

8 класс Циклоида

Решение.

Часть 1. Построение циклоиды.

Длина окружности диска $L_{\text{окр}} = \pi D_0$, а значит диаметр диска $D_0 = L_{\text{окр}}/\pi \simeq 7.64$ см.

Разбиение окружност на 24 равных сектора:

Шаг 1.

Чертим окружность с центром в точке O с диаметром AB :

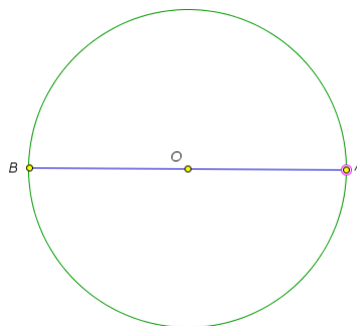


Рис. 1. Шаг 1.

Шаг 2.

Чертим окружности радиуса AO с центрами в точках A и B . Треугольники AEO , OBC , ODC , AFO — равносторонние. Все углы у этих треугольников равны 60° . Проводим прямые DF , EC , AB . Таким образом мы разбили нашу начальную окружность на 6 равных частей.

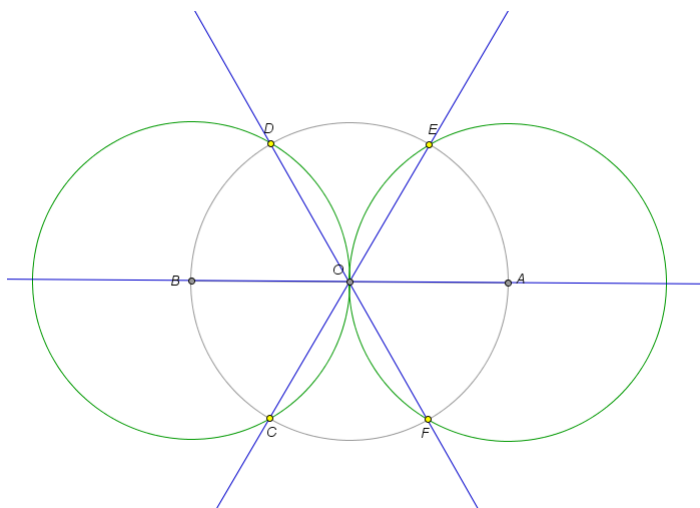


Рис. 2. Шаг 2.

Шаг 3.

Проведём Проведем биссектрису углов DOB и AOF : Построим окружности радиуса AO с центрами в точках D и F . Прямая HOL (через 3 точки точнее проводить прямую) – биссектриса выше упомянутых углов.

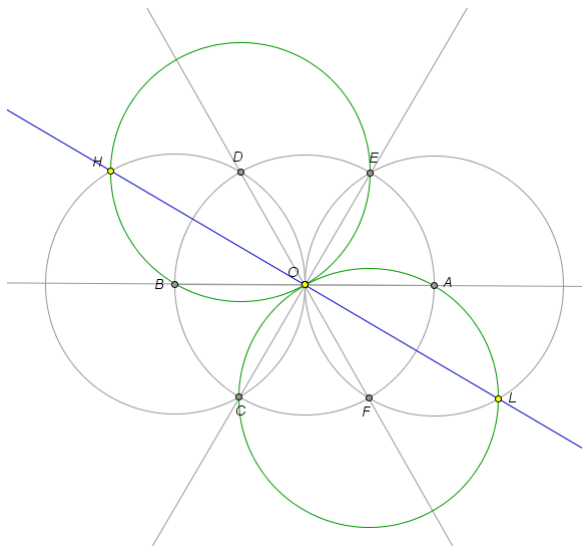


Рис. 3. Шаг 3.

Шаг 4.

Повторяем Шаг 3 для проведения биссектрис в углах DOE , EOA , FOC , COB .

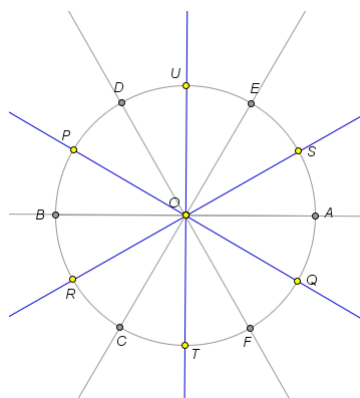


Рис. 4. Шаг 4.

Шаг 5.

Аналогично шагу 3 проводим биссектрисы во всех углах, тем самым разбивая круг на 24 части.

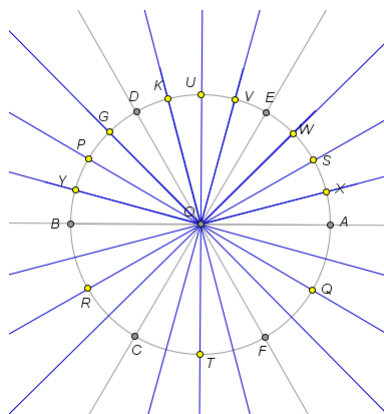


Рис. 5. Шаг 5.

Построение циклоиды.

1. За полный оборот наш диск проедет свою длину окружности — 24 см. Значит при обороте на $1/24$ оборота центр диска проедет 1 см.
2. На миллиметровой бумаге построим оси. Пронумеруем отметки на диске от 0 до 23.
3. Ставим отметку номер 0 в точку $(0; 0)$, далее будем следить за отметкой 0.
4. При обороте диска на $1/24$, точка 1 должна совместиться с координатой 1 см на оси . Ручкой делаем отметку о местонахождении точки 0.
5. При обороте ещё на $1/24$, точка 2 должна совпасть с координатой 2 по оси . Ручкой делаем отметку о местонахождении точки 0.

Продолжая описанный выше алгоритм, после полного оборота диска на миллиметровой бумаге появятся точки циклоиды. Соединим точки плавной линией.

Часть 2. Измерение параметров циклоиды с максимальной точностью.

1. Полученный график и оцифровка результатов представлены ниже.

Номер точки	X , см	Y , см	L , см	S , см ²
1	0	0	0.22	0.01
2	0.1	0.2	0.32	0.04
3	0.2	0.5	0.76	0.26
4	0.5	1.2	0.89	0.64
5	0.9	2	1.17	1.5
6	1.5	3	1.41	3.5
7	2.5	4	1.41	4.5
8	3.5	5	1.53	7.02
9	4.8	5.8	1.79	9.92
10	6.4	6.6	1.9	12.42
11	8.2	7.2	2.12	15.43
12	10.3	7.5	1.8	13.59
13	12.1	7.6	2.51	18.75
14	14.6	7.4	1.56	10.8
15	16.1	7	2.09	13.4
16	18.1	6.4	1.61	8.4
17	19.5	5.6	1.58	6.7
18	20.8	4.7	1.56	5.04
19	22	3.7	1.2	2.6
20	22.8	2.8	1.08	1.41
21	23.4	1.9	0.95	0.46
22	23.7	1	0.54	0.15
23	23.9	0.5	0.51	0.03
24	24	0		

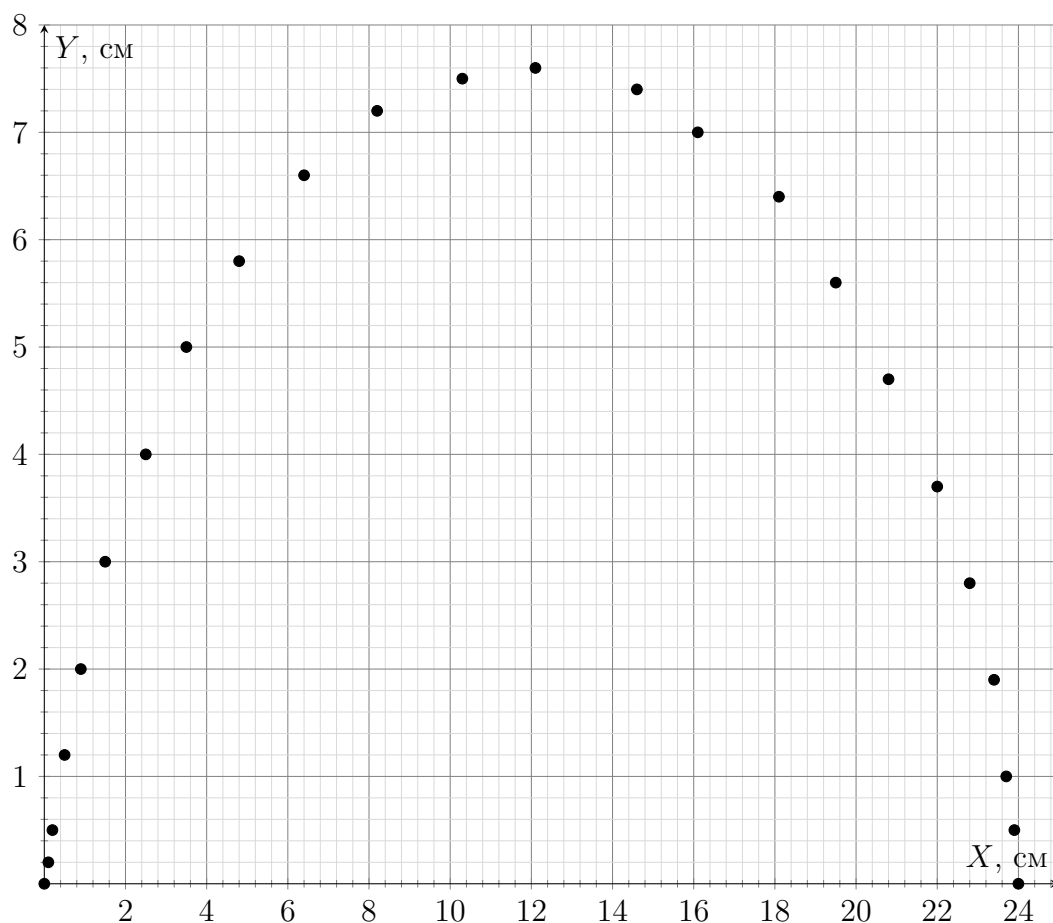
В таблице за L обозначено расстояние до следующей точки, а за S — площадь до следующей точки. График получившейся циклоиды представлен ниже.

2. Приближим нашу циклоиду ломанной линией состоящей из 23 отрезков. Тогда длина циклоиды — это сумма длин отрезков. Длина одного отрезка:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (1)$$

где x_1, y_1 — координаты первой точки, а x_2, y_2 — второй. Просуммировав все отрезки, получим приближенную длину циклоиды:

$$L = (30.5 \pm 1.5) \text{ см}$$

График зависимости Y от X 

3. Значение C_1 : $C_1 = L/D_0 = (4.0 \pm 0.2)$. Теоретическое значение: $C_1 = 4$.

4. Для расчета площади циклоиды разобьём её на трапеции. Площадь трапеции выражается как $s = h \frac{a+b}{2}$, где $(a+b)/2$ — средняя линия трапеции, а h — её высота. Площадь всей циклоиды S будем считать равной сумме площадей трапеций. Из полученных результатов $S = (137 \pm 7) \text{ см}^2$.

5. Значение $C_2 = \frac{S}{S_0} = \frac{4S}{\pi D_0^2} = (3 \pm 0.2)$. Теоретическое значение: $C_2 = 3$.

Часть 3. Приближенное измерение длины циклоиды.

1. Измерения диаметра диска:

D_0 , см	7.6	7.5	7.5	7.6	7.6
------------	-----	-----	-----	-----	-----

$$D = (7.56 \pm 0.08) \text{ см}, \varepsilon_D = 1\%$$

Однако погрешность накапливается при нанесении точек на миллиметровую бумагу и при оцифровке данных. Таким образом можно оценить погрешность в 5%.

2. Рассчитаем теоретическое значение длины циклоиды:

$$L_{\text{теор}} = 30.2 \text{ см}$$

3. Заменим циклоиду на 2, 4, 8 отрезков и рассчитаем их длину:

$$L_2 = 28.4 \text{ см}$$

$$L_4 = 29.8 \text{ см}$$

$$L_8 = 30.3 \text{ см}$$

Получается, что достаточно 8 отрезков для вычисления длины циклоиды с точностью 5%.