В задаче требуется оценка погрешностей!

ВНИМАНИЕ!!!
Будьте аккуратны с горячей водой и греющимися частями установки! В случае ожога немедленно обратитесь к организаторам.

Часть A. Остывание линейки. Коэффициент теплопотерь

Теория.

При остывании тело передаёт теплоту окружающей среде, причём в единицу времени передаётся теплота

$$q = \alpha A(T - T_0), \tag{1}$$

где α – коэффициент теплопотерь, A – площадь поверхности тела, T – температура тела, T_0 – температура окружающей среды. Удельная теплоёмкость материала линейки $c = 460$ Дж/(кг · °C), его плотность $\rho = 7800$ кг/м^3.

Для остывающего тела с теплоёмкостью C можно записать уравнение теплового баланса:

$$C \cdot dT = -\alpha A(T - T_0) \cdot dt. \tag{2}$$

Если это выражение проинтегрировать, то можно получить зависимость температуры остывающего тела от времени:

$$T(t) = T_0 + (T_{\max} - T_0) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha A}{C} t\right), \tag{3}$$

где $T_{\max}$ – максимальная температура тела, то есть температура тела в начальный момент времени. Здесь используется обозначение: $\exp(x) = e^x$.

Задание.

1. Изучая зависимость температуры от времени при остывании, определите коэффициент теплопотерь α для металлической линейки в воздухе. Зарисуйте схему установки, приведите её параметры и расчетные формулы.

Оборудование. Металлическая линейка 20 см, штангенциркуль, термометр, термопаста, аналог пластилина, секундомер, нить, штатив с муфтой и лапкой, мерный цилиндр, горячая вода (по требованию), весы, салфетка (по требованию).

Часть B. Распределение температур с учётом потерь

Теория.

Если стержень нагревать с одного конца, а боковой поверхности дать обмениваться теплотой с окружающей средой, то в стационарном режиме установится некоторое распределение температур $T(x)$. Для того, чтобы найти зависимость температуры от координаты, можно считать, что стержень очень длинный и другой конец имеет комнатную температуру. Это распределение зависит от температуры горячего конца $T_{\max}$, температуры окружающей среды T_0, геометрических размеров стержня и отношения коэффициентов теплопотерь и теплопроводности $\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$, но не зависит явным образом от подводимой мощности:

$$T(x) = T_0 + (T_{\max} - T_0)\exp(-bx), \qquad b = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}}. \tag{4}$$

Здесь P – периметр сечения стержня, S – площадь поперечного сечения (рисунок 1).

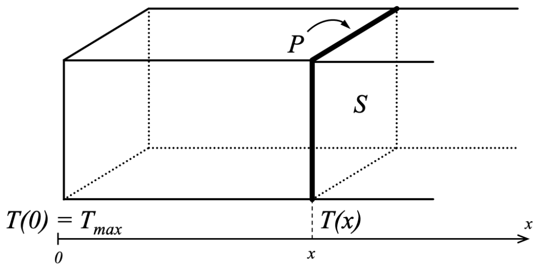


Рис. 1. Нагреваемый стержень.

Задание.

2. В качестве нагреваемого стержня будем использовать линейку. Соберите установку, которая позволит нагревать линейку с одного конца. Изучая зависимость температуры от координаты при остывании, определите отношение коэффициентов $\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$ с погрешностью. Зарисуйте схему установки, приведите её параметры и расчетные формулы.

3. С использованием результата пункта 1 определите коэффициент теплопроводности λ и его погрешность.

Оборудование. Металлическая линейка 20 см, штангенциркуль, термометр, термопаста, 2 резистора (10 Ом, 10 Вт) **(запрещается подавать мощность больше 10 Вт!)**, блок питания 17 В, штатив с муфтой и лапкой, салфетка (по требованию).

Часть C. Теория

В этой части мы выведем зависимость температуры от координаты вдоль стержня, то есть уравнение (4). Рассмотрим некоторый кусок стержня, расположенный между точками x и $x + dx$. Слева от него стержень горячее, поэтому наш кусок получает в единицу времени теплоту $q(x)$. Через правую границу наш кусок отдаёт в единицу времени теплоту $q(x+dx)$ (см. рисунок 2). Рассматриваемый кусок мал по длине, поэтому можно считать, что его температура одинакова и равна $T(x)$. Более того, мы рассматриваем стационарный случай, то есть температура не меняется со временем.

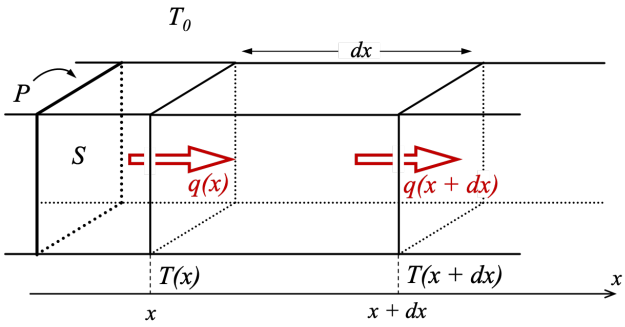


Рис. 2. Нагреваемый стержень.

Задание.

4. Запишите уравнение теплового баланса для рассматриваемого куска стержня. Ответ выразите через обозначенные выше теплоты и температуру. Также вам известны: температура окружающей среды T_0, коэффициент теплопотерь α, периметр сечения стержня P, длина кусочка dx.

5. Из уравнения теплового баланса можно получить дифференциальное уравнение для температуры, в таком уравнении неизвестными являются функция $T(x)$ и её производные. Получите такое уравнение, для этого воспользуйтесь разложением $q(x + dx) \approx q(x) + q'(x)dx$ и выражением

$$q(x) = -\lambda S T'(x), \tag{5}$$

где λ – коэффицент теплопроводности, S – площадь поперечного сечения.

6. Решение полученного уравнения записывается в виде

$$T(x) = C_1 + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{kx}, \tag{6}$$

где C_1, C_2, C_3 – некоторые константы, которые можно найти из граничных условий и здравого смысла, а величину k можно определить, подставив $T(x)$ в дифференциальное уравнение, полученное в предыдущем пункте. Нагреватель находится в точке с координатой 0, температура стержня в этой точке $T(0) = T_{max}$. Определите значения констант C_1, C_2, C_3, k.

Решение

Часть A. Остывание линейки. Коэффициент теплопотерь

1. Опустим на некоторое время линейку в мерный цилиндр, заполненный кипятком. Нагревшуюся линейку подвесим за нить к штативу. Чувствительный элемент термометра прикрепим к линейке аналогом пластилина, промазав место контакта термопастой, измерив перед этим комнатную температуру $T_0 = 20.0$ °C. Снимем зависимость температуры линейки от времени:

t, с	$T - T_0$, °C	$\ln T - T_0$	T, °C
6	28.5	3.35	48.5
10	27.7	3.32	47.7
12	26.8	3.29	46.8
20	25.6	3.24	45.6
25	24.9	3.21	44.9
31	24.3	3.19	44.3
35	23.8	3.17	43.8
41	22.9	3.13	42.9
47	22.3	3.10	42.3
52	21.7	3.08	41.7
56	21.0	3.04	41.0
60	20.6	3.03	40.6
65	20.0	3.00	40.0
72	19.2	2.95	39.2
77	18.8	2.93	38.8
83	18.0	2.89	38.0
88	17.4	2.86	37.4
93	16.8	2.82	36.8
98	16.3	2.79	36.3
103	15.8	2.76	35.8
209	7.9	2.07	27.9
216	7.6	2.03	27.6
221	7.4	2.00	27.4

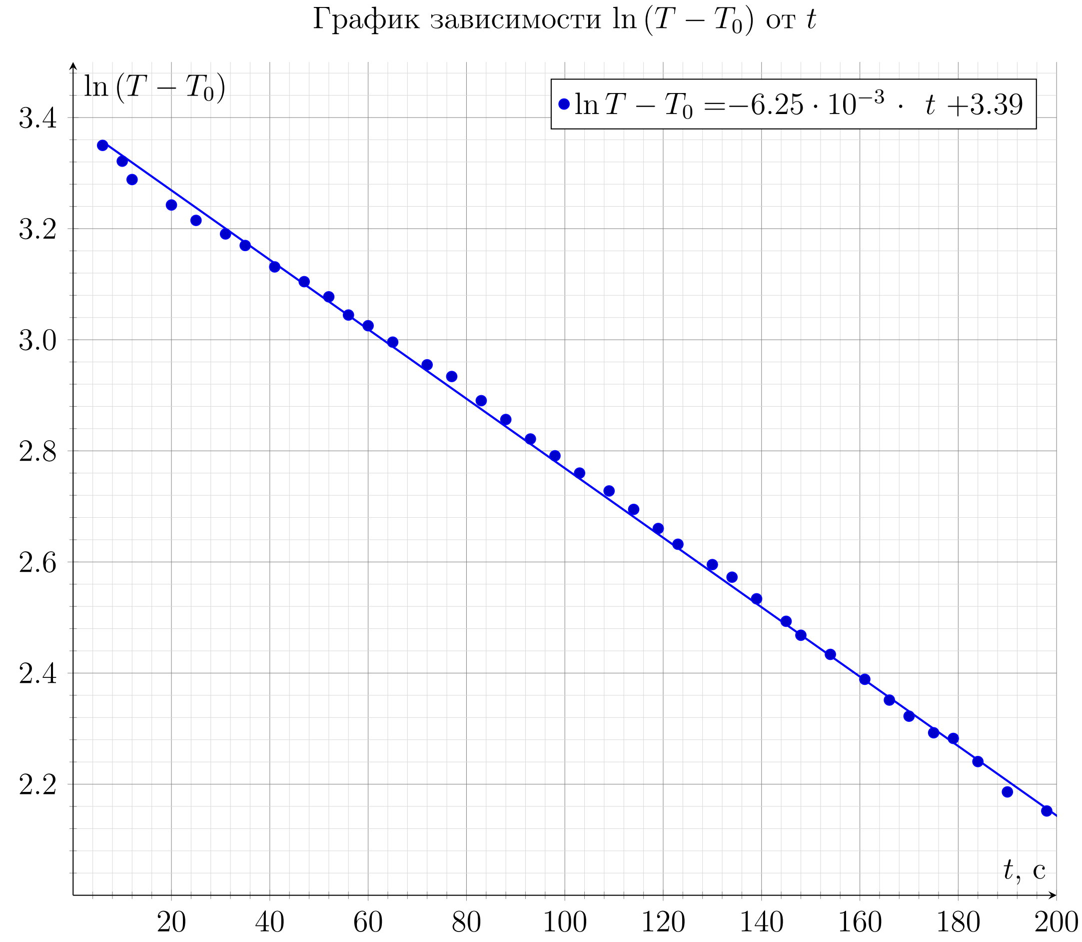
t, с	$T - T_0$, °C	$\ln T - T_0$	T, °C
109	15.3	2.73	35.3
114	14.8	2.69	34.8
119	14.3	2.66	34.3
123	13.9	2.63	33.9
130	13.4	2.60	33.4
134	13.1	2.57	33.1
139	12.6	2.53	32.6
145	12.1	2.49	32.1
148	11.8	2.47	31.8
154	11.4	2.43	31.4
161	10.9	2.39	30.9
166	10.5	2.35	30.5
170	10.2	2.32	30.2
175	9.9	2.29	29.9
179	9.8	2.28	29.8
184	9.4	2.24	29.4
190	8.9	2.19	28.9
198	8.6	2.15	28.6
203	8.3	2.12	28.3
209	7.9	2.07	27.9
216	7.6	2.03	27.6
221	7.4	2.00	27.4

Остывание описывается следующей зависимостью:

$$T(t) = T_0 + (T_{max} - T_0)e^{-\beta t}, \qquad \beta = \frac{2\alpha LW}{cm}, \tag{7}$$

где $L = 22.5$ см – длина линейки, $W = 2.575$ см – ширина линейки. Масса линейки $m = 21.15$ г. Вкладом боковой поверхности в общую площадь можно пренебречь в силу малости толщины линейки по сравнению с другими ее параметрами. Площадь отверстия в линейке примем примерно равной площади выступающей с одной стороны части, учтем вклад этой оценки в погрешность итоговой величины.

Построим график зависимости $\ln(T - T_0)$ от t.



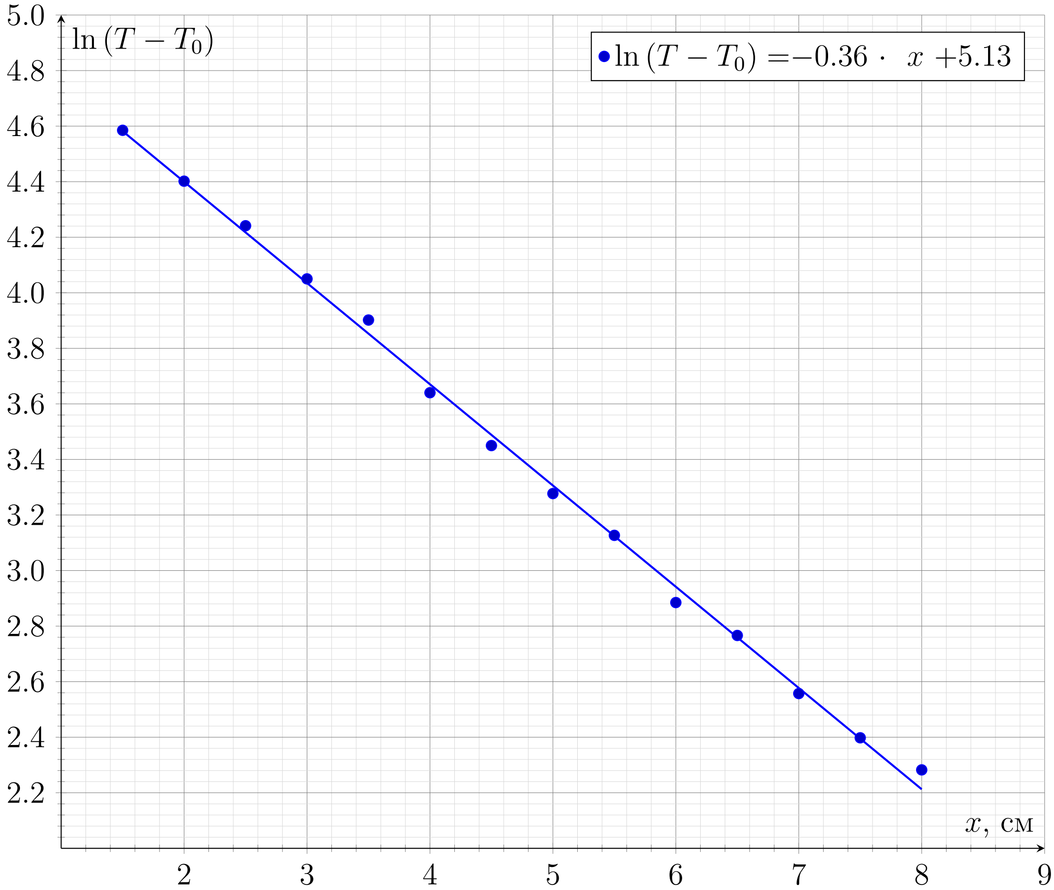
По коэффициенту наклона находим β, а затем и $\alpha = (5.20 \pm 0.11)$ Вт/(м$^2 \cdot$°C).

Часть B. Распределение температур с учетом потерь.

2. Поместим два последовательно соединенных резистора в лапке штатива и зажмем ими край линейки. Будем отсчитывать координату x от резисторов до другого конца линейки вдоль нее. Измерим зависимость $T(x)$, помещая чувствительный элемент термометра в небольшие капли термопасты, заранее размещенные на линейке:

T, °C	x, см	$\ln(T - T_0)$
118	1.5	4.58
101.6	2.0	4.40
89.5	2.5	4.24
77.4	3.0	4.05
69.5	3.5	3.90
58.1	4.0	3.64
51.5	4.5	3.45
46.5	5.0	3.28
42.8	5.5	3.13
37.9	6.0	2.88
35.9	6.5	2.77
32.9	7.0	2.56
31	7.5	2.40
29.8	8.0	2.28

График зависимости $\ln(T - T_0)$ от x



3. Из уравнения 4 следует, что зависимость $\ln(T - T_0)(x)$ линейна, а из ее углового

коэффициента определяется:

$$\lambda = (18.1 \pm 0.9)\ \text{Вт}/(\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}) \tag{8}$$

Часть C. Теория.

4.
$$q(x) - q(x + dx) - \alpha P dx(T(x) - T_0) = 0. \tag{9}$$

5.
$$\lambda S T''(x) = \alpha P dx(T(x) - T_0). \tag{10}$$

6. На бесконечности температура не бесконечная, а стремится к нулю:

$$C_3 = 0. \tag{11}$$

Подставим решение в общем виде в уравнение, полученное равенство должно быть верным при любом x. Найдем коэффициенты:

$$C_1 = T_0, \quad C_2 = T_H - T_0, \quad k^2 = b^2 = \frac{\alpha P}{\lambda S}. \tag{12}$$