

### В задаче требуется оценка погрешностей!

#### Теоретическое введение

Определение радиуса кривизны сферической поверхности — задача с несколькими решениями из разных областей физики.

Например, если поверхность вогнута и частично отражает свет, то её можно использовать в качестве сферического зеркала. Для действительных изображений в вогнутом сферическом зеркале справедлива формула:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \quad (1)$$

где  $a$  — расстояние от источника до поверхности зеркала,  $b$  — расстояние от поверхности зеркала до изображения,  $R$  — искомый радиус кривизны (см. рисунок 1).

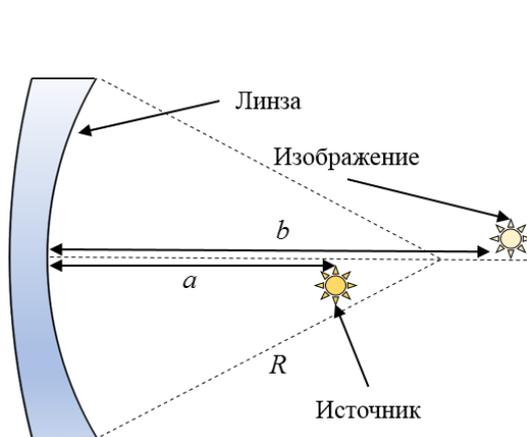


Рис. 1: Получение действительного изображения в вогнутом зеркале.

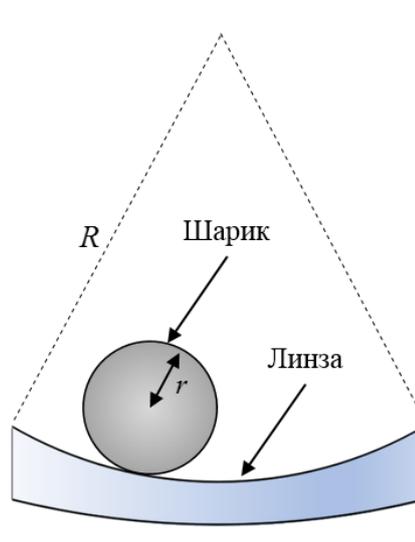


Рис. 2: Колебательная система.

Радиус кривизны  $R$  вогнутой сферической поверхности также можно определить с помощью шарика радиуса  $r$ , катающегося по ней *без проскальзывания* вокруг положения равновесия (см. рисунок 2).

По аналогии с периодом колебаний (или по-научному осцилляций) математического маятника (точечного тела ненулевой массы, подвешенного на идеальной нити длины  $l$  в поле силы тяжести  $g = 9.8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ ):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2)$$

для периода колебаний шарика можно предположить зависимость:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f(R, r)}{g}}, \quad (3)$$

где  $f(R, r)$  — неизвестная функция радиуса кривизны вогнутой поверхности и радиуса шарика.

**Часть 1. Оптическая.**

1. Соберите установку для измерения зависимости  $b(a)$ . Определите по полученным данным радиус кривизны вогнутой поверхности линзы  $R_{\text{opt}}$  (индекс «opt» означает, что результат получен путем оптического эксперимента). Оцените погрешность полученного значения.

**Часть 2. Осцилляционная.**

2. Предположите вид зависимости  $f(R, r)$ . Учтите предельные случаи  $R \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow R$ .
3. Соберите установку для изучения зависимости периода осцилляций шарика в линзе  $T$  от радиуса шарика  $r$  и измерьте эту зависимость. Для бóльшей точности рекомендуется проводить серию из не менее, чем пяти измерений для каждого шарика.
4. Постройте график зависимости  $T(r)$  в таких координатах, где он будет линейным. Определите по полученным данным радиус кривизны вогнутой поверхности линзы  $R_{\text{osc}}$  (индекс «osc» означает, что результат получен путем осцилляционного эксперимента). Оцените погрешность полученного значения. Сравните результаты, полученные в пунктах 1 и 4.
5. Определите по графику из пункта 4 безразмерные коэффициенты, входящие в  $f(R, r)$ , и их погрешности.
6. Функцию  $f(R, r)$  можно рассчитать теоретически, но для этого нужны пока неизвестные вам математические методы. Предположите теоретические значения коэффициентов  $f(R, r)$ , основываясь на результатах ваших измерений. Известно, что коэффициенты являются десятичными дробями с одним знаком после запятой.

**Указание.** Перед каждым измерением в части 2 протирайте салфеткой поверхность линзы и шарик, так как их загрязнение приводит к уменьшению времени затухания колебаний.

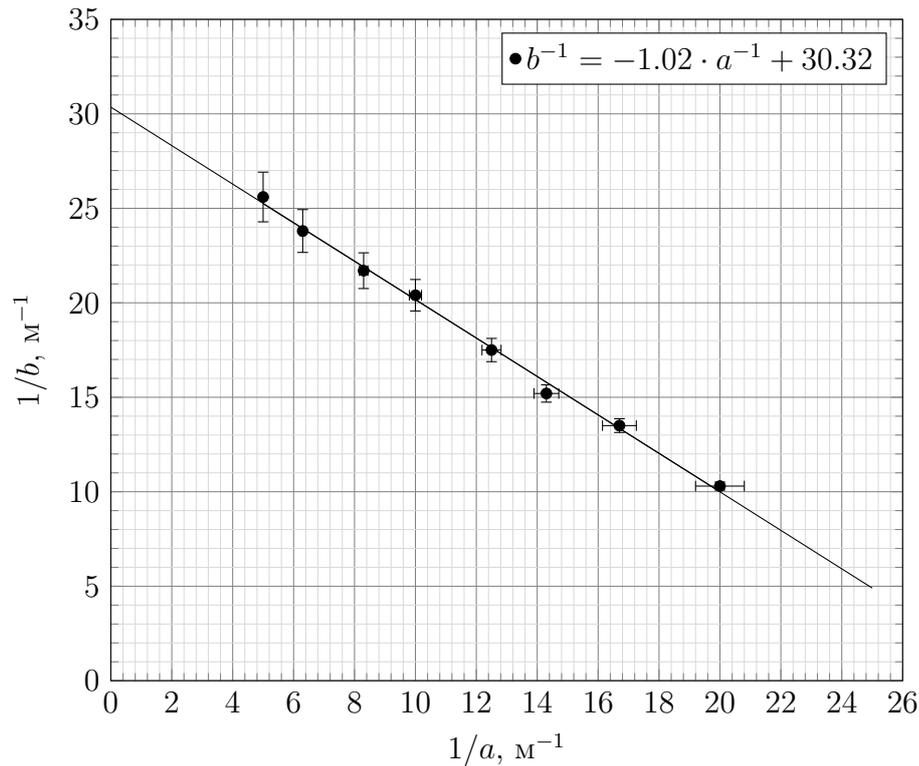
**Оборудование.** Вогнуто-выпуклая линза, стальные шары радиусами 2.5 мм, 5.0 мм, 7.5 мм, 10.0 мм, 12.5 мм, 15.0 мм, стакан для хранения шаров, светодиод с источником питания, линейка, пластилин для фиксации линзы, картонный экран, секундомер, салфетка для поддержания чистоты установки.

*Решение*

1. Соберем установку, показанную на рисунке 1. Для этого закрепим линзу с помощью пластилина в вертикальном положении так, чтобы горизонтальная координата самой «глубокой» точки на вогнутой поверхности линзы совпадала с координатой 0 см линейки, лежащей на столе. Чтобы расположить линейку максимально точно, можно осветить линзу светодиодом с ее боковой поверхности и на просвет оценить положение самой «глубокой» точки вогнутой поверхности. Линейку на столе закрепим пластилином на ее концах. Вдоль линейки будем двигать светодиод так, чтобы центр светодиода был примерно на той же высоте, что и центр линзы (для этого светодиод можно закрепить с помощью пластилина на крышке от источника питания, как на подставке). Снимем зависимость расстояния  $b$  от центра вогнутой поверхности до изображения светодиода на экране от расстояния  $a$  между светодиодом и центром вогнутой поверхности линзы:

$a$ , см	$b$ , см	$1/a$ , м <sup>-1</sup>	$1/b$ , м <sup>-1</sup>
20.0	3.9	5.0	25.6
16.0	4.2	6.3	23.8
12.0	4.6	8.3	21.7
10.0	4.9	10.0	20.4
8.0	5.7	12.5	17.5
7.0	6.6	14.3	15.2
6.0	7.4	16.7	13.5
5.0	9.7	20.0	10.3

Из формулы 1 видно, что радиус кривизны можно получить, определив координату точки пересечения графика  $\frac{1}{b} \left( \frac{1}{a} \right)$  с осями. Построим предложенный график:



Из графика определим радиус кривизны вогнутой поверхности линзы:

$$R_{\text{opt}} = (6.60 \pm 0.07) \text{ см.} \quad (4)$$

2. Из метода размерностей следует, что  $[f(R, r)] = [\text{м}]$ . Из рассмотрения критического случая  $r \rightarrow R$  следует, что  $f(R, R) = 0$ , так как, если радиус шара  $r \rightarrow R$ , период осцилляций стремится к нулю. Из рассмотрения критического случая  $R \rightarrow \infty$  следует, что  $f(R \rightarrow \infty, r) = \infty$ , так как, если вогнутая поверхность стремится к горизонтальной, колебания становятся бесконечно длинными. Таким образом можно предположить функцию:

$$f(R, r) = \alpha(R - r). \quad (5)$$

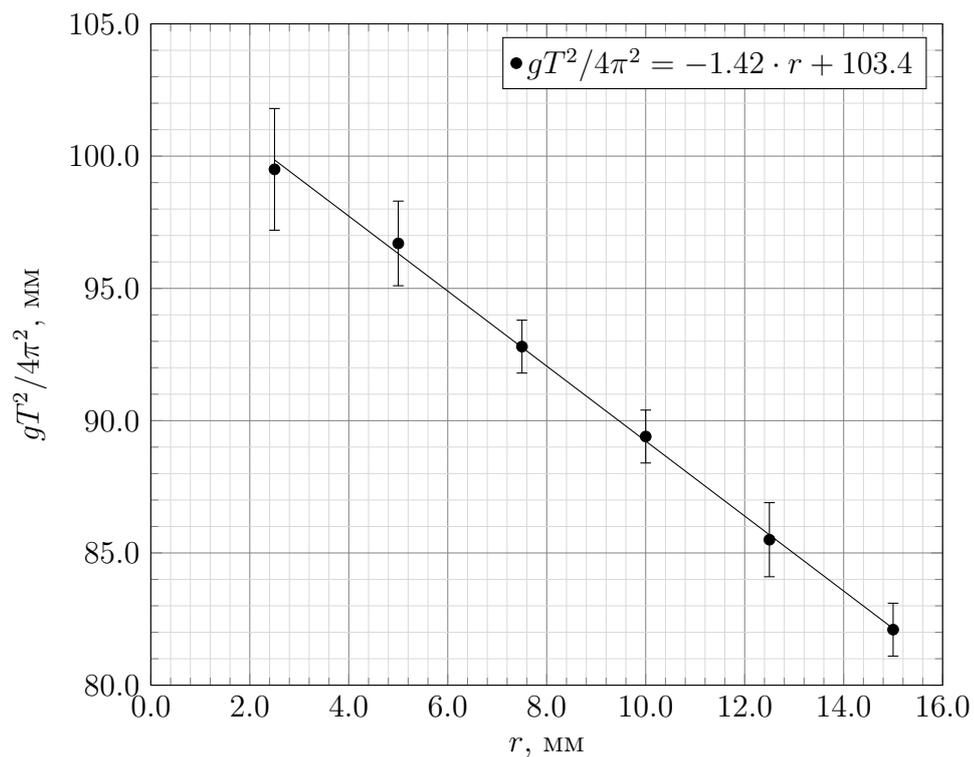
3. Расположим линзу горизонтально, вогнутой стороной вверх, прочно закрепив ее на парте пластилином. По вогнутой поверхности будем без начальной скорости запускать шарики разных радиусов и определять период  $T$  их колебаний методом рядов и усреднением. Для этого измерим время  $\tau_i$   $N$  колебаний. Перед каждым запуском будем протирать линзу и шарик салфеткой:

$N$	$\tau_1, \text{с}$	$\tau_2, \text{с}$	$\tau_3, \text{с}$	$\tau_4, \text{с}$	$\tau_5, \text{с}$	$T, \text{с}$	$r, \text{мм}$	$T^2, \text{с}^2$	$gT^2/4\pi^2, \text{мм}$
50	28.72	28.69	28.75	28.85	28.72	0.5749	15.0	0.3305	82.1
30	17.62	17.60	17.66	17.59	17.57	0.5869	12.5	0.3445	85.5
50	30.03	30.07	29.93	29.97	30.00	0.6000	10.0	0.3600	89.4
50	30.53	30.53	30.56	30.62	30.59	0.6113	7.5	0.3737	92.8
30	18.64	18.71	18.78	18.75	18.72	0.6240	5.0	0.3894	96.7
20	12.72	12.62	12.65	12.72	12.59	0.6330	2.5	0.4007	99.5

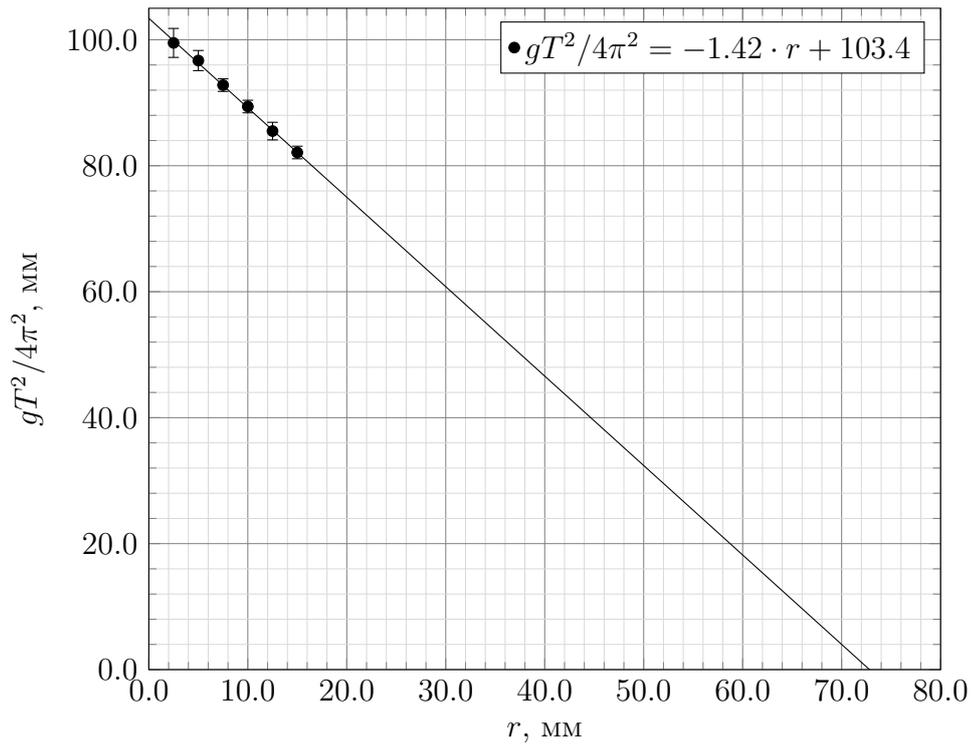
4. После преобразований исследуемая зависимость примет вид:

$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = \alpha(R - r) \quad (6)$$

Построим график  $\frac{gT^2}{4\pi^2}(r)$  и определим  $\alpha$  из углового коэффициента прямой, а  $R_{\text{osc}}$  из координаты пересечения прямой и оси абсцисс:



Построим тот же график с указанием точки пересечения с осью абсцисс:



Из графика определим  $\alpha$  и  $R_{\text{osc}}$ :

$$\alpha = (1.438 \pm 0.055), R_{\text{osc}} = (7.21 \pm 0.31)\text{мм}. \quad (7)$$

Интервалы допустимых с учетом погрешностей значений  $R_{\text{opt}}$  и  $R_{\text{osc}}$  не совпадают. Это обусловлено сферической абберацией и неточностью источника света в оптическом эксперименте, а также возможным проскальзыванием шарика при больших амплитудах колебаний в механическом эксперименте.

5. Оценим  $\alpha_{\text{теор}} = 1.4$ , учитывая полученное экспериментальное значение. Отметим, что это верное теоретическое значение, так как оно соответствует коэффициенту в формуле момента инерции однородного шара относительно касательной к нему оси вращения.