В задаче требуется оценка погрешностей!

Внимание! Не повреждайте трубку и не оставляйте на ней пометок!

Часть 1. Теоретическая

Упругие свойства твердого тела зависят как от геометрических параметров конкретного образца, так и от свойств вещества, из которого он состоит. Для описания упругих свойств при малых деформациях достаточно двух характеристик: модуля Юнга E и коэффициента Пуассона μ.

Модуль Юнга определяется как коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей напряжение σ, возникающее в образце при его продольном растяжении, и относительное удлинение образца $\varepsilon_{||} = \Delta l/l$ (см. рисунок 1):

$$\sigma = E\varepsilon_{||}, \tag{1}$$

где по определению $\sigma = F_n/S$.

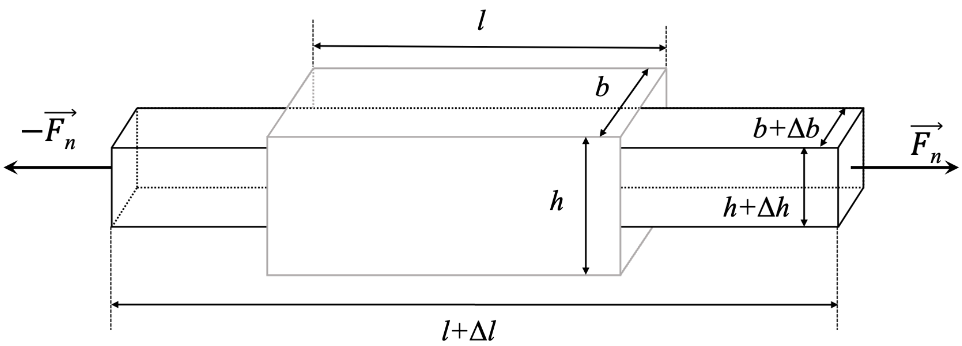


Рис. 1. Упругие деформации.

1. Запишите выражение для коэффициента жесткости k бруска размерами $b \times h \times l$, изготовленного из материала с модулем Юнга E при его растяжении вдоль стороны длиной l. Считайте, что площадь поперечного сечения не меняется при растяжении.

Для описания деформации тела в направлении, перпендикулярном направлению приложенной силы, используют коэффициент Пуассона μ, связывающий величины продольной $\varepsilon_{||}$ и поперечной $\varepsilon_{\perp}$ деформаций:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta h}{h} = -\mu\varepsilon_{||}. \tag{2}$$

2. Для материала с коэффициентом Пуассона μ и модулем Юнга E свяжите относительное изменение объема $\varepsilon_V = \Delta V/V$ с величиной продольной деформации $\varepsilon_{||}$. Силы, приложенные к бруску, направлены вдоль оси, параллельной стороне длиной l.

Часть 2. Изменение длины

3. Определите площадь внутреннего сечения трубки a и площадь сечения ее стенок A (см. рисунок 2).

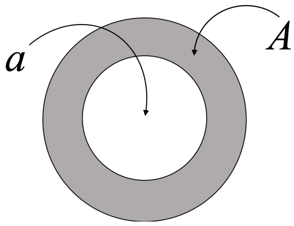


Рис. 2. Внутреннее сечение и сечение стенок трубки.

4. Расположите трубку горизонтально. Закрепите один из ее концов при помощи струбцины. В другой конец вставьте поршень с крючком. Прикрепите к крючку динамометр и измерьте зависимость его показаний от длины трубки l. Постройте график зависимости относительного удлинения трубки ε_l от растягивающей ее силы F. Укажите, на каком участке полученного графика зависимость описывается линейной функцией, и найдите модуль Юнга трубки по этому участку.

5. При изменении длины трубки l изменяется также ее внутренний объем V. Предложите способ, позволяющий зарегистрировать это изменение при неизменном давлении внутри трубки. Проведите измерения для разных удлинений трубки и постройте график зависимости ε_V от ε_l. Определите коэффициент Пуассона материала трубки.

Часть 3. Изменение давления

6. Предложите способ измерения зависимости внутреннего объема трубки V от добавочного (по сравнению с атмосферным) давления ΔP в ней. Проведите измерения для разных ΔP в диапазоне от 0 до 1/3 атмосферы. Постройте график зависимости ε_V от ΔP. Определите угловой коэффициент полученного графика.

7. Изменение внутреннего объема трубки связано как с изменением ее длины, так и с изменением ее внутреннего сечения. Какой из этих двух вкладов больше?

8. Считая, что толщина стенок трубки существенно меньше ее радиуса (что не выполняется для нашей трубки), теоретически получите значение коэффициента Пуассона μ, для которого при увеличении давления внутри трубки ее длина остается неизменной.

Примечание. Плотность воды считайте равной точно 1 г/см^3.

Оборудование. Трубка силиконовая, 2 шприца на 1 мл, весы, один поршень от шприца с крючком для присоединения динамометра, шприц 20 мл, динамометр 5 Н, струбцина, мерная лента, мерный цилиндр 100 мл, пластиковая чашка с водой, скотч (по требованию).

Решение

Часть 1. Теоретическая

1. Используя приведенные определения, получим $k = Ebh/l$.

2. Выражение для малого относительного изменения объема можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \Delta \ln(V) = \Delta \ln(b) + \Delta \ln(h) + \Delta \ln(l) \approx \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu) \quad (3)$$

Часть 2. Изменение длины

3. Для определения внутреннего сечения трубки наберем воду в часть трубки длиной $l_1 = (100.8 \pm 0.1)$ см. При помощи весов определим массу набранной в трубку воды $m_1 = (11.80 \pm 0.03)$ г. Зная плотность воды $\rho = 1.0$ г/см^3, получаем для внутреннего сечения трубки:

$$a = \frac{m_1}{\rho l_1} = (11.71 \pm 0.04)\ \text{мм}^2. \quad (4)$$

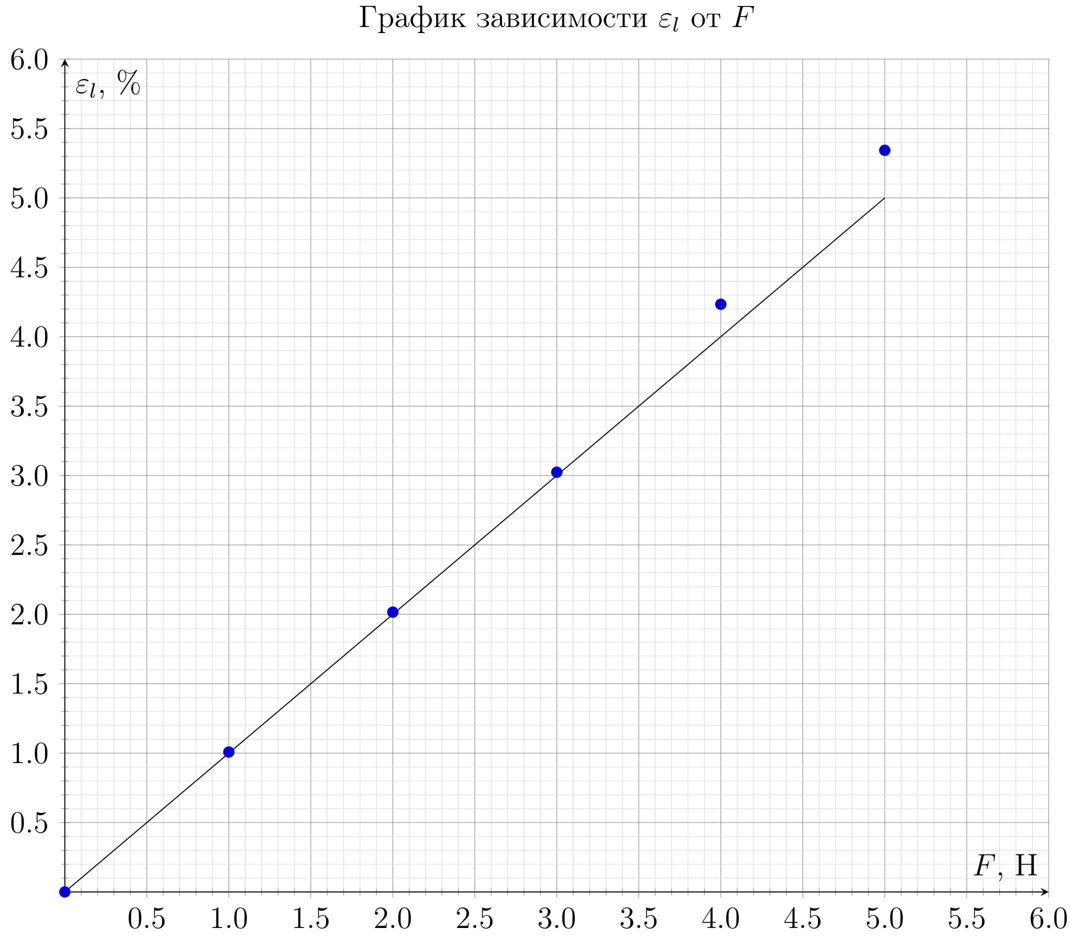
Для определения площади сечения стенок трубки опустим ее часть длиной $l_2 = (15.0 \pm 0.1)$ см в мерный цилиндр, поставленный на весы, придерживая трубку так, чтобы она не касалась дна и стенок мерного цилиндра. На воду в цилиндре будет действовать сила (равная, по третьему закону Ньютона, силе Архимеда, действующей на трубку), которая приведет к изменению показаний весов на величину $m_2 = (4.06 \pm 0.03)$ г. Отсюда для сечения стенок трубки получим:

$$A = \frac{m_2}{\rho l_2} = (27.1 \pm 4.0)\ \text{мм}^2. \quad (5)$$

4. Снимем зависимость длины трубки $\varepsilon_l = \Delta l / l$ от растягивающей ее силы F:

l, см	F, Н	ε_l, %
99.2	0.0	0.00
100.2	1.0	1.01
101.2	2.0	2.02
102.2	3.0	3.02
103.4	4.0	4.23
104.5	5.0	5.34

Построим график полученной зависимости:



На начальном этапе график соответствует прямой линии. В этих пределах можно считать, что длина трубки и сечение ее стенок неизменно. Дальнейшее отклонение графика от прямой линии свидетельствует об уменьшении сечения стенок трубки, что приводит к уменьшению коэффициента жесткости. Определим угловой коэффициент линии, аппроксимирующей график на начальном этапе $k_1 = (1.00 \pm 0.04) \cdot 10^{-2}$ Н$^{-1}$. С учетом площади сечения стенок трубки получим для модуля Юнга:

$$E = (Ak_1)^{-1} = (3.7 \pm 0.2) \cdot 10^6 \text{ Па.} \tag{6}$$

5. Заполним трубку водой практически полностью. Один конец трубки заткнем поршнем от шприца с крючком, а в другой конец вставим корпус второго шприца (левый и правый концы трубки соответственно на рисунке 3). Сообщающийся с атмосферой конец трубки зафиксируем струбциной на столе, а другой будем тянуть рукой.

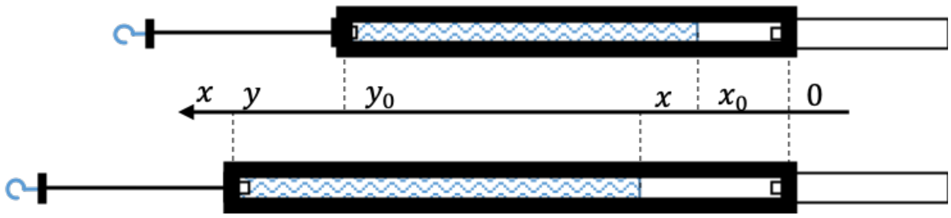


Рис. 3. Установка для измерения коэффициента Пуассона материала трубки

Объем воды внутри трубки трубки неизменен. Обозначим этот объем v. Тогда объем всей трубки можно рассчитать как:

$$V = v\frac{y}{y-x}, \tag{7}$$

а его относительное изменение так:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{y}{y_0}\frac{y_0 - x_0}{y - x} - 1. \tag{8}$$

По аналогии с пунктом 2 можно получить:

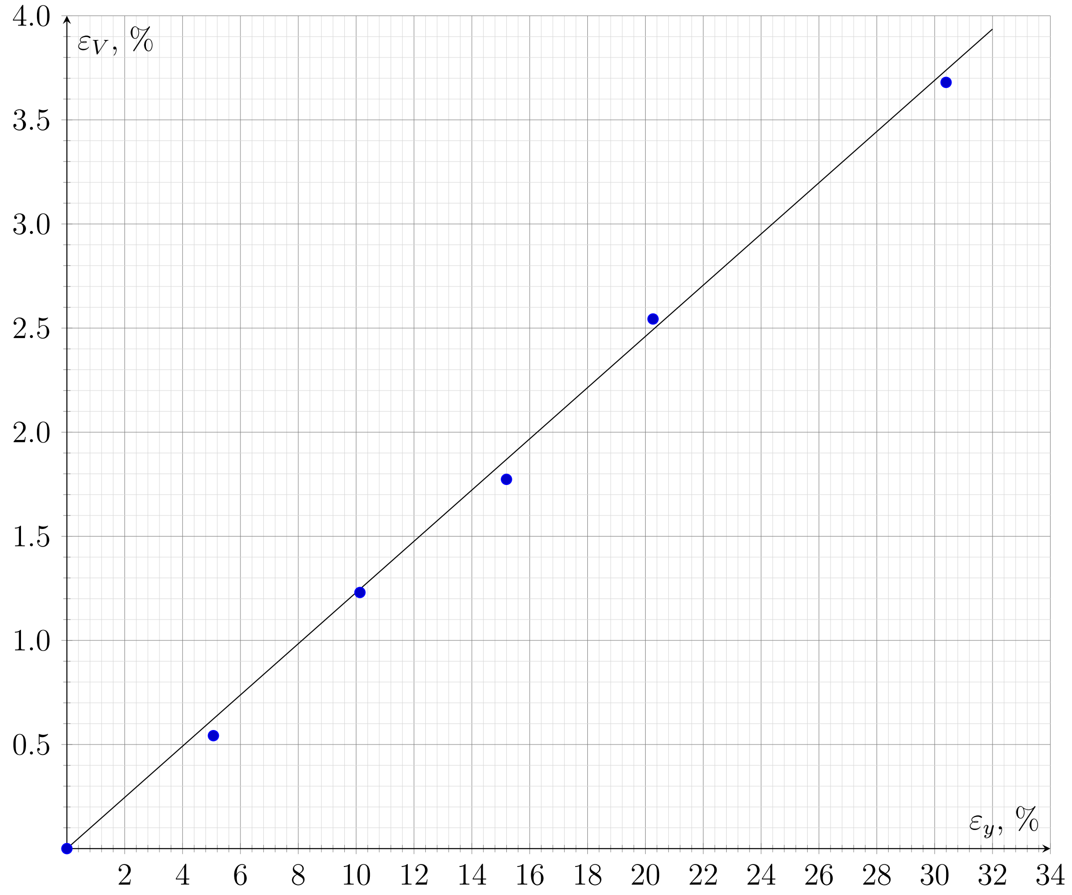
$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta y}{y_0} - \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{\Delta y}{y_0}(1 - 2\mu). \tag{9}$$

Снимем зависимость координаты жидкости в трубке x от длины трубки y. Рассчитаем относительное удлинение трубки и относительное изменение объема ее внутренней части для каждой ее длины.

y, см	x, см	ε_y, %	ε_V, %
98.7	0.9	0.00	0.00
103.7	1.5	5.07	0.54
108.7	2.3	10.13	1.23
113.7	3.0	15.20	1.77
118.7	4.0	20.26	2.54
128.7	5.7	30.40	3.68

Построим график зависимости $\varepsilon_V(\varepsilon_y)$:

График зависимости ε_V от ε_y



Угловой коэффициент прямой, описывающей зависимость, составляет $k_2 = 0.123 \pm 0.004$. Откуда коэффициент Пуассона:

$$\mu = \frac{1 - k_2}{2} = 0.438 \pm 0.002 \tag{10}$$

Часть 3. Изменение давления

6. Наберем в трубку воду. Заткнем один из концов трубки поршнем шприца. В другой конец трубки вставим шприц, заполненный водой и воздухом в соотношении примерно 1:1 (см. рисунок 4).

Рис. 4. Внутреннее сечение и сечение стенок трубки.

Будем нажимать на шприц и следить за суммарным объемом воды и воздуха в шприце v_1 и объемом воды в шприце v_2. Разница этих двух объемов составит объем воздуха, по изменению которого из закона Бойля-Мариотта можно рассчитать дополнительное давление в системе:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{v_1^{(0)} - v_2^{(0)}}{v_1 - v_2} - 1. \tag{11}$$

Изменение объема v_2 показывает увеличение объема воды внутри трубки. Длина заполненной водой части трубки составляет $l_3 = (96.0 \pm 0.1)$ см, тогда ее изначальный объем:

$$V_0 = al_3 = (11.24 \pm 0.05) \text{ мл}. \tag{12}$$

Измерим зависимость v_2 от v_1. Рассчитаем ΔP и относительное изменение $\Delta V/V_0 = -\Delta v_2/V_0$ объема воды в трубке:

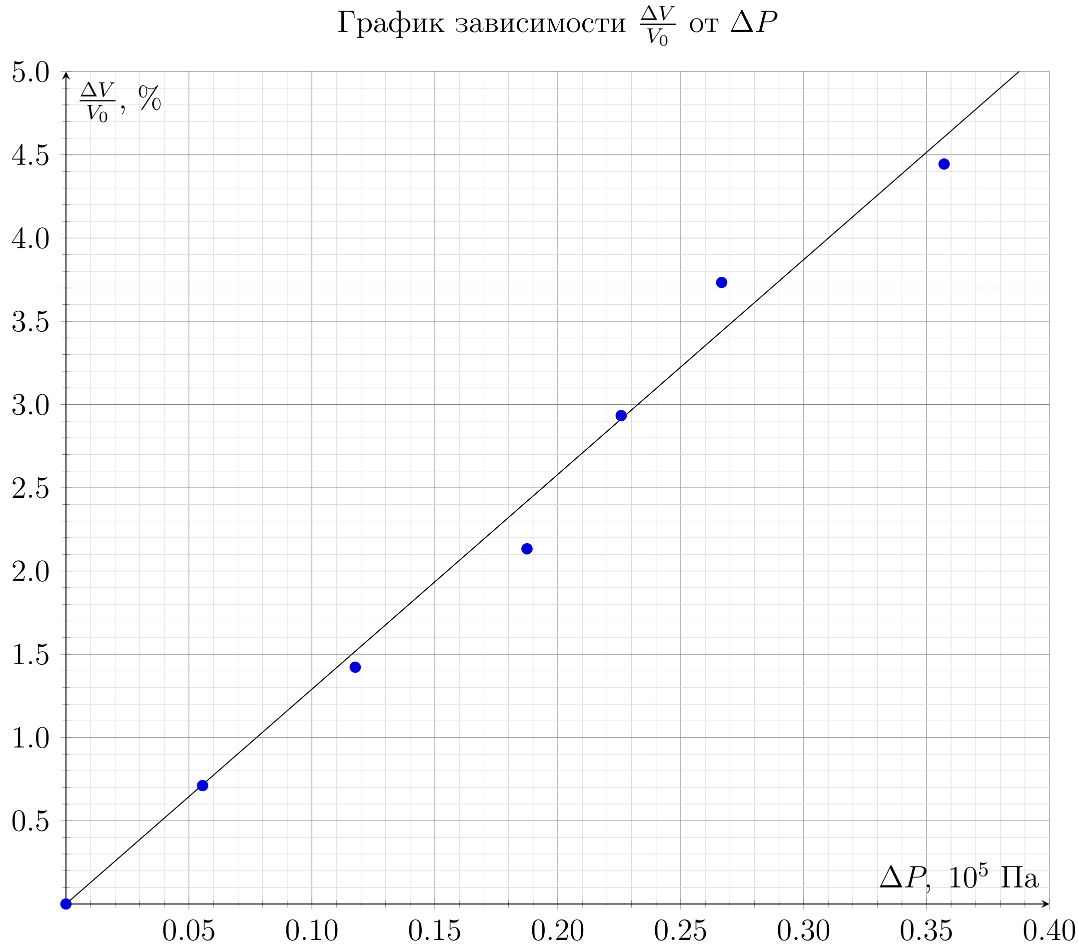
v_1, 10^{-2} мл	v_2, 10^{-2} мл	ΔP, 10^5 Па	$\frac{\Delta V}{V_0}$, %
100	62	0.00	0.00
90	54	0.06	0.71
80	46	0.12	1.42
70	38	0.19	2.13
60	29	0.23	2.93
50	20	0.27	3.73
40	12	0.36	4.44

Построим график зависимости относительного изменения объема трубки от дополнительного давления в ней. Определим угловой коэффициент графика:

$$k_3 = (12.9 \pm 0.9) \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}. \tag{13}$$

7. Заметим, что длина трубки при такой деформации остается практически неизменной. Значит, изменение ее внутреннего объема обусловлено лишь изменением ее внутреннего сечения.

8. Для объяснения полученного эффекта воспользуемся моделью тонкостенной трубки, внутри которой создано дополнительное давление ΔP по отношению к внешнему. Толщину стенок трубки обозначим за d, ее радиус за R. Выделим в трубке сегмент длиной l, угловым размером 2α (см. рисунок 5). Красными стрелками на рисунке обозначим направление сил упругости. Синим обозначим направление сил, созданных за счет внутреннего давления.



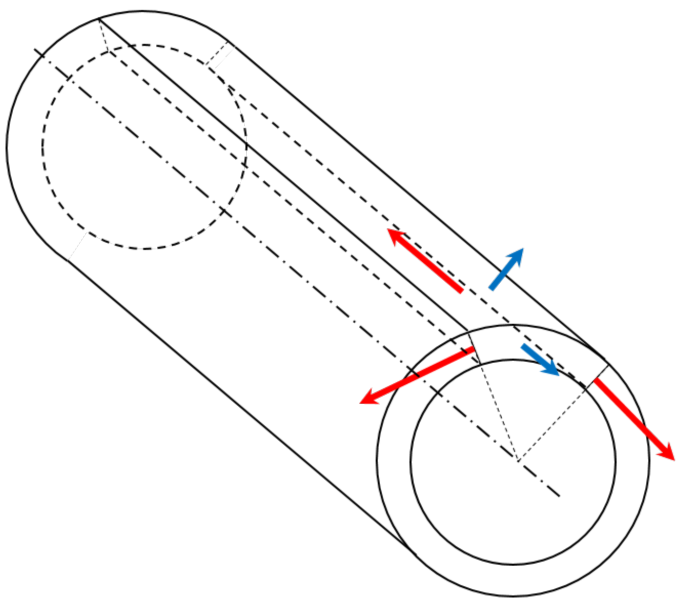


Рис. 5. Внутреннее сечение и сечение стенок трубки.

Запишем условие его равновесия в радиальном направлении:

$$E\left(\frac{\Delta R}{R}\right)2\alpha ld = \Delta Pl2\alpha R, \tag{14}$$

где $\Delta R/R$ — относительная деформация трубки в радиальном направлении, обусловленная лишь давлением газа внутри трубки на ее стенки.

Аналогичное соотношение запишем для части трубки, находящейся вблизи ее торца, закрытого поршнем, прикрепленным к стенкам трубки, в направлении оси трубки:

$$E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)2\pi Rd = \Delta P\pi R^2, \tag{15}$$

где $\Delta l/l$ — относительная деформация трубки в осевом направлении, обусловленная лишь давлением газа внутри трубки на ее торцы.

Из последних двух соотношений можем получить, что деформация в радиальном направлении в два раза превышает деформацию в осевом.

$$\frac{\Delta R}{R} = 2\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta PR}{E}, \tag{16}$$

В свою очередь, кроме деформации, обусловленной давлением, существует деформация, обусловленная соотношением Пуассона. Общая деформация в осевом направлении тогда составляет:

$$\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_{\Sigma} = \frac{\Delta l}{l} - \mu\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R}{R}\left(\frac{1}{2} - \mu\right). \tag{17}$$

В итоге наблюдаемая деформация в осевом направлении будет равна нулю в случае, если коэффициент Пуассона равен 1/2.