10 класс
Очень жесткая пружина

Решение.

Часть 2. Экспериментальная часть

1. Сначала убеждаемся в том, что жёсткость исследуемой пружины существенно превосходит жёсткость пружины динамометра. Даже при максимальной силе $F_{max} = 5$ Н, на которую рассчитан динамометр, деформация исследуемой пружины не превышает долей миллиметра. Это означает, что имеющееся оборудование (динамометр и линейка) не позволяет непосредственно определить коэффициент жёсткости пружины по зависимости $F(\Delta l)$.

   Для проведения измерений соберём установку, которая позволяет значительно увеличить создаваемое динамометром F усилие, а также измерять небольшие деформации пружины Δl. Фотография экспериментальной установки показана на рис. 1.

Рис. 1. Фотография установки

Нихромовая проволока, закреплённая на струбцинах, натянута несильно, но достаточно для того, чтобы создать небольшую деформацию пружины. Расстояние между струбцинами определяется длиной стола и равно $l = 2l_0 = 116.5$ см. С помощью привязанного нитью к середине проволоки динамометра прикладываем силу F в перпендикулярном к проволоке направлении. Будем снимать зависимость $F(x)$, где x — отмечаемое по закрепленной на столе линейке положение динамометра. Отклонение Δx динамометра от положения, в котором он не оттягивает проволоку, является прогибом середины проволоки под действием силы F (см. рис. 2).

Рис. 2. Прогиб середины проволоки

Выведем теоретическую зависимость $F(x)$. При малых $\Delta x << l_0$ удлинение пружины равно:

$$\Delta l = 2\left(\sqrt{l_0^2 + (\Delta x)^2} - l_0\right) \simeq 2\frac{(\Delta x)^2}{2l_0} = \frac{(\Delta x)^2}{l_0} \tag{1}$$

При выводе формулы растяжением нихромовой проволоки по сравнению с деформацией пружины можно пренебречь. Схема установки представлена на рис. 3.

Из условия равновесия следует, что:

$$F = 2T\sin\alpha$$

$$T = \frac{F}{2\sin\alpha} \tag{2}$$

Воспользуемся тем, что $\alpha << 1$, откуда следует, что:

$$\sin\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha \simeq \frac{\Delta x}{l_0}$$

Подставляя полученное выражение в (2), получаем:

$$T = \frac{Fl_0}{2\Delta x} \tag{3}$$

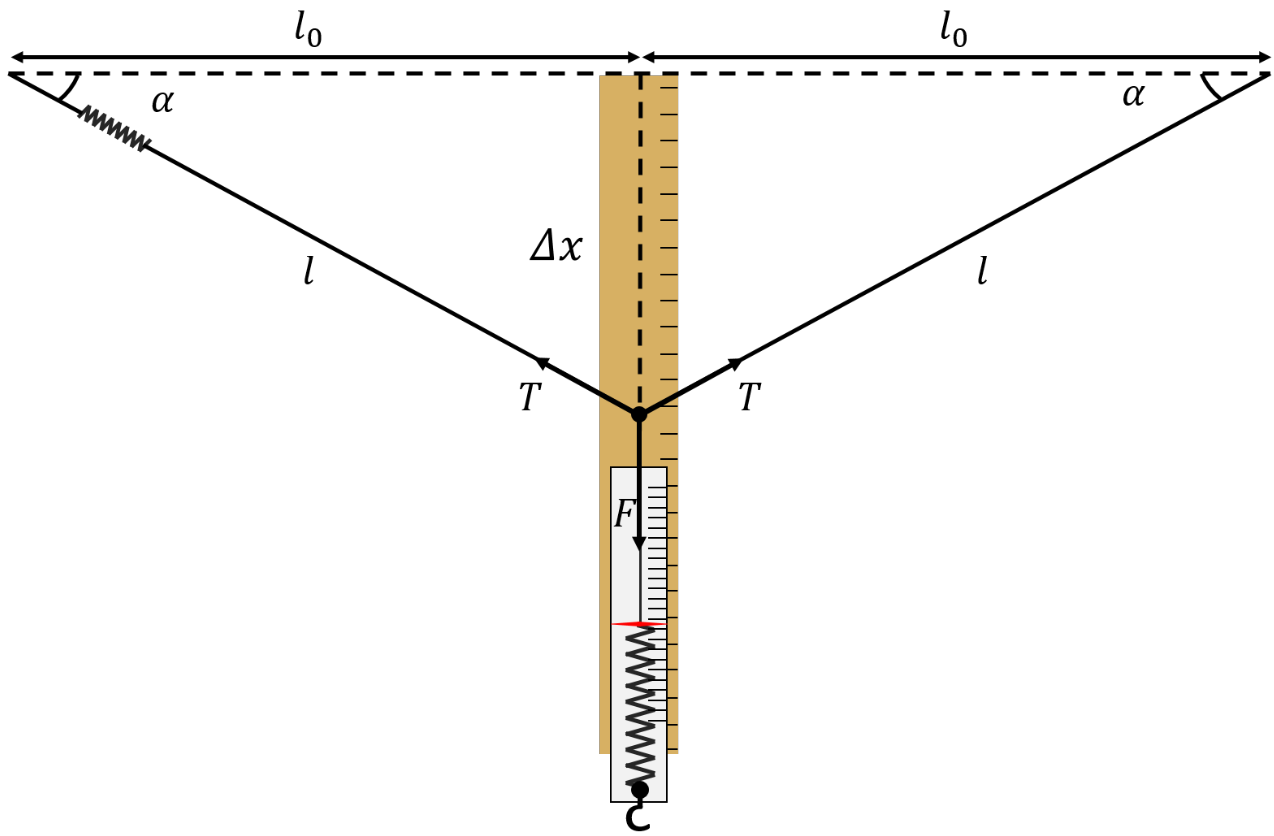


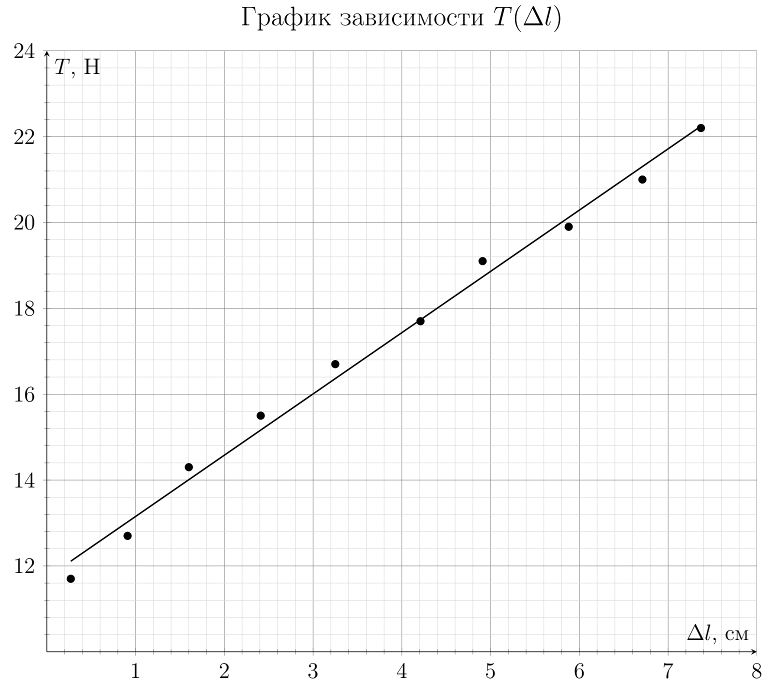
Рис. 3. Схема установки

Таким образом, измерив зависимость $F(x)$, мы можем рассчитать зависимость $T\,(\Delta l)$. Результаты измерений $F(x)$ и пересчет в $T(\Delta l)$ представлены ниже.

F, Н	x_1, см	x_2, см	xm	Δx, см	Δl, см	T, Н
0.5	53	54	53.5	12.5	0.27	11.7
1	63	65	64	23	0.91	12.7
1.5	71	72	71.5	30.5	1.6	14.3
2	78	79	78.5	37.5	2.41	15.5
2.5	84	85	84.5	43.5	3.25	16.7
3	90	91	90.5	49.5	4.21	17.7
3.5	94	95	94.5	53.5	4.91	19.1
4	99	100	99.5	58.5	5.88	19.9
4.5	103	104	103.5	62.5	6.71	21
5	106	107	106.5	65.5	7.37	22.2

Чтобы оценить, как влияет сила трения динамометра о линейку на результаты эксперимента, проведены измерения для возрастающих натяжений и для убывающих. В этих случаях сила трения направлена в противоположные стороны, и, хоть ее влияние и несущественно, за положение динамометра при заданных его показаниях будем принимать среднее между двумя его положениями.

2. Построим график зависимости $T(\Delta l)$.



Заметим, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую линию. Это означает, что пружина подчиняется закону Гука. w Коэффициент жёсткости, рассчитанный из наклона: $k = (14.3 \pm 0.5)$ Н/см.

3. Оценку жёсткости пружины сделаем так. У нас имеется пружина динамометра, параметры которой легко определяются: коэффициент жесткости $k_0 = 0.50$ Н/см, число витков $N_0 = 29$, длина $L_0 = 22$ мм, средний диаметр витков $D_0 = 14$ мм. Запишем формулу, связывающую жесткость пружину со свойствами материала, из которого она сделана и её геометрическими параметрами:

$$k = \frac{G}{N}\frac{d^4}{8D^3} \tag{4}$$

В условии указано, что пружина в динамометре является стальной, а значит модуль сдвига G у материала исследуемой пружины и пружины в динамометре один и тот же. Таким образом можно рассчитать отношение коэффициентов жесткости двух пружин, зная их геометрические параметры. Параметры исследуемой пружины: число витков $N = 30$, длина $L = 30$ мм, средний диаметр витков $D = 6$ мм. Подставляя эти значения, получаем численное значение отношения коэффициентов жесткости двух пружин:

$$\frac{k_{\text{т}}}{k_0} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^4 \left(\frac{D_0}{D}\right)^3 \left(\frac{N_0}{N}\right)^5 = 37.1 \tag{5}$$

Откуда коэффициент жесткости исследуемой пруины:

$$k_{\text{т}} = 18.5 \text{ Н/см} \tag{6}$$

Погрешность нашей оценки довольно велика и составляет, по-видимому, не менее 20% (это связано с большими степенями, с которыми в оценочную формулу входят измеряемые величины). Поэтому можно считать, что экспериментальное $k = 14.3$ Н/см и теоретическое $k_{\text{т}} = 18.5$ Н/см значения в пределах погрешности согласуются.

4. Оценку модуля сдвига G для стали сделаем, используя данные для пружины динамометра:

$$G = \frac{8k_0 D_0^3 N_0^5}{L_0^4} = 9.6 \cdot 10^{10} \text{ Па} \tag{7}$$

Погрешность за счет больших степеней так же составляет порядка 20%. Окончательно:

$$G = (9.6 \pm 1.9) \cdot 10^{10} \text{ Па} \tag{8}$$

Табличное значение для стали:

$$G_{\text{табл}} = (7.9...8.9) \cdot 10^{10} \text{ Па} \tag{9}$$