковски в термини на ρ и τ, и определете множителите f и g споменати в увода на задачата.

Добре, нека спрем за малко и да разгледаме по-добре метриката, която вие получихте. Тя се нарича метрика на Риндлер, и изглежда аналогично на параметризацията на равнина с полярни координати. Както вероятно очаквате, множителите f и g не са инвариантни при Лоренцова трансформация, но в този

най-прост пример, ние може да се върнем към метриката на Минковски, за да получим глобално инвариантна метрика. Обаче, в общия случай, се оказва невъзможно да имаме инвариантна метрика.
Вие също видяхте, че метриката на Риндлер не може да покрие цялото пространство-време. Дори, ако можехме да я разширим, лесно може да се види, че ускоряващ се наблюдател никога не може да получи информация от цялото пространство-време (за разлика от инерциален наблюдател, чийто светлинен конус на миналото непременно в безкрайност покрива цялото пространство-време). Съществува граница на областта в пространство-времето, оттатък която "падащият" наблюдател не може да получи информация. Тази граница е така нареченият *хоризонт на събитията*.
Най-накрая, след като новата метрика "вижда" ускоряващо се тяло като да е в покой, тя води до това, че неподвижни обекти в гравитационното поле са в движението относно отправната система без гравитация (разгледана по-горе)!

i. За неподвижен обект в точката x_1, спомената по-рано, изразете неговата пространствено-времева траектория в координати ρ и τ. Начертайте на диаграма τ от ρ "траекториите" на двата типа разгледани обекта и определете граничното "разстояние" $\Delta\rho$ между хоризонта на събитията и наблюдателя в "свободно падане".
j. В момента, в който наблюдателят започва да "пада", фар, разположен в x_0, започва да излъчва много кратки електромагнитни импулси в положително направление на оста x. Интервалът между два последователни импулса е T_0. Колко такива сигнала ще достигнат наблюдателя? Запишете израза за траекторията на първия от тях в термини на координатите ρ and τ. Начертайте върху диаграма τ от ρ траекториите на първите три сигнала и на наблюдателя.
k. Очевидно, получените сигнали ще са все по-редки и по-редки, което означава, че ще имат все по-голяма и по-голяма дължината на вълната (по-малка честота). Нека ν_0 да бъде честота на излъчените импулси. Изразете времето на получаване в термини на времето на излъчване t, x_0 и c. Определете честотата на последния получен сигнал чрез ν_0, x_0, T_0 и c.
l. Каква е големината на бързината на изменение на координата $d\rho/dt'$ за сигналите при получаване? Начертайте графика на тази "скорост на светлината по направление на a' в пространство-времето без гравитация" като функция на ρ.
m. Един от най-важните аспекти, когато разглеждаме $d\tau$ като времето, течащо в локална инерциална отправна система, е, че времето в различните точки по x-оста ще тече различно не само като функция на тази позиция, но също и като функция на времето t, изтекло от момента, в който инерциалният наблюдател е започнал "свободно да пада". Тъй като метриката на Риндлер не покрива цялото пространство-време, започва да изглежда така, сякаш в точките, образуващи хоризонта на събитията, времето спира. Например, намерете времето dt ,изтекло в точката x_0, като функция на x_0, $d\tau$, t и c. Разглеждайки втора точка на малко разстояние Δx_0 на дясно от x_0 (т.е. по посока на гравитационното поле), определете относителното забавяне на два часовника в тези точки $\varepsilon = \Delta(dt)/dt$ в термини на x_0, Δx_0, t и c.
n. Сега, предположете, че в $t = 0$ наблюдателят започва да "пада" от покой на малко разстояние Δx_0, така че можем приблизително да разглеждаме a' като гравитационното ускорение g на много слабо и почти хомогенно гравитационно поле, като това в близост до повърхността на Земята.

Определете относителното забавяне на часовник, работещ в близост до земната повърхност по отношениие на друг идентичен часовник на МКС (Международната космическа станция) на височина h = 360 km. Какво ще означава това за астронавт, който е на едногодишна мисия на МКС? (Можете да пренебрегнете движениието на станцията около Земята.)

Код на участника

ANSWER SHEET FOR PROBLEM No. 1

a.

$B(r) =$

Начертайте магнитните силови линии тук:

b.

$T_{\text{slant}} =$

c.

$B_{\text{OUT}}(r) =$

$B_{\text{IN}}(r) =$

Начертайте магнитните силови линии тук:

d.

$B_{\text{WIRE SIDE}}(r) =$

$B_{\text{OTHER SIDE}}(r) =$

Начертайте магнитните силови линии тук:

Код на участника

e.

$\Delta B_{\parallel} =$

f.

$p =$

g.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Начертайте магнитните силови линии тук:

h.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Начертайте магнитните силови линии тук:

i.

$B(r) =$

Код на участника

j.

$B_{OUT}(r) =$

$B_{IN}(r) =$

Код на участника

ANSWER SHEET FOR PROBLEM No. 2

a.

$E_{\text{kin}} =$

b.

$E_{\text{pot}} =$

c. Напишете диференциалното уравнение за ε:

$\ddot{x}_{\text{equivalent}} =$

d.

$T_{\text{long}} =$

e.

$E_{\text{mech}} =$

f.

$T_{\text{radial}} =$

Код на участника

g.

$\sigma_x =$

$\sigma_y =$

h. Напишете диференциалните уравнения за $\ddot{x}_{\text{equivalent}}$ и $\ddot{y}_{\text{equivalent}}$:

i.

$\omega_{1;2} =$

j.

$T_{\text{beats}} =$

k.

$G =$

l.

$T_{\text{slant}} =$

m.

$T_{\text{slant}} =$

Код на участника

n.

$T_{\text{twist}} =$

o.

$C =$

Код на участника

ANSWER SHEET FOR PROBLEM No. 3

a.

$a =$

$F_{\text{net}} =$

b.

$v =$

c.

$t' =$

d.

$x =$

Код на участника

e. Напишете уравнението за траекторията и начертайте диаграмата тук.

f.

$\rho_0 =$

g.

$x =$ $\rho =$

$ct =$ $\tau =$

Максималната област от пространство-времето, параметризирано от метриката на Риндлер:

Код на участника

h.

$ds^2 =$

$f =$ $g =$

i. Напишете уравнението за траекторията и начертайте диаграмата тук.

$\Delta\rho =$

Код на участника

j. Напишете уравнението за траекторията и начертайте диаграмата тук.

$N =$

k.

$\tau =$

$\nu_N =$

Код на участника

l. Напишете израза за $d\rho/d\tau$ и начертайте графиката тук.

m.

dt =

ε =

n.

ε =

Δt =