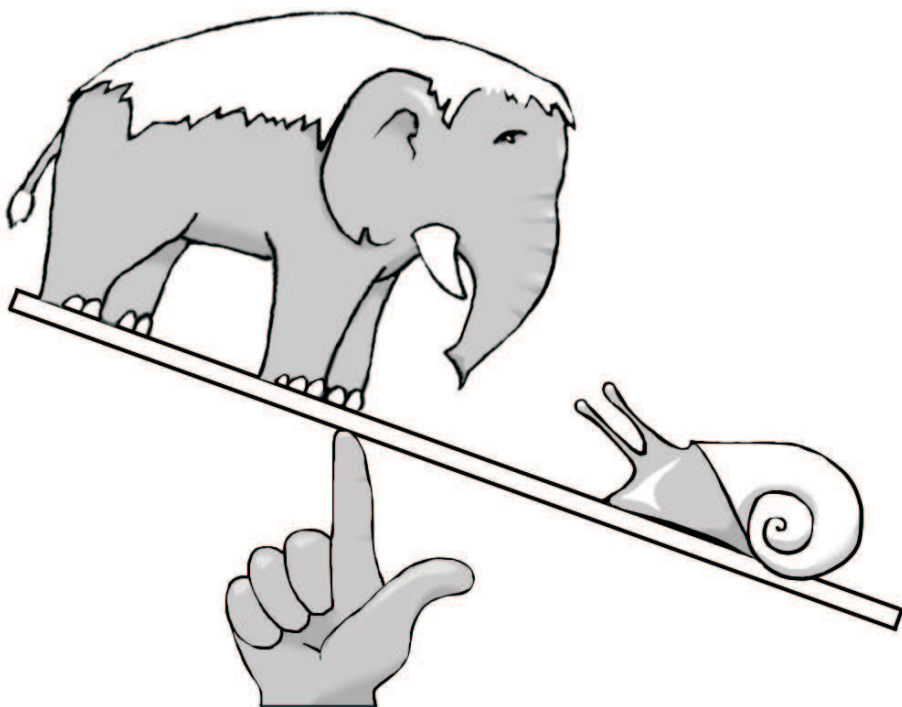


Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ. МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА»

Под общей редакцией Селюка Б. В.



*Рекомендовано УМО по классическому
университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010701 — Физика.*

Москва
Издательство МЦНМО
2007 год

УДК 53 (023)
ББК 22.3я721+74.262.22
Г83

Учебное издание

Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф.

Г83

Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада
«Туймаада»: Под ред. Селока Б. В. — М.: МЦНМО, 2007. — 160 с.: ил.
ISBN 978–5–94057–256–5.

Олимпиада «Туймаада» была организована в 1994 году по инициативе Министерства образования республики Саха (Якутия) и с тех пор ежегодно проводится на базе Якутского государственного университета им. Аммосова. В книге представлены задачи по физике теоретического тура олимпиады «Туймаада» за 1994–2005 годы (всего 65). Для удобства пользования книгой все задачи систематизированы по своим разделам физики. Почти ко всем задачам даются подробные решения.

При описании решений обращается особое внимание на обоснованность используемых положений, на поиск подходов к решению, на возможность решения разными методами, на анализ полученных результатов. Разбор решений олимпиадных задач является хорошей школой глубокого изучения школьниками физики и подготовки их как к участию в такого рода олимпиадах, так и ко вступительным экзаменам в вузы с повышенными требованиями к знаниям по физике.

ББК 22.3я721+74.262.22

© Московский центр непрерывного математического образования, 2007.

© Григорьев Ю. М., Муравьев В. М.,
Потапов В. Ф., Селок Б. В., 2007

ISBN 978–5–94057–256–5

Григорьев Юрий Михайлович, Муравьев Вячеслав Михайлович, Потапов Виктор Филиппович, Селок Борис Васильевич

Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада»

Технический редактор Кулыгин А. К.

Корректоры Якута А. А., Щербakov Д. Е.

Подготовка иллюстраций: Муравьев В. М.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 15.01.2007.

Формат 60×90 ¹/₁₆. Печать офсетная. Объем 10 печатных листов.

Заказ . Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., дом 11. Тел. (495)241–05–00, (495)241–12–37.

<http://www.mcsme.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы»

129626, Москва, 1-й Рижский переулок, дом 2а.

Предисловие

Изучение физики невозможно без решения физических задач. Подготовка к будущей научной работе в области физики или техники немыслима без решения олимпиадных задач. Так принято называть трудные, не стандартные задачи, для решения которых необходимы не только глубокие знания физических законов, изученных в школе, но и смекалка, находчивость, развитая интуиция, упорство, то есть то, без чего не может быть творческого работника.

Поиск и отбор талантливой молодёжи, развитие её творческих способностей и влечения к физике является важной государственной задачей, которую с успехом решает на протяжении сорока лет система олимпиад по физике и математике. У истоков российского олимпиадного движения стояли такие известные научные деятели как П. Л. Капица, И. К. Кикоин, А. Н. Колмогоров, И. Ш. Слободетский. Всероссийские олимпиады школьников по физике проводятся в пять этапов: школьный, районный, областной, зональный и заключительный. По их результатам формируется сборная России на Международную физическую олимпиаду (МФО). Перспектива участия в олимпиадах всё более высокого уровня, включая уровень Международной физической олимпиады, является важным стимулом к систематическому изучению физики на повышенном уровне и способствует развитию интеллектуальных способностей школьников.

Олимпиада «Туймаада» по физике, математике, химии и информатике была организована в 1994 году по инициативе Министерства образования Республики Саха (Якутия) и с тех пор вот уже в тринадцатый раз проводится на базе Якутского государственного университета им. М. К. Аммосова. Своим названием олимпиада обязана месту проведения — живописной долине Туймаада на левом берегу реки Лена (в этой долине и находится город Якутск). По своей сути «Туймаада» является аналогом Международных олимпиад. Поэтому в последнее время получило широкое распространение приглашение вторых и младших сборных стран участниц. Материалы об олимпиаде регулярно публикуются в журналах «Квант», «Физика в школе» и «Потенциал».

В книге представлены задачи по физике теоретического тура высшей и первой лиг олимпиады «Туймаада» за одиннадцать лет. Особо трудные задачи в книге выделены звёздочкой. Для удобства пользования книгой все задачи систематизированы по своим разделам физики. Почти ко всем задачам

даются подробные решения. При описании решений обращается особое внимание на обоснованность используемых положений, на поиск подходов к решению, на возможность решения разными методами, на анализ полученных результатов. Разбор решений олимпиадных задач является хорошей школой глубокого изучения школьниками физики и подготовки их как к участию в различных олимпиадах, так и ко вступительным экзаменам в вузы с повышенными требованиями к знаниям по физике. Задачи, включённые в книгу, неоднократно предлагались на подготовительных сборах команды России на МФО, а также на летней физико-математической школе «Туймаада».

Ряд задач позволяет участникам олимпиады и читателям соприкоснуться с отдельными важными вопросами «серьёзной физики». Это помогают сделать и некоторые краткие замечания, несколько выходящие за рамки конкретных задач.

Всеобщая компьютеризация естественно охватила и физику. Компьютеры являются мощным инструментом, который эффективно используется исследователями как на этапе сбора экспериментальных данных, так и на этапе обработки результатов и моделирования физических явлений. На олимпиадах по физике компьютеры традиционно не используются. Тем не менее, в книге кое-где показывается эффективность применения популярной среди физиков и простой для начинающего пользователя системы компьютерной математики MathCad. Делается это для того, чтобы читатель осознал необходимость для будущего исследователя компьютерной грамотности.

Авторами задач, включённых в данную книгу, являются: Алфёров Р. Ф., Александров Д. А., Вавилов В. В., Варламов С. Д., Григорьев Ю. М., Иголевич И. А., Козел С. М., Мохначевский А. Н., Муксунов И. Х., Муравьёв В. М., Петров З. Е., Потапов В. Ф., Саввинова Н. А., Селюк Б. В., Сивцев В. И., Соловьёва Н. М., Соловьёв Т. Н., Татаринов А. П., Трубочёв А. М., Чудновский А. В., Шелест В. И. Некоторые задачи являются результатом коллективного труда.

Работать с пособием можно как индивидуально, так и группами под руководством учителя физики. Сначала следует попытаться решить задачу самостоятельно. Только после неоднократных попыток найти решение или для проверки полученного ответа следует прочитать решение, приведённое во второй части книги. Такая работа с пособием наиболее эффективна.

Авторы особо благодарны Селюку Б. В. за определяющий вклад в написание книги, Козелу С. М., Слободянину В. П., Чудновскому А. В., Якуте А. А. за ценные замечания.

Якутск–Смоленск–Москва 2005 г.

Условия задач

Механика

Задача 1.1 (Две частицы)

Две частицы одновременно начали двигаться в однородном поле тяжести $\vec{g}$. Начальные их скорости равны по модулю v_0 и лежат в одной вертикальной плоскости. Угол наклона вектора одной из скоростей к горизонту равен α , а другой 2α . В какой момент времени τ от начала движения скорости частиц окажутся сонаправленными? Сопротивлением движению пренебречь.

Задача 1.2 (Эхолот)

На корабле, отплывающем от крутого берега, время от времени измеряют глубину моря. На расстоянии $L_1 = 100$ м от берега глубина моря оказалась $h_1 = 150$ м, на удалении $L_2 = 140$ м зафиксирована глубина $h_2 = 200$ м, на расстоянии $L_3 = 210$ м от берега эхолот зарегистрировал два отражённых сигнала. Один из них соответствует глубине $h_3 = 300$ м, а другой $h_4 = 400$ м. Было высказано предположение, что второй сигнал обусловлен изменением знака наклона морского дна. Исходя из этого предположения, определите каков угол подъёма морского дна далее по курсу корабля.

При измерении глубины с корабля посылается направленная акустическая волна вертикально вниз. При взаимодействии со дном волна изотропно отражается во все стороны. На корабле регистрируется отражённый сигнал.

При решении задачи могут понадобиться некоторые свойства эллипса. Напомним их. Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов — постоянная величина, равная длине его большей оси. Малая полуось эллипса $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, где a — большая полуось, а c — расстояние от фокусов эллипса до его центра. Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где начало декартовой системы координат расположено в центре эллипса, ось x направлена вдоль большей оси, а y — вдоль малой. Нормаль к эллипсу в точке является биссектрисой угла между прямыми, соединяющими эту точку с фокусами эллипса.

Задача 1.3 (Камень)

С вертикальной скалы высотой H брошен горизонтально со скоростью v_0 камень массой m . Спустя некоторое время он стал двигаться с постоянной скоростью. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости ($\vec{F} = -k\vec{v}$), найти:

1. Расстояние L по горизонтали, на которое камень удалится от скалы в момент падения.
2. Время τ движения камня.

Задача 1.4* (Плоское движение)

В задаче исследуется плоское движение абсолютно твёрдого тела. Точки A , B , C и D принадлежат этому телу (рис. 1).

1. Задана скорость $\vec{v}$ точки A . Она изображена на рисунке 1 в указанном там масштабе. Найдите скорость $\vec{v}_C$ точки C , если скорость точки B направлена вдоль пунктирной прямой, изображённой на рисунке.
2. Скорость точки A такая же, как и в первом пункте. Найдите скорость $\vec{v}_C$, если модуль скорости точки B равен $1,0$ м/с.
3. Скорость точки A такая же, как и в первых пунктах. Найдите скорость $\vec{v}_D$ точки D , если скорости точек B и C одинаковы по модулю.

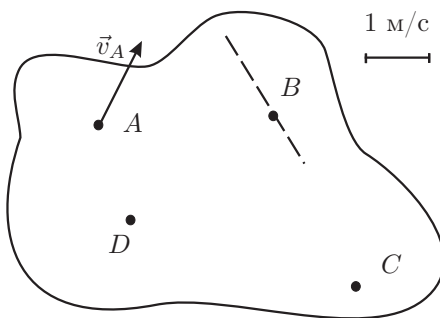


Рис. 1.

Задача 1.5* (Камни)

Из точки, расположенной на высоте $H = 5$ м над краем обрыва, под углом α к горизонту в сторону обрыва бросили со скоростью $v_0 = 10,0$ м/с камень.

С какой минимальной скоростью v , и под каким углом β к горизонту следует в тот же момент бросить с поверхности земли камень вдогонку первому из точки, удалённой от края обрыва на расстояние $L = 10$ м, чтобы камни столкнулись? Рассмотреть случаи $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Задача 1.6 (На планете «Туй»)

На планете «Туй» растёт дерево «Маа», семенами которого питается животное «Да». Особенность дерева «Маа» состоит в том, что при созревании его плоды лопаются и выбрасывают семена по всем направлениям со скоростью v_0 . Животное в процессе эволюции выработало следующий способ добывания пищи: оно сидит на расстоянии L от дерева, и, дождавшись, когда плод, находящийся на высоте H , лопнет, в тот же момент выбрасывает со скоростью v язык, который состоит из тонкой лёгкой нити и находящегося на её конце тяжёлого шарика. Из шарика в определённый момент во все стороны выбрасываются липкие щупальца, которые мгновенно ловят все семена, находящиеся от центра шарика на расстоянии меньшем длины щупальца. Найдите минимальную длину щупалец, достаточную для того, чтобы животное захватывало все семена. Под каким углом к горизонту должно животное выбрасывать язык и какое устанавливать время задержки между выбрасыванием языка и распусканием щупалец, чтобы достаточная длина щупальцев была минимальной? Считать, что во время полёта шарика нить на него не действует. Ускорение свободного падения на поверхности планеты «Туй» равно g . Полёту семян не препятствуют ни сопротивление атмосферы, ни ветви дерева.

Задача 1.7 (Шайба)

По гладкой горизонтальной поверхности скользит маленькая круглая шайба, не покидая правильного треугольника, ограниченного неподвижными гладкими стенками (рис. 2). Удары шайбы о стенки абсолютно упругие, при попадании в угол шайба останавливается. В начальный момент шайба находится в точке A посередине стороны треугольника и имеет скорость, направленную под углом α к этой стороне, $0 < \alpha < \pi/2$. Найдите все значения α , при которых шайба попадёт в угол B , совершив не более 6 столкновений со стенками.

Задача 1.8 (Бочка)

Бочку с песком равномерно катят вдоль горизонтальной прямой, наклонив на угол α к горизонту. Радиус дна бочки равен R . В дне на расстоянии r от его центра имеется отверстие, через которое песок равномерно высыпается. Получите уравнение, описывающее след, оставляемый высыпавшимся песком. Нарисуйте этот след за один оборот. Укажите координаты его характерных

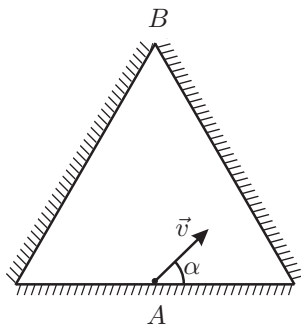


Рис. 2.

точек, в том числе координаты центра масс.

Задача 1.9* (Автомобиль)

Пилот гоночного автомобиля, движущегося со скоростью v_0 , увидел впереди длинную стену поперёк дороги. Чтобы избежать столкновения, он может или резко затормозить, или просто свернуть в сторону, или свернуть в сторону, одновременно тормозя задними колёсами. Какой из этих способов эффективнее, то есть позволит избежать столкновения с наиболее близко расположенной преградой? Коэффициент трения колёс о дорогу равен μ .

Задача 1.10 (Планета)

На некоторой планете может быть реализован следующий эксперимент. При плоских колебаниях математического маятника длиной $L = 3$ м максимальная сила натяжения нити отличается от минимальной в $k = 4$ раза, если максимальный угол отклонения равен некоторому значению α . Такой же угол α с вертикалью образует нить маятника, если она вращается с периодом $T = 4,0$ с вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса. Определите ускорение свободного падения на данной планете.

Задача 1.11 (Космический корабль)

Космический корабль двигался по направлению к удалённому метеориту. Пролетев вблизи него, корабль потерял $k = 40\%$ своей скорости в системе отсчёта, относительно которой метеорит покоился. При этом корабль отклонился от первоначального направления движения на угол $\beta = 120^\circ$. Во сколько раз масса метеорита M отличается от массы корабля m ?

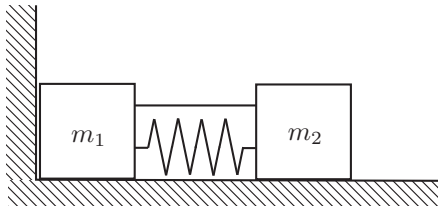
Задача 1.12 (Два бруска)

Рис. 3.

Два бруска находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Они соединены пружиной, сжатой на величину $\Delta L = 2$ см, и связаны нитью (рис. 3). Массы грузов равны $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Один груз касается стены. Найти, на какую максимальную величину растянется пружина, если пережечь нить.

Задача 1.13 (Канал)

На гладкой горизонтальной поверхности стоит брусок в форме прямоугольного параллелепипеда с проточенным в нём сквозным каналом, вход и выход которого находятся на одинаковых расстояниях от основания. В отверстие канала перпендикулярно к торцу бруска влетает шарик массой m со скоростью v_0 и, пролетев канал, вылетает с другой стороны в том же направлении. Трение отсутствует. С какой скоростью u движется брусок после вылета шарика?

Задача 1.14 (Маятник Максвелла)

Маятник Максвелла массой m , состоящий из тонкого стержня радиусом r , на котором посередине жёстко закреплён маховик радиусом R , подвешен к потолку на двух одинаковых нитях. Аккуратно вращая стержень, нить намотали на него так, что маятник поднялся на высоту h . Найти силу натяжения нитей в момент прохождения свободно отпущенным маятником нижней точки своего движения. Всю массу маятника считать сосредоточенной в ободе маховика. Заданные величины удовлетворяют условиям $r \ll R \ll h$.

Задача 1.15* (Обруч)

На столе вертикально стоит невесомый обруч, в верхней точке которого жёстко закреплён небольшой массивный груз массой m . Радиус обруча R , коэффициент трения о стол равен μ . От очень слабого толчка обруч приходит в

движение в своей плоскости. Какую скорость $v_{\max}$ приобретёт центр обруча к тому моменту, как обруч перестанет катиться без проскальзывания?

Задача 1.16 (Два груза)

Два одинаковых груза могут скользить вдоль длинного вертикального стержня, укрепленного на полу. Сила трения грузов о стержень F постоянна и много меньше силы тяжести грузов. Верхний груз со скоростью v ударяет нижний груз, который покоился на высоте H от пола. Удары грузов друг о друга и об пол абсолютно упругие. Через какое время t_f движение грузов прекратится?

Задача 1.17 (Проволочная скобка)

Лёгкая нерастяжимая нить длиной $2L = 2$ м удерживается за её концы так, что они находятся на одной высоте рядом друг с другом. На нити висит проволочная скобка в виде перевёрнутой буквы U. Масса скобки m равна 1 грамму. Нить выдерживает максимальную растягивающую силу $F = 5$ Н. ($F \gg mg$). Концы нити начинают перемещать в противоположных горизонтальных направлениях с одинаковыми скоростями $v = 1$ м/с. В какой-то момент нить не выдерживает и рвётся. На какую максимальную высоту от своего положения в момент разрыва нити взлетит скобка? Соппротивлением воздуха пренебречь.

Задача 1.18 (Дискретная модель движения лавины)

Снег, лежащий на склоне гор, иногда приходит в движение, образуя снежные лавины. Снежные массы неожиданно начинают спускаться сверху, увлекая за собой всё, что находится на склоне горы. Энергия лавины быстро нарастает, превращая её в грозное стихийное бедствие. Для описания движения лавины воспользуемся следующей моделью.

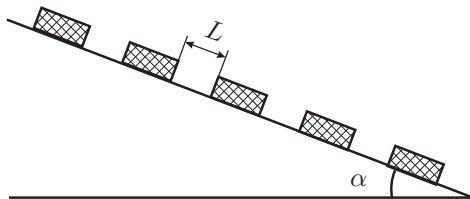


Рис. 4.

На длинной наклонной плоскости с углом α через одинаковые промежутки L расставлены тяжёлые бруски (рис. 4). От скольжения по плоскости их удерживают сила сцепления, которая исчезает при сколь угодно малом толчке. После освобождения бруски скользят с ничтожным трением. Если

верхний брусок придёт в движение, он столкнётся со вторым бруском, далее цепочка из двух брусков столкнётся с третьим и так далее. Все соударения предполагаются абсолютно неупругими. В результате возникает длинная цепочка, к которой присоединяются всё новые и новые бруски. Этот процесс и моделирует движение лавины по горному склону.

1. Пусть в цепочке движется n брусков. Определите приращение кинетической энергии ΔE цепочки после столкновения с $(n + 1)$ -м бруском по сравнению с энергией после столкновения с n -м бруском.
2. Найдите разность энергий цепочек из $n \gg 1$ и $k > n$ брусков $E_k - E_n$.
3. Как сказывается на движении лавины учёт силы трения? Ответьте на вопросы предыдущих заданий, полагая, что угол наклона плоскости α больше «лавиноопасного» угла β .

Задача 1.19 (Кирпичи)

Кирпичи кладут друг на друга так, как показано на рисунке 5. Каждый более высокий кирпич сдвигают на максимальную величину, не нарушающую равновесия. Какое надо взять число кирпичей и на какие величины сдвинуть их друг относительно друга, чтобы верхний кирпич оказался смещённым по отношению к нижнему на длину кирпича a ?

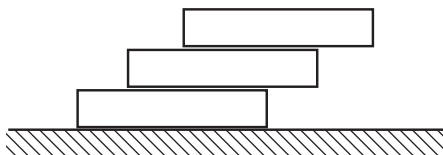


Рис. 5.

Задача 1.20 (Верёвка)

Один конец тонкой гибкой верёвки с линейной плотностью ρ тянут с постоянной горизонтальной скоростью на высоте H над шероховатой поверхностью. Второй конец верёвки свободен (рис. 6). Длина части верёвки, соприкасающейся с поверхностью, равна l_1 . Найдите длину верёвки l_2 , не касающейся поверхности. Коэффициент трения скольжения верёвки по поверхности равен k .

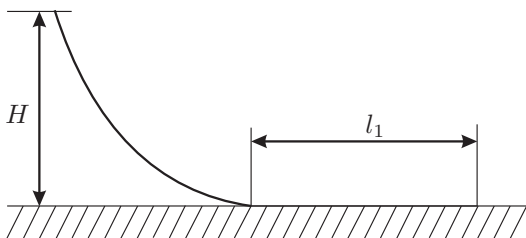


Рис. 6.

Задача 1.21 (За пределами второй космической скорости)

Космический корабль стартует с Земли со скоростью v_0 , превышающей вторую космическую. Стартовая скорость перпендикулярна прямой, соединяющей Землю с Солнцем, и направлена в сторону вращения Земли вокруг Солнца (рис. 7). С какой скоростью $\vec{v}$ корабль покинет Солнечную систему? Найдите модуль этой скорости и угол α , который она образует с прямой, соединяющей Землю и Солнце. Корабль движется по ветви гиперболы, изображённой на рисунке 7. Напомним, что для произвольной точки M гиперболы

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

где a — расстояние от центра до вершины гиперболы, r_1 и r_2 — расстояния от произвольной точки M гиперболы до фокусов F_1 и F_2 (рис. 7).

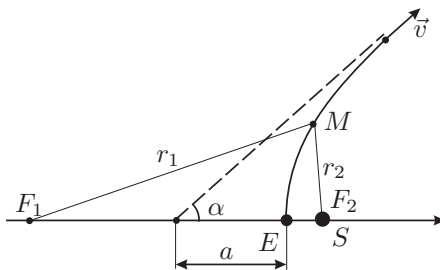


Рис. 7.

Задача 1.22* (Противостояние Марса)

Одним из важных и обширных приложений классической механики является небесная механика, описывающая движение космических объектов. В данной задаче речь идёт о движении двух планет Солнечной системы — Земли и Марса. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_E = 365$ суток, а марси-

анский год составляет $T_M = kT_E$, где $k = 1,88$. В отдельные моменты времени планеты оказываются в положении, которое называют противостоянием. При противостоянии Марс виден с Земли в направлении, противоположном Солнцу. При этом он совершает так называемое «попятное движение», то есть вблизи точек противостояния меняет на противоположное направление своего движения относительно звёзд.

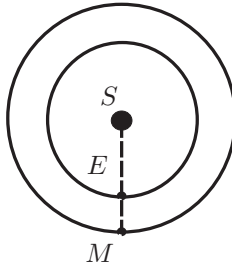


Рис. 8.

1. На рисунке 8 показано положение Земли E , Марса M и Солнца S в противостоянии. Предполагая, что движение планет происходит по концентрическим окружностям вокруг Солнца, определите радиус R_M орбиты Марса, а также промежуток времени τ между двумя последовательными противостояниями, полагая известным радиус земной орбиты $R_E = 1,50 \cdot 10^{11}$ м.
2. Считая, что планеты движутся по часовой стрелке (рис. 8), найдите, на какой угол φ повернётся линия противостояния за время τ .
3. Наблюдения показывают, что промежутки времени между последовательными противостояниями не одинаковы. Указанные промежутки плавно изменяются от значения $\tau_{\min} = 764$ суток до $\tau_{\max} = 811$ суток. Можно предположить, что это обусловлено отличием орбиты Марса от окружности. Считая, что движение Марса происходит по эллипсу, покажите, что промежуток времени между последовательными противостояниями вблизи перигелия (ближайшей к Солнцу точки орбиты) наибольший, а вблизи афелия (наиболее удалённой от Солнца точки орбиты) — наименьший. Найдите минимальное $R_{\min}$ и максимальное $R_{\max}$ удаление Марса от Солнца.

Задача 1.23 (Сосуд)

На шероховатой поверхности стола стоит широкий сосуд массой m . Площадь дна сосуда равна S . В боковой стене у самого дна имеется закрытое пробкой

отверстие сечением σ . В сосуд наливают воду. Когда высота воды в сосуде достигнет величины h , пробка выскальзывает из отверстия, и сосуд приходит в движение с ускорением a . Найти коэффициент трения между дном и поверхностью стола. Каков должен быть коэффициент трения, чтобы сосуд остался на месте после выскальзывания пробки?

Задача 1.24 (Конус)

Конус с диаметром основания D и высотой H погружен в жидкость с плотностью ρ . Ось конуса составляет с поверхностью жидкости угол α , расстояние от поверхности жидкости до центра основания h (рис. 9). Найти силу, действующую на боковую поверхность конуса. При решении можно воспользоваться формулой для объёма конуса $V = SH/3$, где S — площадь основания конуса, а H — высота конуса.

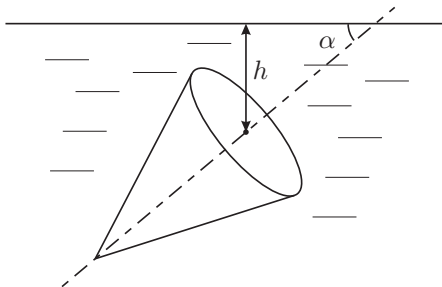


Рис. 9.

Задача 1.25 (Пробирка)

Стеклянная пробирка цилиндрической формы имеет длину $L = 16$ см и площадь сечения $S = 1,0$ см². В неё насыпали немного песка для устойчивости и погрузили в воду. Масса пробирки с песком $m = 13$ г. Верхний край плавающей пробирки сместили вниз почти до поверхности воды и отпустили. Найдите уравнение последующего движения пробирки.

Задача 1.26* (Цунами)

В данной задаче исследуются некоторые особенности распространения волн в жидкостях.

1. На поверхности океанов иногда наблюдаются гигантские волны — цунами. Найдите скорость таких волн, предполагая, что длина волны много больше глубины океана h . При этом условии в волновое движение вовлекаются все частицы воды, в противном случае только те частицы,

которые находятся в поверхностном слое толщиной порядка длины волны.

2. Вблизи прямолинейного участка берега моря на расстоянии L от него произошёл взрыв. Считая, что дно моря слабо отличается от наклонной плоскости, найдите длину участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом. Считать, что глубина моря в месте взрыва достаточно мала.

Задача 1.27* (Упругий жгут)

Шарик массой M прикреплён к концу упругого жгута массой m , длина которого в недеформированном состоянии равна L_0 . Жгут с шариком вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через другой конец жгута. Шарик скользит по гладкой поверхности, жгут не провисает. Как зависит расстояние шарика до оси вращения L от угловой скорости ω ? При растяжении жгута изменением его сечения S можно пренебречь. Жгут подчиняется закону Гука при любых деформациях. Модуль Юнга равен E .

Задача 1.28 (Шарик и стержень)

Верхний конец однородного стержня массой M и длиной L шарнирно закреплён. Маленький шарик массой m подвешен на нити длиной L в точке крепления стержня. От вертикально расположенного и находящегося в покое стержня шарик отводят в сторону так, что он поднимается на высоту h относительно нижнего положения, и отпускают. На какую высоту поднимутся шарик и конец стержня после неупругого удара? Как изменится ответ, если отклонить и отпустить с той же высоты конец стержня, а не шарик?

Задача 1.29 (Катушка)

На цилиндрическую катушку радиуса R , способную вращаться вокруг горизонтальной оси без трения, намотана тонкая нить длиной $L \gg R$. Момент инерции катушки равен J , линейная плотность нити ρ . Трение в оси и сопротивление воздуха пренебрежимо малы. Под действием веса свисающей части нить разматывается, вращая катушку. Найти зависимость скорости v и ускорения a свисающей с катушки части нити от её длины x .

Задача 1.30 (Шайба)

По горизонтальной ледяной поверхности со скоростью v_0 скользит без трения маленькая цилиндрическая шайба радиусом R , вращаясь при этом вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_0 , и налетает на вертикальную стенку под

углом φ (рис. 10). Коэффициент трения шайбы о стенку равен μ . Потерями энергии, связанными с деформацией шайбы и стенки при ударе, пренебречь. Определите с какими скоростями v и ω и под каким углом ψ (рис. 10) шайба отскочит от стенки, если $\omega_0 > \frac{4\mu v_0 \cos \varphi}{R}$. При каких значениях коэффициента трения μ шайба отскочит в обратном направлении, перестанет вращаться?

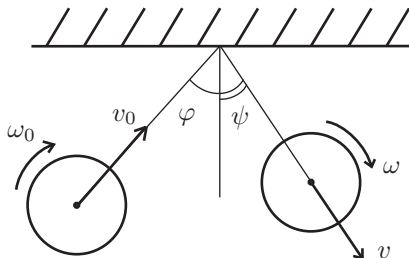


Рис. 10.

Задача 1.31* (Склеенный обруч)

На горизонтальной шероховатой поверхности находится обруч радиуса R , склеенный из двух однородных половинок массами m_1 и m_2 (рис. 11).

1. При какой минимальной скорости v_0 центра O обруч совершит полный оборот без проскальзывания?
2. Определите период малых колебаний обруча вблизи положения равновесия.
3. Найдите максимально возможный угол $\alpha_{\max}$ наклона опорной плоскости к горизонту, при котором обруч, находящееся на ней, ещё остаётся в равновесии.

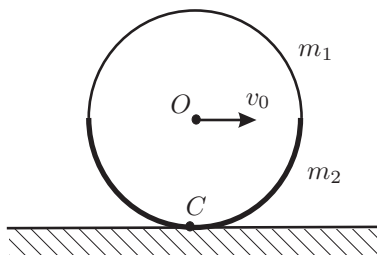


Рис. 11.

Теплота и молекулярная физика

Задача 2.1 (Похолодание)

Когда на улице термометр показывает $T_1 = -10^\circ\text{C}$, а температура батареи отопления $T_0 = 55^\circ\text{C}$, в комнате устанавливается температура $T_{k1} = 25^\circ\text{C}$. Какая температура T_{k2} будет в комнате при том же уровне отопления, если наступит похолодание до $T_2 = -30^\circ\text{C}$?

Задача 2.2 (Электрочайник)

Меняя напряжение, подаваемое на электрический чайник, можно изменять потребляемую им мощность P . В зависимости от P чайник с водой можно нагреть до различных максимальных температур. Эту зависимость отражает таблица 1.

Мощность P , Вт	0	100	200	300
Температура t , $^\circ\text{C}$	20	40	60	80

Таблица 1

Остывание нагретого чайника, выключенного из сети, описывает таблица 2. Определите объём воды, если теплоёмкость пустого чайника $C_0 = 100$ Дж/К, удельная теплоёмкость воды $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

Время τ , с	0	60	300	600	1200	2400
Температура t , $^\circ\text{C}$	80	75	60	45	30	20

Таблица 2

Задача 2.3 (Нагреватель)

Электронагреватель обеспечивает постоянную скорость нагрева образца $\frac{dT}{dt} = 1,0 \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}$. Исследовалось нагревание образца массой $m = 10$ г. В эксперименте измерялась мощность P , потребляемая нагревателем, как функция температуры T . Результаты измерений представлены в таблице:

T , $^\circ\text{C}$	230	231	232	233	234	235	236
P , Вт	111	123	130	737	155	159	171

В течение эксперимента образец расплавился. Найти для него удельную теплоту плавления и температуру плавления.

Задача 2.4 (Сосуд с водой)

В сосуде под невесомым поршнем находится вода. Как изменяется с температурой теплоёмкость этой системы в температурном интервале $-30^\circ\text{C} \leq t \leq 150^\circ\text{C}$? Атмосферное давление считать нормальным. Изобразите эту зависимость на графике.

Задача 2.5 (Стопка монет)

Большое число одинаковых монет уложили плоскими сторонами вплотную друг к другу, разделив их круглыми кусочками бумаги, совпадающими по диаметру с монетами. Получившийся длинный цилиндр завернули бумагой в два слоя. Один из торцов этого цилиндра касается термостата, имеющего постоянную температуру T_1 . Ближайшую к термостату монету и сам термостат разделяет кусочек бумаги толщиной h . Сам цилиндр находится в воздухе, температура которого T_0 . Теплопроводность монет много больше теплопроводности бумаги. Диаметр монеты d , толщина монеты H . Толщина слоя бумаги h ($h \ll d$). Теплопроводность материала бумаги λ . Со временем установилось стационарное распределение температуры. Какое количество тепла получает цилиндр из монет от термостата в единицу времени?

Задача 2.6 (Чайник)

В чайник с нагревательным элементом мощностью $P = 2200$ Вт налили $V_1 = 1,5$ л холодной воды и включили его. Когда вода закипела, он автоматически отключился. Через $\tau_1 = 60$ с его снова включили, а ещё через $\tau_2 = 6$ с вода закипела, и чайник выключился. Сразу после этого его ещё раз включили, но сняв крышку. Автоматический выключатель, срабатывающий под давлением пара, перестал действовать, и вода из чайника начала выкипать. Через $\tau_3 = 240$ с после последнего включения измерили объём оставшейся воды. Он оказался равным $V_2 = 1,3$ л. Каково значение удельной теплоты парообразования воды r ? Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), плотность $\rho = 1000$ кг/м³. Теплоёмкостью чайника пренебречь.

Задача 2.7 (Ледяной покров)

Оцените, на какую величину Δx за сутки увеличивается толщина льда, покрывающего водоём, при температуре окружающей среды $t = -20^\circ\text{C}$. В начале похолодания толщина льда была равна $h = 20$ см. Теплопроводность льда $k = 2,2$ Вт/(м · К), его удельная теплота плавления $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг, а плотность $\rho = 900$ кг/м³.

Задача 2.8 (Пружина)

Между двумя плоскостями с постоянными температурами T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$) находится идеальный газ с молярной массой M . Расстояние между плоскостями равно H . К верхней плоскости на невесомой пружине подвешен маленький шарик массой m , средняя плотность которого равна ρ_0 . Длина пружины в недеформированном состоянии L_0 . Коэффициент жёсткости пружины равен k . Температура линейно возрастает при удалении от нижней плоскости.

1. Найдите распределение плотности газа между плоскостями, считая, что давление газа между плоскостями везде одинаково и равно p .
2. Найдите давление в газе p , если в положении равновесия длина пружины равна L_0 .
3. Найдите частоту малых колебаний шарика, считая, что при движении шарика газ не перемешивается и не оказывает сопротивления движению шарика.

Задача 2.9 (Процесс над газом)

Над одним молем идеального газа совершают процесс, показанный на рисунке 12. Найти максимальную температуру газа в течение этого процесса (процесс считать квазистатическим).

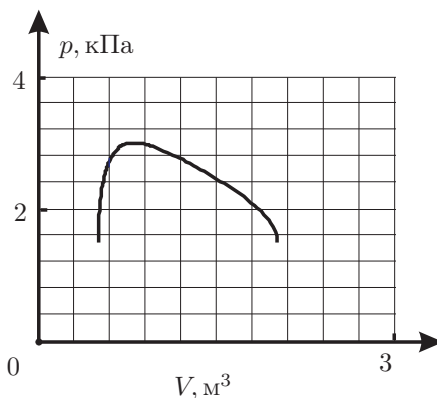


Рис. 12.

Задача 2.10 (Термодинамический цикл)

С одним молем идеального одноатомного газа провели замкнутый цикл, изображённый на рисунке 13, где 1–2 изотерма, 2–3 изобара, 3–4 политропа, для

которой $C = R/2$, и 4–1 изохора. Минимальная температура, достигаемая газом в цикле, $T_{\min} = 300$ К. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоёмкостью C .

1. Укажите точки на цикле, в которых газ достигает максимальную $T_{\max}$ и минимальную $T_{\min}$ температуры, и определите $T_{\max}$.
2. Определите количество теплоты Q_+ , подведённое к газу за цикл.
3. Определите работу A газа за цикл.
4. Определите КПД цикла η и сравните с КПД идеальной тепловой машины, работающей между нагревателем и холодильником с температурами, соответственно, $T_{\max}$ и $T_{\min}$.

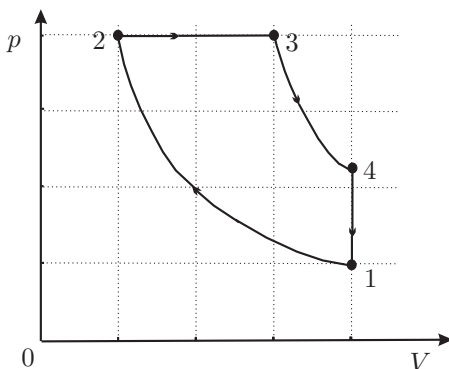


Рис. 13.

Задача 2.11 (Скороварка)

Известно, что в герметично закрытой кастрюле (скороварке) пища варится быстрее, вследствие того, что в ней температура кипения воды выше 100°C . На сколько давление в скороварке должно быть выше атмосферного для того, чтобы температура кипения в ней стала равной 105°C ? Удельная теплота парообразования воды $r = 2250$ кДж/кг. Решите задачу, проанализировав цикл Карно с рабочим телом вода–пар. Насыщенный водяной пар считайте идеальным газом.

Задача 2.12* (Фотонный газ)

С точки зрения квантовой физики электромагнитное излучение представляет собой множество хаотически движущихся и не взаимодействующих друг с

другом частиц — фотонах. Другими словами, электромагнитное излучение представляет собой фотонный газ, который во многом аналогичен идеальному газу, рассматриваемому в молекулярно-кинетической теории. Есть и существенные отличия. Все фотоны движутся с одинаковой скоростью (скоростью света в вакууме), и их число не остаётся постоянным при изменении состояния: фотоны рождаются и поглощаются. Тем не менее, ряд свойств фотонного газа можно установить, опираясь на молекулярно-кинетическую теорию идеальных газов, что и предлагается проделать в данной задаче.

1. Докажите, что давление P , оказываемое частицами идеального газа на плоскую поверхность, определяется формулой

$$P = \frac{1}{3}n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle, \quad (1)$$

где n — число частиц в единице объёма, $\vec{v}$ — скорость частиц, $\vec{p}$ — их импульс, $\langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$ — среднее значение скалярного произведения $\vec{v} \cdot \vec{p}$.

2. Используя формулу для давления частиц идеального газа (1), докажите, что давление света P можно вычислить по формуле

$$P = \frac{1}{3}u, \quad (2)$$

где u — объёмная плотность энергии излучения.

3. Докажите, рассматривая цикл Карно для фотонного газа при малых изменениях температуры и объёма, что световое давление пропорционально четвёртой степени абсолютной температуры.
4. Используя результаты предыдущего пункта, получите закон Стефана–Больцмана для мощности излучения абсолютно чёрного тела с единицы поверхности:

$$W = \sigma T^4,$$

где σ — постоянная Стефана–Больцмана, а T — абсолютная температура. Получите соотношение между σ и коэффициентом пропорциональности между давлением и четвёртой степенью температуры. При выводе учтите, что число частиц газа, соударяющихся с единицей поверхности стенки в единицу времени, равно

$$\nu = \frac{1}{4}n \langle v \rangle,$$

где n — число частиц в единице объёма, а $\langle v \rangle$ — средний модуль скорости частиц.

5. Вычислите КПД цикла, совершаемого над фотонным газом. Цикл состоит из четырёх последовательных процессов:
- 1) изобарическое расширение из состояния с температурой T_1 ,
 - 2) переход в состояние с температурой T_2 по закону $PV^{4/3} = \text{const}$,
 - 3) изобарическое сжатие,
 - 4) переход в исходное состояние снова по закону $PV^{4/3} = \text{const}$.

Задача 2.13* (Пластина)

В широкий сосуд с водой опускают вертикально прямоугольную пластину шириной L так, чтобы её конец коснулся поверхности жидкости. Пластина смачивается водой. Угол смачивания равен θ . Коэффициент поверхностного натяжения σ . Плотность воды ρ .

1. Найдите силу взаимодействия пластины с водой.
2. На какую высоту h поднимется жидкость у самой поверхности пластины относительно уровня воды в сосуде?
3. Получите уравнение $y = y(x)$, связывающее высоту y поднятия воды в точке, удалённой от пластины на величину x .

Напомним, что искривлённая поверхность жидкости, подобно упругой оболочке надувного шарика, оказывает в сторону вогнутости давление

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 — наименьший и наибольший радиусы кривизны поверхности. Для сечения поверхности, описываемого уравнением $y = y(x)$ (то есть графику функции $y = y(x)$), радиус кривизны находится по формуле

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}.$$

Электричество и магнетизм

Задача 3.1 (Шестиугольник)

В доску в вершинах правильного шестиугольника вбиты шесть гвоздей. Все гвозди попарно соединены резисторами с сопротивлением R . Найдите сопротивление между двумя соседними гвоздями.

Задача 3.2 (Полубесконечная цепочка)

Определите сопротивление полубесконечной цепи между точками A и B , если сопротивление каждого звена равно R (рис. 14).

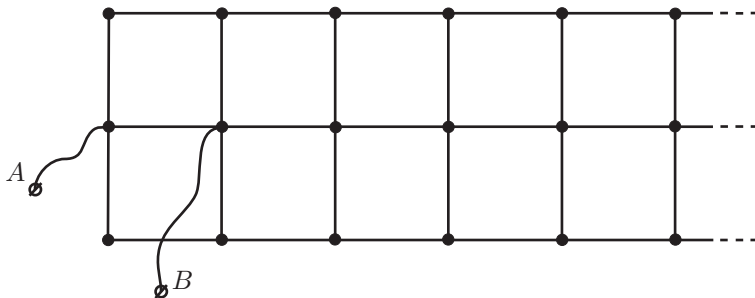


Рис. 14.

Задача 3.3 (Резистор или диод)

К точкам A и B цепи, изображённой на рисунке 15, можно подключать или резистор с сопротивлением R , или диод, сопротивление которого в прямом направлении много меньше R , а в обратном — много больше R . Найдите для каждого из трёх возможных способов подключений зависимость показаний амперметра от сопротивления R_x . Нарисуйте графики полученных зависимостей.

Задача 3.4 (Проволочный треугольник)

Из однородной проволоки диаметром d изготовлен правильный треугольник со стороной $L \gg d$. Середины сторон треугольника соединили той же проволокой, затем соединили середины сторон получившегося треугольника, и так далее (рис. 16). Найдите сопротивление получившейся проволочной сетки между точками A и B . Оцените точность полученного результата. Удельное сопротивление проволоки равно ρ .

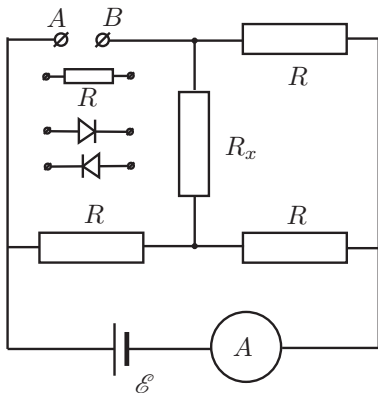


Рис. 15.

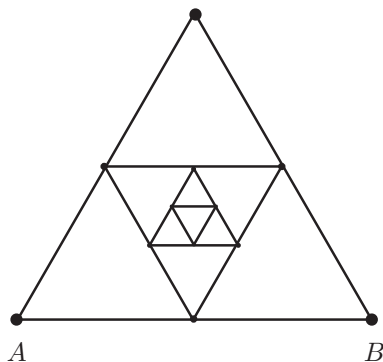


Рис. 16.

Задача 3.5* (Конечная цепочка)

В электрической цепи, изображённой на рис. 17, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10$ В. Звено R_2 – R_3 повторится 17 раз.

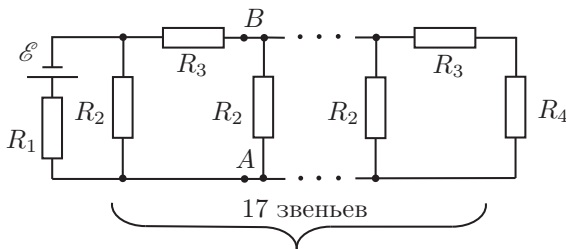


Рис. 17.

1. Найдите ток, текущий через резистор R_4 , если $R_1 = R_3 = R_4 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом.
2. Анализ сложных электрических цепей можно упростить, если участок цепи, содержащий несколько источников и резисторов заменить одним эквивалентным источником с ЭДС $\mathcal{E}_e$ и внутренним сопротивлением R_e . Каким эквивалентным источником (укажите $\mathcal{E}_e$ и R_e) можно заменить участок A – $\mathcal{E}$ – B цепи, изображённой на рисунке 17?
3. В цепи, изображённой на рисунке 17, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 17$ Ом. Найдите ток через резистор R_4 .

Задача 3.6 (Батарейки)

Имеется батарейка с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 , а также некоторое количество одинаковых батареек с ЭДС $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1/2$. Если последовательно с батареей $\mathcal{E}_1$ подключить некоторое количество батареек $\mathcal{E}_2$ и нагрузку, то сила тока в цепи при любом количестве батареек $\mathcal{E}_2$ будет одинаковой. Если же к батарее $\mathcal{E}_1$ параллельно подсоединить любое число батареек $\mathcal{E}_2$ и ту же нагрузку, то сила тока через неё останется равной прежнему значению. Полярности всех батарей считать одинаковыми. Найдите сопротивление нагрузки R , а также внутреннее сопротивление r_2 батареек $\mathcal{E}_2$.

Задача 3.7 (Диоды)

В схеме, изображённой на рисунке 18, имеются четыре диода. Известно, что при любом напряжении, подведённом к выводам схемы, ток через амперметр не течёт. Вольт-амперные характеристики трёх диодов D_1 , D_2 и D_3 известны (рис. 19). Постройте вольт-амперную характеристику четвёртого диода.

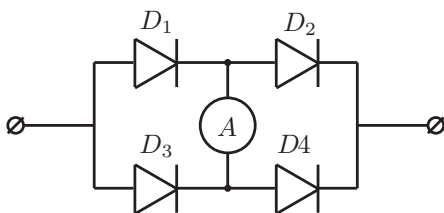


Рис. 18.

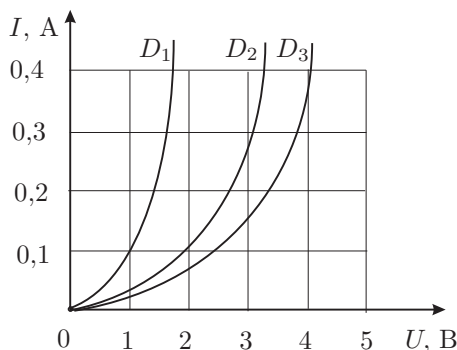


Рис. 19.

Задача 3.8 (Дуговой разряд)

При каких сопротивлениях резистора R в цепи, изображённой на рисунке 20, в случае размыкания рубильника K может возникнуть дуговой разряд? Вольт-амперная характеристика дуги имеет вид:

$$U = A + \frac{B}{I},$$

где $A = 10$ В, $B = 100$ В·А, электродвижущая сила батареи $\mathcal{E} = 100$ В. Какой ток установится в цепи, если $R = 8$ Ом?

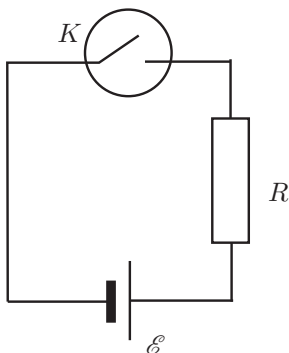


Рис. 20.

Задача 3.9* (ВАХ цепочки)

В задаче исследуются вольт-амперные характеристики (ВАХ) цепочек, содержащих нелинейные элементы.

1. Бесконечная цепочка (рис. 21) составлена из резисторов сопротивлением R и диодов с вольт-амперной характеристикой, показанной на рисунке. Найдите вольт-амперную характеристику этой цепочки на участке $U \gg \Delta U$.

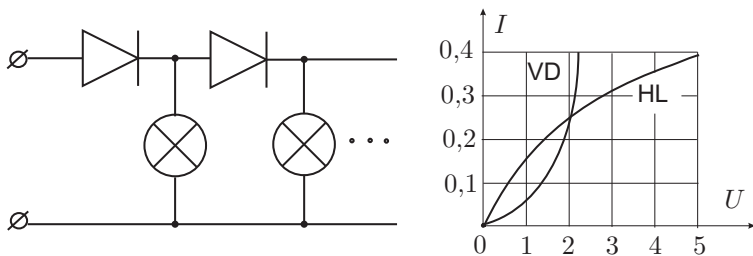


Рис. 21.

2. Цепочка, изображённая на рисунке 22, состоит из N звеньев. Все элементы цепочки имеют такие же характеристики, как и в предыдущем пункте. Ток через последнее звено равен I_0 . Найдите ток I через всю цепь и напряжение U на ней. При решении задачи можно воспользоваться формулой n -го члена последовательности Фибоначчи ($a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$):

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

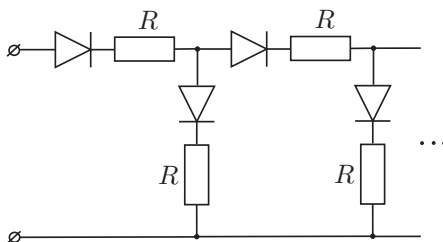


Рис. 22.

3. Постройте вольт-амперную характеристику бесконечной цепочки, состоящей из одинаковых диодов и одинаковых лампочек (рис. 23). Вольт-амперные характеристики диода и лампочки приведены на рисунке 23 и обозначены VD и HL соответственно.

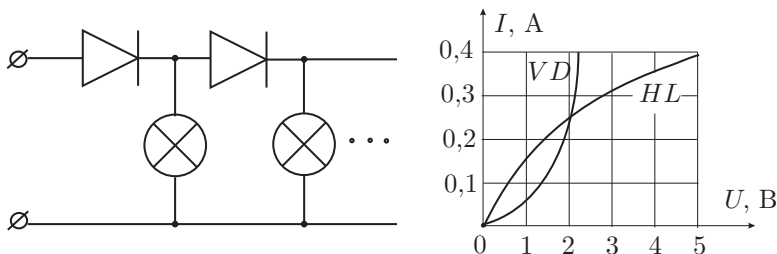


Рис. 23.

Задача 3.10 (Два кольца)

Два параллельных тонких кольца, радиусы которых одинаковы и равны $R = 50$ мм, имеют общую ось. Расстояние между кольцами $d = 12$ см. На первом кольце равномерно распределён заряд $q_1 = 8,2 \cdot 10^{-7}$ Кл, а на втором $q_2 = 6,0 \cdot 10^{-7}$ Кл. Найдите работу A сил электрического поля при перемещении заряда $q = 3,0 \cdot 10^{-9}$ Кл из центра одного кольца в центр другого.

Задача 3.11 (Заряженное кольцо)

Тонкий диск радиусом R и кольцо, изготовленное из проволоки малого диаметра, расположены соосно (рис. 24). По кольцу равномерно распределён заряд q такой, что силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси симметрии системы, как раз касаются края диска, который не заряжен (плотность зарядов на диске везде равна 0). С какой силой будут взаимодействовать кольцо и диск, если диск также зарядить зарядом q , равномерно распределённым по поверхности диска?

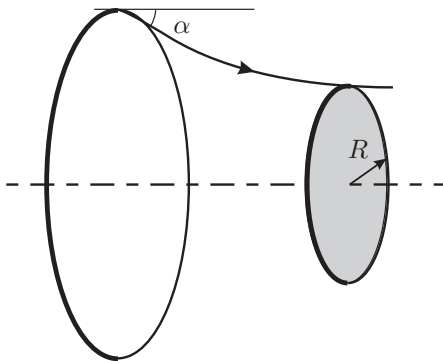


Рис. 24.

Задача 3.12 (Счётчик Гейгера)

В задаче исследуются физические явления, имеющие место в счётчике Гейгера. Счётчиком Гейгера называют прибор, предназначенный для регистрации элементарных частиц посредством измерения тока в газе, вызванного этими частицами. Он представляет собой камеру, заполненную газом, например, аргоном. В камере имеется два электрода, чаще всего в виде коаксиальных (соосных) цилиндров (рис. 25), к которым через резистор R подаётся электрическое напряжение V . Образовавшиеся при ионизации ионы и электроны движутся к противоположным электродам. Появляющийся в результате этого ток создаёт на резисторе R напряжение, которое регистрируется и даёт информацию о прошедших через камеру элементарных частицах.

Исследуйте процессы, происходящие в счётчике Гейгера при регистрации α -частиц (ядер атомов гелия). Рекомбинацией ионов, а также возникновением лавины ионов пренебречь.

1. Электроёмкость конденсатора, образованного электродами счётчика, $C = 45$ пФ, сопротивление резистора $R = 10$ МОм. Счётчик регистрирует α -частицы с энергией $E = 5,3$ МэВ. Длина их свободного пробега

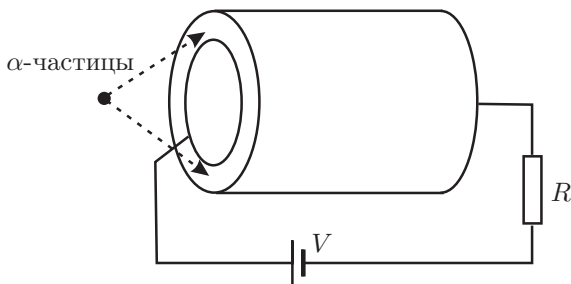


Рис. 25.

в газе, заполняющем счётчик, меньше размеров камеры. Энергия, необходимая для образования пары ионов, заряд каждого из которых равен одному элементарному заряду, $E_i = 35$ эВ. Как с течением времени будет изменяться напряжение на резисторе после попадания в камеру одной α -частицы? Произведение RC много больше времени движения образующихся ионов и электронов в межэлектродном пространстве.

2. Радиус внутреннего цилиндрического электрода (анода) счётчика равен $R_a = 3,0$ мм, а внешнего $R_c = 10,0$ мм. В результате пролёта ионизирующих частиц на электродах осели ионы, заряд которых, приходящийся на единицу длины цилиндров, равен λ . Получите выражение для напряжённости поля $E(r)$ и потенциала $\varphi(r)$, отсчитываемого от катода, в зависимости от расстояния r до оси цилиндров ($R_a \leq r \leq R_c$). При какой разности потенциалов между электродами произойдёт пробой газа, если он наступает при напряжённости $E_b = 3$ МВ/м?
3. На счётчик, описанный в предыдущем пункте, падает пучок α -частиц, ионизирующий ежесекундно Γ молекул. Скорость движения v возникающих в результате ионизации положительных ионов пропорциональна напряжённости поля ($v = \mu E$, где μ — подвижность ионов). Найдите установившееся распределение плотности положительных зарядов в зависимости от расстояния до оси. Рекомбинацией ионов и полем объёмных зарядов пренебречь. Считать, что в установившемся режиме заряд единицы длины цилиндров равен λ .

Задача 3.13* (Молекулярные кристаллы)

В молекулярных кристаллах упорядоченно расположены сравнительно слабо связанные друг с другом структурные единицы, представляющие собой отдельные атомы (или группы сильно связанных между собой атомов). Про-

стейшие молекулярные кристаллы могут образовывать атомы инертных газов, например, аргона Ar. Кристалл аргона и изучается в данной задаче.

На сравнительно больших расстояниях друг от друга атомы инертных газов притягиваются слабыми силами, называемыми силами Ван-дер-Ваальса. При значительном сближении атомов проявляется их интенсивное отталкивание. Такое взаимодействие неплохо описывается так называемым потенциалом Леннарда–Джонса:

$$U(r) = 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right).$$

Здесь $U(r)$ — потенциальная энергия двух атомов, находящихся на расстоянии r друг от друга; ε и σ — постоянные величины, которые для атомов аргона имеют следующие значения $\varepsilon = 0,0104$ эВ, $\sigma = 3,40$ Å.

1. Изобразите схематично вид зависимости $U(r)$.
2. Определите равновесное расстояние r_0 , на котором находились бы два атома аргона в отсутствие других атомов.

Элементарная ячейка кристалла аргона (рис. 26) представляет собой гра-нецентрированный куб. Атомы, которые можно считать классическими частицами, движутся вблизи узлов решётки, совпадающих с вершинами куба и центрами его граней. Кинетическая энергия атомов мала по сравнению с потенциальной энергией. В этом приближении приемлема показанная на рисунке 26 модель элементарной ячейки, состоящей из неподвижных шаров, расположенных в узлах решётки.

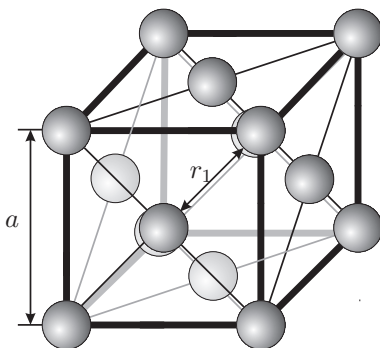


Рис. 26.

3. Покажите, что энергия взаимодействия атома аргона с кристаллом E

(энергия связи) может быть представлена в виде:

$$E = 4\varepsilon \left(A \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - B \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right),$$

где r_1 — расстояние между ближайшими соседями. Найдите численные значения коэффициентов A и B , учитывая только вклад от шести групп ближайших атомов (в каждую группу входят атомы, находящиеся на равном расстоянии от рассматриваемого атома).

4. Определите постоянную решётки a (рис. 26) для кристалла аргона.
5. Найдите модуль всестороннего сжатия κ кристалла аргона, то есть величину $\kappa = -V \frac{dp}{dV}$, характеризующую изменение его объёма dV при изменении внешнего давления на dp .

Задача 3.14* (Колебания в цепи с диодами)

Цепь на рисунке 27 состоит из двух конденсаторов с ёмкостями C_1 и C_2 , двух катушек с индуктивностями L_1 и L_2 , двух идеальных диодов D_1 и D_2 и ключа K . Первоначально конденсатор C_2 зарядили до напряжения U_0 . В нулевой момент времени ключ K замыкают.

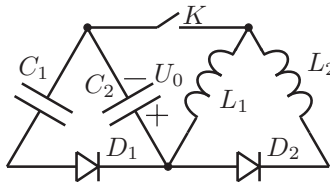


Рис. 27.

1. Найдите продолжительность τ переходного процесса (то есть момент времени τ , начиная с которого процесс станет периодическим).
2. Определите период T колебаний в установившемся режиме.
3. Найдите напряжения U_1 и U_2 на конденсаторе C_2 в те моменты времени после замыкания ключа, когда ток, текущий через него, обращается в нуль.
4. Определите амплитуду A колебаний напряжения на конденсаторе C_2 в установившемся режиме.

5. Подытожьте ответы на предыдущие вопросы, качественно изобразив график зависимости напряжения U на конденсаторе C_2 от времени t в промежутке от 0 до $(\tau + T)$. Отметьте на графике координаты характерных точек (максимумов, минимумов и точек пересечения с осями).

Задача 3.15 (Эффект Холла)

Введём в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ полупроводниковую пластинку толщиной a (рис. 28), по которой течёт ток I . Между поверхностями A и B возникает напряжение U , пропорциональное току I :

$$U = R \frac{BI}{a}.$$

Описанное явление называют эффектом Холла. Величина R — коэффициент Холла. Определите коэффициент Холла в электронно-дырочном полупроводнике.

Ток в таком проводнике обусловлен как электронами, концентрация которых n , подвижность μ_n , так и дырками, концентрация которых p , а подвижность μ_p . Напомним, что подвижностью называют отношение скорости направленного движения частиц к вызывающей это движение силе, приходящейся на их единичный заряд.

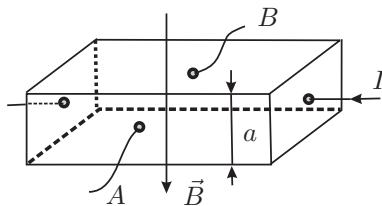


Рис. 28.

Задача 3.16* (Дрейф)

Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течёт ток I , поместили частицу с зарядом q и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость v_0 , направленную против тока.

1. Найдите минимальное $r_{\min}$ и максимальное $r_{\max}$ расстояния частицы от провода в процессе движения. На каком расстоянии от провода скорость частицы направлена перпендикулярно к нему?
2. Найдите скорость $\vec{u}$ дрейфа частицы, то есть скорость смещения вдоль провода максимально и минимально удалённых от него точек траектории при условии

$$\alpha = 2\pi \frac{mv_0}{\mu_0 q I} \ll 1,$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

Оптика

Задача 4.1 (Зеркала)

Два плоских зеркала образуют двугранный угол, равный 90° . Собирающая линза с фокусным расстоянием F вставлена в угол так, что её главная оптическая ось составляет угол 45° с каждым зеркалом. Диаметр линзы равен $2F$. На главной оптической оси линзы на расстоянии $d = 1,5F$ от линзы находится источник света S . Найдите положение изображения источника света.

Задача 4.2 (Котлован)

Человек, стоя на краю высокого обрыва, смотрит на ровное плоское дно котлована шириной L , заполненного водой глубиной h (рис. 29). Высота обрыва H . Размеры котлована удовлетворяют неравенствам $L \gg H \gg h$. Показатель преломления воды равен n . Как зависит от расстояния до обрыва видимая глубина котлована?

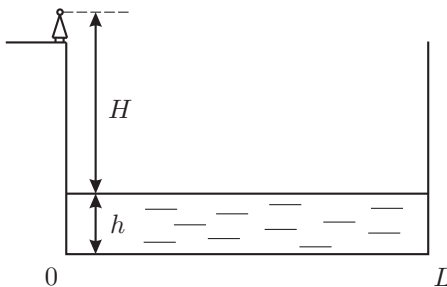


Рис. 29.

Задача 4.3* (Световой зайчик)

Человек, стоящий на расстоянии h от длинной ровной стены, освещает её лучом фонарика, вращая фонарик в горизонтальной плоскости слева направо с постоянной угловой скоростью ω . Учитывая конечность скорости распространения света c , найдите как с точки зрения человека будут изменяться со временем положение светового зайчика на стене и скорость его движения.

Задача 4.4 (Сферическое зеркало)

Солнечные лучи падают на вогнутое сферическое зеркало диаметром D параллельно его оси симметрии. Радиус кривизны поверхности зеркала $R \gg D$.

В фокальной плоскости зеркала перпендикулярно его оси симметрии помещён непрозрачный экран радиусом r . Как зависит средняя освещённость светового пятна на экране от радиуса экрана?

Задача 4.5* (Аквариум)

Пучок света, проходя через пустой сферический аквариум, испытывает преломление на поверхностях сфер, разделяющих стеклянные стенки с воздухом, подобно преломлению на границах линз оптической системы. В задаче исследуются характеристики аквариума как оптической системы. Можно использовать формулу сферической поверхности:

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R}.$$

Здесь n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй (по ходу луча) сред, разделённых этой поверхностью, а величины a , b и R — взятые со знаками «плюс» или «минус» расстояния от поверхности сферы до источника S , его изображения S_1 и центра сферы O (рис. 30). Знак «плюс» берётся, если расстояние отсчитывается по ходу луча, а «минус» в противоположном случае.

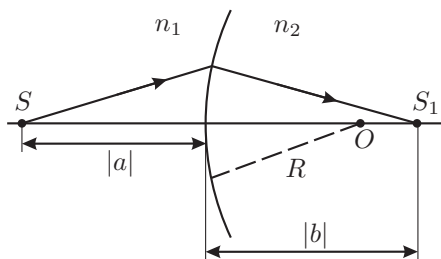


Рис. 30.

1. Найдите для узкого пучка света фокусное расстояние стенки пустого аквариума. Толщина стенки $\delta = 5$ мм, радиус аквариума $R = 10$ см, показатель преломления стекла $n = 1,6$.
2. Найдите фокусное расстояние всего аквариума, который отличается от рассмотренного в первом пункте лишь тем, что имеет толщину $\delta = R/2$ (толстый аквариум).
3. На расстоянии $2R$ от центра толстого аквариума помещают точечный источник света. На каком расстоянии s от внешней поверхности аквариума наблюдатель, находящийся с противоположной от источника стороны, увидит изображение светящейся точки?

Решения задач

Механика

Задача 1.1 (Две частицы)

Обе частицы, рассматриваемые в задаче, движутся с постоянными ускорениями, равными ускорению свободного падения $\vec{g}$. Проекции их скоростей на горизонтальную x и вертикальную y оси равны:

$$\begin{aligned}v_{1x} &= v_0 \cos \alpha, & v_{1y} &= v_0 \sin \alpha - g\tau \\v_{2x} &= v_0 \cos 2\alpha, & v_{2y} &= v_0 \sin 2\alpha - g\tau.\end{aligned}\tag{1}$$

Индекс 1 относится к частице, начальная скорость которой направлена под углом α к горизонту, а индекс 2 — к другой частице. Так как скорости в момент времени τ оказались сонаправленными, то

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}},$$

или после подстановки соотношений (1):

$$\operatorname{tg} \alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos 2\alpha}.$$

Из этого уравнения после тригонометрических преобразований получим ответ:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{v_0}{g} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\left(\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right)}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha}, \\ \frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} &= \frac{2 \cos(\alpha/2) \cos(3\alpha/2)}{\cos 2\alpha \cos \alpha}, \\ \tau &= \frac{v_0 \cos(\alpha/2)}{g \sin(3\alpha/2)}.\end{aligned}\tag{2}$$

Задачу можно решить и другим способом, не требующим тригонометрических преобразований. Для этого нужно рассмотреть движение одной частицы относительно другой. Из закона сложения ускорений (аналогично закону сложения скоростей) следует, что частицы движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. Скорость $\vec{v}_{12}$ первой частицы относительно второй

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}, \quad (3)$$

где индексом 0 отмечены начальные значения скоростей. В момент времени τ скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_{12}$ сонаправлены. Имея это в виду, изобразим (рис. 31) треугольник скоростей ABC , соответствующий формуле (3), а также треугольник ABD , отражающий равенство

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \vec{g}\tau.$$

Так как $AB = BC = v_0$, то $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, а $\angle ADB = \frac{3\alpha}{2}$.

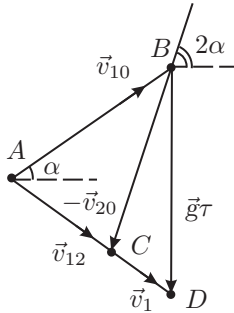


Рис. 31.

Применяем к $\triangle ABD$ теорему синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{g\tau}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отсюда сразу следует ответ (2). Таким образом, переход в другую систему отсчёта позволил использовать геометрию вместо проведения тригонометрических преобразований.

Задача 1.2 (Эхолот)

В соответствии с условиями задачи морское дно в месте отплытия корабля приближённо можно рассматривать в виде двух наклонных плоскостей AB и

BC (рис. 32), углы наклона которых α и β . Подтверждением плоской модели у самого берега служат приведённые в условии результаты акустических измерений:

$$\frac{h_1}{L_1} = \frac{150}{100} \approx \frac{h_2}{L_2} = \frac{200}{140} \approx \frac{h_3}{L_3} = \frac{300}{250} \approx 1.4,$$

Полученное отношение равно $\operatorname{tg} \alpha$. Отсюда следует, что у берега дно опускается под углом $\alpha \approx 55^\circ$ к горизонту.

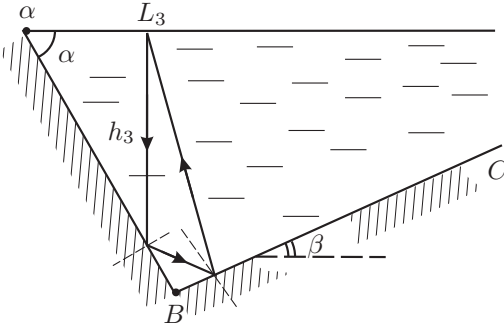


Рис. 32.

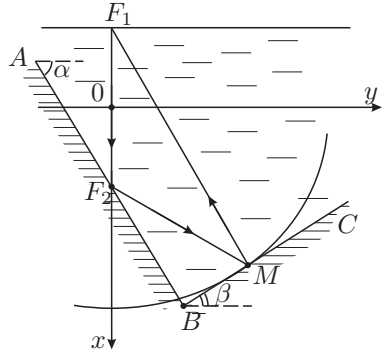


Рис. 33.

Происхождение второго отражённого сигнала эхолота ясно из показанного стрелками на рисунке 32 хода акустического луча. Нужно найти положение плоскости BC . Точка, в которой происходит отражение луча, должна быть расположена с одной стороны так, чтобы было обеспечено зарегистрированное эхолотом время прохождения через неё акустического луча, с другой стороны необходимо, чтобы угол падения акустического луча на плоскость BC был равен углу его отражения¹. Этим условиям удовлетворяет точка M , принадлежащая участку эллипса, изображённого на рисунке 33. F_1 и F_2 — фокусы эллипса. Расстояние F_1F_2 равно h_3 (рис. 32). Заданная в условии величина h_4 получается, аналогично h_1 , h_2 и h_3 умножением скорости звука на половину интервала времени между принятым и отправленным эхолотом сигналами, то есть

$$h_4 = \frac{1}{2}(F_1 F_2 + F_2 M + M F_1) = \frac{1}{2}(h_3 + 2a) = \frac{1}{2}h_3 + a, \quad (1)$$

где a — большая полуось эллипса. Поскольку нормаль эллипса $\vec{n}$ в точке M

¹При этом звук, как указано в условии, отражается ото дна не только под углом падения, но также и по всем остальным направлениям. Однако условие «угол падения равен углу отражения» обеспечивает минимальное времени прохождения звукового сигнала, которое и окажется временем регистрации этого сигнала.

является биссектрисой угла $\angle F_2 M F_1$, то искомая плоскость BC — касательная к эллипсу в этой точке. Найдём тангенс угла наклона касательной:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{dx}{dy}, \quad (2)$$

где x и y — координаты точки эллипса M . Они связаны уравнением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Дифференцируя (3), получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x}. \quad (4)$$

Большая полуось эллипса находится из (1):

$$a = h_4 - \frac{1}{2}h_3 = 250 \text{ м}. \quad (5)$$

Численные вычисления целесообразно использовать в связи с громоздкостью выражений в общем виде. Малая полуось эллипса

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{h_4^2 - h_4 h_3} = 200 \text{ м}. \quad (6)$$

Координаты x и y точки M удовлетворяют не только уравнению эллипса (3), но и, как следует из рисунка **33**, соотношению

$$x = -\frac{y}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{h_3}{2} = 0,364y + 150, \quad (7)$$

где x и y измеряются в метрах. Подставляя (7) в (3), получим квадратное уравнение для нахождения y :

$$2,712 \cdot 10^{-5}y^2 + 1,747 \cdot 10^{-3}y - 0,640 = 0.$$

Отсюда $y = 125$ м, и из (7) находим $x = 195$ м. С найденными значениями получаем из (4) $\beta = 45^\circ$.

Задача 1.3 (Камень)

Для описания движения камня выберем декартову систему координат так, как показано на рисунке **34**. К камню приложены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления $\vec{F}$, направленная навстречу скорости $\vec{v}$. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на координатные оси:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad (1)$$

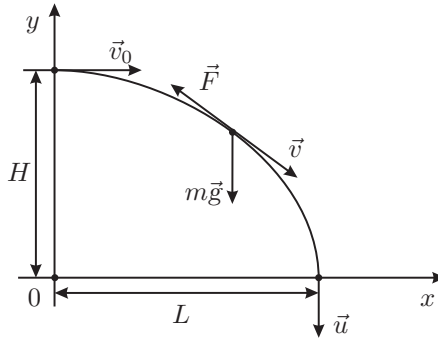


Рис. 34.

$$m \frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg. \quad (2)$$

Перепишем эти уравнения иначе, учтя, что $v_x dt = dx$, $v_y dt = dy$:

$$m dv_x = -k dx, \quad (3)$$

$$m dv_y = -k dy - mg dt. \quad (4)$$

Для установившегося движения $v = u = \text{const}$, где $\vec{u}$ — установившаяся скорость камня, поэтому из (1) и (2) следует, что $u_x = 0$, а

$$u_y = -mg/k. \quad (5)$$

То есть установившаяся скорость $\vec{u}$ направлена так, как показано на рисунке 34. Для нахождения L проинтегрируем уравнение (3) для всего движения камня:

$$mv_x|_{v_0}^0 = -kx|_0^L, \quad \text{откуда} \quad L = \frac{mv_0}{k}.$$

Для нахождения времени τ проинтегрируем уравнение (4) с учётом (5):

$$mv_y|_0^{u_y} = -ky|_H^0 - mg\tau, \quad \text{или} \quad \tau = \frac{kH}{mg} + \frac{m}{k}. \quad (6)$$

При каких H возможна описанная в задаче ситуация? Оценим время, в течение которого скорость достигает установившегося значения. Для этого в формуле (1) положим:

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \sim -kv_0.$$

Отсюда $\Delta t \sim m/k$. За это время камень опустится вниз на расстояние

$$H_1 \sim \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

Ясно, что должно быть $H \gtrsim H_1$. Так что описанная в задаче ситуация, для которой получен ответ (6), будет иметь место при

$$H \gtrsim \frac{g}{2} \left(\frac{m}{k} \right)^2.$$

Задача 1.4* (Плоское движение)

Плоское непоступательное движение абсолютно твёрдого тела в любой момент времени можно рассматривать как поворот вокруг некоторой точки, называемой мгновенным центром вращения. Мгновенный центр должен ле-

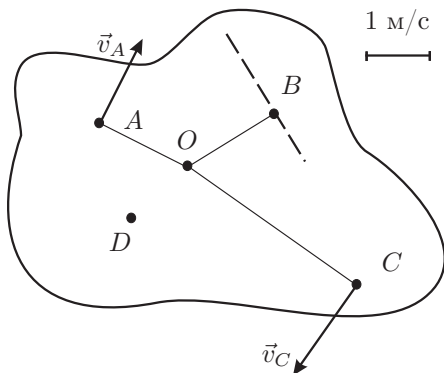


Рис. 35.

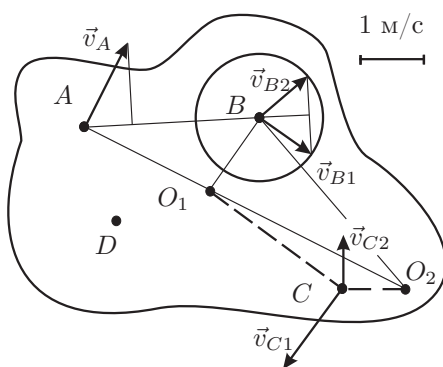


Рис. 36.

жать на перпендикуляре к скорости каждой точки, проходящем через неё. На основании этого свойства абсолютно твёрдого тела выполнены построения на рисунке 35. Мгновенный центр O лежит на пересечении перпендикуляра к $\vec{v}_A$, проведённого из точки A , и перпендикуляра к заданной прямой, проведённого из точки B . Если угловая скорость тела равна ω , то $v_A = \omega \cdot OA$, $v_C = \omega \cdot OC$. Следовательно, $v_C = v_A \cdot OC/OA$. Измерив по рисунку OC , OA , а также скорость v_A , получим

$$v_C = 3,1 \text{ м/с}.$$

Здесь и далее скорость точки C изображена в произвольном масштабе.

Во втором пункте задачи для скорости точки B можно указать лишь изображённую на рисунке 36 окружность, на которой находится конец вектора $\vec{v}_B$. Направление вектора $\vec{v}_B$ можно найти, исходя из того, что для абсолютно твёрдого тела проекции скоростей двух точек на соединяющую их прямую должны быть равны, иначе расстояние между точками изменилось бы. Отложив на прямой AB от точки B отрезок, равный проекции $\vec{v}_A$ на AB , получим два возможных направления скорости точки B : $\vec{v}_{B1}$ и $\vec{v}_{B2}$ (рис. 36). Для

каждого из этих двух возможных направлений построим соответствующие им мгновенные центры вращения O_1 , O_2 и найдём две возможные скорости $\vec{v}_{C1}$ и $\vec{v}_{C2}$ тем же способом, который применялся в пункте 1. Направления скоростей показаны на рисунке 36, а модули равны:

$$v_{C1} = 1,7 \text{ м/с} \quad \text{и} \quad v_{C2} = 0,3 \text{ м/с}.$$

В третьем пункте задано, что модули скоростей точек B и C равны. Если совпадают и их направления, то тело движется поступательно. В этом случае искомая скорость точки D , как и всех других точек, равна $\vec{v}_A$. Если же скорости $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_C$ не сонаправлены, то следует построить мгновенный центр и поступать так, как в пункте 1. Мгновенный центр лежит на перпендикуляре

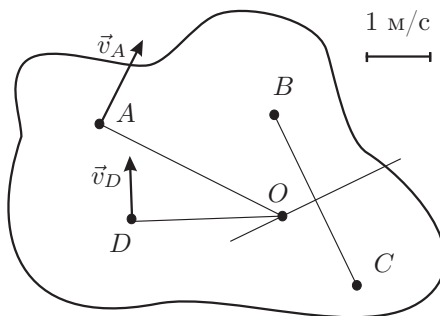


Рис. 37.

к скорости $\vec{v}_A$, проведённому из точки A , а также на перпендикуляре к отрезку BC , проходящем через середину этого отрезка. Именно так построена точка O на рисунке 37. Искомая скорость $\vec{v}_D$ перпендикулярна OD и равна по модулю

$$v_D = v_A \frac{OD}{OA} = 1,0 \text{ м/с}.$$

Таким образом, ответ задачи неоднозначен. Аналогичная ситуация имела место в пункте 2.

Задача 1.5* (Камни)

Если пренебречь сопротивлением воздуха, то можно считать, что оба камня движутся с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$. Для описания их движения введём декартову систему координат так, как показано на рисунке 38. Если через промежуток времени t камни столкнутся, то можно приравнять их координаты:

$$vt \cos \beta = L + v_0 t \cos \alpha, \quad (1)$$

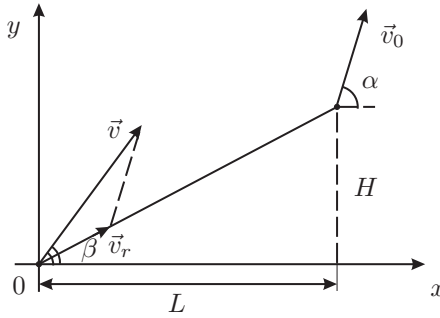


Рис. 38.

$$vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2} = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Из этих уравнений найдём:

$$v = v_0 \frac{\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha}{\sin \beta - \frac{H}{L} \cos \beta}, \quad (3)$$

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \left(\frac{\frac{H}{L} - \operatorname{tg} \alpha}{\frac{H}{L} - \operatorname{tg} \beta} - 1 \right)^{-1}. \quad (4)$$

Время движения до столкновения удобно выразить через скорость $\vec{v}_r$ движения одного камня относительно другого (рис. 38):

$$t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_r}.$$

При фиксированных величине и направлении вектора $\vec{v}_0$ и заданном направлении вектора $\vec{v}$ из векторного треугольника скоростей, показанного рисунке 38, видно, что меньшим $\vec{v}_r$ соответствует меньшая скорость v . Таким образом, минимальной скорости v соответствует минимальное значение v_r и, следовательно, максимальное время t . Ещё одно условие ограничивает возможность столкновения камней. Камень, пущенный вдогонку, должен удалиться от начала координат по горизонтали на расстояние большее L . Дальность его полёта равна $v^2 \sin 2\beta / g$. Поэтому должно быть обеспечено условие

$$v^2 \sin 2\beta \geq Lg. \quad (5)$$

Итак, нужно найти такие значения v и β , которые удовлетворяют равенству (3), неравенству (5) и обеспечивают наибольшее значение (4). Подставляя (3) в (5), получим неравенство

$$2 \frac{v_0^2}{Lg} \left(\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 \operatorname{tg} \beta - \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{H}{L} \right)^2 \geq 0.$$

Обозначив

$$\frac{v_0^2}{Lg} \left(\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 = a$$

и $\operatorname{tg} \beta = \xi$, получим:

$$\xi^2 - 2 \left(\frac{H}{L} + a \right) \xi + \frac{H^2}{L^2} \leq 0.$$

Это неравенство выполняется, если

$$\frac{H}{L} + a - \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \leq \xi \leq \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}}.$$

Как видно из (4) при $\alpha = 0^\circ$, большие значения t обеспечиваются меньшими значениями $\xi = \operatorname{tg} \beta$. Поэтому нужно выбрать для ξ меньшее значение. Получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} + a - \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \quad \text{при} \quad \alpha = 0^\circ. \quad (6)$$

Аналогично из (4) при $\alpha = 60^\circ$, большие значения t обеспечиваются большими значениями $\xi = \operatorname{tg} \beta$. Поэтому нужно выбрать для ξ большее значение. Получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \quad \text{при} \quad \alpha = 60^\circ. \quad (7)$$

Таким образом, ответы на поставленные в условии вопросы содержатся в формулах (6), (7) и (3). Подставляя численные значения, находим:

$$\alpha = 0^\circ, \quad \beta \approx 11^\circ, \quad v \approx 16,4 \text{ м/с}.$$

$$\alpha = 60^\circ, \quad \beta \approx 58^\circ, \quad v \approx 10,5 \text{ м/с}.$$

Задача 1.6 (На планете «Туй»)

Поскольку и семена, и шарик языка движутся относительно планеты «Туй» с постоянным ускорением $\vec{g}$, целесообразно перейти в систему отсчёта, которая тоже движется с тем же ускорением относительно планеты. В этой

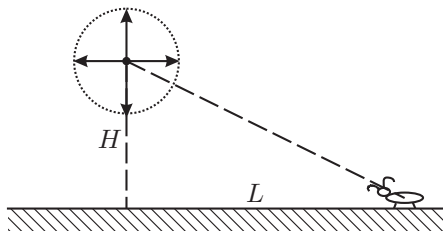


Рис. 39.

системе отсчёта и семена, и шарик языка движутся равномерно и прямолинейно (рис. 39). Спустя время t от начала движения семена окажутся в точках, удалённых от места разрыва плода «Маа» на расстояние $v_0 t$. За это же время шарик языка «Да» должен оказаться в центре изображённой на рисунке 39 сферы радиуса $l = v_0 t$, а мгновенно выпущенные щупальцы минимальной длины l «слижут» все семена на поверхности этой сферы. Цель будет достигнута, если путь, пройденный шариком языка за это время t , окажется равным гипотенузе изображённого на рисунке 39 треугольника. Отсюда находим

$$t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v}.$$

Минимальная длина щупалец должна быть равна

$$l = v_0 t = \frac{v_0}{v} \sqrt{L^2 + H^2},$$

а угол, который составляет скорость шарика языка $\vec{v}$ с горизонтом в момент выбрасывания,

$$\alpha = \arctg\left(\frac{H}{L}\right).$$

Нельзя ли животному «Да» обойтись более короткими щупальцами, если выпускать их раньше, чем шарик языка достигнет точки разрыва плода «Маа»? Пусть шарик раскрывается в момент времени $(t - \Delta t)$, где Δt — время упреждения. Тогда, чтобы достать в этот момент самые далёкие семена, нужны щупальцы длиной

$$l_1 = v\Delta t + v_0(t - \Delta t) = v_0 t + (v - v_0)\Delta t. \quad (1)$$

Если $v > v_0$, то минимальное значение $l_1 = l$. Именно этот случай и рассмотрен выше. Если же семена разлетаются быстрее, чем выбрасывается язык ($v < v_0$), то минимальная величина l_1 будет, как видно из (1), при $t = \Delta t$. Тогда

$$l_1 = vt = \sqrt{H^2 + L^2}.$$

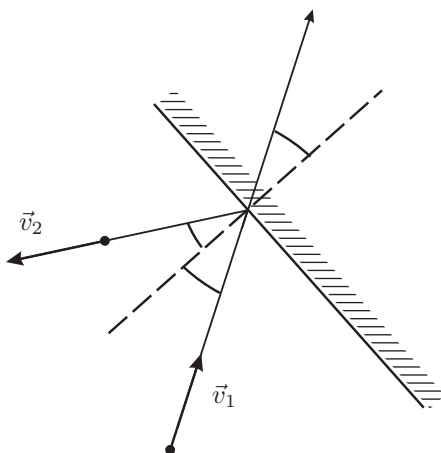


Рис. 40.

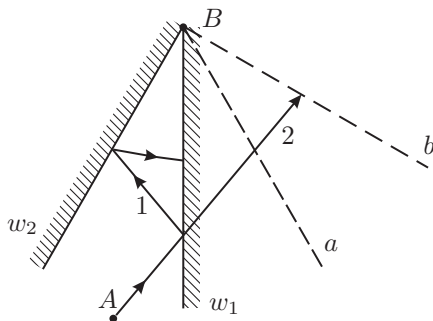


Рис. 41.

Таким образом, «Да» должен по внешнему виду плода определить, быстро или медленно будут разлетаться семена, и решить, выпускать ли щупальца сразу в момент разрыва или же вначале выстрелить шарик языка в разрывающийся плод. А читатель должен обратить внимание на то, что при решении задач с абстрактным содержанием (в которых не заданы численные значения) следует анализировать все возможные варианты.

Задача 1.7 (Шайба)

Шайба испытывает упругие столкновения со стенками. При этом остаётся неизменным модуль её скорости, и «угол падения» оказывается равным «углу отражения». Это следует из законов изменения энергии и импульса. Рисунок 40 изображает процесс столкновения. Скорость шайбы изменяется от значения $\vec{v}_1$ до значения $\vec{v}_2$, $v_1 = v_2 = v$. Из рисунка видно, что зеркальное отражение траектории шайбы после столкновения представляет собой продолжение начального участка траектории. Вместо ломанной линии 1 можно рассматривать прямую 2 (рис. 41). На рисунке 41 показаны также последовательные зеркальные отражения a и b стен w_2 и w_1 . Применим способ спрямления траектории к данной задаче. Для этого нарисуем множество зеркальных отражений заданного треугольника относительно его сторон (рис. 42). Вершина B и её зеркальные отражения обозначены на рисунке 42 жирными точками. Прямые, соединяющие эти точки с точкой A , представляют собой «спрямлённые» траектории шайбы, попадающей в вершину B треугольника, образованного стенками. Отрезок AB_1 соответствует траектории, при кото-

рой шайба попадает в вершину B , столкнувшись со стенками 6 раз. Для этого случая искомый угол находится из прямоугольного треугольника с гипотенузой AB_1 .

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \text{следовательно,} \quad \alpha_1 \approx 16^\circ.$$

Аналогичным образом можно найти и иные возможные углы, для чего приходится соединять точку A с точками B_2 , B_3 и B_4 . Направления на иные жирные точки, отличные от указанных, соответствуют большему числам столкновений, чем требуется в задаче. Прямая AB_2 проходит через точку C , соответствующую попаданию шайбы в вершину треугольника, отличную от B . В этой вершине шайба остановится в соответствии с условием задачи, так что направление прямой AB_2 следует исключить. Итак, помимо α_1 есть ещё два возможных направления:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

следовательно

$$\alpha_3 \approx 49^\circ, \quad \alpha_4 \approx 67^\circ.$$

Задача 1.8 (Бочка)

Пусть бочку катят вдоль координатной оси x , направленной перпендикулярно плоскости рисунка 43. Координата y точки следа находится под отверстием, положение которого в плоскости дна характеризуется координатой y_1 . Из рисунка 43 видно, что $y = ky_1$, где $k = \sin \alpha$. Таким образом, след представляет собой проекцию траектории отверстия в плоскости дна на горизонтальную плоскость. Найдём вначале уравнение траектории движения отверстия

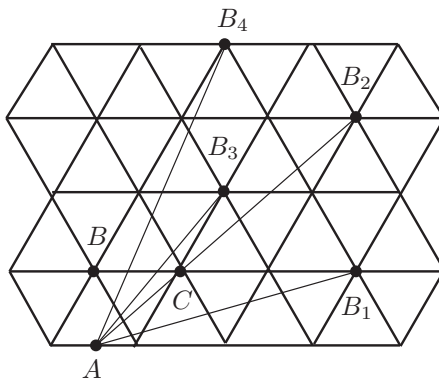


Рис. 42.

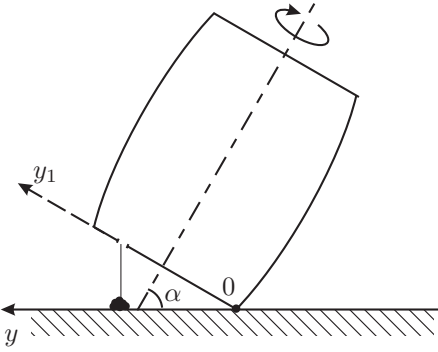


Рис. 43.

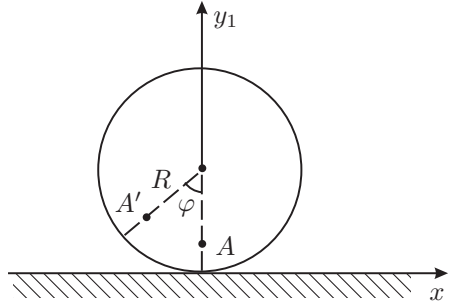


Рис. 44.

в плоскости дна. На рисунке 44 изображено начальное положение отверстия A и его положение A' после поворота на угол φ . Выразим через этот угол координаты x и y_1 отверстия:

$$x = \varphi R - r \sin \varphi = R \left(\varphi - \frac{r}{R} \sin \varphi \right), \quad (1)$$

$$y_1 = R - r \cos \varphi = R \left(1 - \frac{r}{R} \cos \varphi \right). \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) задают траекторию в параметрическом виде. Для траектории песочного следа вместо y_1 нужно брать $y = ky_1$. Можно приблизительно нарисовать оставляемый песком след, выявив характерные точки по уравнениям (1) и (2). На рисунке 45 представлены построенные с помощью системы MathCad графики параметрически заданной функции $y = y(x)$ при $r = R$ (сплошная кривая) и при $r = R/2$ (пунктирная кривая). Первая кривая называется циклоидой, вторая — укороченная циклоида.

Для определения положения центра масс следа воспользуемся формулами для его координат:

$$x_c = \frac{1}{M} \int x \, dm; \quad y_c = \frac{1}{M} \int y \, dm. \quad (3)$$

В данном случае $dm = \rho d\varphi$, где ρ — масса песка, высыпающегося за время поворота на единичный угол. При равномерном качении бочки эта величина постоянная, а $M = 2\pi\rho$ — масса песка, высыпающегося за один оборот. Подставляем координаты x и y , найденные с помощью формул (1) и (2), в (3) и интегрируем:

$$x_c = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} R\rho \left(\varphi - \frac{r}{R} \sin \varphi \right) d\varphi = \pi R.$$

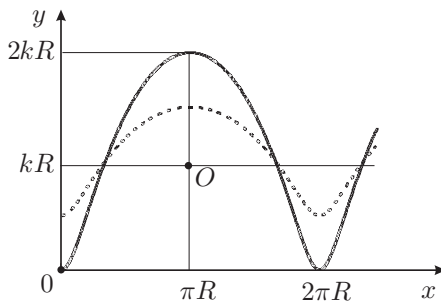


Рис. 45.

$$y_c = \frac{k}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} R\rho \left(1 - \frac{r}{R} \cos \varphi\right) d\varphi = R \sin \alpha.$$

Итак, положение центра масс песочного следа определяется координатами $x_c = \pi R$ и $y_c = R \sin \alpha$. Это положение отмечено точкой O на рисунке 45. Оно является проекцией центра дна на горизонтальную плоскость и не зависит от r .

Задача 1.9* (Автомобиль)

Пусть масса автомобиля равна m . Рассмотрим вначале простейший способ избежать столкновения — просто резко затормозить. Для нахождения тормозного пути применим закон изменения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgL.$$

Отсюда находим тормозной путь

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (1)$$

Второй способ избежать столкновения — заставить автомобиль поворачивать с возможно меньшим радиусом кривизны R , который и представляет собой минимальное расстояние до препятствия. Поскольку центр масс гоночного автомобиля расположен низко, то опасностью его опрокидывания можно пренебречь. Размерами автомобиля также можно пренебречь по сравнению с расстоянием до препятствия. Тогда к автомобилю можно применить второй закон Ньютона:

$$\frac{mv_0^2}{R} = \mu mg, \quad \text{откуда} \quad R = \frac{v_0^2}{\mu g}. \quad (2)$$

Этот способ избежать столкновения в два раза менее эффективен по сравнению с первым.

Проанализируем третий способ. Поворот автомобиля обеспечивают силы трения покоя, действующие перпендикулярно скорости. Поскольку центр масс гоночного автомобиля расположен достаточно низко, можно считать, что вес автомобиля поровну распределяется между передними и задними колёсами. Силы трения покоя будем полагать почти равными их предельным значениям. Тогда сумма сил трения покоя, действующих на передние колёса, которая перпендикулярна скорости автомобиля, равна $F = \mu mg/2$. Суммарная сила трения $\vec{F}$, действующая на задние колёса, тоже близка к предельному значению. Угол, который она образует с направлением скорости $\vec{v}$, можно менять посредством тормоза и руля. Приближение к стенке будет самым медленным, если предельная сила трения $\vec{F}$, действующая на задние колёса, направлена перпендикулярно стенке. Далее рассматривается именно этот наиболее благоприятный вариант.

Силу $\vec{F}$ целесообразно разложить на две составляющие: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Составляющая $\vec{F}_1$ направлена навстречу скорости $\vec{v}$, а $\vec{F}_2$ — перпендикулярно к ней. Модуль $F_1 = F \cos \alpha$, а $F_2 = F \sin \alpha$, где α — угол между скоростью $\vec{v}$ и первоначальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной перпендикулярно стене. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на касательное и нормальное направления:

$$m\dot{v} = -F_1 = -F \cos \alpha, \quad (3)$$

$$\frac{mv^2}{R} = F_2 + F = F(1 + \sin \alpha). \quad (4)$$

Точка над символом здесь и далее обозначает производную по времени. R — локальный радиус поворота, удовлетворяющий соотношению

$$v = \dot{\alpha}R. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует

$$mv = F \frac{(1 + \sin \alpha)}{\dot{\alpha}}. \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (3), получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \right) = -\cos \alpha.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \right) &= -\frac{d(\sin \alpha)}{d\alpha}, \\ \frac{d}{d\alpha} \left(\dot{\alpha} \frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \right) - \frac{1 + \sin \alpha}{\dot{\alpha}} \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} &= -\frac{d(\sin \alpha)}{d\alpha}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}} = \frac{2d(\sin \alpha)}{1 + \sin \alpha}.$$

Решаем это уравнение при начальном условии $\alpha = \alpha_0 = 0$; $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$, где, в соответствии с (5), $\dot{\alpha}_0 = v_0/R_0$, R_0 — начальный радиус поворота, который находим по формуле (4): $R_0 = mv_0^2/F$. Интегрируя, получим

$$\ln \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_0} = 2 \ln \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha_0} \right), \quad \text{или} \quad \dot{\alpha} = \frac{v}{R} = \frac{v_0}{R_0} (1 + \sin \alpha)^2.$$

При учёте (4) отсюда находим

$$v = \frac{v_0}{1 + \sin \alpha}. \quad (8)$$

В ближайшей к стене точке траектории $\alpha = \pi/2$, и (8) даёт величину скорости v_f в этой точке:

$$v_f = \frac{v_0}{2}. \quad (9)$$

На какое расстояние S автомобиль приблизится к стене? Это расстояние можно подсчитать так:

$$S = \int v \cos \alpha \, dt,$$

где $v \cos \alpha$ — перпендикулярная к стене составляющая скорости. Выразим косинус из (3) и, используя (9), получим:

$$S = - \int v \cdot \dot{v} \frac{m}{F} dt = - \frac{m}{F} \int_{v_0}^{v_f} v \, dv = - \frac{m}{2F} (v_f^2 - v_0^2) = \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

Сравнивая полученный результат с (1) и (2), видим, что при повороте эффективнее тормозить, но лучше всего сразу нажать на тормоза.

Задача 1.10 (Планета)

На рисунке 46 показаны два крайних положения маятника, совершающего плоские колебания. Применим второй закон Ньютона для произвольного угла отклонения от вертикали φ в проекциях на направление нити:

$$\frac{mv^2(\varphi)}{L} = T(\varphi) - mg \cos \varphi, \quad \text{или} \quad T(\varphi) = \frac{mv^2(\varphi)}{L} + mg \cos \varphi,$$

где $v(\varphi)$ — скорость маятника, $T(\varphi)$ — сила натяжения нити при произвольном угле отклонения φ . Поскольку скорость v и $\cos \varphi$ возрастают при переходе от максимального отклонения $\varphi = \alpha$ к положению равновесия $\varphi = 0$, то

$$T_{\max} = mg + \frac{mv^2}{L}, \quad (1)$$

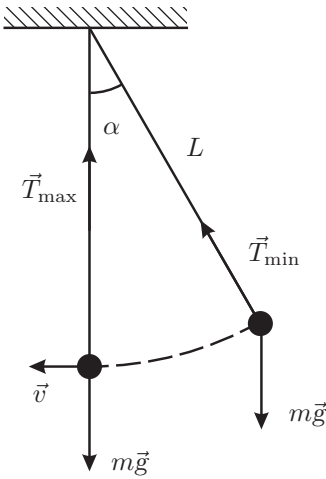


Рис. 46.

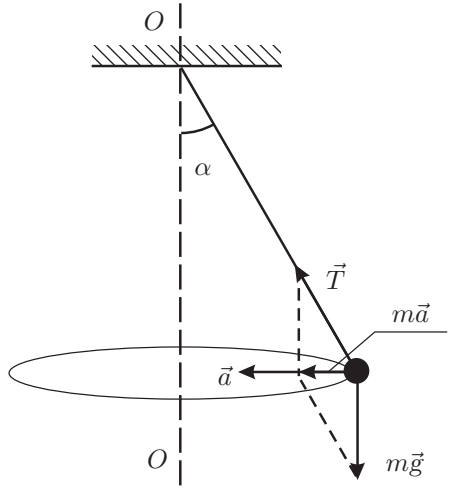


Рис. 47.

$$T_{\min} = mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Скорость v в положении равновесия найдём, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получим

$$\cos \alpha = \frac{3}{k+2} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь вращательное движения маятника (конический маятник), изображённого на рисунке 47. Ускорение груза $\vec{a}$ направлено к оси вращения OO . $\vec{T}$ — сила натяжения нити. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Из рисунка 47 видно, что

$$ma = mgtg \alpha. \quad (5)$$

Центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 L \sin \alpha. \quad (6)$$

Из (5), (6) и (4) получим:

$$g = \omega^2 L \cos \alpha = \frac{3}{k+2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 L = 3,7 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что ускорение свободного падения на планете Меркурий $g = 3,92 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 1.11 (Космический корабль)

На рисунке 48 показана траектория космического корабля в системе отсчёта, относительно которой удалённый метеорит покоился. Можно считать, что

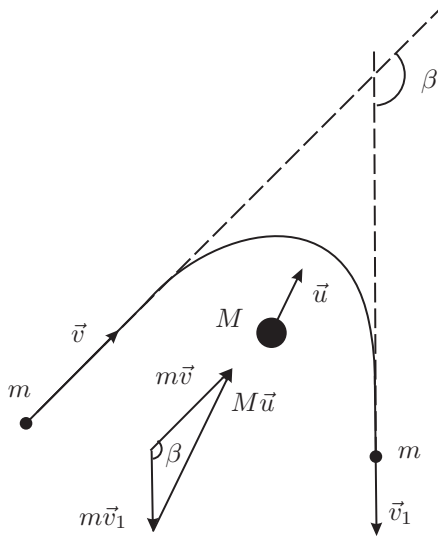


Рис. 48.

корабль и метеорит взаимодействуют только друг с другом. Поэтому сохраняется энергия и импульс системы этих тел:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \quad (1)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{u}. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v}_1$ — скорость корабля, пролетевшего мимо метеорита, $\vec{u}$ — скорость метеорита, вызванная притяжением к кораблю.

По условию $v_1 = v(1-k)$ и угол между $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ равен β (рис. 48). Равенство (2) иллюстрируется векторным треугольником на рисунке 48. Применяя к

треугольнику теорему косинусов, получим:

$$M^2 u^2 = m^2 v^2 + m^2 v_1^2 - 2m^2 v v_1 \cos \beta. \quad (3)$$

Из (1) и (3) найдём, исключив u :

$$\frac{M}{m} = \frac{1 + (1 - k)^2 - 2(1 - k) \cos \beta}{1 - 2(1 - k)} = 3,1.$$

Таким образом, масса метеорита, оказавшегося на пути корабля, приблизительно в 3 раза больше массы корабля.

Задача 1.12 (Два бруска)

После пережигания нити груз m_2 приходит в движение под действием силы упругости, а груз m_1 находится в покое, поскольку сила упругости компенсируется реакцией стенки. Он начнёт двигаться тогда, когда сила сжатия пружины сменится силой растяжения, то есть при обращении в нуль деформации пружины. При максимальном растяжении пружины скорости брусков сравняются. Для нахождения максимального растяжения x следует применить законы сохранения механической энергии и импульса.

Применим закон сохранения механической энергии ко второму бруску при увеличении его скорости до v в момент времени, когда начинает двигаться первый брусок:

$$\frac{k \Delta L^2}{2} = \frac{m_2 v^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Delta L. \quad (1)$$

В момент, когда пружина растянута на максимальную величину x , скорости грузов одинаковы и равны u . Для нахождения u воспользуемся законами сохранения импульса и энергии для обоих брусков:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) u, \quad (2)$$

$$\frac{m_2 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + \frac{k x^2}{2}. \quad (3)$$

Из системы (1), (2) и (3) получаем ответ:

$$x = \Delta L \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 1 \text{ см}. \quad (4)$$

Задачу можно решить и иным способом, используя понятие центра масс. Импульс системы тел равен произведению скорости центра масс на массу всей системы. В соответствии с законом изменения импульса импульс системы брусков остаётся постоянным после того, как m_1 приходит в движение,

так как на эту систему внешние силы действуют лишь в вертикальном направлении:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_c. \quad (5)$$

Здесь v_c — скорость центра масс, равная скорости u движения обоих брусков при максимальном растяжении пружины. Используем также уравнения (1) и (3), полученные выше на основании закона сохранения механической энергии. Решая систему уравнений (1), (3) и (5) при $v_c = u$, получим прежний результат (4). Использование понятия центра масс часто облегчает решение задач о движении системы, состоящей из нескольких тел.

Задача 1.13 (Канал)

Для системы «брусок–шарик» сохраняются и импульс и энергия. На основании этого получаем:

$$mv_0 = mv + Mu, \quad (1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \quad (2)$$

Здесь M — масса бруска, u — проекция его скорости на ось, сонаправленную с вектором начальной скорости после вылета шарика, v — проекция на ту же ось скорости, с которой вылетает шарик. Перепишем уравнения (1) и (2) в виде:

$$m(v_0 - v) = Mu, \quad (3)$$

$$m(v_0^2 - v^2) = Mu^2. \quad (4)$$

Из этой системы можно найти v и u . Одно из решений системы очевидно:

$$v_0 - v = 0 \quad \text{и} \quad u = 0. \quad (5)$$

Другое решение можно найти, поделив (4) на (3), что можно сделать если не выполняется (5):

$$v_0 + v = u,$$

$$v_0 - v = \frac{M}{m}u.$$

Отсюда находим:

$$u = \frac{2m}{M+m}v_0 \quad \text{и} \quad v = \frac{m-M}{M+m}v_0.$$

Однако это решение не удовлетворяет условию задачи, поскольку даёт $v < 0$, если $m < M$, при обратном неравенстве получается $u > v$, то есть шарик не вылетает из бруска.

Таким образом, ответ задачи выражается соотношением (5). Станный результат, не правда ли? Неужели шарик не оказывает никакого воздействия

на брусок? Оказывает. В процессе движения шарика в канале скорость шарика и скорость бруска изменяются как по модулю, так и по направлению в зависимости от формы канала. После взаимодействия их скорости принимают исходные значения.

Задача 1.14 (Маятник Максвелла)

На рисунке 49 слева изображён маятник Максвелла вблизи нижнего положения, а справа — в самом низу. Из-за малости радиуса стержня r отклонением нити от вертикали, а также опусканием оси маятника при её повороте вокруг самой нижней точки нити M можно пренебречь. Для нахождения силы на-

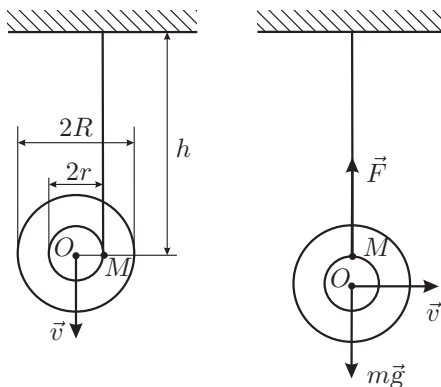


Рис. 49.

тяжения каждой нити T применим к маятнику в самом нижнем положении закон изменения импульса:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + m\vec{g}, \quad \text{или} \quad m \frac{v^2}{r} = 2T - mg, \quad (1)$$

где $\vec{F}$ — суммарная сила натяжения нитей.

Скорость v центра масс маятника найдём из закона изменения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2}. \quad (2)$$

В формуле (2) кинетическая энергия представлена, в соответствии с теоремой Кёнинга, в виде суммы кинетической энергии поступательного движения маятника со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения относительно центра масс. Угловая скорость ω вращения маятника может быть найдена как угловая скорость поворота оси O относительно

точки M касания нити (рис. 49): $\omega = v/r$. Подставляя это значение в (2), получим:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует:

$$T = \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{2h}{r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right)} \right) \approx \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{2hr}{R^2} \right).$$

Раскрутившись при опускании вниз, маховик по инерции будет продолжать вращение, закручивая нить на стержень и поднимаясь вследствие этого вверх. Такие периодические перемещения вращающегося маятника вверх и вниз могут продолжаться достаточно долго, оправдывая название устройства «маятник Максвелла».

Задача 1.15* (Обруч)

Двигаясь из состояния покоя, центр обруча начинает набирать скорость. Пусть в некоторый момент времени она равна v . Для нахождения v применим закон изменения энергии:

$$mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{mv_m^2}{2}, \quad (1)$$

где α — угол, на который к рассматриваемому моменту повернётся обруч, а v_m — скорость, которую приобретёт груз. По закону сложения скоростей

$$\vec{v}_m = \vec{v}_{mo} + \vec{v},$$

где $\vec{v}$ — скорость центра обруча O , а $\vec{v}_{mo}$ — скорость груза относительно O (рис. 50). В отсутствие проскальзывания модуль скорости v_{mo} равен модулю скорости v и равен произведению угловой скорости ω на радиус обруча:

$$v_{mo} = v = \omega R. \quad (2)$$

Поэтому из векторного треугольника скоростей (рис. 50) следует, что

$$v_m^2 = 2v^2(1 + \cos \alpha).$$

Подставляя (2) и это выражение в формулу (1):

$$v = \sqrt{gR} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (3)$$

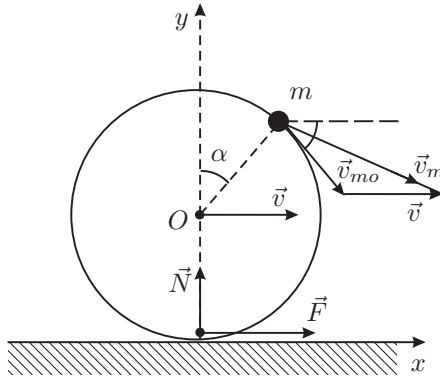


Рис. 50.

При каком же угле α возможно проскальзывание? Для ответа на этот вопрос нужно сравнить силу трения $\vec{F}$ с максимальной силой трения покоя равной μN , где $\vec{N}$ — сила реакции (рис. 50). Обруч катится без проскальзывания пока $F \leq \mu N$. Применим к обручу с грузом закон изменения импульса в проекциях на оси x и y (рис. 50):

$$\frac{d(mv(1 + \cos \alpha))}{dt} = F \leq \mu N, \quad (4)$$

$$\frac{d(-mv \sin \alpha)}{dt} = -mg + N. \quad (5)$$

Выполним дифференцирование в левой части уравнений (4) и (5), используя полученные ранее выражения (2) и (3), а также не забывая, что $\omega = d\alpha/dt$. Получаются простые соотношения:

$$mg \cos \alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \leq \mu N, \quad (6)$$

$$N = mg \cos \alpha. \quad (7)$$

Проанализируем их. Возможны две ситуации, при которых обруч перестанет катиться без проскальзывания. Во-первых, может обратиться в нуль сила реакции N , то есть обруч оторвётся от поверхности. Это случится, как видно из (7), при $\alpha = \pi/2$. Тогда из (3) получим $v = v_{\max} = \sqrt{gR}$. Во-вторых, обруч может начать скользить по поверхности. Тогда $N \neq 0$ и (6) становится равенством

$$\mu = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

а (3) даёт $v = v_{\max} = \mu \sqrt{gR}$. Коэффициент трения μ обычно меньше 1. Поэтому реализуется обычно вторая ситуация.

Задача 1.16 (Два груза)

Скользя вдоль стержня, грузы многократно сталкиваются друг с другом и с полом. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что при абсолютно упругом столкновении двух тел одинаковых масс происходит обмен импульсами. Поэтому задача эквивалента задаче о движении вдоль стержня одного груза, многократно отскакивающего от пола.

Найдём вначале высоту H_1 на которую подскочит груз после первого удара о пол, и время t_1 , спустя которое он там окажется. Для этого применим закон изменения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H_1 - H) + F(H + H_1), \quad (1)$$

где m — масса груза, g — ускорение свободного падения. Отсюда находим

$$H_1 = \frac{mv^2 + 2H(mg - F)}{2(mg + F)} \approx H + \frac{v^2}{2g}, \quad (2)$$

если учесть, что $F \ll mg$. Время t_d падения груза с высоты H является корнем уравнения

$$H = vt_d + \frac{a_d t_d^2}{2},$$

где $a_d = g - \frac{F}{m} \approx g$ — ускорение падающего груза. Находим

$$t_d = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}. \quad (3)$$

Время t_u последующего подъёма до высоты H_1 составляет

$$t_u = \sqrt{\frac{2H_1}{g + \frac{F}{m}}} \approx \sqrt{\frac{2H_1}{g}}. \quad (4)$$

Так что $t_1 = t_u + t_d$. Это по порядку величины составляет $\sqrt{2H_1/g}$.

При последующих многократных отскоках от пола высота подъёма h будет становиться всё меньше, пока h не обратится в нуль. Если время Δt между двумя подскоками много меньше времени затухания колебаний груза, то h можно приблизительно считать непрерывной функцией времени. За малый промежуток времени $dt = \Delta t$ высота подскоков уменьшается на dh . Величину dh можно найти из закона изменения энергии:

$$-mgdh = F \cdot 2h, \quad -dh = \frac{2F}{mg}h. \quad (5)$$

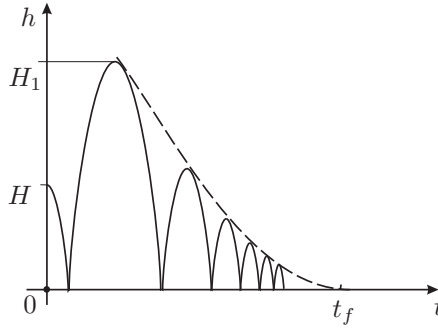


Рис. 51.

Время между двумя ближайшими подскоками

$$dt = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получим

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{F}{mg}\sqrt{\frac{g}{2}}dt.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $t = 0$ и $h = H_1$, получим

$$h = \left(\sqrt{H_1} - \frac{Ft}{2m\sqrt{2g}} \right)^2,$$

откуда следует, что при $h = 0$

$$t = \tau = \frac{2m\sqrt{2gH_1}}{F}. \quad (7)$$

Полное время движения груза $t_f = \tau + t_1$. Сравнивая (7) и (4) приходим к заключению, что

$$\frac{t_1}{\tau} \approx \frac{F}{mg} \ll 1.$$

Так что искомое полное время движения

$$t_f = \tau = \frac{2m\sqrt{2gH + v^2}}{F}.$$

В задаче рассмотрена колебательная система, в которой происходят затухающие колебания. Однако они отличаются от привычных квазигармонических затухающих колебаний: график их вовсе не похож на синусоиду, а затухание происходит за конечный промежуток времени (рис. 51).

Задача 1.17 (Проволочная скобка)

Приведённый рисунок показывает момент времени, когда нить ещё не порвалась, но вот-вот порвётся.

В этот момент расстояние от груза до линии, вдоль которой перемещаются концы нити, равно x . Символом u обозначена скорость груза в этот момент времени. Проекция скорости груза и конца одного из отрезков (любого) нити на сам этот отрезок должны быть одинаковыми, так как нить нерастяжима. Таким образом

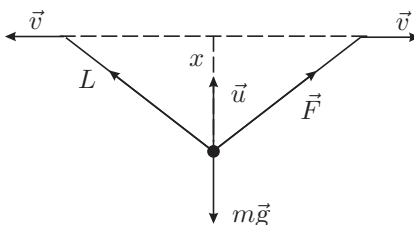


Рис. 52.

$$u = v \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} \approx v \frac{L}{x}. \quad (1)$$

Из заданного в условии соотношения $F \gg mg$ можно предположить, что угол, который составляют нити в момент разрыва, будет близок к 180° . Это означает, что скорость груза в этот момент будет примерно равна $u = vL/x$.

Для нахождения x в момент разрыва нити запишем второй закон Ньютона:

$$m \frac{du}{dt} = 2F \frac{x}{L} - mg. \quad (2)$$

Естественно предположить, что в момент разрыва первое слагаемое в правой части равенства (2) играет определяющую роль, то есть

$$2F \frac{x}{L} \gg mg. \quad (3)$$

Будем решать задачу в этом приближении. Из (1) найдём:

$$\frac{du}{dt} = v \frac{L}{x^2} u = \frac{v^2 L^2}{x^3}. \quad (4)$$

Подставляя (4) и (3) в (2), получим

$$x = \left(\frac{v^2 L^3 m}{2F} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

Подсчитав численное значение x по формуле (5), убеждаемся в справедливости сделанного предположения (3):

$$2F \frac{x}{L} = 1 \text{ Н} \gg 0,01 \text{ Н} = mg.$$

Максимальную высоту подъёма скобки теперь нетрудно определить из закона сохранения энергии, используя (1) и (5):

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{v}{2g} \sqrt{\frac{2FL}{m}} \approx 5 \text{ м.}$$

Задача 1.18 (Дискретная модель движения лавины)

Как компактно описать множество последовательных столкновений нарастающей цепочки с очередным бруском? Поскольку все эти процессы аналогичны, рассмотрим один из них: столкновение цепочки уже слипшихся n брусков с очередным $(n+1)$ -м бруском. Обозначим скорость цепочки сразу после соударения с n -м бруском v_n . Найдём скорость цепочки после столкновения с $(n+1)$ -м бруском v_{n+1} . Для этого следует применить закон сохранения энергии цепочки при движении её к $(n+1)$ -му бруску и закон сохранения импульса при очередном столкновении. Получим:

$$v_{n+1}^2 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (v_n^2 + 2gL \sin \alpha). \quad (1)$$

Применяя это рекуррентное соотношение, получим при $v_1 = 0$:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{2^2}, \\ v_3^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{3^2} (1^2 + 2^2), \\ v_4^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{4^2} (1^2 + 2^2 + 3^2), \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_{n+1}^2 &= \frac{2gL \sin \alpha}{(n+1)^2} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Как подсчитать входящую в (2) сумму квадратов натуральных чисел? Для конкретных значений n можно воспользоваться компьютером, таблицами или формулой

$$\sum_1^n n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Можно при больших n эту сумму приближённо заменить интегралом:

$$\sum_1^n n^2 \approx \int_0^n x^2 dx = \frac{n^3}{3}. \quad (3)$$

В самом деле, вычисления дают:

n	5	10	50	100	400
$\sum_1^n n^2$	55	385	$4,29 \cdot 10^4$	$3,38 \cdot 10^5$	$2,141 \cdot 10^7$
$\int_0^n x^2 dx$	42	333	$4,17 \cdot 10^4$	$3,33 \cdot 10^5$	$2,133 \cdot 10^7$

С учётом (3) выражение (2) упрощается:

$$v_{n+1}^2 \approx \frac{2}{3} gLn \sin \alpha. \quad (4)$$

Энергия «лавины» после $n \gg 1$ столкновений с учётом (4) приблизительно равна

$$E_n \approx \frac{1}{3} mgLn^2 \sin \alpha. \quad (5)$$

Искомое в пункте 1 приращение энергии

$$\Delta E \approx \frac{2}{3} mgLn \sin \alpha.$$

Ответ в задании 2 следует из (5):

$$E_k - E_n \approx \frac{1}{3} mgL(k^2 - n^2) \sin \alpha.$$

В задании 3 требуется учесть силу трения. Тогда вместо (1) получается

$$v_{n+1}^2 = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 (v_n^2 + 2gL \sin \alpha - 2\mu gL \cos \alpha), \quad (6)$$

где μ — коэффициент трения. Его можно определить из условия равномерного скольжения по «лавиноопасному» склону:

$$mg \sin \beta = \mu mg \cos \beta.$$

Из последнего выражения следует, что

$$\mu = \operatorname{tg} \beta.$$

Формула (6) означает, что учёт трения сводится к замене в ответах предыдущих заданий величины g на $g(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha)$. Отсюда видно, что движение лавины возникает при $\alpha \geq \beta$. Эта оправдывает использованные названия «лавиноопасных» угла и склона.

Таким образом, рассмотренная простая модель позволяет объяснить неожиданное возникновение лавины и быстрый рост её энергии (в формуле (5) $E \sim n^2$).

Задача 1.19 (Кирпичи)

Стопка кирпичей не опрокинется, если центр масс всех кирпичей, лежащих сверху каждого, не окажется правее его края. Для нахождения удовлетворяющих этому условию сдвигов кирпичей на рисунке 53 показаны координаты x_i центров масс кирпичей. Верхнему кирпичу соответствует $i = 1$.

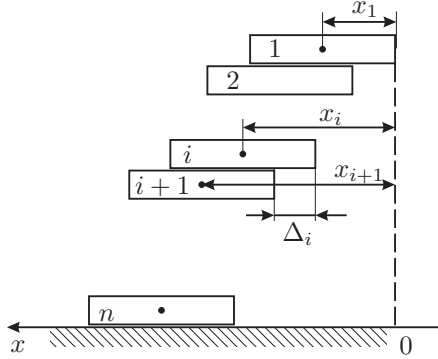


Рис. 53.

Координаты отсчитываются от края верхнего кирпича. Кирпич с номером i сдвинут относительно $(i+1)$ -го на величину Δ_i . Координата x_{ci} центра масс стопки кирпичей, лежащих выше $(i+1)$ -го, определяется соотношением

$$x_{ci} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i x_k,$$

поскольку все кирпичи имеют одинаковые массы. Условие равновесия кирпичей для предельных сдвигов можно записать так:

$$x_{ci} = x_{i+1} - \frac{a}{2}, \quad \text{или} \quad x_{i+1} = \frac{a}{2} + \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i x_k. \quad (1)$$

Смещение i -го кирпича

$$\Delta_i = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i x_k - \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} x_k. \quad (2)$$

Преобразуем это выражение, выделив последнее слагаемое в первой сумме и

используя (1):

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \frac{1}{i} \left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k + x_i \right) - \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} x_k = \\ &= \frac{-1}{(i-1)i} \sum_{k=1}^{i-1} x_k + \frac{x_i}{i} = \frac{1}{i} \left(x_i - \frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} x_k \right) = \frac{a}{2i}.\end{aligned}$$

Итак, смещения кирпичей, начиная с верхнего, образуют последовательность:

$$\Delta_i = \frac{a}{2i} = \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{6}, \dots \quad (3)$$

Смещение нижнего кирпича с номером n относительно верхнего

$$\Delta(n) = \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

В задаче требуется подобрать такое n , чтобы $\Delta(n) \geq a/2$. Находя суммы $n = 2, 3, 4$ членов последовательности (3), получаем

$$\Delta(2) = 0,75a; \quad \Delta(3) = 0,92a; \quad \Delta(4) = 1,04a > a.$$

Таким образом, требованию задачи удовлетворяет стопка из пяти кирпичей, смещения которых друг относительно друга равны

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{4}, \quad \frac{a}{6}, \quad \frac{a}{8}.$$

Если продолжать наращивать число кирпичей таким же образом, то смещение верхнего кирпича относительно нижнего может стать как угодно большим, поскольку сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

В самом деле, при большом числе слагаемых можно приближённо принять, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n,$$

а логарифм стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

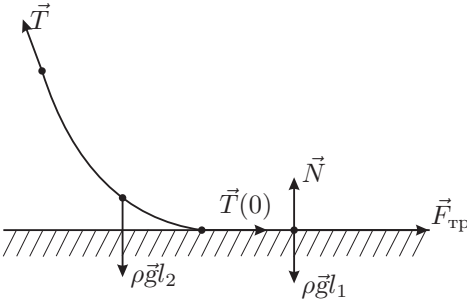


Рис. 54.

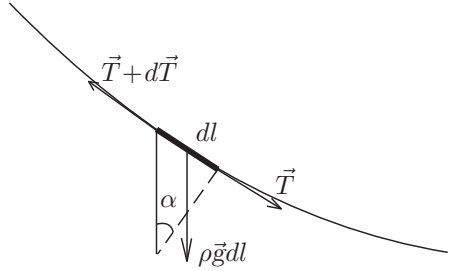


Рис. 55.

Задача 1.20 (Верёвка)

Верёвка движется равномерно. Следовательно, сумма сил, приложенных к ней, а также к её части, равна нулю. К верёвке приложены следующие силы (рис. 54): $\vec{T}_0$ — сила, удерживающая верхний конец верёвки на одной высоте; силы тяжести её двух частей $\rho\vec{g}l_1$ и $\rho\vec{g}l_2$; $\vec{N}$ — сила нормальной реакции со стороны горизонтальной поверхности; сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ этой поверхности.

Запишем условие равновесия для части верёвки, висящей в воздухе:

$$\vec{T}_0 + \rho\vec{g}l_2 + \vec{T}(0) = 0,$$

где $\vec{T}(0)$ — сила, действующая со стороны части верёвки, лежащей на поверхности. Из этого условия получим

$$T_0 = \sqrt{(\rho gl_2)^2 + (T(0))^2}. \quad (1)$$

Чтобы найти $T(0)$ запишем условие равновесия малого элемента верёвки длиной dl (рис. 55):

$$T + dT = T + \rho g dl \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что:

$$dT = \rho g dh,$$

то есть для силы натяжения $T(h)$ в точке верёвки, находящейся на высоте h над поверхностью, имеем:

$$T_0 - T(h) = \rho g (H - h).$$

Отсюда получаем значение силы натяжения в самой нижней точке той части верёвки, которая не соприкасается с поверхностью:

$$T(0) = T_0 - \rho g H. \quad (2)$$

Такая же по модулю сила в соответствии с третьим законом Ньютона действует и на горизонтальную часть верёвки. Условия равновесия этой части имеют вид:

$$\begin{aligned}\rho g l_1 &= N, \\ T(0) = F_{\text{тр}} &= kN = k\rho g l_1.\end{aligned}\quad (3)$$

Из системы уравнений (1), (2) и (3) получим ответ:

$$l_2 = \sqrt{H(H + 2kl_1)}.$$

Проанализируем полученный результат в предельном случае $k \rightarrow 0$. Видим, что $l_2 \rightarrow H$, то есть при малом трении не лежащая на поверхности часть верёвки располагается почти вертикально, что вполне соответствует интуитивно ожидаемому результату.

Задача 1.21 (За пределами второй космической скорости)

Для нахождения модуля скорости $\vec{v}$ достаточно применить закон сохранения энергии в инерциальной системе отсчёта, связанной с Солнцем:

$$\frac{m(v_e + v_0)^2}{2} - G \frac{mM_e}{R_e} - G \frac{mM_s}{R_s} = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь m — масса космического корабля, M_e — масса Земли, M_s — масса Солнца, R_e — радиус Земли, R_s — расстояние от Земли до Солнца, v_e — скорость движения Земли по своей орбите, G — гравитационная постоянная. Из уравнения (1) находим

$$v = \sqrt{(v_e + v_0)^2 - 2G \left(\frac{M_e}{R_e} + \frac{M_s}{R_s} \right)}. \quad (2)$$

Это и есть один из ответов задачи, поскольку все величины, не заданные в условии, известные константы.

Для нахождения угла α (рис. 56) используем закон сохранения момента импульса:

$$(v_e + v_0)R_s = v(R_s + a) \sin \alpha. \quad (3)$$

Здесь $(a + R_s) \sin \alpha = p$ — плечо импульса космического корабля, покидающего Солнечную систему (рис. 56). Связь величин a и α , входящих в (3), определяется свойством гиперболы $r_1 - r_2 = 2a$. Разность расстояний от точки гиперболы до её фокусов F_1 и F_2 стремится к отрезку F_1B (рис. 56) при бесконечном удалении от центра O . Поэтому имеем

$$F_1B = 2a = 2c \cos \alpha, \quad \text{или} \quad a = \frac{R_s \cos \alpha}{1 - \cos \alpha},$$

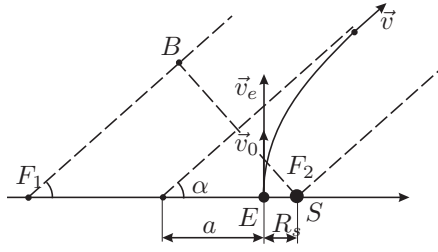


Рис. 56.

поскольку $c = a + R_s$. Подставляя последнее выражение в (3) получим:

$$\frac{v}{v_e + v_0} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Остаётся подставить сюда выражение скорости v из (2):

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \frac{2G}{(v_e + v_0)^2} \left(\frac{M_e}{R_e} + \frac{M_s}{R_s} \right)}.$$

Задача 1.22* (Противостояние Марса)

Для нахождения радиуса орбиты Марса применим к этой планете второй закон Ньютона, учтя лишь её притяжение к Солнцу:

$$M_M \omega_M^2 R_M = G \frac{M_S M_M}{R_M^2}, \quad (1)$$

где M_M — масса Марса, M_S — масса Солнца, G — гравитационная постоянная. Аналогичное уравнение запишем для Земли:

$$M_E \omega_E^2 R_E = G \frac{M_S M_E}{R_E^2}. \quad (2)$$

Разделив уравнение (2) на уравнение (1), получим:

$$\frac{\omega_E}{\omega_M} = \frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{R_M}{R_E} \right)^{3/2} = k. \quad (3)$$

Отсюда находим искомый радиус орбиты Марса:

$$R_M = R_E k^{2/3} = 1,52 R_E = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ м.}$$

Равенство (3) отражает, так называемый, третий закон Кеплера. В более общем случае он связывает периоды обращения планет с большими полуосями a их эллиптических орбит:

$$\frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{a_M}{a_E} \right)^{3/2}. \quad (4)$$

В положении противостояния Земля, Марс и Солнце лежат на одной прямой (рис. 57). Если радиус-векторы Земли и Марса вращаются с разными

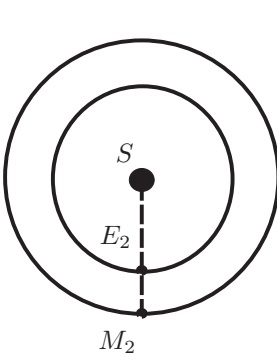


Рис. 57.

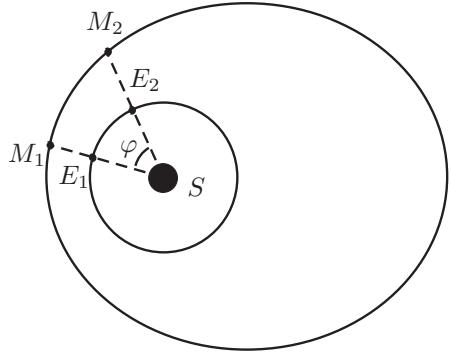


Рис. 58.

угловыми скоростями ω_M и ω_E , то очередное противостояние наступит через промежуток времени τ , в течение которого разность углов поворота окажется равной 2π :

$$\omega_E \tau - \omega_M \tau = 2\pi.$$

Отсюда находим

$$\tau = \frac{T_E k}{k - 1} \approx 780 \text{ суток}.$$

Чтобы найти угловое смещение φ линии противостояния за промежуток времени τ , следует принять во внимание, что за это время радиус-вектор Марса повернётся на угол, превышающий 2π на искомую величину φ :

$$\varphi = \omega_M \tau - 2\pi = 2\pi \frac{2 - k}{k - 1} \approx 49^\circ.$$

Для выполнения заданий пункта 3 рассмотрим траекторию Марса в виде эллипса, изображённого на рисунке 58. Лучи $M_1 S$ и $M_2 S$, ограничивающие угол φ — линии последовательных противостояний вблизи точки орбиты Марса, удалённой от Солнца приблизительно на расстояние R . Вероятно, угол φ зависит от того, в каком месте эллиптической орбиты окажутся линии

последовательных противостояний. Тогда и время между этими противостояниями должно определяться их положениями на орбите. Для проверки этого предположения следует вычислить промежуток времени τ между противостояниями как функцию расстояния R между Марсом и Солнцем.

За время τ Марс совершает один оборот и дополнительно проходит дугу M_1M_2 , а Земля — два оборота и дугу E_1E_2 . Поэтому

$$\tau = T_M + t_M = 2T_E + t_E, \quad (5)$$

где t_M — время движения Марса по дуге M_1M_2 , а t_E — время движения Земли по дуге E_1E_2 .

Для Земли

$$t_E = \frac{\varphi}{\omega_E} = \frac{\varphi}{2\pi} T_E, \quad (6)$$

где φ — угловое перемещение линии противостояния. Время t_M найдём, воспользовавшись вторым законом Кеплера, который говорит о том, что секторная скорость движения планеты по эллиптической орбите в любой момент одинакова. Площадь сектора SM_1M_2 , ограниченного углом φ и траекторией Марса, равна $\varphi R^2/2$. Считая эллиптичность орбиты Марса малой, можно приближённо оценить её площадь как $\pi \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} \right)^2$. Таким образом, для времени t_M движения Марса по дуге M_1M_2 находим следующее выражение

$$t_M = T_M \frac{\varphi R^2/2}{\pi \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2} \right)^2} = T_M \frac{2\varphi}{\pi} \frac{R^2}{(R_{\max} + R_{\min})^2}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем:

$$\frac{t_M}{t_E} = \frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2.$$

Подставим это соотношение в (5):

$$\tau = T_M + t_E \frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2 = 2T_E + t_E.$$

Отсюда найдём вначале

$$t_E = \frac{2T_E - T_M}{\frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2 - 1}, \quad \tau = 2T_E + \frac{2T_E - T_M}{\frac{T_M}{T_E} \left(\frac{2R}{R_{\max} + R_{\min}} \right)^2 - 1}. \quad (8)$$

Величина $2T_E - T_M = 2T_E - kT_E = T_E(2 - k) > 0$. Кроме того, поскольку R изменяется в пределах от $R_{\min}$ до $R_{\max}$, то из (8) следует, что наименьшему $R = R_{\min}$ соответствует наибольшее значение $\tau = \tau_{\max}$, а наибольшему

$R = R_{\max}$ — наименьшее $\tau = \tau_{\min}$. Воспользуемся упомянутым выше третьим законом Кеплера для системы Марс–Земля

$$\frac{T_M}{T_E} = \left(\frac{R_{\max} + R_{\min}}{2R_E} \right)^{3/2}.$$

Подставляя найденное соотношение в (8), найдём

$$\tau = 2T_E + \frac{2T_E - T_M}{k^{-1/3} \left(\frac{R}{R_E} \right)^2 - 1}.$$

Отсюда, подставляя численные значения, получим:

$$R_{\min} = k^{1/6} R_E \sqrt{\frac{\tau_{\max} - T_M}{\tau_{\max} - 2T_E}} \approx 1,38R_E \approx 2,07 \cdot 10^{11} \text{ м};$$

$$R_{\max} = k^{1/6} R_E \sqrt{\frac{\tau_{\min} - T_M}{\tau_{\min} - 2T_E}} \approx 1,68R_E \approx 2,52 \cdot 10^{11} \text{ м}.$$

Величина

$$a = \frac{1}{2}(R_{\min} + R_{\max}) = 1,53R_E$$

представляет собой большую полуось эллиптической орбиты Марса, связанную с периодом T_M третьим законом Кеплера (4). Сравнение полученных результатов и реальных значений $R_{\min} = 1,38R_E$, $R_{\max} = 1,66R_E$, $a = 1,52R_E$ показывает, что принятые в решении задачи приближения неплохо описывают исследуемое здесь явление не только качественно, но и количественно.

Решение данной задачи иллюстрирует типичную для физики ситуацию, когда нужно найти величины, не поддающиеся непосредственным измерениям. В рассматриваемом примере размер орбиты Марса «определяется часами».

Задача 1.23 (Сосуд)

Сосуд может прийти в движение под действием силы реакции вытекающей воды R (рис. 59). Для её нахождения применим закон изменения импульса к воде, которая вытекает из сосуда за малый промежуток времени Δt :

$$\rho \sigma v^2 \Delta t = R \Delta t, \quad (1)$$

где v — скорость вытекающей воды, а ρ — плотность воды. Скорость v можно найти, приравнявая работу сил гидростатического давления и энергию вытекающей струи:

$$P \sigma v \Delta t = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \sigma v \Delta t v^2,$$

где $P = \rho gh$ — давление жидкости на уровне пробки. Подставляя это значение, получим

$$v^2 = 2gh. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$R = 2\rho\sigma gh. \quad (3)$$

К сосуду с водой применим второй закон Ньютона:

$$(m + \rho gSh)a = 2\rho\sigma gh - \mu(m + \rho gSh)g, \quad \text{отсюда} \quad \mu = \frac{2\rho\sigma gh - (m + \rho gSh)a}{(m + \rho gSh)g}.$$

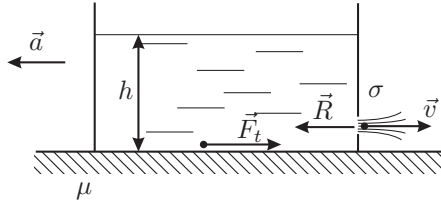


Рис. 59.

Из ответа видно, что чем с меньшим ускорением a приходит в движение сосуд, тем больше коэффициент трения μ . Максимальное значение коэффициента трения, при котором сосуд ещё может скользить по поверхности,

$$\mu_1 = \frac{2\rho\sigma gh}{(m + \rho gSh)g}.$$

Если же $\mu > \mu_1$ то сосуд останется на месте.

Задача 1.24 (Конус)

Если бы вместо конуса в объёме, который он занимает, находилась та же самая жидкость, то она была бы в положении равновесия. Это означает, что на конус действует сила Архимеда, направленная вверх и равная по величине силе тяжести, которая действует на жидкость равного с конусом объёма:

$$F_a = \frac{\rho gSH}{3} = \frac{\rho g\pi D^2}{12}H.$$

Эта сила складывается из двух сил: силы $\vec{f}$, с которой жидкость действует на основание конуса, и той силы $\vec{F}$, которую нужно по условию задачи найти (рис. 60). Сила, действующая на основание конуса, направлена вдоль его оси и равна по величине произведению площади основания на среднее давление.

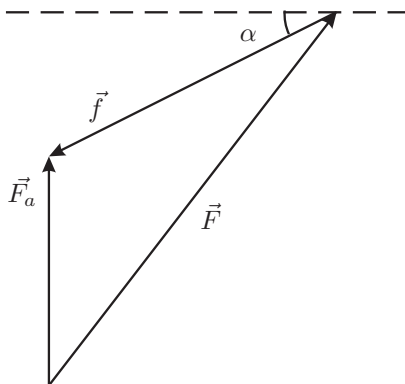


Рис. 60.

В силу симметрии формы основания конуса и однородности поля тяжести это среднее давление равно ρgh . Отсюда

$$f = \frac{\rho gh \pi D^2}{4}.$$

Согласно рисунку 60 горизонтальная составляющая силы $\vec{F}$ равна:

$$F_1 = f \cos \alpha = \rho gh \frac{\pi D^2}{4} \cos \alpha,$$

а вертикальная составляющая

$$F_2 = F_a + f \sin \alpha = \rho g H \frac{\pi D^2}{12} + \rho gh \frac{\pi D^2}{4} \sin \alpha.$$

Модуль искомой силы $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

Задача 1.25 (Пробирка)

На рисунке 61 слева изображена пробирка в положении равновесия, а справа — спустя время t от начала движения. В качестве искомого уравнения движения найдём функцию $x = x(t)$, описывающую изменение со временем координаты x края пробирки, отсчитываемой от положения равновесия (рис. 61). Чтобы найти это уравнение, применим второй закон Ньютона:

$$ma_x = m - F_a, \quad \text{или} \quad ma_x = m - \rho S(L - h + x), \quad (1)$$

где a_x — проекция ускорения на ось x , ρ — плотность воды, h — расстояние от верхнего края пробирки в состоянии равновесия до уровня воды (рис. 61),

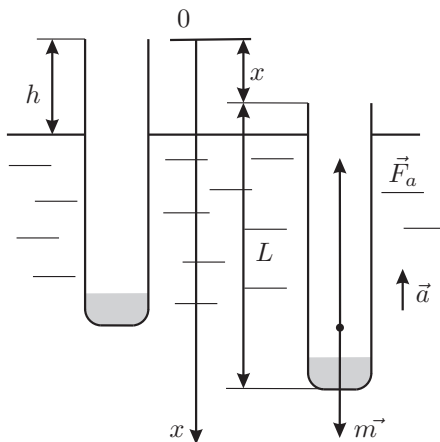


Рис. 61.

а $F_a = \rho S(L - h + x)$ — сила Архимеда. В положении равновесия $a_x = 0$ и из (1) получается

$$m = \rho S(L - h). \quad (2)$$

Уравнение (1) после подстановки (2) принимает вид:

$$a_x = -\frac{\rho S}{m}x.$$

Получилось динамическое уравнение гармонических колебаний с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S}{m}} = 8,7 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, координата x меняется со временем по закону

$$x = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда колебаний, а φ — фаза при $t = 0$. Эти параметры находятся из начальных условий. В соответствии с условием задачи наибольшее отклонение пробирки $A = h$ было в начальный момент времени. Из (2) следует, что $h = L - (m/\rho S) = 3,0$ см. Для начального момента времени $x = h \sin(\omega \cdot 0 + \varphi)$, и, следовательно, $\varphi = \pi/2$. Таким образом, окончательно находим:

$$x = h \cos(\omega t) \approx 3,0 \cos(8,7 \cdot t),$$

где x измеряется в сантиметрах, а t — в секундах.

Задача 1.26* (Цунами)

Пусть цунами перемещается вдоль оси x со скоростью v . Рассмотрим движение частиц воды в системе отсчёта, связанной с горбом волны (рис. 62).

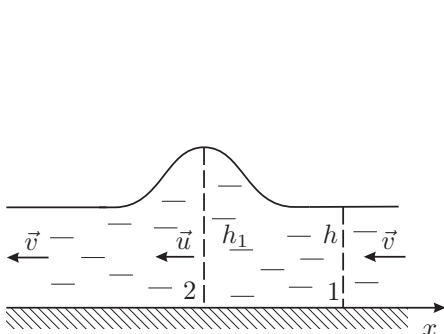


Рис. 62.

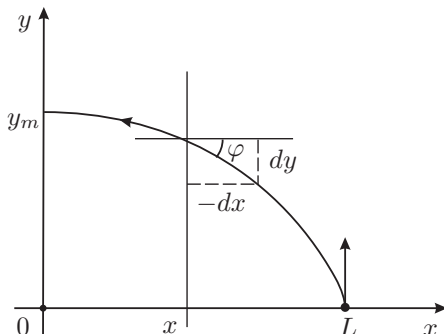


Рис. 63.

Вдали от горба в сечении 1 вода относительно этой системы отсчёта движется со скоростью v в направлении, противоположном оси x . В области горба горизонтальная составляющая скорости частиц воды равна u . Вследствие несжимаемости жидкости, массы воды, проходящей за время Δt через сечения 1 и 2, равны:

$$\rho h b v \Delta t = \rho h_1 b u \Delta t,$$

где ρ — плотность воды, b — толщина рассматриваемого слоя воды в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка. Из полученного соотношения следует

$$u = v \frac{h}{h_1}. \quad (1)$$

Применим к воде рассматриваемого слоя, которая заключена в объёме между сечениями 1 и 2, закон изменения импульса за время Δt :

$$\rho v b h v \Delta t - \rho u b h_1 v \Delta t = \frac{1}{2}(-\rho g h^2 b + \rho g h_1^2 b) \Delta t, \quad \text{или} \quad h v (v - u) = \frac{g}{2} (h_1 - h) (h + h_1),$$

где g — ускорение свободного падения, а множитель $1/2$ учитывает линейное уменьшение давления с высотой.

Подставляя в последнее выражение (1) и учитывая, что высота волны существенно меньше глубины водоёма, то есть $h + h_1 \approx 2h$, получим

$$v \approx \sqrt{gh}.$$

Этот результат ограничен требованием малости глубины h по сравнению с длиной волны λ . В противном случае в волновое движение вовлекается только слой воды глубиной порядка λ . Тогда скорость волны выражается приближённой формулой

$$v \sim \sqrt{g\lambda}, \quad \text{или точнее} \quad v = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}.$$

Скорость волн, о которых идёт речь во втором пункте, уменьшается при приближении к берегу, в соответствии с полученным выше результатом:

$$v(x) = \sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}, \quad (2)$$

где α — угол наклона к горизонту морского дна. Эта зависимость приводит к искривлению линии (волнового луча), вдоль которой распространяется волна. Изменение направления волнового луча определяется соотношением, которое чаще всего используется для оптических волн:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (3)$$

где φ_1 и φ_2 — углы падения и преломления луча на границе сред, скорости распространения волн в которых равны соответственно v_1 и v_2 . Соотношение (3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2} = \frac{\sin \varphi}{v} = \text{const}. \quad (4)$$

В таком виде формула (4) применима и к непрерывному изменению угла φ (искривлению луча), если скорость волны плавно изменяется от точки к точке.

Для определения положения точки на поверхности моря введём декартову систему координат так, чтобы ось y была направлена вдоль берега, а ось x проходила через точку с координатой $x = L$, в которой произошёл взрыв, вызвавший волны. Рассмотрим искривление луча, попадающего в точку берега с координатой y_m , наиболее удалённую от места взрыва (рис. 63). Из этого рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dy}{dx}. \quad (5)$$

В соотношение (3) подставим выражение (2) и учтём, что при $x \rightarrow L$ угол падения $\varphi \rightarrow \pi/2$:

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{gx \operatorname{tg} \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{gL \operatorname{tg} \alpha}}, \quad \text{отсюда} \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{x}{L}}.$$

Последнее выражение позволяет переписать (5) в виде:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{x}{L - x}}.$$

Остаётся проинтегрировать это уравнение:

$$y_m = - \int_L^0 \sqrt{\frac{x}{L - x}} dx.$$

Используя подстановку $x = L \sin^2 \beta$, получим

$$y_m = L \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \beta}{\cos \beta} 2 \cos \beta \sin \beta d\beta = L \int_0^{\pi/2} 2 \sin^2 \beta d\beta = L \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, длина участка берега, до которого дойдут волны, порождённые взрывом, равна $2y_m = \pi L$.

Задача 1.27* (Упругий жгут)

Для решения задачи нужно проанализировать движение системы. Запишем для установившегося движения шарика по окружности уравнение второго закона Ньютона:

$$M\omega^2 L = F, \quad (1)$$

где F — сила упругости, приложенная к шарiku (рис. 64). Поскольку деформация жгута неоднородна, для нахождения F следует рассмотреть движение малого его элемента длиной dx и массой dm (рис. 64). Длина этого элемента

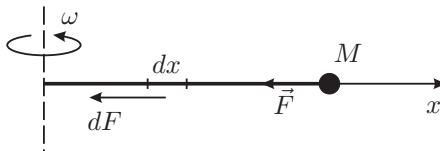


Рис. 64.

в недеформированном состоянии равна dx_0 . Запишем для него второй закон Ньютона:

$$dm\omega^2 x = dF(x), \quad (2)$$

где x — координата выбранного элемента, $dF(x)$ — действующая на него сила упругости. Масса элемента $dm = \rho_0 S dx_0 = \rho(x) S dx$, где ρ_0 — плотность недеформированного жгута, а $\rho(x)$ — плотность жгута в точке x . В соответствии

с законом Гука,

$$F(x) = -SE \frac{dx - dx_0}{dx_0} = -SE \left(\frac{\rho_0}{\rho(x)} - 1 \right). \quad (3)$$

Подставляя dm в (2), получим:

$$\rho(x)S\omega^2 x dx = ES\rho_0 \frac{d\rho}{\rho^2(x)}, \text{ или}$$

$$x dx = A \frac{d\rho}{\rho^3(x)}, \quad (4)$$

$$A = \frac{E\rho_0}{\omega^2}. \quad (5)$$

Проинтегрировав (4) от x до L , получим

$$x^2 - L^2 = A \left(\frac{1}{\rho^2(L)} - \frac{1}{\rho^2(x)} \right). \quad (6)$$

Величину $\rho(L)$ выразим из (1), подставив в неё (3):

$$\frac{1}{\rho(L)} = \frac{1}{\rho_0} \left(1 + \frac{M\omega^2 L}{ES} \right). \quad (7)$$

Из (6) и (7) получим:

$$\frac{1}{\rho^2(x)} = \frac{1}{A} (a^2 - x^2), \quad \text{где} \quad a^2 = A \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{ML}{AS} \right)^2 + L^2.$$

Функция $\rho(x)$ позволяет выразить массу жгута следующим образом:

$$m = S \int_0^L \rho(x) dx = S \int_0^L \frac{\sqrt{A} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (8)$$

Вычислим интеграл в (8) и подставим $m = \rho_0 S L_0$:

$$\begin{aligned} \rho_0 S L_0 &= S \sqrt{A} \arcsin \frac{L}{a}, \quad \text{или} \\ \sin \left(\frac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{AL^2} \left(\frac{A}{\rho_0} + \frac{ML}{S} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Формула (9) содержит в неявном виде искомую зависимость L от ω , поскольку $A \sim \omega^{-2}$ согласно (5).

Проанализируем эту зависимость. При $\omega \rightarrow 0$ ($A \rightarrow \infty$), получаем $L_0 \approx L$. Естественно, при медленном вращении жгут деформируется незначительно. При $L \rightarrow \infty$ в правой части (9) получается $\left(1 + \frac{M^2}{AS^2}\right)^{-1/2}$. Левую часть преобразуем с помощью тригонометрического тождества

$$\sin \alpha = \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right)^{-1/2}.$$

Тогда получим

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\rho_0 L_0}{\sqrt{A}} \right) = \frac{\sqrt{A} S}{M},$$

или после подстановки (5)

$$\operatorname{tg} \left(\omega L_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{E}} \right) = S \frac{\sqrt{\rho_0 E}}{M \omega}. \quad (10)$$

Таким образом, когда угловая скорость стремится к критическому значению, являющемуся решением уравнения (10), длина нити неограниченно увеличивается. Проще осознать эту особенность для невесомой нити. При $\rho_0 \rightarrow 0$ из (10) получается

$$M \omega^2 L_0 = S E. \quad (11)$$

Уравнение движения шарика в этом случае имеет вид

$$M \omega^2 L = \frac{S E}{L_0} (L - L_0) = f(L). \quad (12)$$

Корень этого уравнения и определяет длину L при установившемся движении. Графическое решение этого уравнения представлено на рисунке 65 (рядом с обозначениями углов указаны значения их тангенсов). Наклон прямой, проходящей через начало координат, увеличивается с ростом ω . При достижении критического значения, совпадающего с решением уравнения (11), прямые оказываются параллельными, то есть $L \rightarrow \infty$. Сила упругости не в состоянии обеспечить необходимого центростремительного ускорения.

Наглядное представление функциональных зависимостей дают графики. Построить графики функций, заданных неявно или громоздкими выражениями, помогает компьютер. На рисунке 66 изображены полученные с помощью MathCAD график функции $L(\omega)$, построенный по формуле (9) (сплошная линия), а также график аналогичной зависимости, даваемой формулой (12) (штрихованная линия). Видно, что различие в поведении массивного жгута и невесомого проявляется только вблизи критических угловых скоростей ω_1 и ω_2 (рис. 66). Для невесомого жгута эта скорость ω_2 больше.

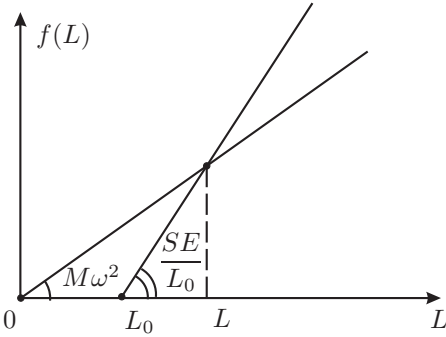


Рис. 65.

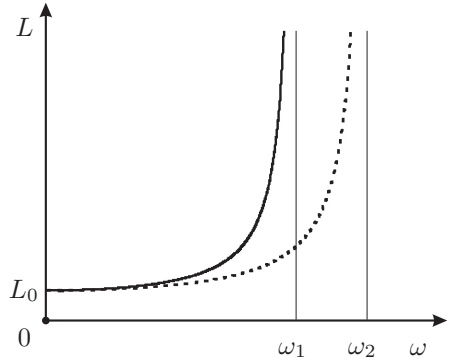


Рис. 66.

Задача 1.28 (Шарик и стержень)

Для решения задачи нужно проанализировать следующие этапы движений: опускание шарика; столкновение его со стержнем; последующий подъём шарика и отклонение стержня. На первом и третьем этапах сохраняется механическая энергия. Зато на втором этапе сохраняется момент импульса системы из-за кратковременности удара.

Применяя закон сохранения энергии для первого этапа

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh,$$

получим скорость шарика $v_0 = \sqrt{2gh}$, с которой он ударяется о конец стержня. Далее приравниваем момент импульса шарика со стержнем до столкновения и после:

$$mv_0L = mvL + I\omega, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость, которую приобрёл стержень в результате неупругого удара, $I = ML^2/3$ — момент инерции стержня, $v = \omega L$ — скорость конца стержня и шарика непосредственно после удара. Выразим эту скорость из (1):

$$v = \frac{3m}{3m + M}v_0. \quad (2)$$

Будет ли на следующем этапе движения шарик отставать от конца стержня? Для ответа на этот вопрос найдём на какую высоту поднялись бы шарик и конец стержня, если бы они не взаимодействовали на этом этапе движения. Для шарика закон сохранения энергии даёт высоту подъёма $h_b = v^2/2g$. Применим тот же закон к стержню:

$$Mg \frac{h_r}{2} = \frac{I}{2} \left(\frac{v}{L} \right)^2.$$

Отсюда получаем

$$h_r = \frac{v^2}{3g} < h_b.$$

Таким образом, шарик поднялся бы выше, если бы ему не мешал стержень. Следовательно, шарик и стержень будут двигаться на данном этапе вместе. Применим для этого совместного подъёма на высоту h_x закон сохранения энергии:

$$Mg\frac{h_x}{2} + mgh_x = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Отсюда находим

$$h_x = \frac{v^2(M+3m)}{3g(M+2m)} = \frac{6m^2h}{(M+3m)(M+2m)}.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда первоначально отклонённый стержень ударяет шарик, висающий на вертикальной нити. Скорость v_0 конца в момент удара находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mgh}{2} = \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{L}\right)^2,$$

откуда получаем $v_0 = \sqrt{3gh}$. Скорость шарика v непосредственно после удара находим из закона сохранения момента импульса:

$$I\frac{v_0}{L} = mvL + I\frac{v}{L}, \quad v = \frac{Mv_0}{M+3m}.$$

Как уже было выяснено при рассмотрении предыдущего случая, шарик поднимется после удара на большую высоту, и теперь ему не будет мешать стержень. В полученные ранее формулы для высот подъёма нужно лишь подставить новые значения скорости v :

$$h_r = \frac{v^2}{3g} = \frac{1}{3g}\left(\frac{Mv_0}{M+3m}\right)^2 = \frac{1}{3g}\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2 3gh = h\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2.$$

$$h_b = \frac{v^2}{2g} = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2 h.$$

Итак, после удара шарика стержень движется вместе с ним, а после удара стержня о шарик конец стержня поднимается на высоту, составляющую $2/3$ от высоты подъёма шарика.

Задача 1.29 (Катушка)

Для нахождения ускорения a нити запишем второй закон Ньютона для её свисающей с катушки части:

$$\rho x a = \rho x g - F, \quad (1)$$

где F — сила натяжения, действующая на рассматриваемую часть нити длиной x (рис. 67). Запишем также уравнение вращательного движения катушки:

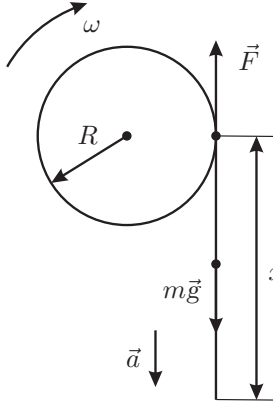


Рис. 67.

$$(J + \rho(L - x)R^2)\varepsilon = FR, \quad (2)$$

где ε — угловое ускорение цилиндра, второе слагаемое в скобке — момент инерции части нити, намотанной на катушку. Так как нить не скользит по катушке, $\varepsilon = a/R$. С учётом этого из уравнений (1) и (2) находим ответ:

$$a = \frac{\rho g R^2 x}{J + \rho L R^2}.$$

Таким образом, ускорение a пропорциональна длине свисающей части x .

Для нахождения скорости нити применим закон сохранения механической энергии:

$$\rho g x \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} (J + \rho(L - x)R^2) \omega^2 + \frac{1}{2} \rho x v^2,$$

где ω — угловая скорость вращения катушки. Левая часть уравнения — работа силы тяжести при опускании нити, определяемая изменением положения центра масс. Подставляя сюда $\omega = v/R$, получим после преобразований:

$$v = R x \sqrt{\frac{\rho g}{J + \rho L R^2}}.$$

Так что не только ускорение, но и скорость v пропорциональна x .

Задача 1.30 (Шайба)

Применим к шайбе закон изменения энергии, а также закон изменения импульса в проекциях на ось x , направленную вдоль стенки, и ось y , перпендикулярную к ней:

$$\frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} - \frac{mv_{0x}^2}{2} - \frac{mv_{0y}^2}{2} = -\mu N \Delta S. \quad (1)$$

$$mv_x - mv_{0x} = -\mu N \Delta t, \quad (2)$$

$$mv_y - mv_{0y} = N \Delta t. \quad (3)$$

Здесь $v_x = v \sin \psi$, $v_y = v \cos \psi$, $v_{0x} = v_0 \sin \varphi$, $v_{0y} = v_0 \cos \varphi$, N — сила нормальной реакции стенки, ΔS — смещение шайбы вдоль стенки за время удара Δt . Предполагая, что шайба в течение всего времени Δt скользит по стенке, величину ΔS можно приблизительно выразить так:

$$\Delta S = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})\Delta t.$$

Подставляя это значение, можно из (1) и (2) получить $v_y^2 = v_{0y}^2$. Следовательно, при ударе сохраняется модуль нормальной к стенке составляющей скорости ($v_y = v_{0y}$). Тогда из (2) и (3) получим:

$$\frac{v_x - v_{0x}}{2v_y} = -\mu, \quad \text{или} \quad \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_{0x}}{v_y} - 2\mu,$$

или

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi - 2\mu. \quad (4)$$

Скорость шайбы после удара о стенку

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \cos \varphi \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi - 2\mu)^2}.$$

Из (4) следует, что быстро вращающаяся шайба отскочит от стенки в перпендикулярном к ней направлении ($\psi = 0$), если $\mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2}$, и в обратном направлении ($\psi = -\varphi$), если $\mu = \operatorname{tg} \varphi$.

В течение времени столкновения шайба скользит по стене, в результате чего под действием силы трения скольжения скорость вращения шайбы уменьшается. Для нахождения изменения угловой скорости следует применить закон изменения момента импульса:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\mu N R.$$

Интегрируем это уравнение:

$$I(\omega - \omega_0) = -\mu N R \Delta t.$$

Учтём (3):

$$I(\omega - \omega_0) = -2\mu m R v_0 \cos \varphi.$$

Отсюда, подставляя $I = mR^2/2$, найдём

$$\omega = \omega_0 - \frac{4\mu v_0 \cos \varphi}{R}.$$

Ответ справедлив при заданном в условии ограничении $\omega_0 > \frac{4\mu v_0 \cos \varphi}{R}$, накладываемом на ω_0 . Если

$$\mu \geq \frac{\omega_0 R}{4v_0 \cos \varphi},$$

то шайба в процессе столкновения перестанет вращаться.

Задача 1.31* (Склеенный обруч)

Для ответа на первый вопрос задачи следует применить закон сохранения энергии:

$$(m_2 - m_1)g \cdot 2y_0 = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (1)$$

где y_0 — расстояние от оси обруча до центра масс его половинок, I — момент инерции обруча относительно точки опоры, $\omega = v_0/R$ — начальная угловая скорость вращения обруча. Для определения величины y_0 воспользуемся формулой, по которой находится координата центра масс, отсчитываемая от диаметра половины обруча:

$$y_0 = \frac{1}{m} \int y \, dm,$$

где m — масса половинки обруча, а y — расстояние от элемента dm до диаметра. Из рисунка 68 видно, что $y = R \sin \varphi$, $dm = m \cdot d\varphi/\pi$. Поэтому получим

$$y_0 = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2R}{\pi}. \quad (2)$$

Входящий в (1) момент инерции I равен сумме моментов инерции каждой половинки $I = I_1 + I_2$. Моменты инерции половин относительно оси обруча равны: $I_{10} = m_1 R^2$, $I_{20} = m_2 R^2$. По теореме Штейнера эти моменты можно связать с моментами инерции I_{1c} и I_{2c} относительно центров масс. Получаем:

$$I_{10} = m_1 R^2 = I_{1c} + m_1 y_0^2,$$

$$I_{20} = m_2 R^2 = I_{2c} + m_2 y_0^2.$$

Отсюда:

$$I_{1c} = m_1 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), \quad I_{2c} = m_2 R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

По той же теореме Штейнера найдём

$$I_1 = I_{1c} + m_1(R + y_0)^2, \quad I_2 = I_{2c} + m_2(R - y_0)^2.$$

Складывая I_1 и I_2 , получим искомый момент инерции обруча:

$$I = I_1 + I_2 = 2R^2 \left(m_1 \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + m_2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \right). \quad (3)$$

Подставляем полученные выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$(m_2 - m_1)g \frac{4R}{\pi} = \frac{1}{2} 2R^2 \left(m_1 \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) + m_2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \right) \frac{v_0^2}{R^2},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4(m_2 - m_1)gR}{m_1(\pi + 2) + m_2(\pi - 2)}}.$$

Как видим, чем больше разность $(m_2 - m_1)$, тем больше нужно сообщить скорость для того, чтобы обруч сделал полный оборот. Однородный обруч ($m_2 = m_1$) будет в отсутствие проскальзывания равномерно катиться после сообщения ему сколь угодно малой скорости v_0 .

Для нахождения периода малых колебаний системы, нужно привести динамическое уравнение к виду $\ddot{x} = -\omega^2 x$ (точка означает дифференцирование по времени), и тогда $T = 2\pi/\omega$. Динамическое уравнение можно получить, записав выражение для энергии системы при небольшом отклонении её от положения равновесия. Для рассматриваемого обруча при повороте его на малый угол φ от положения равновесия, получим:

$$E = (m_2 - m_1)gy_0(1 - \cos \varphi) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2, \quad (4)$$

где $\dot{\varphi} = \omega$. В отсутствие трения энергия сохраняется, то есть $\dot{E} = 0$. Дифференцируя (4) и учитывая малость угла φ , получим:

$$(m_2 - m_1)gy_0 \sin \varphi \dot{\varphi} + I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{(m_2 - m_1)gy_0}{I}\varphi.$$

Следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(m_2 - m_1)gy_0}}.$$

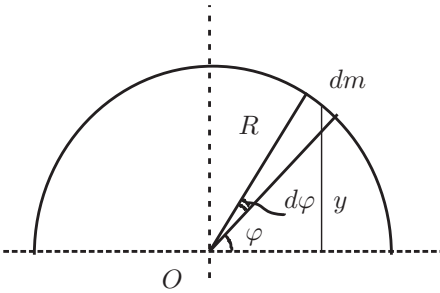


Рис. 68.

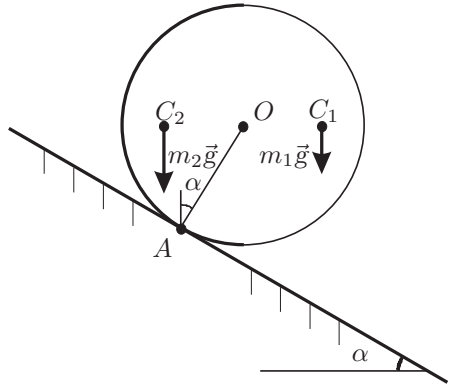


Рис. 69.

Подставляя сюда (2) и (3), получим ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\pi \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1} - 2}.$$

При $m_2 \rightarrow m_1$ период $T \rightarrow \infty$. Это и означает, что колебательное движение обруча сменяется его вращением.

При наклоне опорной плоскости качению препятствует тяжёлая половина обруча: момент её силы тяжести относительно точки опоры при малых углах наклона уравнивает момент силы тяжести лёгкой половины. Когда угол наклона становится таким, что центры масс половин C_1 и C_2 оказываются на одном горизонтальном уровне (рис. 69), момент силы $m_2 \vec{g}$ относительно точки A достигает максимального значения. При дальнейшем увеличении угла α он уже не может компенсировать увеличивающийся момент силы $m_1 \vec{g}$. Равенство моментов сил $m_1 \vec{g}$ и $m_2 \vec{g}$ относительно точки A для критического положения, изображённого на рисунке 69, и определяет максимальный угол наклона $\alpha = \alpha_{\max}$:

$$\alpha_{\max} = \arcsin \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right).$$

Теплота и молекулярная физика

Задача 2.1 (Похолодание)

Количество теплоты, отдаваемое нагретым телом, пропорционально разности температур тела и среды, в которую отдаётся тепло. Поэтому количество теплоты, отдаваемое батареей отопления в первом случае (до похолодания)

$$Q_1 = k(T_0 - T_{k1}),$$

где k — коэффициент теплоотдачи батареи. В стационарном режиме то же количество теплоты передаётся на улицу:

$$Q_1 = k(T_0 - T_{k1}) = K(T_{k1} - T_1), \quad (1)$$

где K — коэффициент теплоотдачи здания. Аналогично, после похолодания:

$$Q_2 = k(T_0 - T_{k2}) = K(T_{k2} - T_2). \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$T_{k2} = \frac{T_0 + (K/k)T_2}{1 + (K/k)}, \quad \text{где} \quad \frac{K}{k} = \frac{T_0 - T_{k1}}{T_{k1} - T_1}.$$

После подстановки численных значений находим: $K/k \approx 0,86$; $T_{k2} \approx 15,8^\circ\text{C}$. Чтобы жильцы чувствовали себя комфортно, коммунальщики должны при наступлении морозов повышать температуру батарей отопления. К сожалению, не везде так поступают.

Задача 2.2 (Электрочайник)

Температура чайника при мощности P перестаёт увеличиваться, достигнув установившегося значения t , когда энергия, потребляемая из сети за время $d\tau$, целиком передаётся в окружающую среду, то есть:

$$P d\tau = k(t - t_0) d\tau, \quad (1)$$

где k — коэффициент теплоотдачи, t_0 — температура окружающей среды. Линейная зависимость P от $(t - t_0)$, описываемая формулой (1), подтверждается результатами, приведёнными в таблице 1. Таблица также позволяет найти k как угловой коэффициент этой зависимости

$$k = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 5 \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{К}}. \quad (2)$$

При охлаждении чайника с горячей водой справедливо равенство

$$(cm + C_0)dt = -k(t - t_0)d\tau, \quad (3)$$

где m — масса воды в чайнике, dt — изменение его температуры за время $d\tau$. Перепишем уравнение (3):

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{k(t - t_0)}{cm + C_0}.$$

В начале охлаждения, при $t = t_f = 80^\circ\text{C}$:

$$B = \frac{dt}{d\tau} = -\frac{k(t_f - t_0)}{cm + C_0}. \quad (4)$$

Отношение $B = dt/d\tau$ равно угловому коэффициенту графика зависимости $t(\tau)$ в точке $\tau = 0$. Этот угловой коэффициент можно приближённо найти из таблицы 2 по двум-тём первым точкам:

$$B \approx -0,080 \frac{\text{K}}{\text{с}}.$$

Подставляя B в формулу (4), получим объём V воды в чайнике

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{-k(t_f - t_0) - BC_0}{Bc\rho} \approx 0,9 \text{ л.}$$

Если проинтегрировать уравнение (3), то получится:

$$t - t_0 = (t_f - t_0)e^{-\frac{k\tau}{cm + C_0}} = (t_f - t_0)e^{-B\frac{\tau}{t_f - t_0}}.$$

На рисунке 70 представлены точки, полученные из таблицы 2, и график этой функции при найденном значении B . Видно, что выполненные расчёты согласуются с экспериментом.

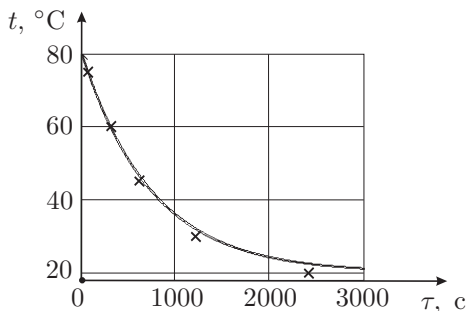


Рис. 70.

Задача 2.3 (Нагреватель)

Представим результаты эксперимента в виде графика (рис. 71). Из рисунка видно, что мощность нагревателя резко увеличивается вблизи точки $T = T_1 = 233^\circ\text{C}$. Это можно объяснить тем, что в интервале температур от 232°C до 234°C происходит плавление образца. Таким образом, температура плавления приблизительно равна $T_1 = 233^\circ\text{C}$. Для вычисления удельной теплоты плавления применим закон изменения энергии за единичный промежуток времени вблизи температуры T вдали от T_1 :

$$P = Q_1 + k(T - T_0),$$

где Q_1 — количество теплоты, которая в единицу времени идёт на нагревание установки с образцом, второе слагаемое — количество теплоты, отдаваемое в окружающую среду, температура которой T_0 , а k — некоторая постоянная.

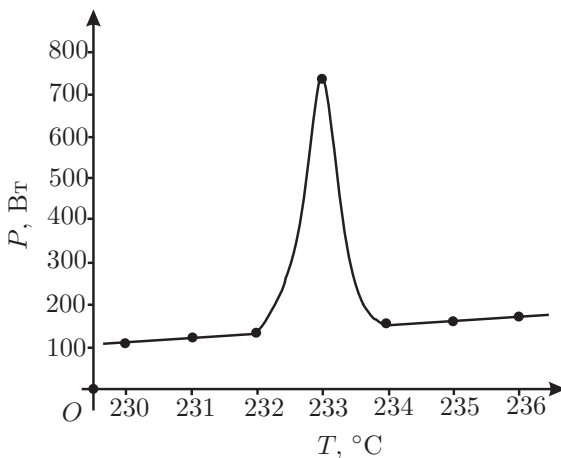


Рис. 71.

Мощность нагревателя при плавлении, как следует из эксперимента, дополнительно возрастает на величину $\Delta P = 596$ Вт. Это происходит в течение времени Δt нагревания от 232°C до 233°C . За это время «избыточное» количество теплоты, отдаваемое нагревателем, расходуется на плавление образца, то есть:

$$\Delta P \Delta t = \lambda m, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{\Delta P \Delta T}{(dT/dt)m},$$

полагая $\Delta T \approx 1,0^\circ\text{C}$, находим $\lambda \approx 60 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.

Задача 2.4 (Сосуд с водой)

По определению, теплоёмкость

$$C = \frac{\delta Q}{dt},$$

где δQ — количество теплоты, которое получает система при изменении её температуры на dt .

Вода в интервале температур $-30^\circ\text{C} \leq t \leq 0^\circ\text{C}$ находится в твёрдом состоянии (лёд). Здесь

$$\delta Q = c_i m dt + c_0 dt,$$

где c_i — удельная теплоёмкость льда, m — масса воды (льда) в сосуде, c_0 — теплоёмкость сосуда. Так что при $-30^\circ\text{C} \leq t \leq 0^\circ\text{C}$

$$C = c_i m + c_0. \quad (1)$$

Плавление происходит при постоянной температуре ($dt = 0$), но требует сообщения некоторого количества теплоты. Таким образом, при $t = 0^\circ\text{C}$ теплоёмкость C бесконечно велика.

В интервале $0^\circ\text{C} \leq t \leq 100^\circ\text{C}$ нагревается жидкая вода. Аналогично (1), получим

$$C = c_w m + c_0, \quad (2)$$

где c_w — удельная теплоёмкость воды.

При $t = 100^\circ\text{C}$ вода кипит, поскольку давление под поршнем равно нормальному атмосферному давлению. Как и при других агрегатных превращениях, теплоёмкость C при температуре кипения бесконечно велика.

Последующее нагревание водяного пара даёт, аналогично (1),

$$C = c_v m + c_0, \quad (3)$$

где c_v — теплоёмкость пара. Заметим, что $c_v < c_i < c_w$.

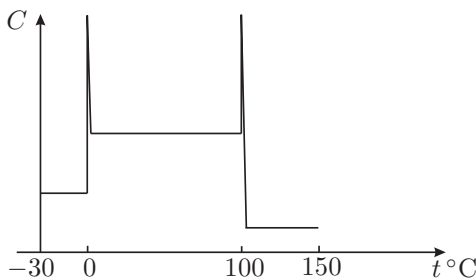


Рис. 72.

Описанные здесь температурные изменения теплоёмкости системы качественно отражает график, изображённый на рисунке 72.

Задача 2.5 (Стопка монет)

Поскольку число монет очень велико, то уменьшение на единицу числа звеньев, состоящих из монеты и бумажной прокладки, не изменит теплопроводности цилиндра вдоль его оси, то есть отношение количества теплоты, проходящего в этом направлении, к разности температур торцов. Поэтому можно записать уравнение, отражающее сохранение энергии, в таком виде:

$$Q = \frac{\pi \lambda H d}{2h} (T - T_0) + Q \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad (1)$$

где T — температура ближайшей к горячему торцу монеты. Первое слагаемое в правой части (1) выражает количество теплоты, передаваемое через боковую поверхность этой монеты, а второе — через её основание в остальную часть цилиндра. Температура монеты T связана с поступающим в неё количеством теплоты Q соотношением

$$Q = \lambda \frac{\pi d^2}{4h} (T_1 - T). \quad (2)$$

Исключая из (1) и (2) параметр T , получим квадратное уравнение для искомой величины Q :

$$Q^2 + \frac{\pi \lambda H d}{2h} (T_1 - T_0) Q - \frac{\pi^2 \lambda^2 H d^3}{8h^2} (T_1 - T_0)^2 = 0.$$

Решая это уравнение, найдём

$$Q = \frac{\pi \lambda H d}{4h} (T_1 - T_0) \left(\sqrt{1 + \frac{2d}{H}} - 1 \right).$$

Задача 2.6 (Чайник)

Решение задачи сводится к применению закона изменения энергии в процессах теплообмена и парообразования.

Количество теплоты Q_e , отданное чайником в окружающую среду до второго включения, равно работе электрического тока в течение времени τ_2 .

$$Q_e = P \tau_2. \quad (1)$$

Количество теплоты, отдаваемое остывающим телом в окружающую среду, пропорционально времени остывания. Чайник остывает до второго включения в течение времени $\tau_1 + \tau_2$, так что

$$Q_e = k_1 (\tau_1 + \tau_2), \quad (2)$$

где k_1 — коэффициент теплоотдачи, зависящий от разности температур тела и среды. В данном случае k_1 соответствует некоторой «средней» температуре остывавшего чайника.

При кипении открытого чайника работа электрического тока $P\tau_3$ равна сумме количества теплоты, необходимого для парообразования $r(m_1 - m_2)$, и количества теплоты, отдаваемого в окружающую среду:

$$P\tau_3 = k_2\tau_3 + r(m_1 - m_2). \quad (3)$$

Здесь $m_1 = \rho V_1$ и $m_2 = \rho V_2$ — массы воды в чайнике до и после кипения, k_2 — коэффициент теплоотдачи чайника, соответствующий его температуре равной 100°C .

Насколько велико различие коэффициентов k_1 и k_2 ? Для выяснения этого вопроса найдём изменение температуры ΔT чайника при его остывании:

$$cm_1\Delta T = Q_e = P\tau_2.$$

Отсюда получаем

$$\Delta T = \frac{P\tau_2}{c\rho V_1} = 1,9^\circ\text{C}.$$

Температура окружающей среды — комнатная (20°C). Поэтому разность температур чайника и окружающей среды изменится приблизительно на $2/80 \approx 0,03 = 3\%$. Вследствие этого можно считать $k_1 \approx k_2$. Тогда из (1), (2) и (3) находим

$$r = \frac{P\tau_3}{\rho(V_1 - V_2)} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right) = 2,4 \text{ МДж/кг}.$$

Чаще всего экспериментальное определение удельной теплоты парообразования производится калориметрически. Однако, пример этой задачи показывает, что можно обойтись и без калориметра. Следует сначала измерить время, в течение которого сосуд с жидкостью охлаждается на небольшую величину от температуры кипения, а затем измерить время, за которое выкипает определённый объём жидкости. При этом коэффициент теплоотдачи можно считать постоянным на протяжении всех измерений.

Задача 2.7 (Ледяной покров)

Предположим, что всё количество теплоты, выделяемое при замерзании воды, должно передаться в окружающую среду через ледяной покров:

$$\lambda\rho S dx = k \frac{t_0 - t}{x} S d\tau, \quad (1)$$

где S — площадь поверхности льда, x — толщина льда, $t_0 = 0^\circ\text{C}$, dx — толщина льда, образовавшегося за время $d\tau$. Распределение температуры внутри

льда полагаем линейным. Интегрируя (1) с учётом того, что при изменении времени τ от 0 до $\Delta\tau = 24$ часа толщина льда x изменяется от h до $h + \Delta x$, получим квадратное уравнение относительно Δx :

$$\Delta x^2 + 2\Delta x h - \frac{2k(t_0 - t)\Delta\tau}{\lambda\rho} = 0.$$

Решение этого уравнения даёт ответ:

$$\Delta x = h \left(\sqrt{1 + \frac{2k(t_0 - t)\Delta\tau}{\lambda\rho h^2}} - 1 \right) \approx 1,2 \text{ см.}$$

Замечание. Приведённое решение не учитывает многих обстоятельств, имеющих место при замерзании реального водоёма, и поэтому является скорее оценочным, чем точным. Например, мы предположили, что всё количество теплоты, выделяемое при замерзании воды, должно передаваться в окружающую среду через ледяной покров. Это действительно было бы верно при условии, что к моменту начала образования льда вся вода в водоёме уже остыла до температуры 0°C . Но вода, как известно, имеет максимальную плотность при температуре примерно $+4^\circ\text{C}$ (и меньшую плотность как при больших, так и при меньших температурах). Поэтому вся вода, остывшая на поверхности водоёма до температуры $+4^\circ\text{C}$, «утонет» и соберётся на дне. Теплота от этой «подстилки», имеющей температуру около $+4^\circ\text{C}$, также будет передаваться (по механизму теплопроводности) более холодным верхним слоям воды и далее образующемуся льду и атмосфере.

Задача 2.8 (Пружина)

Для нахождения плотности газа применим уравнение состояния идеального газа $pV = m_\Gamma RT/M$ (уравнение Менделеева–Клапейрона). Из него следует

$$\rho = \frac{m_\Gamma}{V} = \frac{Mp}{RT}, \quad (1)$$

где M — молярная масса газа, m_Γ — масса газа в объёме V , R — универсальная газовая постоянная. Зависимость плотности газа от координаты x обусловлена распределением температуры газа (рис. 73). Учитывая, что температура между плоскостями изменяется линейно с изменением x , получим

$$T = T(x) = \frac{T_1 - T_2}{H}x + T_2,$$

и тогда (1) даёт

$$\rho(x) = \frac{MpH}{R((T_1 - T_2)x + HT_2)}. \quad (2)$$

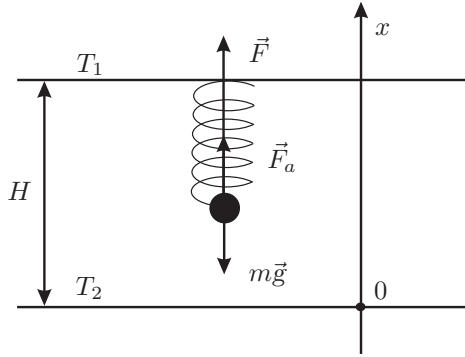


Рис. 73.

В положении равновесия сумма всех сил, приложенных к шару, равна нулю (рис. 73):

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_a = 0,$$

где $M\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}$ — сила упругости, $\vec{F}_a$ — сила Архимеда. Условие равновесия имеет вид:

$$-mg + k(L - L_0) + \rho g \frac{m}{\rho_0} = 0.$$

Поскольку $L = L_0$, получим $\rho = \rho_0$. После подстановки этого равенства, а также $x = H - L_0$, в (2) найдём

$$p = \frac{\rho_0 R}{M} \left(\frac{T_1 - T_2}{H} (H - L_0) + T_2 \right).$$

Для нахождения частоты малых колебаний запишем динамическое уравнение движения шарика вблизи положения равновесия:

$$m\ddot{x} = -k\xi + mg \frac{\rho(x) - \rho_0}{\rho_0}, \quad (3)$$

где $\xi = x - (H - L_0)$ — малое отклонение шарика от положения равновесия, а соответствующее приращение плотности, найденное из (2), равно

$$\rho(x) - \rho_0 = \frac{-MpH\xi(T_1 - T_2)}{R((T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2)^2}.$$

После подстановки этих выражений динамическое уравнение принимает вид:

$$m\ddot{\xi} = - \left(k + \frac{mg\xi(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2} \right) \xi.$$

Отсюда находим искомую циклическую частоту малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left(k + \frac{mg\xi(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)(H - L_0) + HT_2} \right)}.$$

Задача 2.9 (Процесс над газом)

Каждая точка графика характеризует состояние газа. Зная давление p и объём V , с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона можно найти температуру газа T . Проведя такие вычисления для ряда точек, можно построить график в координатных осях (T, V) . Соединив точки плавной линией, можно приблизительно отсчитать искомое значение максимальной температуры. Естественно, подобный план удобно реализовать используя, например, компьютерную систему MathCAD. На рисунке 74 показано такое построение. Видно, что $T_{\max} \approx 4,5 \cdot 10^2$ К. Нельзя ли в данном случае обойтись без этого общего метода? Если бы мы умели быстро рисовать на данном в условии графике изотермы, то достаточно было бы подобрать изотерму, касающуюся этого графика. Вот если бы изотермы были прямыми линиями, то их можно было бы начертить с помощью линейки. Можно ли сделать изотермы прямыми линиями?

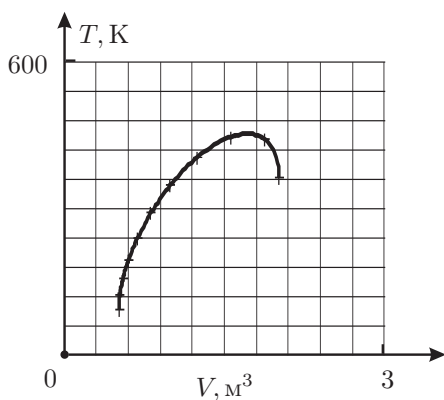


Рис. 74.

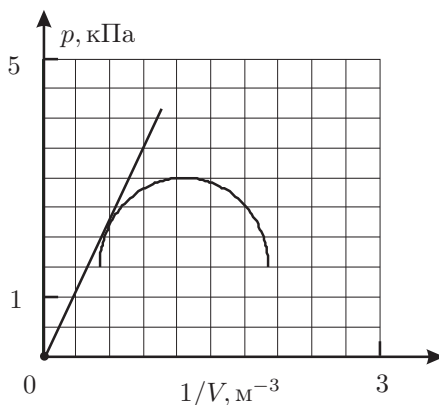


Рис. 75.

Уравнение Менделеева–Клапейрона позволяет положительно ответить на этот вопрос:

$$p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (1)$$

Функция $p = p(1/V)$ — линейная при $T = \text{const}$. Следовательно, нужно построить график заданного процесса в осях $(p, 1/V)$. Такое построение выполнено на рисунке 75. Здесь же проведена и изотерма, касающаяся данного графика. Точка касания соответствует искомому состоянию. Температуру его удобно найти как угловой коэффициент построенной прямой. Из (1) следует:

$$T = \frac{pV}{\nu R} \approx 4,6 \cdot 10^2 \text{ K}.$$

Видно, что результаты, полученные обоими методами, приблизительно совпадают.

Задача 2.10 (Термодинамический цикл)

Очевидно, что температура газа минимальна на изотерме 1–2 (рис. 13, с. 20). В процессе 2–3 газ нагревается, поскольку совершает положительную работу, а в процессе 3–4 охлаждается, из-за того, что

$$C - C_V = pdV/dT < 0.$$

Самая высокая температура оказывается в точке 3. Для нахождения этой температуры воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$T_{\max} = T_{\min} \frac{V_3}{V_2} = 3T_{\min} = 900 \text{ K}.$$

Тепло подводится к газу только на участке 2–3, поэтому

$$Q_+ = C_p(T_3 - T_2) = C_p(T_{\max} - T_{\min}).$$

Для одноатомного газа:

$$C_p = \frac{5}{2}R, \quad \text{откуда} \quad Q_+ = \frac{5}{2}R(T_{\max} - T_{\min}).$$

Подставляя численные данные, находим $Q_+ = 12,5 \text{ кДж}$.

Для работы имеем

$$A = A_{23} + A_{34} - A_{21}.$$

Поскольку 2–3 изобара, то

$$A_{23} = p_2(V_3 - V_2) = R(T_3 - T_2) = R(T_{\max} - T_{\min}).$$

Работу в политропическом процессе находим согласно второму началу термодинамики

$$C(T_4 - T_3) = C_V(T_4 - T_3) + A_{34}, \quad \text{или} \quad (C_V - C)(T_{\max} - T_4) = A_{34}.$$

Для точного определения T_4 найдём уравнение политропы. Из второго начала термодинамики $pdV = (C - C_V)dT$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона имеем $pdV + Vdp = RdT$. Из последних двух уравнений получаем:

$$pdV = \frac{C - C_V}{R}(pdV + Vdp) \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = \frac{C - C_V}{C_p - C} \int \frac{dp}{p} \Rightarrow pV^{\frac{C-C_p}{C-C_V}} = \text{const}.$$

По условию $C = R/2$, значит на политропе $pV^2 = RTV = \text{const}$. Из графика цикла видно, что:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{3}{4}, \text{ поэтому } T_4 = \frac{3}{4}T_3 = \frac{3}{4}T_{\max} \text{ и } A_{34} = (C_V - C)\frac{1}{4}T_{\max} = \frac{RT_{\max}}{4}.$$

Осталось определить работу на изотерме:

$$dA_{21} = pdV = RT_{\min} \frac{dV}{V}, \quad \text{откуда} \quad A_{21} = RT_{\min} \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_{\min} \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Поскольку $\frac{V_1}{V_2} = 4$, то $A_{21} = RT_{\min} \ln 4$. Окончательно:

$$A = R(T_{\max} - T_{\min}) + \frac{RT_{\max}}{4} - RT_{\min} \ln 4.$$

Подставляя численные значения, находим $A \approx 3,40$ кДж.

КПД цикла рассчитывается по формуле $\eta = A/Q_+$. Она даёт $\eta \approx 27\%$. Для идеальной тепловой машины Карно имеем:

$$\eta_0 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} \approx 67\%,$$

что, естественно, больше чем для цикла, изображённого на рисунке 13, как и для любого другого между теми же тепловыми резервуарами.

Задача 2.11 (Скороварка)

На рисунке 76 изображены две близкие изотермы воды, соответствующие температурам T и $T - \Delta T$. Прямолинейные участки изотерм соответствуют равновесным состояниям смеси воды и водяного пара. Рассмотрим цикл Карно 1–2–3–4–1, осуществляемый с некоторой массой m воды. Коэффициент полезного действия η цикла Карно:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{A}{Q}, \quad (1)$$

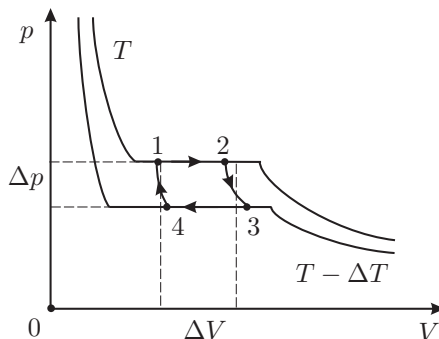


Рис. 76.

где A — работа за цикл, Q — количество теплоты, полученное от нагревателя. Поскольку $\Delta T = 5^\circ\text{C}$ мало по сравнению с $T = 373^\circ\text{C}$, при вычислении работы цикл 1–2–3–4–1 можно считать прямоугольником. Тогда

$$A = \Delta p \Delta V, \quad (2)$$

где ΔV — изменение объёма воды при её обращении в пар. Количество теплоты, необходимое для парообразования

$$Q = rm. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p \Delta V}{rm}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{r}{T \Delta v}, \quad (4)$$

где $\Delta v = \Delta V/m$ — изменение удельного объёма воды при её обращении в пар.

Уравнение (4) известно в физике под названием уравнения Клаузиуса–Клапейрона. Оно описывает не только кипение, но и другие агрегатные превращения. При парообразовании воды $\Delta v > 0$, поэтому из (4) следует увеличение температуры кипения ($\Delta T > 0$) с ростом давления ($\Delta p > 0$). А вот процесс плавления льда сопровождается уменьшением удельного объёма ($\Delta v < 0$). Поэтому температура плавления льда с повышением давления убывает.

При кипении изменение удельного объёма воды приблизительно равно удельному объёму образовавшегося пара, то есть $\Delta v \approx V_v/m$. Считая пар идеальным газом, отношение V_v/m можно найти из уравнения Менделеева–Клапейрона. Получим

$$\Delta v = \frac{RT}{Mp},$$

где R — универсальная газовая постоянная, а M — молярная масса воды. Подставляя найденное Δv в (4), найдём

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{rM\Delta T}{RT^2}.$$

Подстановка численных значений даёт:

$$\Delta p = 0,18 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Задача 2.12* (Фотонный газ)

Давление газа обусловлено ударами его частиц о стенки сосуда. Величина давления равна средней силе, действующей на единицу площади стенки. Найдём среднюю силу F_i , с которой действуют на стенку частицы, имеющие скорость $\vec{v}_i$ и импульс $\vec{p}_i$, направленные под углом α_i к нормали стенки. Для этого применим закон изменения импульса, считая удар частиц упругим. За время Δt о единичную площадку стенки ударятся $N_i = n_i v_i \cos \alpha_i \Delta t$ таких частиц, где n_i — их число в единице объёма:

$$2N_i p_i \cos \alpha_i = 2n_i v_i \cos \alpha_i p_i \cos \alpha_i = F_i \Delta t.$$

Давление газа P равно:

$$P = \langle F_i \rangle = 2 \langle n_i v_{ix} p_{ix} \rangle = 2 \langle v_{ix} p_{ix} \rangle \frac{1}{2} n, \quad (1)$$

где ось x перпендикулярна к стенке. Множитель $1/2$ поставлен потому, что лишь половина частиц, имеющих одно и то же значение $\vec{v}_i \vec{p}_i$, движется к стенке, а другая — в противоположном направлении. Из-за хаотичности движения частиц

$$\langle p_i \cos \alpha_i \cdot v_i \cos \alpha_i \rangle = \langle v_{ix} p_{ix} \rangle = \frac{1}{3} \langle v_{ix} p_{ix} + v_{iy} p_{iy} + v_{iz} p_{iz} \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle.$$

Подставляя это в формулу (1), получим:

$$P = \frac{1}{3} n \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle.$$

Ответ на второй пункт задачи просто следует из полученной формулы, если принять во внимание, что масса фотона равна нулю, и поэтому его энергия $E = pc$, где c — скорость света, то есть скорость фотонов $v = c$:

$$P = \frac{1}{3} n E = \frac{1}{3} u, \quad (2)$$

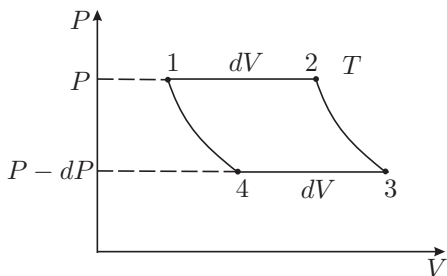


Рис. 77.

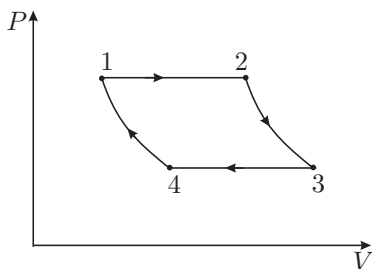


Рис. 78.

где $u = nE$ — энергия единицы объёма фотонного газа.

Рассматриваемый в третьем пункте цикл Карно изображён на рисунке 77. Давление фотонного газа отличается от плотности энергии излучения только множителем $1/3$ в формуле (2), а плотность энергии не зависит от объёма подобно тому, как масса единицы объёма не зависит от объёма всего тела. Поэтому давление газа фотонов не зависит от объёма, а определяется только температурой. Таким образом, изотермы 1–2 и 3–4 совпадают с изобарами, что отражено на рисунке 77. Вследствие малости dT и dP график рассматриваемого цикла можно приближённо считать параллелограммом. Тогда его «площадь» равна $dP \cdot dV$, и получаем следующую формулу для КПД цикла:

$$\eta = \frac{dT}{T} = \frac{\delta A}{\delta Q} = \frac{dP \cdot dV}{\delta Q}. \quad (3)$$

Количество теплоты δQ , сообщаемое фотонному газу при изотермическом расширении, выразим из первого начала термодинамики:

$$\delta Q = dU + PdV = u dV + PdV = 4PdV.$$

Подставим последнее выражение в (3):

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP \cdot dV}{4PdV}.$$

Путём интегрирования находим

$$P = aT^4, \quad (4)$$

где a — некоторая постоянная величина.

В четвёртом пункте требуется, используя (4), получить выражение для мощности W излучения единицы поверхности абсолютно чёрного тела. Для

этого нужно сложить энергии всех фотонов, излучаемых в единицу времени единицей площади поверхности:

$$W = \sum \nu_i E_i,$$

где E_i — энергия фотонов i -го сорта, а ν_i — их число, излучаемое в единицу времени единичной площадкой. Из условия известно, что

$$\nu_i = \frac{1}{4} n_i \langle v_i \rangle,$$

где n_i — число фотонов i -го сорта в единице объёма, а $\langle v_i \rangle = c$ — скорость движения фотонов. Используя выражение для ν_i , а также формулу (4) получим закон Стефана–Больцмана:

$$W = \frac{1}{4} \sum n_i c E_i = \frac{c}{4} u = \frac{c}{4} 3P = \frac{3}{4} c a T^4 = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 3ca/4$. Таким образом, постоянная Стефана–Больцмана отличается от коэффициента пропорциональности a , входящего в формулу (4), лишь множителем $3c/4$.

Часто в литературе в формуле

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle,$$

вместо $1/4$ пишут множитель $1/6$. Такой результат получается в более грубой модели, в которой рассматривается движение частиц только в трёх взаимно перпендикулярных направлениях.

В последнем пункте требуется найти КПД цикла, изображённого на рисунке 78. Как было выяснено ранее, изобары 1–2 и 3–4 для фотонного газа совпадают с изотермами. Так что рассматриваемый цикл похож на цикл Карно. В цикле Карно процессы 2–3 и 4–1 должны быть адиабатическими. В данной задаче эти процессы описываются уравнением $PV^{4/3} = \text{const}$. Чтобы сравнить процессы 2–3 и 4–1 с адиабатическими, нужно получить уравнение адиабаты фотонного газа. Для этого применим первое начало термодинамики и формулу (2):

$$\delta Q = \delta A + dU = 4PdV + 3VdP = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{dP}{P} = -\frac{4}{3} \frac{dV}{V}.$$

После интегрирования находим

$$PV^{4/3} = \text{const}.$$

Таким образом, в задаче речь идёт именно о цикле Карно, коэффициент полезного действия которого, как известно, не зависит от рода рабочего вещества и равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

в том числе и для рассматриваемого в задаче цикла с фотонным газом.

Задача 2.13* (Пластина)

Вблизи поверхности смачиваемой пластины вода приподнимается, образуя вогнутый мениск (рис. 79). На пластину с обеих сторон действуют силы по-

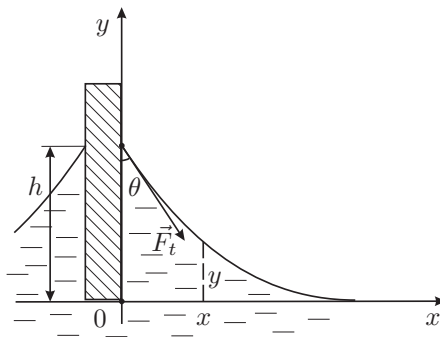


Рис. 79.

верхностного натяжения $\vec{F}_t$. Модуль результирующей силы $\vec{F}$, приложенной к пластине, как видно из рисунка 79,

$$F = 2F_t \cos \theta = 2\sigma L \cos \theta.$$

Об этой силе и идёт речь в первом пункте задачи.

Для ответа на вопрос второго пункта приравняем давление в воде на уровне её поверхности вдали от пластины и в точке с координатой x (рис. 79):

$$p_a = p_a - p + \rho gy. \quad (1)$$

Здесь p_a — атмосферное давление, p — разность давлений на вогнутой и выпуклой сторонах искривлённой поверхности жидкости, ρgy — давление столба воды на глубине y . Дополнительное давление, создаваемое искривлённой поверхностью жидкости,

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\sigma}{R}. \quad (2)$$

Здесь $R_1 = R$ — радиус кривизны сечения в плоскости рисунка для точки x , а $R_2 = \infty$, так как соответствующее ему сечение представляет собой прямую линию. Подставляя (2) в (1) и выражая R по формуле, приведённой в условии, получим

$$\rho g y = \frac{\sigma y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Сделаем преобразование

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dy'}{dy} = y' \frac{dy'}{dy} = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (y')^2,$$

приведём уравнение (3) к виду

$$y dy = \frac{\sigma}{2\rho g} \frac{d(y')^2}{(1 + (y')^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

Проинтегрируем последнее уравнение с учётом того, что при $y = h$ производная $y' = -\operatorname{ctg} \theta$. В результате интегрирования найдём

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \sin \theta)}.$$

Этот же результат можно было получить, не прибегая к интегрированию. Достаточно записать условие равновесия жидкости, поднятой вблизи пластины. На рисунке 80 показаны силы, приложенные к этому элементу жидкости:

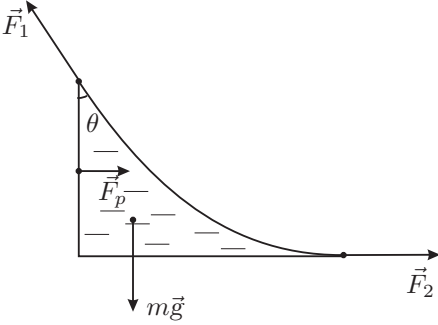


Рис. 80.

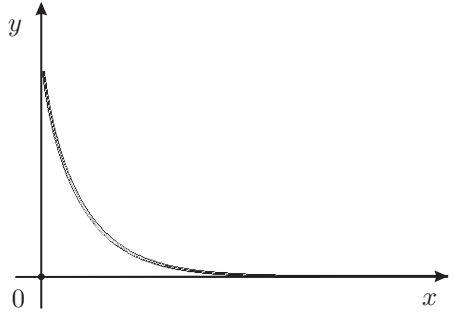


Рис. 81.

$\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — силы поверхностного натяжения, $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{F}_p$ — средняя сила давления со стороны пластины. В проекциях на горизонтальное направление получим:

$$\sigma L - \sigma L \sin \theta = \frac{\rho g h}{2} L h, \quad \text{откуда} \quad h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \sin \theta)}.$$

В третьем пункте задачи требуется найти функцию $y(x)$, описывающую мениск, изображённый на рисунке 79. Для этого нужно проинтегрировать уравнение (4), учтя что при $y = 0$ производная $y' = 0$. Преобразуем его:

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \rho g \frac{y^2}{2\sigma}\right)^2} - 1}, \quad \text{откуда} \quad - \frac{\left(1 - \frac{\rho g y^2}{2\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{\rho g y^2}{\sigma} - \frac{\rho^2 g^2 y^4}{4\sigma^2}}} dy = dx.$$

Для интегрирования последнего уравнения используем подстановку

$$y = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \varphi.$$

Тогда получаем

$$x = - \int \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \cdot \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = - \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

Возвращаемся к переменной y :

$$x = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\rho g y^2}{4\sigma}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\rho g y^2}{4\sigma}}} \right) - 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sqrt{1 - \frac{\rho g y^2}{4\sigma}} + C, \quad (5)$$

где постоянная интегрирования C находится из того, что при $x = 0$ координата $y = h$:

$$C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin \theta}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin \theta}} \right) + \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}} \sqrt{1 + \sin \theta}.$$

Для наглядного представления функции $y(x)$, неявно заданной громоздким выражением (5), следует построить её график. Это можно сделать, прибегнув к помощи компьютера. Системы компьютерной математики прекрасно справляются с подобными задачами. Одной из самых простых для начинающего пользователя и достаточно мощной системой является MathCAD. С её помощью и получен рисунок 81, где изображён график искомой функции, отражающий форму мениска. Поскольку интерес представляет лишь характер поведения функции, то конкретные численные значения параметров задавались произвольно. Варьирование угла θ моделировалось изменением значения постоянной C .

Электричество и магнетизм

Задача 3.1 (Шестиугольник)

На рисунке 82 представлена схема заданной в условии цепи. Сопротивление каждого из резисторов R . Следует найти сопротивление между гвоздями A и B , к которым подаётся некоторое напряжение. Отыскать участки, соединённые последовательно или параллельно не удаётся. Попробуем использовать симметрию схемы. Не позволит ли она упростить задачу?

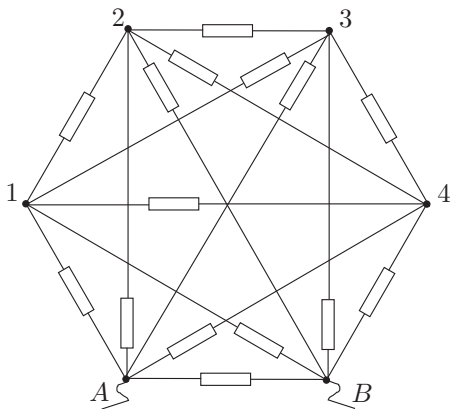


Рис. 82.

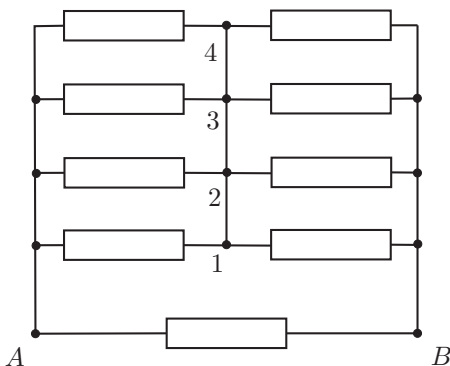


Рис. 83.

Гвозди A и B непосредственно подсоединяются к источнику напряжения. Каждая же из остальных вершин шестиугольника 1, 2, 3, 4 находятся в иных, но в одинаковых для каждой из них условиях. Все они подсоединены через резистор R к точкам A и B , а также к каждому из остальных гвоздей. Поэтому нет физической причины, вследствие которой потенциалы гвоздей 1, 2, 3, 4 были бы различны. Таким образом, из соображений физической симметрии приходим к заключению о равенстве потенциалов этих точек. Поэтому можно перейти к эквивалентной схеме, изображённой на рисунке 83. На этой схеме легко выделить последовательные и параллельные участки и найти искомое сопротивление R_x :

$$R_x = \frac{R}{3}.$$

Можно было и изолировать друг от друга точки 1, 2, 3, 4. Получилась бы схема, отличающаяся от той, что изображена на рисунке 83 отсутствием соединений этих точек. Однако, равенство потенциалов точек 1, 2, 3, 4 в новой схеме не будет нарушено. Поэтому и она эквивалентна исходной и приводит к прежнему ответу.

Задача 3.2 (Полубесконечная цепочка)

Из симметрии схемы, изображённой на рисунке 14, относительно линии, соединяющей точки A и B , следует, что потенциалы всех точек симметричных относительно этой линии равны, то есть схемы на рисунках 14 и 84 эквивалентны. Рассчитать сопротивление схемы на рисунке 84 уже легко:

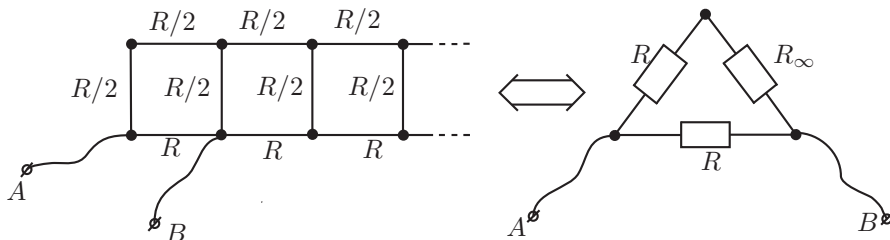


Рис. 84.

$$R_\infty = \frac{\frac{R}{2} \left(R_\infty + \frac{3R}{2} \right)}{R_\infty + \frac{3R}{2} + \frac{R}{2}},$$

откуда $R_\infty = \frac{(\sqrt{21} - 3)R}{4}$. Таким образом,

$$R_{AB} = \frac{(R_\infty + R)R}{R_\infty + 2R} = \frac{\sqrt{21} + 1}{\sqrt{21} + 5} R \approx 0,58R.$$

Задача 3.3 (Резистор или диод)

Если к точкам A и B подключить резистор сопротивлением R , то схема окажется симметричной, напряжение на R_x будет равно нулю. Тогда сопротивление нагрузки для источника $\mathcal{E}$ легко рассчитать. Нагрузка эквивалентна двум парам параллельно соединённых резисторов сопротивлением R . Поэтому сопротивление её равно R . Итак, при подключении резистора ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{и не зависит от сопротивления } R_x.$$

Если подключить диод в прямом направлении, то его сопротивлением можно пренебречь. Тогда цепь окажется эквивалентной цепи, приведённой на рисунке 85. Сопротивление нагрузки в этой цепи

$$R_l = R \frac{2R_x + R}{3R_x + 2R},$$

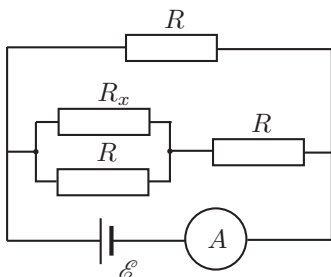


Рис. 85.

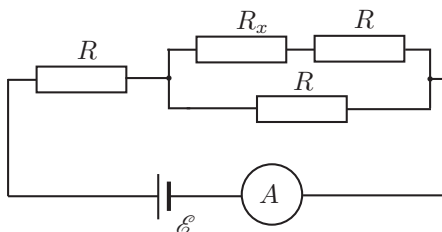


Рис. 86.

а ток через амперметр

$$I_o = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{3R_x + 2R}{2R_x + R}.$$

Если диод включить в обратном направлении, то получим эквивалентную схему, изображённую на рисунке 86. Сопротивление нагрузки в этом случае

$$R_l = R \frac{2R_x + 3R}{R_x + 2R},$$

а ток

$$I_c = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{R_x + 2R}{2R_x + 3R}.$$

На рисунке 87 представлены графики полученных зависимостей.

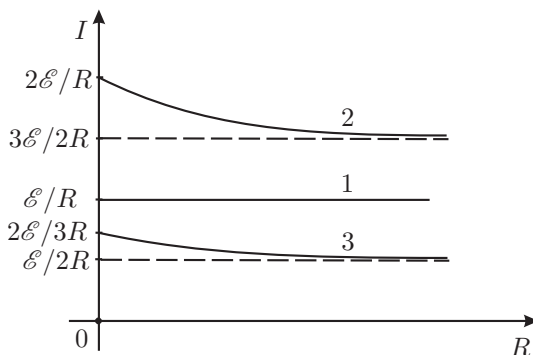


Рис. 87.

Задача 3.4 (Проволочный треугольник)

Все вложенные треугольники правильные, проводники однородные, поэтому узлы цепи, лежащие на высоте CD (рис. 88) имеют одинаковые потенциа-

лы, если напряжение подано на точки A и B . Поэтому данную схему можно заменить более простой (рис. 89), которая эквивалентна данной. Сопротивле-

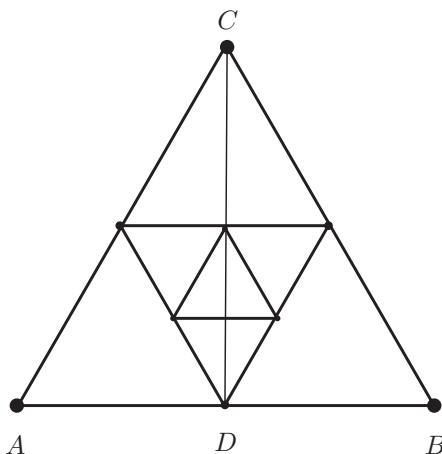


Рис. 88.

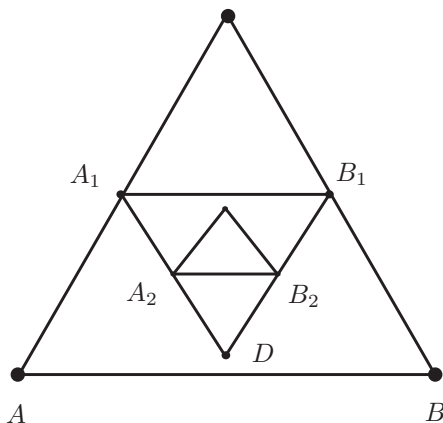


Рис. 89.

ние цепи внутри треугольника, опирающегося на A_1B_1 , очевидно, в два раза меньше сопротивления всей цепи. Сопротивление цепи внутри следующего вложенного треугольника ещё в два раза меньше, и так далее. Обозначим через

$$r = \frac{4\rho L}{\pi d^2} \quad (1)$$

сопротивление отрезка AB , а через R — искомое сопротивление всей цепи. Тогда сопротивление R можно представить в виде

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\left(r + \frac{Rr}{R + 2r}\right)}. \quad (2)$$

Получилось квадратное уравнение относительно искомой величины R :

$$3R^2 + 2Rr - 2r^2 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения и даёт ответ задачи:

$$R = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}r \approx 0,55r. \quad (3)$$

Точность полученного результата ограничена использованными приближениями. Из-за паяк в углах треугольников длина проволоки L несколько

отличается от стороны треугольника. Относительная погрешность величины r (1) по порядку величины равна d/L . Кроме того, процесс последовательного вложения треугольников не может быть бесконечным, поскольку минимальная длина стороны треугольника не может стать меньше d . Максимально возможное число вложений N нетрудно подсчитать:

$$\frac{L}{d} = 2^N, \quad \text{откуда} \quad N = \frac{\ln(L/d)}{\ln 2} \gg 1. \quad (4)$$

Чтобы оценить погрешность найденного результата для конечного числа вложенных треугольников, запишем аналогично (2) соотношение, связывающее сопротивление R_{n+1} цепочки $(n+1)$ треугольников с сопротивлением R_n цепочки из n таких треугольников.

$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\left(r + \frac{R_n r}{R_n + 2r}\right)} = \frac{3R_n + 4r}{2r(R_n + r)}. \quad (5)$$

Из формулы (5) путём дифференцирования и замены $R_n \approx R \approx 0,55r$ получим:

$$\frac{\Delta R_{n+1}}{\Delta R_n} \approx 0,06.$$

Это означает, что увеличение на единицу числа вложенных треугольников при больших n уменьшает погрешность результата приблизительно в 10 раз. Если максимальное число вложенных треугольников равно N (4), то минимальная погрешность результата в 10^N раз меньше, чем при $n = 1$. Следовательно погрешность, связанная с конечностью схемы

$$\frac{\Delta R_N}{R} = \frac{\Delta R_1}{R} 10^{-N} = \frac{\frac{2}{3}r - 0,55r}{0,55r} 10^{-N} \sim \left(\frac{d}{L}\right)^{1/\lg 2}, \quad (6)$$

где последний вложенный треугольник вместо идеального сопротивления R имеет сопротивление $2r/3$. Поскольку $\lg 2 < 1$, то относительная погрешность (6) меньше погрешности пайки d/L . Итак, относительная погрешность результата (3) приблизительно равна d/L .

Задача 3.5* (Конечная цепочка)

Пусть I — искомый ток через резистор R_4 , а I_0 — ток, текущий через источник $\mathcal{E}$ (рис. 90). Так как $R_4 + R_3 = R_2$, то токи на параллельно соединённых участках $C-R_4-D$ и $C-R_2-D$ одинаковы. Вследствие этого ток, покидающий узел D , равен $2I$. Сопротивления участков $E-R_2-F$ и $E-C-D-F$ также одинаковы, поэтому ток, покидающий узел F вдвое больше тока $2I$, текущего по $D-F$. Аналогичная ситуация повторяется и далее: при приближении от R_4 к

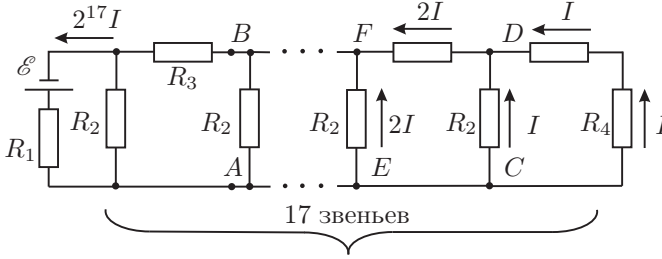


Рис. 90.

источнику $\mathcal{E}$ ток удваивается после каждого из 17 звеньев цепочки. Таким образом,

$$I_0 = 2^{17} I. \quad (1)$$

Сопротивление всей цепи, подключённой последовательно к R_1 равно $R_2/2$. По закону Ома

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2}{2}}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$I = \frac{I_0}{2^{17}} = \frac{\mathcal{E}}{2^{17}(R_1 + \frac{R_2}{2})} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ А.}$$

Во втором пункте пусть R — сопротивление всего правого участка цепи, подключённого к точкам A и B (рис. 90). Для эквивалентного источника — это сопротивление нагрузки. По закону Ома ток I нагрузки равен:

$$I = \frac{\mathcal{E}_e}{R + R_e}. \quad (3)$$

Получим формулу для тока нагрузки без модели эквивалентного источника. К реальному источнику $\mathcal{E}$ последовательно подсоединены резистор R_1 и параллельно соединённые участки, сопротивления которых равны R_2 и $R_3 + R$. По правилам Киргофа:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= I_0 R_1 + I(R_3 + R), \\ \mathcal{E} &= I_0 R_1 + (I_0 - I)R_2. \end{aligned}$$

Исключим из этой пары уравнений ток источника I_0 :

$$I = \frac{\frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}}{R + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), видим, что параметры эквивалентного источника таковы:

$$\mathcal{E}_e = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_e = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5)$$

Решение третьей части задачи существенно упрощается использованием рассмотренной в предыдущем пункте модели эквивалентного источника. Участок цепи, включающий источник $\mathcal{E}$, резистор R_1 и первое из 17 звеньев R_2 – R_3 , заменяем эквивалентным источником. Параметры его находим по формулам (5):

$$\mathcal{E}_e = \frac{2}{3}\mathcal{E}, \quad R_e = R_1.$$

Введение рассмотренного эквивалентного источника приводит к следующим изменениям анализируемой цепи: ЭДС источника умножается на $2/3$, резистор R_1 можно считать его внутренним сопротивлением. Зато подключённая к источнику цепочка резисторов уменьшается на одно звено. После 17 таких процедур получаем простую схему: источник, ЭДС которого $(2/3)^{17}\mathcal{E}$, последовательно соединён с резисторами R_1 и R_4 . По закону Ома ток I_4 через резистор R_4 равен:

$$I_4 = \frac{(2/3)^{17}\mathcal{E}}{R_1 + R_4} = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

Задача 3.6 (Батарейки)

На рисунке 91 изображена схема цепи с последовательным соединением элементов. Запишем для неё закон Ома:

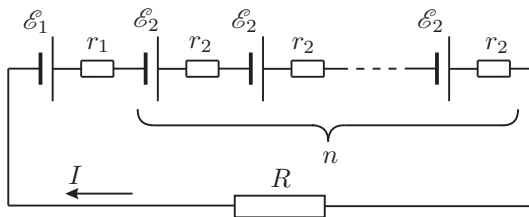


Рис. 91.

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + n\mathcal{E}_2}{R + r_1 + nr_2}, \quad (1)$$

где I — ток нагрузки. При $n = 0$ из (1) получим

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}. \quad (2)$$

При очень больших n из (1) следует:

$$I = \frac{n\mathcal{E}_2}{nr_2} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}. \quad (3)$$

Поскольку ток нагрузки по условию не зависит от n , из (2) и (3) получаем:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}, \quad \text{или} \quad R + r_1 = 2r_2. \quad (4)$$

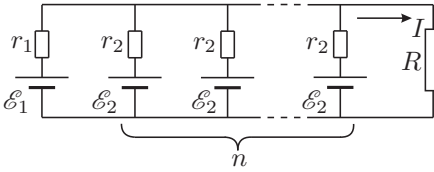


Рис. 92.

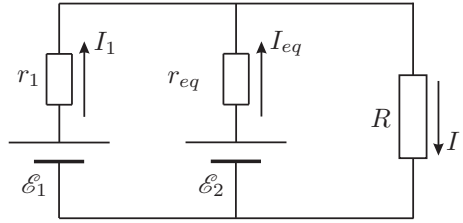


Рис. 93.

Рассмотрим теперь цепь с параллельным соединением батареек, схема которой изображена на рисунке 92. Она эквивалентна цепи, изображённой на рисунке 93, где I_{eq} — ток в эквивалентном источнике $\mathcal{E}_2$, а $r_{eq} = r_2/n$ — его внутреннее сопротивление. В этом можно убедиться, применив правила Киргофа для контура, состоящего из нагрузки R и одной из батареек $\mathcal{E}_2$:

$$I \left(R + \frac{r}{n} \right) = \mathcal{E}_2, \quad \text{или} \quad I(R + r_{eq}) = \mathcal{E}_{eq}.$$

По первому правилу Киргофа

$$I_{eq} = I - I_1.$$

Второе правило Киргофа для внешнего контура схемы, показанной на рисунке 93, даёт:

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR, \quad \text{откуда} \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - IR}{r_1}.$$

При $n = 0$ ток $I_{eq} = 0$ и тогда

$$I = I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}. \quad (5)$$

В случае бесконечного числа n батареек $\mathcal{E}_2$ сопротивление $r_{eq} = 0$, а ток нагрузки принимает прежнее значение I . Поэтому второе правило Киргофа для контура $\mathcal{E}_2$ – R приводит к соотношению

$$I = \frac{\mathcal{E}_2}{R}.$$

Из последнего уравнения и уравнения (5) найдём:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{R}, \quad \text{или} \quad R + r_1 = 2R. \quad (6)$$

Из (4) и (6) следует ответ: $R = r_1$ и $r_2 = r_1$.

При решении данной задачи использован полезный метод эквивалентных схем. Группу соединённых друг с другом источников тока можно заменить одним эквивалентным источником. На практике используют батареи элементов. При последовательном соединении источников одинаковой полярности ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника равны сумме соответствующих величин для составляющих элементов. Параллельно соединяют одинаковые источники. Эквивалентная ЭДС в этом случае равна ЭДС отдельных элементов, зато внутреннее сопротивление эквивалентного источника меньше сопротивления одного элемента. При соединении n элементов внутреннее сопротивление полученной батареи в n раз меньше сопротивления отдельного элемента.

Задача 3.7 (Диоды)

Отсутствие тока через амперметр (рис. 94) означает равенство напряжений на диодах D_1 и D_3 , а также на диодах D_2 и D_4 , и равенство токов через D_1 и D_2 , а также через D_3 и D_4 . Поэтому можно записать

$$I_1(U_1) = I_2(U_2) \quad \text{и} \quad I_3(U_1) = I_4(U_2).$$

Соответствующие функциональные зависимости представлены графиками на рисунке 95. Для нахождения какой-либо точки вольт-амперной характеристики

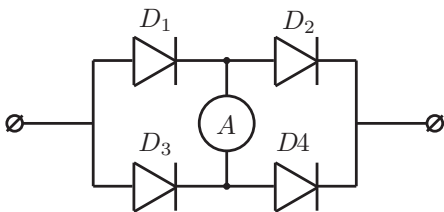


Рис. 94.

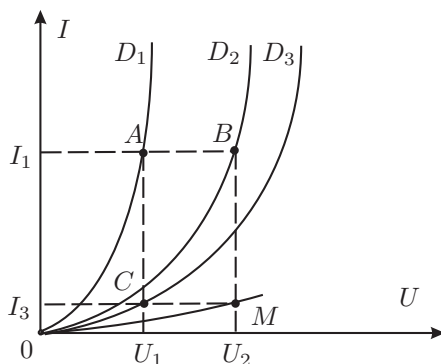


Рис. 95.

ки диода D_4 нужно поступить следующим образом. Возьмём произвольное

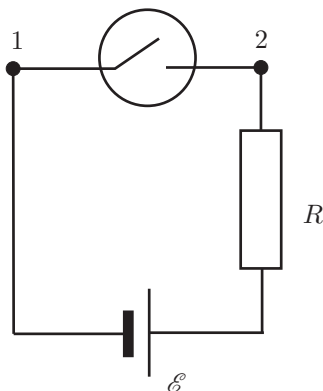


Рис. 96.

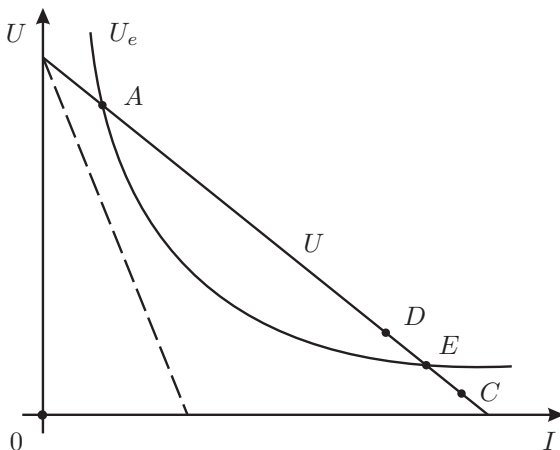


Рис. 97.

значение U_1 напряжения на диоде D_1 . Найдём точку A (рис. 95), определяющую ток I_1 , текущий через диод D_1 . Тот же ток течёт и через диод D_2 . Поэтому точка B определяет напряжение U_2 на нём. Такое же напряжение на диоде D_4 , а ток через него такой же, как и через диод D_3 . Этот ток I_3 соответствует точке C (рис. 95). Итак, найдены координаты U_2 и I_3 точки M искомого графика. Аналогично построенные другие его точки изображены на рисунке 95.

Задача 3.8 (Дуговой разряд)

Заданная в условии вольт-амперная характеристика дуги представляет собой связь тока I и равновесного напряжения U_e дуги, то есть напряжения, при котором ток дуги стационарен, не меняется с течением времени:

$$U_e = A + \frac{B}{I}. \quad (1)$$

Если при данном токе I напряжение на дуге окажется меньше величины U_e , то ток будет уменьшаться со временем, и дуга может погаснуть. При слишком большом напряжении ток будет расти, что может привести к пробое. По закону Ома для участка цепи 1– $\mathcal{E}$ –2 (рис. 96), по которому течёт тот же ток I , что и в дуге, $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = \mathcal{E} - U$, где $U = \varphi_2 - \varphi_1$ — напряжение, подаваемое на дугу. Отсюда

$$U = \mathcal{E} - IR. \quad (2)$$

Изобразим графически функции $U_e(I)$ и $U(I)$ (рис. 97). В точках A и E пересечения графиков подаваемое на дугу напряжение соответствует равновесному значению. Если графики не пересекаются (пунктирная прямая), то стационарного тока в дуге быть не может. Для нахождения координат точек A и E следует приравнять правые части выражений (1) и (2). Полученное квадратное уравнение

$$I^2 R + (A - \mathcal{E})I + B = 0 \quad (3)$$

имеет действительные корни лишь при условии положительности дискриминанта, то есть при

$$(A - \mathcal{E})^2 - 4RB \geq 0, \quad \text{или} \quad R \leq \frac{(A - \mathcal{E})^2}{4B} = 20,25 \text{ Ом.}$$

Только при таких сопротивлениях R и возможно устойчивое горение дуги. Найден ответ на первый вопрос задачи.

Для ответа на второй вопрос следует вычислить корни уравнения (3):

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - A - \sqrt{(A - \mathcal{E})^2 - 4RB}}{2R} = 1,2 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - A + \sqrt{(A - \mathcal{E})^2 - 4RB}}{2R} = 10 \text{ А}.$$

Первый корень соответствует точке A (рис. 97), второй — точке E . Проанализируем устойчивость горения дуги при параметрах цепи, соответствующих этим точкам.

Рассмотрим точку E . Если ток дуги случайно увеличится, то состояние цепи будет соответствовать точке C . Напряжение, подаваемое на дугу, окажется меньше равновесного для дуги значения, ток начнёт уменьшаться, и состояние E восстановится. При случайном уменьшении тока дуги (переход от точки E к точке D) напряжение превысит равновесное значение, что приведёт к увеличению тока и восстановлению равновесия. Аналогичный анализ для точки A приводит к заключению, что она соответствует неустойчивому горению. Итак, при заданном R в цепи установится ток $I = 10 \text{ А}$.

Задача 3.9* (ВАХ цепочки)

На рисунке 98 изображены первые звенья цепочки, о которой говорится в пункте 1, и указаны токи I_1 и I_2 текущие через участки CA и DA . При данной в задаче вольт-амперной характеристике идеального диода, его сопротивление равно бесконечности, если подаваемое на него меньше ΔU , иначе напряжение на диоде при любом токе равно ΔU . Учитывая эту особенность диода и применяя закон Ома, получим:

$$I_1 = \frac{U - \Delta U}{R}, \quad I_2 = \frac{U - 2\Delta U}{R}.$$

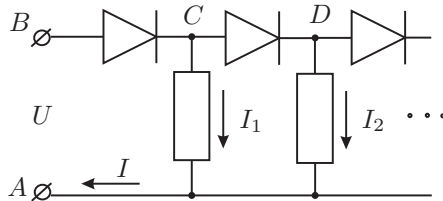


Рис. 98.

Аналогичным образом можно выразить ток I_i , текущий через i -й резистор:

$$I_i = \frac{U - i\Delta U}{R},$$

если

$$i < N = U/\Delta U \gg 1. \quad (1)$$

Токи в остальных резисторах отсутствуют, так как напряжение на $(i - 1)$ -м резисторе оказывается меньше ΔU . Все токи I_i стекаются в узел A. Поэтому

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = N \frac{U}{R} - \frac{\Delta U}{R} \sum_{i=1}^N i. \quad (2)$$

По формуле (1) $N \gg 1$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^N i = \frac{N+1}{2} N \approx \frac{N^2}{2}.$$

Подставляя в (2) найденное выражение суммы, а также (1), получим

$$I = \frac{U^2}{\Delta U R} - \frac{\Delta U}{2R} \left(\frac{U}{\Delta U} \right)^2 = \frac{U^2}{2\Delta U R},$$

то есть вольт-амперная характеристика имеет вид параболы.

Можно предложить и более короткий способ решения. Уменьшение на единицу числа звеньев бесконечной цепочки не изменяет её вольт-амперной характеристики. Другими словами, одна и та же функция связывает как ток I с напряжением между точками BA, так и ток на участке CD с напряжением между точками CA. Однако, значения этих напряжений отличаются на ΔU , так что если напряжение между B и A равно U , то напряжение между C и A равно $U - \Delta U$. Соответственно отличаются значения функции $I(U)$:

$$I(U - \Delta U) = I(U) - \frac{dI}{dU} \Delta U, \quad (3)$$

если $\Delta U \ll U$. Ток $I(U)$ втекает в узел C , а $I(U - \Delta U)$ вытекает из него. Поэтому

$$I(U) = I(U - \Delta U) + \frac{U - \Delta U}{R}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$\frac{dI}{dU} \Delta U = \frac{U - \Delta U}{R} \approx \frac{U}{R},$$

что даёт после интегрирования

$$I = \frac{U^2}{2\Delta U R},$$

поскольку при $U = 0$ ток I также равен нулю.

Во втором пункте рассматривается цепочка, последние звенья которой изображены на рисунке 99. Из рисунка видно, что $I_1 = I_0$. Ток I_2 находим из

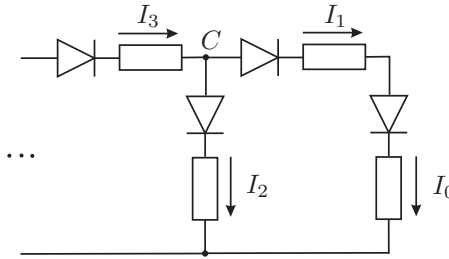


Рис. 99.

соотношения

$$I_2 R + \Delta U = I_1 R + 2\Delta U + I_0 R, \quad \text{или} \quad I_2 = \frac{\Delta U}{R} + I_1 + I_0 = 2I_0 + \frac{\Delta U}{R}. \quad (5)$$

Ток I_3 разветвляется в узле C . Поэтому $I_3 = I_2 + I_1$. Аналогичное соотношение справедливо для любого нечётного $k \geq 3$:

$$I_k = I_{k-1} + I_{k-2}. \quad (6)$$

Для любого чётного $k \geq 2$, выполняется соотношение аналогичное (5):

$$I_k = I_{k-1} + I_{k-2} + \frac{\Delta U}{R}. \quad (7)$$

Второе равенство из (5) позволяет предположить, что для любых k токи можно представить в виде:

$$I_k = c_k I_0 + b_k \frac{\Delta U}{R}, \quad (8)$$

подобрав a_k и b_k так, чтобы были обеспечены условия (6) и (7), а также $I_1 = I_0$. Нетрудно сообразить, что должны выполняться соотношения:

$$c_0 = c_1 = 1; \quad c_k = c_{k-1} + c_{k-2} \quad \text{при} \quad k \geq 2;$$

$$b_0 = b_1 = 0; \quad b_k = b_{k-1} + b_{k-2} \quad \text{при нечётных} \quad k \geq 3,$$

$$b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + 1 \quad \text{при чётных} \quad k \geq 2.$$

Именно такие соотношения определяют известную в математике последовательность чисел Фибоначчи a_k , так что $c_k = a_{k+1}$. Числа b_k тоже образуют последовательность Фибоначчи, только:

$$b_k = a_k - 1 \quad \text{при нечётных} \quad k \geq 3,$$

$$b_k = a_k \quad \text{при чётных} \quad k \geq 2.$$

Искомый в задаче ток I соответствует току I_{2N-1} , втекающему в N -е звено. Используя заданную в условии формулу n -го члена последовательности Фибоначчи, получим ответ:

$$I = I_0 \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N}}{\sqrt{5}} + \frac{\Delta U}{R} \cdot \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\Delta U}{R}.$$

Напряжение на цепочке

$$U = 2\Delta U + (I_{2N-1} + I_{2N-2})R.$$

Подставляя найденные значения токов, получим

$$U = I_0 R \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N+1}}{\sqrt{5}} + \Delta U \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N}}{\sqrt{5}} + \Delta U.$$

В третьем пункте анализируется бесконечная цепочка, изображённая слева на рисунке 100, а справа её эквивалентная схема. Элемент X имеет та-

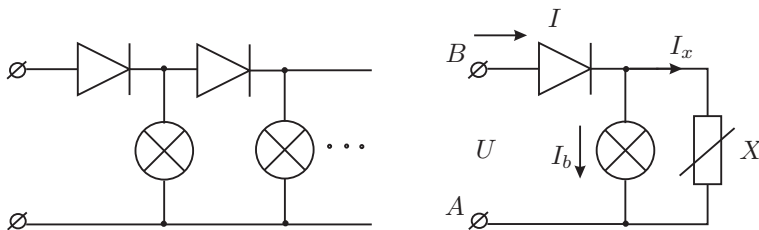


Рис. 100.

кую же вольт-амперную характеристику $I = I(U)$, что и вся цепь, так как свойства бесконечной цепочки не изменятся при уменьшении числа звеньев. На рисунке 101 представлены графики вольт-амперной характеристики диода VD и лампочки HL . При малых U оба графика можно приблизительно заменить прямыми линиями и измерить их наклон, тем самым найти эквивалентные сопротивления диода R_d и лампочки R_b . Найдём сопротивление R_x элемента, исходя из того, что для бесконечной цепочки сопротивление между точками A и B равно R_x (рис. 100). Тогда величина R_x является корнем уравнения

$$R_x^2 - R_x R_d - R_d R_b = 0.$$

Получаем

$$R_x = \frac{R_d}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_b}{R_d}} \right).$$

Строим на графике прямую, наклон которой соответствует R_x (рис. 101). Это — начало искомой вольт-амперной характеристики, которая относится также и к участку цепи X (рис. 100). Возьмём на этом участке некоторую точку A . Ей соответствует напряжение U_b на первой лампочке и ток I_x , текущий через элемент X . Ток в начале цепи $I = I_b + I_x$. Откладываем это значение на вертикальной оси. Находим точку C на графике VD рисунка 101. Ей соответствует значение U_d напряжения на первом диоде. Остаётся найти $U = U_d + U_b$ и построить точку M с координатами U и I . Взяв точки в иных местах линейного участка, найдём другие точки искомой вольт-амперной характеристики (рис. 101).

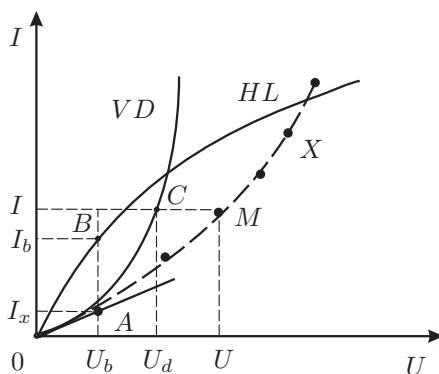


Рис. 101.

Задача 3.10 (Два кольца)

Искомая работа выражается через разность потенциалов в начальном и конечном положениях переносимого заряда:

$$A = q(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (1)$$

Потенциалы Φ_1 и Φ_2 в центрах колец по принципу суперпозиции полей можно представить в виде

$$\Phi = \varphi + \psi, \quad (2)$$

где φ — потенциал в центре кольца, создаваемый зарядом этого кольца, а ψ — зарядом другого кольца.

Вначале найдём потенциал $\phi(x)$, создаваемый зарядом Q в точке на оси кольца, удалённой от его центра на величину x (рис. 102). По принципу су-

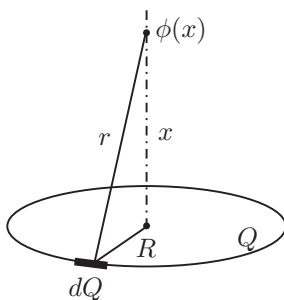


Рис. 102.

перпозиции

$$\phi(x) = \int k \frac{dQ}{r}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная, dQ — элементарный заряд кольца и $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ — расстояние от рассматриваемой точки до центра кольца. Так как заряд Q распределён по кольцу равномерно, то для потенциала $\phi(x)$ после интегрирования по всему кольцу:

$$\phi(x) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (3)$$

Применяем эту формулу для потенциалов φ и ψ , входящих в (2), для центра первого кольца:

$$\Phi_1 = \varphi_1 + \psi_1 = \frac{kq_1}{R} + \frac{kq_2}{\sqrt{R^2 + d^2}}. \quad (4)$$

Аналогично — для центра второго кольца:

$$\Phi_2 = \varphi_2 + \psi_2 = \frac{kq_2}{R} + \frac{kq_1}{\sqrt{R^2 + d^2}}. \quad (5)$$

Формулы (1), (2), (4) и (5) приводят к ответу

$$A = kq(q_2 - q_1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) = -7,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Задача 3.11 (Заряженное кольцо)

Из соображений симметрии следует, что искомая сила направлена перпендикулярно плоскости диска. Поэтому для её нахождения следует сложить лишь те составляющие сил, приложенных к каждому элементу диска, которые направлены перпендикулярно плоскости диска:

$$F = \sigma \sum E_i \Delta S_i = \sigma \Phi, \quad (1)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов диска, ΔS_i — площадь элементарного участка диска, E_i — модуль составляющей напряжённости поля на этом участке, которая перпендикулярна диску, Φ — поток напряжённости электрического поля через диск². Из теоремы Гаусса следует, что поток поля остаётся постоянным внутри выделенной в пространстве трубки, образующими которой являются силовые линии. В самом деле, в объёме такой трубки, ограниченной двумя сечениями, нет электрических зарядов, и, в соответствии с теоремой Гаусса, поток через границу этого объёма равен нулю. Поток через боковую поверхность трубки равен нулю по определению силовых линий. Следовательно, потоки через сечения трубки равны по модулю.

Применим свойство постоянства потока к данной задаче. С этой целью найдём поток Φ , создаваемый зарядами кольца внутри трубки, ограниченной силовыми линиями, которые проходят через кольцо и край диска. Поток,

²Имеется в виду поток той составляющей электрического поля, которая создана зарядами, расположенными на проволочном кольце.

Диск при вычислении потока рассматривается в этой ситуации исключительно как геометрический объект (не содержащий каких-либо зарядов).

Мы не рассматриваем тонкостей определения и вычисления потока электростатического поля через заряженную поверхность, которых в этой ситуации много. Например, казалось бы, заряд на плоскости не может повлиять на поток в месте своего расположения (так как из него выходит «поровну» силовых линий как по одну, так и по другую сторону плоскости диска). Но эти силовые линии затем могут «развернуться» и пересечь диск в другом месте, создав там дополнительный поток. Однако все подобные эффекты соответствуют только внутренним силам взаимодействия между частями диска и не влияют на силу взаимодействия диска с кольцом.

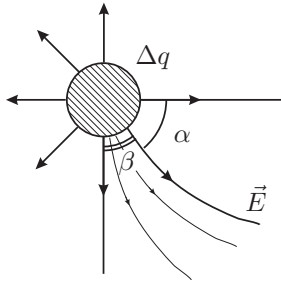


Рис. 103.

создаваемый всем кольцом, в соответствии с принципом суперпозиции, складывается из потоков, создаваемых элементами кольца. Электрическое поле элемента кольца в непосредственной близости от него почти не отличается от поля равномерно заряженной прямолинейной нити (рис. 103). Силовые линии этого поля изображены на рисунке 103. Так как $\alpha = 45^\circ$, то через диск проходят лишь те силовые линии, которые выходят из кольца под углом

$$0^\circ \leq \beta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 45^\circ.$$

Вследствие симметрии поля вокруг прямолинейной заряженной нити, этим углом β соответствует лишь 1/8 полного потока поля нити, равного

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0},$$

где Δq — заряд элемента нити, а ε_0 — электрическая постоянная. В результате,

$$\Phi = \frac{q}{8\varepsilon_0}, \text{ и формула (1) даёт } F = \frac{\sigma q}{8\varepsilon_0} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Задача 3.12 (Счётчик Гейгера)

Попадающие в камеру α -частицы ионизируют молекулы газа. Возникшие ионы оседают на электродах, меняя их первоначальный заряд. Затем заряд осевших ионов стекает через резистор R , и снова устанавливается равновесие. Предположим, что время оседания зарядов на электродах много меньше времени, в течение которого избыточный заряд рассасывается. Тогда задача сводится, во-первых, к нахождению заряда Q , обусловленного осевшими ионами и, во-вторых, к определению напряжения на резисторе R как функции времени $U = U(t)$.

Число пар ионов, генерированных попавшей в камеру частицей, равно $N = E/E_i$. Тогда возникший на электродах вследствие ионизации избыточный заряд

$$Q_0 = e \cdot N = e \frac{E}{E_i},$$

где e — элементарный заряд. Восстановление равновесия при протекании через резистор R тока I описывается соотношениями:

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad V = -IR + \frac{Q_e + Q}{C}, \quad U = IR.$$

Здесь V — напряжение источника (рис. 25), $Q_e = CV$ — равновесный заряд конденсатора, Q — избыточный заряд в момент времени t , U — напряжение на резисторе. Из этих соотношений следует:

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{RC}.$$

При интегрировании полученного уравнения нужно учесть, что в начальный момент времени $Q = Q_0 = eE/E_i$. Поэтому в этот момент

$$U = \frac{Q_0}{C} = \frac{eE}{CE_i} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

С учётом этого после интегрирования получаем

$$U = \frac{eE}{CE_i} e^{-t/RC}. \quad (1)$$

Видно, что напряжение на конденсаторе существенно убывает в течение времени RC . Поскольку в условии сказано, что RC много больше времени оседания ионов на электродах, то сделанное в процессе решения предположение справедливо.

Счётчики Гейгера, в которых регистрируются импульсы, вызванные отдельными частицами, называют импульсными ионизационными камерами. Величина импульса, как видно из формулы (1), позволяет измерить энергию частицы E . Параметр RC характеризует разрешающую способность метода, то есть возможность регистрировать каждую частицу в отдельности. Как следует из решения, RC должно быть много больше времени, в течение которого ионы достигают электродов. Это и ограничивает разрешающую способность импульсной ионизационной камеры. Недостатком метода является его малая чувствительность, обусловленная малостью величины U . В данной задаче оказалось, что $U \lesssim 10^{-4}$ В. Можно существенно увеличить чувствительность метода, если повысить напряжение источника V до такой величины, при которой возникает вторичная ионизация, вызванная столкновением ионов и электронов с молекулами газа. Эта идея реализуется в так называемых счётчиках Гейгера–Мюллера. В них на электроды подаётся напряжение, близкое к

пробивному. Ионизирующие элементарные частицы инициируют образование лавины ионов. Возникает самостоятельный разряд, который гасится специальными радиотехническими средствами. Счётчики Гейгера–Мюллера обладают большой чувствительностью, но не позволяют измерять энергии регистрируемых частиц. Какое напряжение следует подавать на счётчик Гейгера–Мюллера? Ответы на этот и другие вопросы содержатся в пункте два задачи.

В этом пункте требуется найти распределение напряжённости и потенциала электрического поля внутри камеры счётчика Гейгера. Подобные задачи электростатики удобно решать с помощью теоремы Гаусса. В качестве замкнутой поверхности, через которую следует вычислять поток напряжённости поля, возьмём поверхность соосного с электродами цилиндра радиусом r , расположенного между катодом и анодом. Длина цилиндра равна l . Напряжённость поля направлена в каждой точке от оси цилиндра. Заряд, заключённый внутри выбранной поверхности, равен λl . На основании теоремы Гаусса запишем:

$$E(r)2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, $E(r)$ — модуль напряжённости поля в точках, удалённых от оси на расстояние r . Эту величину и требуется найти:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (2)$$

Для нахождения $\varphi(r)$ воспользуемся формулой, связывающей потенциал с напряжённостью поля:

$$-\frac{d\varphi}{dr} = E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Проинтегрируем это уравнение, положив потенциал катода равным нулю:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_c}{r}. \quad (3)$$

Это ещё одно искомое в задаче соотношение.

Для нахождения пробивного напряжения заметим, что пробой может произойти там, где напряжённость поля достигает критического значения E_b . Из (2) видно, что поле максимально вблизи анода, то есть при $r = R_a$. Оно достигает пробивного значения при $\lambda = \lambda_b$, для которого

$$E_b = \frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0 R_a}. \quad (4)$$

Подставляя величины, соответствующие наступлению пробоя, в формулу (3), получим:

$$\varphi_b = \frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_c}{R_a} = E_b R_a \ln \frac{R_c}{R_a} \approx 11 \text{ кВ}.$$

Таким образом, выясняется, что зарождение ионной лавины, ведущей к пробою, возможно вблизи анода. Чтобы напряжённость поля здесь была близка к пробивному значению, напряжение на счётчике должно быть тем меньше, чем меньше радиус анода. Вот почему анод в счётчиках Гейгера–Мюллера делают в виде тонкой нити.

В отличие от предыдущих пунктов, в пункте 3 анализируется стационарное состояние счётчика, при котором число частиц, генерируемых в любом объёме внутри камеры, равно потоку этих частиц, покидающих данный объём. Счётчики, в которых реализуется такой режим, называют ионизационной камерой непрерывного действия.

Ввиду осевой симметрии конструкции счётчика удобно рассмотреть объём, заключённый между анодом и соосной с ним цилиндрической поверхностью радиусом $r \leq R_c$. Число положительных ионов, генерируемых в этом объёме в единицу времени, равно:

$$N = \Gamma \pi (r^2 - R_a^2) l, \quad (5)$$

где l — длина выбранной цилиндрической поверхности. Поток ионов, вытекающих из этого объёма в единицу времени, $\Phi(r) = n(r)v(r)2\pi r l$, где $n(r)$ — число положительных ионов в единице объёма на расстоянии r от оси цилиндра, $v(r)$ — скорость их движения в этом месте. В соответствии с условием $v(r) = \mu E(r)$, а напряжённость $E(r)$ определяется формулой (2). После подстановки этих значений получим:

$$\Phi(r) = n(r) \cdot \mu \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \cdot 2\pi r l = n(r) \frac{\lambda \mu}{\varepsilon_0} l.$$

Именно эта величина в стационарном состоянии должна быть равна числу генерируемых ежесекундно в выделенном объёме частиц (5). Поэтому

$$n(r) \frac{\lambda \mu}{\varepsilon_0} l = \Gamma \pi (r^2 - R_a^2) l, \quad \text{или} \quad n(r) = \frac{\pi \varepsilon_0 \Gamma}{\mu \lambda} (r^2 - R_a^2).$$

Таким образом, концентрация положительных ионов стремится к нулю вблизи анода и достигает наибольшего значения вблизи катода.

Задача 3.13* (Молекулярные кристаллы)

Для схематического изображения графика потенциала Леннарда–Джонса обратим внимание на поведение функции $U(r)$ при достаточно больших и достаточно малых r . В первом случае

$$\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} \ll \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \quad \text{и} \quad U(r) \approx -4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6.$$

График такой функции имеет вид кривой 1 на рисунке 104. При малых r определяющую роль играет, напротив, слагаемое пропорциональное r^{-12} . График

$U(r)$ в этом приближении имеет вид 2 (рис. 104). Таким образом, функция $U(r)$ при изменении r от 0 до ∞ вначале резко убывает, а затем возрастает, так что её график имеет вид сплошной линии на рисунке 104. Равновесному состоянию соответствует расстояние r_0 , при котором $U(r)$ имеет минимальное значение (рис. 104).

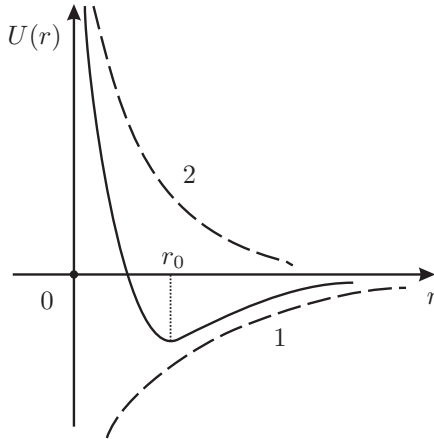


Рис. 104.

Для нахождения равновесного расстояния r_0 воспользуемся стандартным приёмом определения экстремума функции, то есть приравняем к нулю производную функции $U(r)$:

$$\frac{dU}{dr} = 4\varepsilon \left(-12 \frac{\sigma^{12}}{r^{13}} + 6 \frac{\sigma^6}{r^7} \right) = 0.$$

Корнем этого уравнения является искомая величина:

$$r_0 = \sqrt[6]{2} \cdot \sigma \approx 3,82 \text{ \AA}.$$

Для нахождения потенциальной энергии взаимодействия атома со всей решёткой E нужно сложить энергии взаимодействия рассматриваемого атома с каждым из остальных атомов кристалла:

$$E = \sum_i 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_i} \right)^6 \right), \quad (1)$$

где r_i — расстояние между рассматриваемым атомом и i -м атомом кристалла. Суммирование в (1) предполагается по всем атомам, число которых огромно. Задача нахождения суммы такого числа слагаемых, на первый взгляд, кажется практически неразрешимой. Тем не менее можно «подобрать ключик»

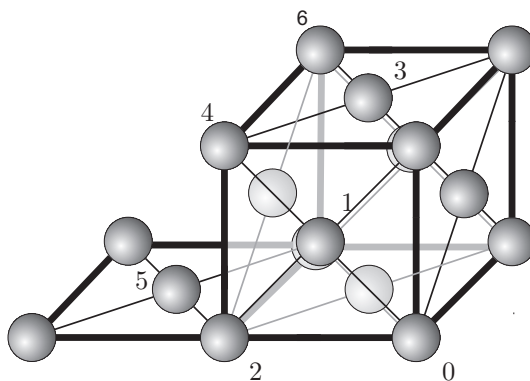


Рис. 105.

к приближённому решению задачи. Учтём то обстоятельство, что слагаемые приблизительно пропорциональны r_i^{-6} , то есть существенный вклад в сумму вносят главным образом атомы решётки, не очень удалённые от рассматриваемого атома. К тому же вклад в сумму от равноудалённых атомов одинаков. Поступим следующим образом. Вначале учтём в (1) вклад ближайших соседей. Из рисунка 105 видно, что расстояние от атома 0 до ближайших соседей $r_1 = a/\sqrt{2}$. Подсчитаем число ближайших к атому 0 соседей. В изображённой на рисунке ячейке — это три атома типа 1. К атому 0 примыкают восемь таких ячеек, однако, атомы типа 1 одновременно принадлежат двум из рассматриваемых восьми ячеек. Так что число ближайших соседей атома 0 равно $3 \cdot 8/2 = 12$. Их вклад в сумму (1) составляет

$$E_1 = 12 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right). \quad (2)$$

Несколько дальше находятся атомы типа 2 (рис. 105), удалённые на расстояние $r_1\sqrt{2}$. Число таких соседей равно $3 \cdot 8/4 = 6$. Каждый из атомов типа 2 одновременно принадлежит четырём из восьми примыкающих к атому 0 ячеек. Вклад этих соседей в формулу (1) составляет

$$E_2 = 6 \cdot 4\varepsilon \left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}r_1} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}r_1} \right)^6 \right). \quad (3)$$

Мы рассмотрели две группы равноудалённых соседей. Аналогично можно выделить группы соседей типа 3, 4, 5, 6 (рис. 105). В приведённой ниже таблице указаны типы соседей атома 0, их числа и расстояния до них.

Типы соседей	1	2	3	4	5	6
Число соседей	12	6	24	12	24	8
Расстояние до соседей	r_1	$\sqrt{2}r_1$	$\sqrt{3}r_1$	$2r_1$	$\sqrt{5}r_1$	$\sqrt{6}r_1$

Запишем вклады в сумму (1) от всех указанных групп аналогично (2) и (3) и сложим полученные равенства. Получим

$$E = 4\varepsilon \left(A \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^{12} - B \left(\frac{\sigma}{r_1} \right)^6 \right),$$

где

$$A = 12 + 6 \frac{1}{(\sqrt{2})^{12}} + 24 \frac{1}{(\sqrt{3})^{12}} + 12 \frac{1}{2^{12}} + 24 \frac{1}{(\sqrt{5})^{12}} + 8 \frac{1}{(\sqrt{6})^{12}} \approx \\ \approx 12 + 0,094 + 0,033 + 2,930 \cdot 10^{-3} + 1,536 \cdot 10^{-3} + 1,715 \cdot 10^{-4} \approx 12,132$$

$$B = 12 + 6 \frac{1}{(\sqrt{2})^6} + 24 \frac{1}{(\sqrt{3})^6} + 12 \frac{1}{2^6} + 24 \frac{1}{(\sqrt{5})^6} + 8 \frac{1}{(\sqrt{6})^6} \approx \\ \approx 12 + 0,75 + 0,889 + 0,188 + 0,192 + 0,037 \approx 14,055$$

Видно, что каждое следующее слагаемое в выражениях для A и B существенно меньше предыдущего. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением небольшого числа групп соседей. Результаты, полученные для шести таких групп, особенно число A , мало отличаются от табличных значений, найденных при учёте большего числа соседей: $A \approx 12,13$ и $B \approx 14,45$.

Равновесное расстояние r_1 между ближайшими атомами находится приравниванием к нулю производной функции $E = E(r_1)$:

$$\frac{dE}{dr_1} = 4\varepsilon \left(-12A \frac{\sigma^{12}}{r_1^{13}} + 6B \frac{\sigma^6}{r_1^7} \right) = 0.$$

Значение r_1 является корнем этого уравнения:

$$r_1 = \sqrt[6]{2 \frac{A}{B}} \cdot \sigma \approx 3,72 \text{ \AA}. \quad (4)$$

Искомая постоянная решётки кристалла аргона $a = \sqrt{2}r_1 \approx 5,27 \text{ \AA}$, что мало отличается от значения $a = 5,30 \text{ \AA}$, получаемого в эксперименте.

Теперь найдём модуль всестороннего сжатия $\varkappa = -V dp/dV$. Для этого применим к кристаллу закон изменения энергии:

$$p dV = -du,$$

где u — энергия кристалла. Получим

$$\varkappa = V \frac{d^2 u}{dV^2}.$$

Энергия кристалла u равна половине произведения найденной выше величины E на число атомов N , поскольку в произведении NE дважды учитывается взаимодействие каждого атома. Входящее в E равновесное расстояние между ближайшими атомами r_1 определяет объём ячейки a^3 , от которого зависит V . Объём V равен

$$V = \frac{N}{4} a^3 = \frac{N r_1^3}{\sqrt{2}}.$$

Множитель $1/4$ учитывает, что на одну элементарную ячейку приходится два атома. Используя выражение для V , найдём

$$u(V) = 2N\varepsilon \left(A \frac{N^4 \sigma^{12}}{4V^4} - B \frac{N^2 \sigma^6}{2V^2} \right).$$

После дифференцирования получим

$$\frac{d^2 u}{dV^2} = 2N\varepsilon \left(5A \frac{N^4 \sigma^{12}}{V^6} - 3B \frac{N^2 \sigma^6}{V^4} \right) = 2N\varepsilon \left(40A \frac{\sigma^{12}}{N^2 r_1^{18}} - 12B \frac{\sigma^6}{N^2 r_1^{12}} \right).$$

Для получения окончательного результата остаётся подставить выражение (4) для r_1 . Тогда

$$\varkappa = V \frac{d^2 u}{dV^2} = \frac{4\varepsilon}{\sigma^3} \frac{B^{5/2}}{A^{3/2}} \approx 2,89 \cdot 10^9 \text{ Па}.$$

Задача 3.14* (Колебания в цепи с диодами)

Какие процессы происходят в данной цепи? Когда ток в диоде течёт в пропускном направлении, этот диод играет роль обычного проводника, входящего в колебательный контур. В контуре происходят гармонические колебания. Правда, параметры контура, в котором происходят колебания, зависят от того, через какой диод протекает ток. Поэтому целесообразно проанализировать колебания на различных временных интервалах после замыкания ключа.

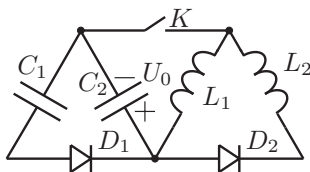


Рис. 106.

На первом этапе конденсатор C_1 «отключён» диодом D_1 , а конденсатор C_2 без препятствия со стороны D_2 разряжается через параллельно соединённые катушки L_1 и L_2 . Их можно заменить одной эквивалентной катушкой с индуктивностью

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Последняя формула следует из уравнений

$$L \frac{dI}{dt} = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad I = I_1 + I_2,$$

где I_1 и I_2 — токи через параллельно соединённые катушки L_1 и L_2 .

Колебания в данном контуре происходят с периодом

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C_2}$$

в течение времени $\tau_1 = T_1/4$, пока конденсатор C_2 полностью не разрядится. После этого конденсатор C_2 начинает перезаряжаться за счёт постепенного уменьшения тока в катушках. Потечёт этот ток и через диод D_1 , заряжая конденсатор C_1 . Всё происходит так, как в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и пары параллельно соединённых конденсаторов C_1 и C_2 , которая эквивалентна конденсатору с ёмкостью $C = C_1 + C_2$. Период колебаний в таком контуре равен

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (C_1 + C_2)}.$$

Эти колебания продолжаются промежуток времени $\tau_2 = T_2/4$, после чего заряженный до максимального по модулю напряжения U_1 конденсатор C_1 «отключается» диодом D_1 , поскольку далее напряжение на конденсаторе C_2 не может превысить достигнутого максимального значения U_1 . Величину U_1 можно найти из закона изменения энергии:

$$\frac{C_2 U_0^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) U_1^2}{2}. \quad (1)$$

Левая часть (1) — энергия поля конденсаторов в начальный момент времени, правая — в момент времени $\tau_1 + \tau_2$, когда ток в катушках обращается в нуль. Из уравнения (1) находим один из ответов задачи:

$$U_1 = U_0 \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}.$$

После момента времени $\tau_1 + \tau_2$ конденсатор C_2 будет разряжаться только через L_1 , поскольку катушка L_2 оказывается «отключённой» диодом D_2 .

Время этого процесса $\tau_3 = T_3/4$, где $T_3 = 2\pi\sqrt{L_1 C_2}$ — период колебаний контура, образованного конденсатором C_2 и катушкой L_1 .

В момент времени $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, когда конденсатор C_2 полностью разрядится, ток разряда достигнет значения

$$I_1 = U_1 \sqrt{\frac{C_2}{L_1}}, \quad (2)$$

что следует из закона сохранения энергии. После этого момента энергия магнитного поля катушки L_1 расходуется на перезарядку конденсатора C_2 и на создание тока в катушке L_2 . Диод D_2 не препятствует этому току, поскольку направление ЭДС самоиндукции в катушке L_1 согласно правилу Ленца совпадает с пропускным направлением данного диода. Ток в катушке L_1 достигает значения I , когда конденсатор заряжается до максимального напряжения U_2 . Тот же ток течёт и по другой катушке, обеспечивая в этот момент времени равенство нулю изменения заряда конденсатора. Величину тока I найдём из равенства ЭДС индукции на первой и второй катушках:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Следовательно, равны изменения магнитных потоков:

$$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2, \quad \Delta\Phi_1 = L_1 I - L_1 I_1, \quad \Delta\Phi_2 = -L_2 I.$$

Отсюда находим ток через катушки в момент, когда на конденсаторе C_2 максимальное напряжение U_2 :

$$I = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I_1. \quad (3)$$

Закон сохранения энергии позволяет связать U_2 с U_1 :

$$\frac{C_2 U_1^2}{2} = \frac{C_2 U_2^2}{2} + \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2}. \quad (4)$$

Подставляя сюда (2) и (3) получим:

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}} = U_0 \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}} \sqrt{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}. \quad (5)$$

Далее гармонические колебания контура, образованного конденсатором C_2 и парой параллельно соединённых катушек, будут продолжаться неограниченно долго (в отсутствие потерь), так как диод D_2 всё время остаётся открытым. Действительно, рассмотрим момент времени, когда ток в диоде

приближается к нулевому значению. Может ли он «закрыться»? Данная ситуация ничем не отличается от ситуации в момент времени τ , при которой диод «отпирался». Так что ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Итак, с момента времени $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ установятся гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C_2},$$

и амплитудой U_2 (5).

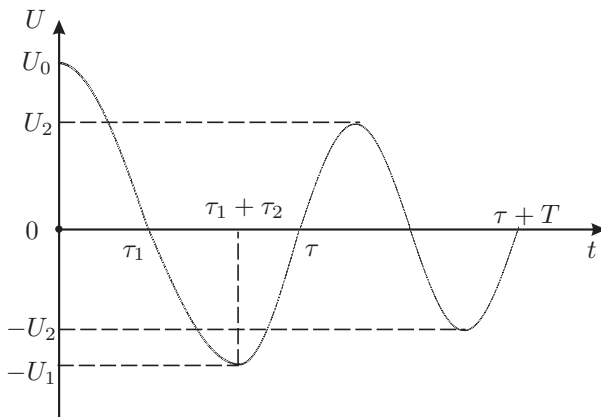


Рис. 107.

На рисунке 107 изображён итоговый график изменения напряжения на конденсаторе C_2 в течение времени t .

Задача 3.15 (Эффект Холла)

Вначале выясним почему возникает холловская разность потенциалов. На рисунке 108 показаны направление магнитного поля $\vec{B}$, направление тока I , соответствующие ему направления движения положительных (дырок) и отрицательных (электронов) носителей зарядов. Магнитное поле искривляет траекторию движения носителей зарядов, как это показано на рисунке 108. Из-за различия потоков электронов и дырок на поверхности A собираются положительные заряды, а на поверхности B отрицательные. Возникает напряжение $\varphi_A - \varphi_B = U$, создающее поперечную напряжённость электрического поля $E_{\perp} = U/b$, препятствующую дальнейшему оседанию зарядов на поверхностях (рис. 108). В стационарном состоянии поток электронов к пластине должен быть равен потоку дырок:

$$n \cdot v_{\perp}^n = p \cdot v_{\perp}^p, \quad (1)$$

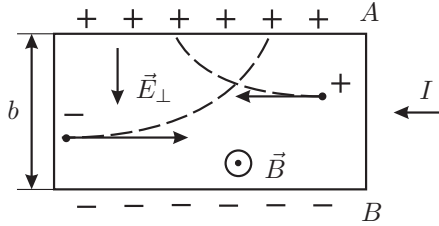


Рис. 108.

где $v_{\perp}^n$ и $v_{\perp}^p$ — перпендикулярные к граням A и B составляющие скорости электронов и дырок. Эти составляющие обусловлены как силой Лоренца, так и поперечной к пластинам напряжённостью электрического поля $E_{\perp}$, создаваемого зарядами пластин:

$$v_{\perp}^n = \mu_n(v_n B + E_{\perp}) = \mu_n^2 E B + E_{\perp} \mu_n, \quad (2)$$

$$v_{\perp}^p = \mu_p(v_p B - E_{\perp}) = \mu_p^2 E B - E_{\perp} \mu_p. \quad (3)$$

Здесь E — составляющая напряжённости электрического поля вдоль тока I . Она определяет скорость движения носителей вдоль пластин:

$$v_n = \mu_n E, \quad v_p = \mu_p E.$$

Эти скорости обеспечивают ток I :

$$I = e(nv_n + pv_p)ab = eE(n\mu_n + p\mu_p)ab, \quad (4)$$

где e — элементарный заряд, b — ширина пластины. Подставляем (2) и (3) в (1):

$$EB(\mu_p^2 p - \mu_n^2 n) = E_{\perp}(\mu_n n + \mu_p p).$$

Величина $E_{\perp} = U/b$, а E определяется равенством (4). Учитывая это, получим:

$$U = \frac{BI}{a} \cdot \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{e(\mu_n n + \mu_p p)^2}.$$

Откуда

$$R = \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{e(\mu_n n + \mu_p p)^2}.$$

Знак коэффициента Холла определяет тип проводимости полупроводника: для полупроводника с дырочной проводимостью $R > 0$, для электронного $R < 0$.

Задача 3.16* (Дрейф)

На движущуюся заряженную частицу вблизи провода с током действует сила Лоренца. Силовые линии магнитного поля тока представляют собой перпендикулярные к току окружности, центры которых лежат на проводе. Модуль индукции магнитного поля находится по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (1)$$

где r — расстояние от точки поля до провода.

На рисунке 109 показаны соответствующие первому пункту задачи направления тока, текущего в проводнике, начальная скорость частицы $\vec{v}_0$, скорость $\vec{v}$ в произвольный момент времени, направление индукции магнитного поля $\vec{B}$, а также сила Лоренца $\vec{F}$. Поскольку векторы $\vec{v}$ и $\vec{F}$ лежат в одной

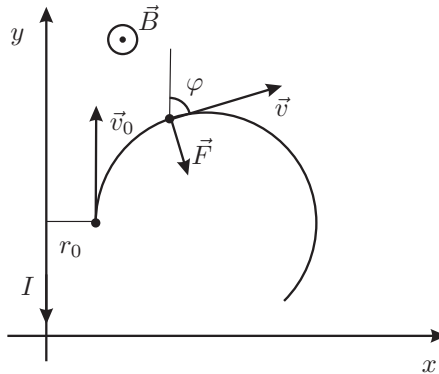


Рис. 109.

плоскости, траектория движения лежит в плоскости xy декартовой системы координат, указанной на рисунке 109. Запишем уравнение движения частицы в проекции на ось y . При этом учтём, что проекция силы Лоренца $F_y = -q\dot{x}B$, где точка над символом обозначает производную по времени t . Уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}B, \quad \text{или} \quad m\ddot{y} + \frac{\mu_0 q I \dot{r}}{2\pi r} = 0.$$

Интегрируем это уравнение с учётом того, что при $t = 0$ производная $\dot{y} = v_0$, а $r = r_0$:

$$\dot{y} = v_0 - \frac{\mu_0 q I}{2\pi m} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (2)$$

Поскольку сила Лоренца не меняет модуль скорости, то при минимальном расстоянии $r = r_{\min}$ величина $\dot{y} = v_0$, а при максимальном $r = r_{\max}$ проекция

скорости $\dot{y} = -v_0$ (рис. 109). Поэтому из (2) получаем

$$r_{\min} = r_0, \quad r_{\max} = r_0 \exp\left(\frac{4\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right).$$

Когда скорость частицы перпендикулярна проводу, производная $\dot{y} = 0$. В этом случае формула (2) даёт

$$r = R = r_0 \exp\left(\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right). \quad (3)$$

Во втором пункте требуется найти скорость дрейфа. Какой смысл вкладывается в этот термин? Если

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\min}} \ll 1,$$

то есть величина $\alpha \ll 1$, то приближённо можно пренебречь неоднородностью магнитного поля. Поэтому в этих условиях движение частицы мало отличается от движения по окружности радиусом

$$R_0 = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2}$$

с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{v_0}{\alpha r}.$$

Величину R_0 называют циклотронным радиусом, а ω — циклотронной частотой. Центр орбиты частицы всё время находится на расстоянии R (3) от провода. Неоднородность магнитного поля искажает движение по круговой орбите: циклотронный кружок как бы медленно смещается вдоль оси y , дрейфует. Скорость этого дрейфа и требуется определить в задаче. Для этого нужно поделить смещение частицы вдоль оси y за период на это время:

$$u_y = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y} dt = \frac{1}{T} \int_0^T v_0 \cos \varphi dt, \quad (4)$$

где φ — угол, который образует скорость $\vec{v}$ с осью y . Для нахождения зависимости этого угла от времени обратимся к уравнению (2), переписав его следующим образом:

$$r = r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)).$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\dot{r} = v_0 \sin \varphi = (\alpha r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi) \dot{\varphi}.$$

Подставим выраженную отсюда величину dt в (4) и учтём малость α :

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} v_0 \frac{\alpha r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{v_0 \sin \varphi} \approx \\ &\approx \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \alpha r_0 \cos \varphi (1 + \alpha(1 - \cos \varphi)) d\varphi = -\frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}. \end{aligned}$$

Итак, скорость дрейфа

$$u = \frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}$$

и направлена вдоль тока.

На рисунке 110 показана построенная с помощью системы компьютерной математики MathCAD траектория частицы в условиях данной задачи. На рисунке 111 приведена полученная аналогичным образом траектория движения частицы вблизи провода при условии, что её начальная скорость не лежит в одной плоскости с током и что ток монотонно меняется со временем. Видно, что модель дрейфа циклотронных кружков даёт наглядное представление о характере движения. Эта модель широко используется в физике плазмы и не только для наглядности, но и для получения количественных результатов.

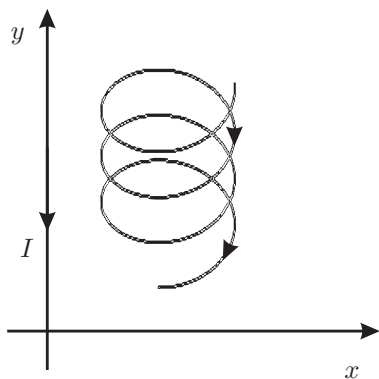


Рис. 110.

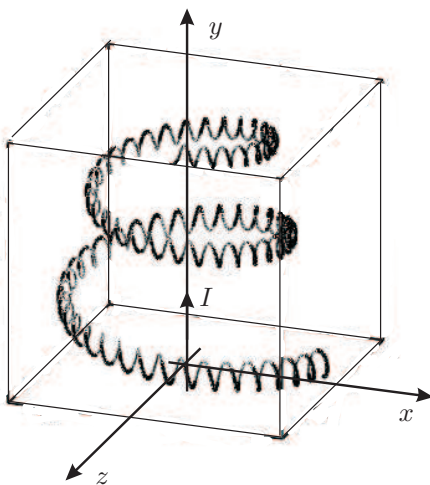


Рис. 111.

Оптика

Задача 4.1 (Зеркала)

Свет сначала проходит сквозь линзу, затем отражается от пары зеркал и снова проходит сквозь линзу в обратном направлении. Найдём положения изображений источника, которые получились бы последовательно на каждом из этих этапов. Расстояние d_1 от изображения S_1 источника S (рис. 112)

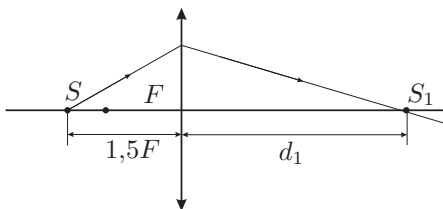


Рис. 112.

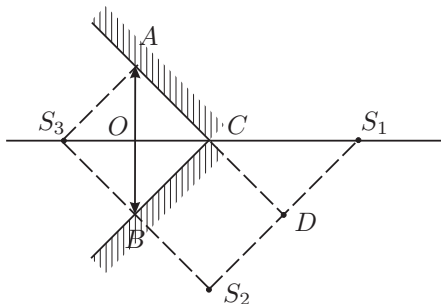


Рис. 113.

находится из формулы линзы:

$$\frac{1}{1,5F} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F}, \quad d_1 = 3F.$$

Далее следует найти даваемое зеркалами изображение мнимого источника S_1 . Известно, что зеркало даёт изображение, симметричное источнику относительно плоскости зеркала. Это свойство зеркала следует из закона отражения и относится как к действительным, так и к мнимым источникам. Этим свойством и следует воспользоваться. На рисунке 113 показаны: S_2 — изображение точки S_1 в зеркале AC , S_3 — изображение точки S_2 в зеркале BC . Из определения зеркальной симметрии следует: $S_1D = DS_2 = BC$, $S_2B = BS_3 = AC$. Из условия задачи следует, что $AO = OC = OB = F$. Кроме того, найдено что $OS_1 = d_1 = 3F$. Отсюда нетрудно заключить, что $CS_3 = CS_1$. Итак, изображение S_3 находится на расстоянии F от оптического центра линзы. На следующем этапе S_3 — мнимый предмет для линзы. Изображением этого предмета является искомая точка. Обозначим её расстояние от центра линзы d и применим для её нахождения формулу линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{F} = \frac{1}{F}.$$

Знак минус перед вторым слагаемым поставлен потому, что источник S_3 , удалённый от линзы на расстояние F , мнимый. Из последнего уравнения получаем $d = F/2$.

Замечание. Лучи, идущие в плоскости рисунка 113, в результате последовательного отражения от двух расположенных перпендикулярно друг другу зеркал, не меняют своего направления (то есть далее распространяются параллельно направлению, которое они имели до первого отражения). Следовательно, если луч составлял малый угол с главной оптической осью линзы, то этот угол и останется малым. А проекцию направления лучей, перпендикулярную плоскости рисунка, зеркала, сами расположенные перпендикулярно плоскости рисунка, не меняют. Поэтому пучок лучей, имевших малые углы с главной оптической осью линзы, после двух последовательных отражений от зеркал, также будет состоять из лучей, имеющих малые углы с этой оптической осью, и применение формулы тонкой линзы для расчёта координат изображения, даваемого этим пучком после прохождения через линзу, является обоснованным.

Задача 4.2 (Котлован)

Человек, находящийся в точке A (рис. 114), оценивает глубину водоёма по двум близким лучам, идущим из точек B и C . Ему кажется, что лучи исходят

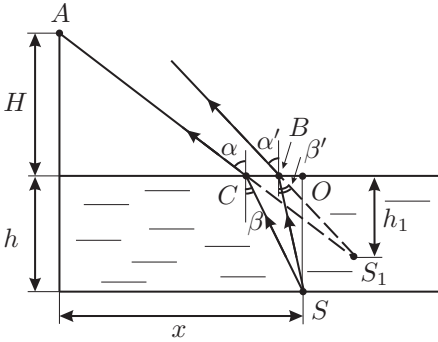


Рис. 114.

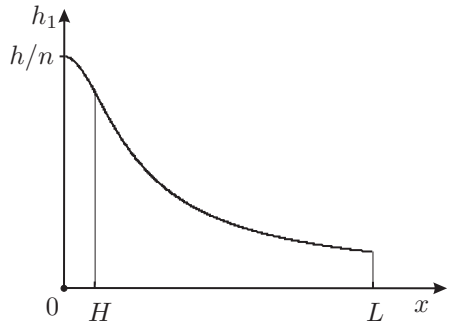


Рис. 115.

не из точки S , а из точки S_1 , и поэтому видимая глубина водоёма h_1 . Изменения направлений лучей на поверхности воды подчиняются закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = n \quad (1)$$

где n — показатель преломления воды, а углы α , β , α' и β' показаны на рисунке 114. Пусть Δ — длина отрезка BC . Тогда из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке 114, следует:

$$\Delta = h(\tan \beta - \tan \beta') = h_1(\tan \alpha - \tan \alpha'). \quad (2)$$

Поскольку углы α и α' , β и β' мало отличаются, то если $\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$ и $\beta - \beta' = \Delta\beta$

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta' \approx \frac{\Delta\beta}{\cos^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha' \approx \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Подставляя полученные соотношения в (2), находим

$$h_1 = h \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}.$$

Записывая закон Снеллиуса (1) для маленьких приращений углов:

$$\cos \alpha \Delta\alpha = n \cos \beta \Delta\beta, \quad \text{откуда} \quad h_1 = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \beta} = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}\right)^{3/2}}. \quad (3)$$

Для угла α из рисунка 114 находим

$$\sin \alpha = \frac{x - OB}{\sqrt{(x - OB)^2 + H^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}},$$

так как $OB \ll x$ при малых h . Осталось подставить полученное выражение для $\sin \alpha$ в (3) и произвести алгебраические преобразования:

$$h_1 = \frac{n^2 h H^3}{((n^2 - 1)x^2 + n^2 H^2)^{3/2}}.$$

График этой зависимости, построенный с помощью MathCAD, представлен на рисунке 115. Видно, что вдали от обрыва водоём кажется более мелким.

Задача 4.3* (Световой зайчик)

Если бы скорость света была бесконечно большой, то человек видел бы световое пятно в том месте, где луч фонарика пересекает стену. Из-за конечности скорости распространения света человек увидит в этом месте зайчик спустя некоторое время. В этот момент луч фонарика будет уже направлен в иную точку.

Найдём скорость зайчика с точки зрения наблюдателя:

$$v = \frac{dx}{dt_1}, \quad (1)$$

где v — проекция на ось x скорости зайчика (рис. 116), который наблюдатель видит в момент времени t_1 . Луч фонарика был направлен в эту точку в момент времени t . Время t_1 больше t на величину, необходимую свету для прохождения от A к B и обратно (рис. 116):

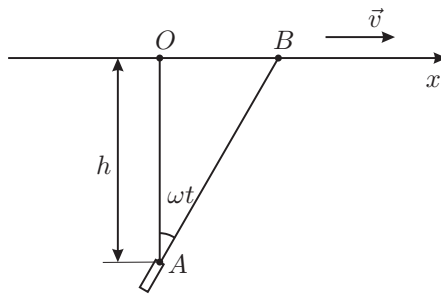


Рис. 116.

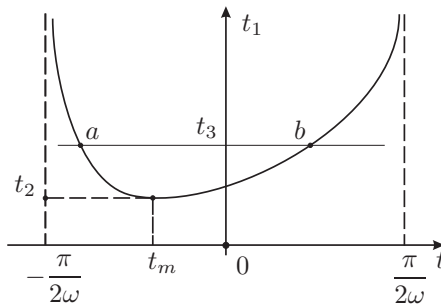


Рис. 117.

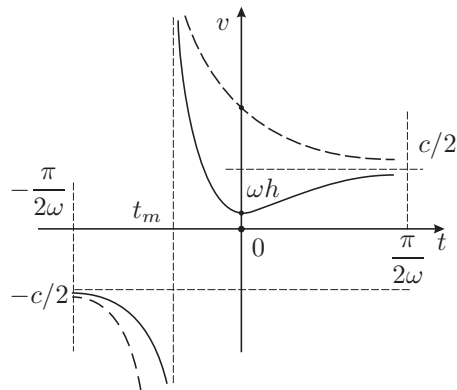


Рис. 118.

$$t_1 = t + \frac{2h}{c \cdot \cos \omega t}. \quad (2)$$

Поскольку переменные t_1 и t связаны соотношением (2), целесообразно пред-

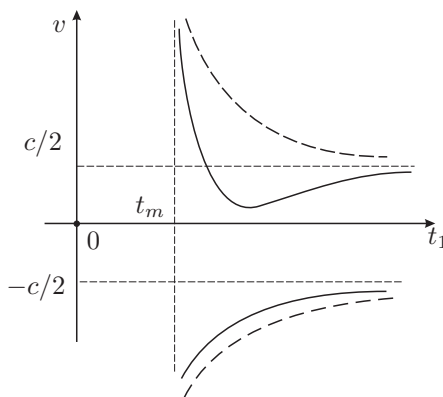


Рис. 119.

ставить (1) в виде:

$$v = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt_1} = \frac{dx}{dt} \left(\frac{dt_1}{dt} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Из рисунка 116 видно, что

$$x = h \operatorname{tg} \omega t. \quad (4)$$

Продифференцировав функции (2) и (4), найдём производные, входящие в (3), и получим после их подстановки:

$$v = \frac{c \omega h}{c \cdot \cos^2 \omega t + 2 \omega h \sin \omega t}. \quad (5)$$

Формулы (4), (5) и (2) содержат ответы на поставленные в задаче вопросы. Проанализируем полученные соотношения.

Изобразим приблизительный график зависимости (2) (рис. 117). Величина t_1 имеет минимальное значение t_2 в точке t_m , для нахождения которой следует приравнять к нулю производную $t_1(t)$:

$$\sin \omega t_m = \frac{\omega h}{c} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega h}{c} \right)^2}. \quad (6)$$

По формуле (4) можно найти координату зайчика x_m в момент времени t_2 :

$$x_m = -\frac{h}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{c}{\omega h} \right)^2 + 1} - 1}. \quad (7)$$

При подстановке (6) в (5) обнаруживаем, что функция $v(t)$ испытывает разрыв в точке t_m , меняя знак. Поведение функции $v(t)$ качественно представлено графиком, изображённым на рисунке 118. Сплошными линиями показан

график при $\omega h < c/2$, пунктирными — при $\omega h > c/2$. Сопоставляя величины v и t_1 при одинаковых значениях параметра t , можно нарисовать и приближённый график зависимости наблюдаемой скорости зайчика $v(t_1)$ (рис. 119).

О каком движении светового зайчика говорят эти графики? Раньше всего наблюдатель увидит зайчик, находящийся в точке x_m в момент времени t_2 . В последующие моменты времени $t_1 = t_3 > t_2$ наблюдатель увидит два зайчика, координаты которых соответствуют точкам a и b на рисунке 117. Скорости этих зайчиков направлены в противоположные стороны. При $t_1 \rightarrow \infty$ проекция скорости одного стремится к $c/2$, а другого к $-c/2$. После следующего прохождения вращающегося луча фонарика через точку x_m появится ещё одна пара разбегающихся зайчиков и так далее.

Не является ли обнаруженное здесь парадоксальное свойство световых зайчиков результатом ошибки данной теоретической модели? Одним из тестов на ошибочность новых физических теорий служит принцип соответствия. Согласно этому принципу новая теория в предельных частных случаях даёт те же результаты, что и верная старая теория. Релятивистская физика даёт немало парадоксальных результатов, противоречащих «здравому смыслу». Однако, она успешно выдерживает испытание принципом соответствия. Испытаем этим принципом результаты данной задачи. Посмотрим, что дают полученные формулы при $c \rightarrow \infty$. Из (1) следует, что $t_1 = t$, то есть наблюдатель видит зайчик в точке x в тот же момент времени, в который через эту точку проходит луч фонарика. Из (5) следует, что $v = \frac{\omega h}{\cos^2 \omega t}$. Это естественно согласуется с формулой (4) и не содержит никаких пар зайчиков. Таким образом, полученные в задаче результаты согласуются с принципом соответствия.

Задача 4.4 (Сферическое зеркало)

На рисунке 120 показан ход луча, падающего на зеркало на расстоянии x от его оптической оси. O — центр кривизны зеркала. Фокус F удалён от центра на расстояние $OF = R/2$. Отражённый луч пересекает главную оптическую ось в точке F_x , для которой, как видно из рисунка, $OF_x = \frac{R}{2 \cos \alpha}$. Угол α зависит от x так как $\sin \alpha = x/R$. Найдём, на каком расстоянии y от главной оптической оси луч пересекает фокальную плоскость. Это нетрудно сделать с помощью рисунка 120:

$$y = \left(\frac{R}{2 \cos \alpha} - \frac{R}{2} \right) \operatorname{tg}(2\alpha). \quad (1)$$

В соответствии с условием задачи углы α малы, поэтому можно использовать приближения:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \quad \text{и} \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

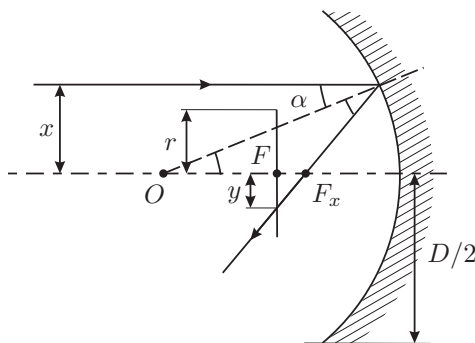


Рис. 120.

которые существенно упрощают формулу (1):

$$y \approx \frac{R}{2} \alpha^3 = \frac{x^3}{2R^2}. \quad (2)$$

Чтобы найти среднюю освещённость экрана, следует световой поток, падающий на него, поделить на площадь пятна на экране. Какие же лучи попадают на экран? На зеркало падают лучи, проходящие мимо экрана. Для них

$$r < x < \frac{D}{2} \quad (3)$$

и, согласно (2),

$$\frac{r^3}{2R^2} < y < \frac{D^3}{16R^2}. \quad (4)$$

Все эти лучи попадают на экран, если он достаточно велик, то есть при

$$r > \frac{D^3}{16R^2}. \quad (5)$$

В этом случае площадь освещённого пятна на экране

$$S_1 = \pi \left(\left(\frac{D^3}{16R^2} \right)^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2 \right).$$

Световой поток Φ , падающий на это пятно, найдём по формуле $\Phi = NS_2$, где N — мощность солнечного излучения, приходящегося на единичную площадку, перпендикулярную лучам, а S_2 — площадь так же ориентированной площадки, которую пересекают лучи, попадающие на зеркало. Эта площадь равна

$$S_2 = \pi \left(\left(\frac{D}{2} \right)^2 - r^2 \right).$$

Таким образом, получаем для средней освещённости E светового пятна при условии $r > D^3/(16R^2)$:

$$E = \frac{N \left(\left(\frac{D}{2} \right)^2 - r^2 \right)}{\left(\frac{D^3}{16R^2} \right)^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2} = \frac{4R^4 N}{\left(\frac{D}{2} \right)^4 + r^2 \left(\frac{D}{2} \right)^2 + r^4}. \quad (6)$$

Если экран небольшой, то есть $r \leq \frac{D^3}{16R^2}$, то на него попадают не все лучи, отражённые зеркалом. Площадь освещённого пятна S_1 в этом случае равна:

$$S_1 = \pi \left(r^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2 \right).$$

Площадь S_2 в этом случае принимает значение

$$S_2 = \pi(x_1^2 - r^2),$$

где x_1 находится из формулы (2) при подстановке в неё $y = r$: $x_1^3 = 2R^2 r$. Зная S_1 и S_2 , находим освещённость E при условии $r \leq D^3/(16R^2)$:

$$E = N \frac{x_1^2 - r^2}{r^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2} = N \frac{(2R^2 r)^{2/3} - r^2}{r^2 - \left(\frac{r^3}{2R^2} \right)^2}. \quad (7)$$

При $r \ll R$ находим из полученного выражения

$$E \approx 2^{2/3} \cdot N \left(\frac{R}{r} \right)^{4/3},$$

то есть при $r \rightarrow 0$ освещённость неограниченно возрастает. Такое заключение получилось в рамках геометрической оптики, справедливой, когда длина волны света $\lambda \ll D$. Дифракция света приводит к тому, что в фокальной плоскости получается не точка, а пятнышко, что ограничивает величину E . При больших r изменяющихся в пределах от $D^3/(16R^2)$ до $D/2$, то есть в $8R^2/D^2$ раз, освещённость в соответствии с формулой (6) изменяется всего в 3 раза, что говорит о слабой зависимости E от r . Качественно характер зависимости $E(r)$ отражает рисунок 121, на котором

$$E_m = \frac{64}{3} N \left(\frac{R}{D} \right)^4.$$

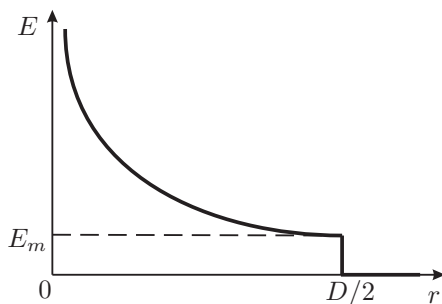


Рис. 121.

Задача 4.5* (Аквариум)

Прохождение узкого пучка света через участок стенки аквариума можно рассматривать как последовательное преломление на плоско-выпуклой линзе с радиусом кривизны R , на плоско-параллельной пластине толщиной δ и на плоско-вогнутой линзе с радиусом кривизны $R - \delta$ (рис. 122). Прямая, соединяющая вершину рассматриваемого участка P с центром аквариума O , служит главной оптической осью. Рассмотрим луч пучка, падающий параллельно этой оси, и найдём точку пересечения его с осью после прохождения стенки. Эта точка является фокусом. После преломления на первой линзе

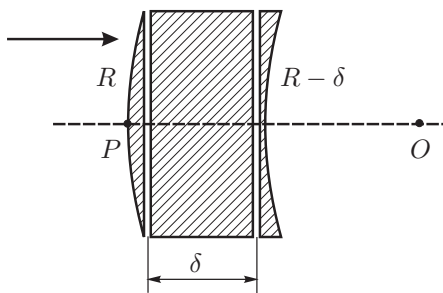


Рис. 122.

луч идёт к точке S_1 (рис. 123), удаление которой от линзы

$$F_1 = \frac{R}{n - 1}. \quad (1)$$

Далее луч проходит через плоско-параллельную пластину, которая смещает точку пересечения луча с осью на некоторую величину Δ , которую можно

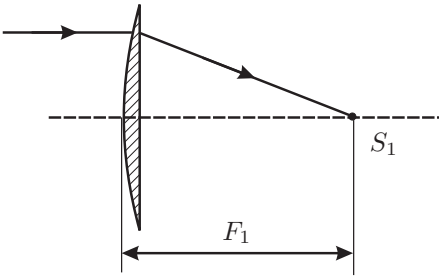


Рис. 123.

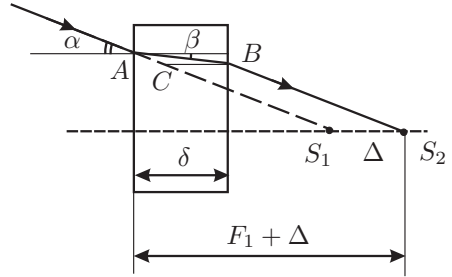


Рис. 124.

найти из треугольника ABC (рис. 124) по теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha)}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\delta}{\cos \beta \cdot \sin \alpha}.$$

Учитывая что рассматриваются лишь лучи, близкие к оптической оси, так что $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$, а также $\alpha/\beta \approx n$, из последнего равенства найдём

$$\Delta = \frac{\delta \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta \cdot \sin \alpha} \approx \delta \frac{n - 1}{n}. \quad (2)$$

В точку S_2 луч не попадает, поскольку преломляется примыкающей к пластине плоско-вогнутой линзой, фокусное расстояние которой

$$F_2 = -\frac{R - \delta}{n - 1}. \quad (3)$$

Дальнейший ход луча показан на рисунке 125. Луч выходит из системы так, как будто бы идёт из точки S_3 . Её расстояние от линзы, взятое со знаком

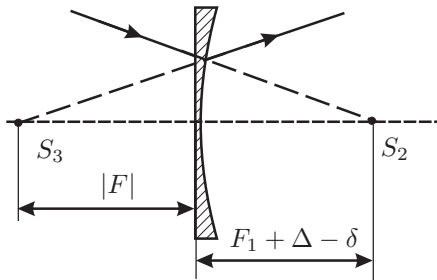


Рис. 125.

«минус», является фокусным расстоянием стенки аквариума F . Для показанной на рисунке 125 линзы S_3 является мнимым изображением мнимого

источника S_2 . Для нахождения F применим формулу линзы:

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{F_1 + \Delta - \delta} = \frac{1}{F_2},$$

или, используя (1), (2) и (3),

$$\frac{1}{F} = -\frac{n-1}{R-\delta} + \frac{1}{\frac{R}{n-1} + \delta \frac{n-1}{n} - \delta} \approx -\frac{n-1}{nR^2} \delta,$$

поскольку $\delta \ll R$. Итак,

$$F = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{R^2}{\delta} = -5,3 \text{ м},$$

то есть стенка аквариума подобна рассеивающей линзе.

Найдём фокусное расстояние толстого аквариума. Для этого нужно рассматривать преломление луча на четырёх поверхностях 1, 2, 3 и 4 (рис. 126). Нужно применить формулу сферической поверхности

$$\frac{n_1}{a} - \frac{n_2}{b} = \frac{n_1 - n_2}{R}. \quad (4)$$

Луч падает на первую поверхность параллельно главной оптической оси,

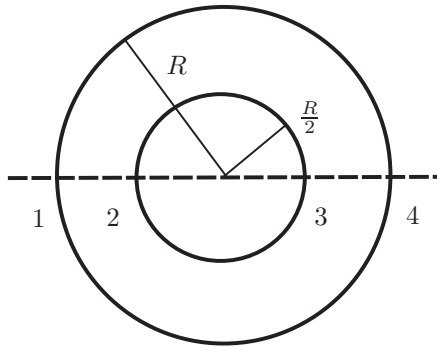


Рис. 126.

поэтому $a = -\infty$, $b = x_1$ — расстояние от первой поверхности до точки схождения преломлённых лучей X_1 , $n_1 = 1$, $n_2 = n$ (рис. 127). Формула (4) даёт:

$$\frac{n}{x_1} = \frac{n-1}{R}, \quad \text{откуда} \quad x_1 = \frac{n}{n-1} R.$$

Расстояние от точки X_1 до второй поверхности (рис. 127)

$$x_2 = x_1 - \frac{R}{2} = \frac{n+1}{2(n-1)} R.$$

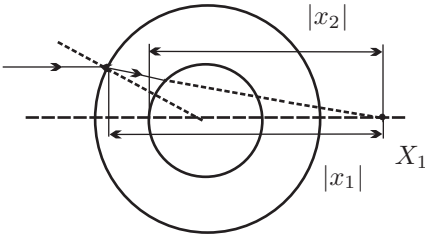


Рис. 127.

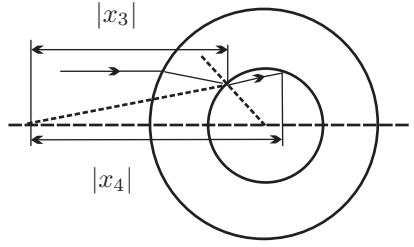


Рис. 128.

Применяем формулу (4) для второй поверхности (рис. 128), учтя, что в этом случае $n_1 = n$, $n_2 = 1$:

$$\frac{n}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{n-1}{R/2}.$$

Отсюда находим положение мнимого изображения, даваемого этой поверхностью:

$$x_3 = -\frac{R}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Расстояние от полученного изображения до третьей поверхности

$$x_4 = -x_3 + R = \frac{3n-1}{2(n-1)}R.$$

Снова применим формулу (4) для нахождения положения нового изображения (рис. 129):

$$-\frac{1}{x_4} - \frac{n}{x_5} = \frac{1-n}{-R/2}, \quad \text{откуда} \quad x_5 = \frac{3n-1}{6(1-n)}R.$$

Расстояние от этого изображения до последней поверхности x_6

$$x_6 = -x_5 + \frac{R}{2} = \frac{3n-2}{3(n-1)}R.$$

И снова применим формулу (4) для нахождения положения фокуса всей системы (рис. 130):

$$-\frac{n}{x_6} - \frac{1}{x_7} = \frac{n-1}{-R}, \quad \text{откуда} \quad x_7 = \frac{3n-2}{2(1-n)}R.$$

Это и есть искомое фокусное расстояние

$$F = -\frac{3n-2}{2(n-1)}R \approx -23,3 \text{ см.}$$

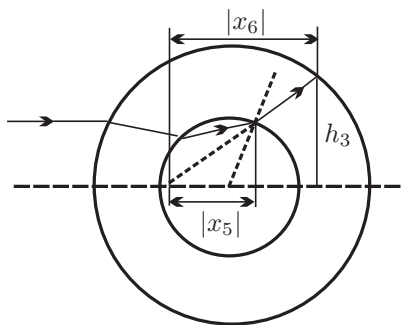


Рис. 129.

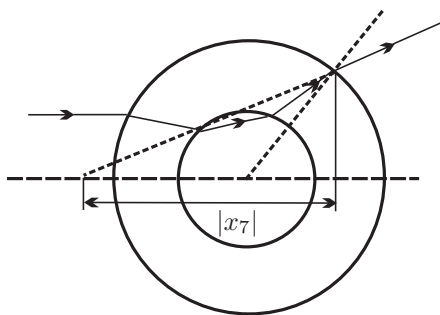


Рис. 130.

Толстый аквариум подобен рассеивающей линзе.

Для нахождения положения S_1 источника S рассмотрим два луча 1 и 2, на пересечении которых и находится S_1 (рис. 131). Из подобия треугольников с вершинами в точках O и F получим:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{2R}{s - R}; \quad \frac{h_3}{h_0} = \frac{|F|}{|F| - s}, \quad (5)$$

где h_0 — размер изображения, h — размер предмета, h_3 — расстояние от оптической оси до точки пересечения луча 1 с внешней поверхностью аквариума (рис. 131). При выводе соотношений предполагалось, что углы между всеми изображёнными на рисунке 131 лучами и главной оптической осью малы. Из (5) получим:

$$s = \frac{|F|R \left(2 + \frac{h}{h_3} \right)}{|F| \frac{h}{h_3} + 2R}. \quad (6)$$

Пользуясь подобием треугольников из рисунков 127, 128 и 129, можно получить следующие соотношения между расстояниями от оптической оси до точек пересечения лучей со сферами

$$\frac{h}{h_1} = \left| \frac{x_1}{x_2} \right|; \quad \frac{h_1}{h_2} = \left| \frac{x_3}{x_4} \right|; \quad \frac{h_2}{h_3} = \left| \frac{x_5}{x_6} \right|.$$

Перемножая эти соотношения, получим:

$$\frac{h}{h_3} = \left| \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_3}{x_4} \cdot \frac{x_5}{x_6} \right| = \frac{n}{3n - 2}. \quad (7)$$

Осталось в формулу (6) подставить (7), а также выражение для F :

$$s = \frac{7n-4}{5n-4}R = 18 \text{ см.}$$

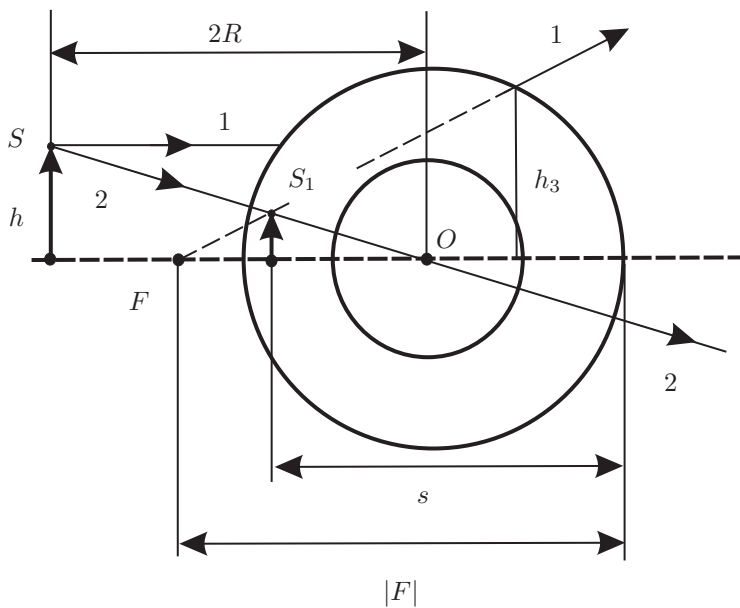


Рис. 131.

Заключение

Международная физическая олимпиада «Туймаада»

Предметные олимпиады среди школьников в СССР, в Российской Федерации имеют многолетний опыт. Якутия всегда активно участвовала в олимпиадном движении. Районные и республиканские олимпиады по физике проводятся ежегодно с 1961 года. Это стало интеллектуальной базой для организации Международной олимпиады «Туймаада» по математике, физике и химии в 1994 году и стало логическим продолжением всего физико-математического движения в республике. Своевременным оказалась грамотная, финансово подкреплённая поддержка руководства республики, министерства образования Республики Саха (Якутия), в недрах которого и зародилась идея организации такой олимпиады. Молодое поколение нового состава МО РС(Я) с большим энтузиазмом начало эксперимент, аналогов которого не было во всей России. В первую очередь необходимо отметить основополагающий вклад в становление олимпиады заместителя министра МО РС(Я) Фёдорова М. П. и Павловой Э. Н.

Сегодня легко сказать, что эксперимент удался. А тогда всё было ново и имело элемент риска. Уверенность в успехе опиралась на грамотность, мастерство профессорско-преподавательского состава ЯГУ, на четвертьвековой опыт работы физико-математических классов, на сознательность и поддержку всего населения республики. Правильная организация подготовительной работы, обращение за помощью к самым известным школам России и их бескорыстный отклик стали залогом успеха. Что касается олимпиады по физике, то оргкомитет обратился к учёным и преподавателям в Академгородок г. Новосибирска и в физико-математический лицей № 31 г. Челябинска. Неоценимую помощь оказали научные сотрудники Трубочёв А. М., Шелест В. И., преподаватель лицея Иголеви́ч И. А., тогда ещё совсем молодой специалист. В МФТИ (г. Москва) была получена горячая поддержка профессора Козела С. М. — патриарха олимпиадного движения по физике. Именно под его напутствием с оргкомитетом сотрудничали бывшие «международники» и члены сборной России по физике Вавилов В. В., Алфёров Р. Ф. (их в шутку называли «нобелевскими лауреатами»), которые передали эстафету Муравьёву В. М. В разные годы в составе жюри по физике работали Александров Д. А. — доцент МФТИ, Вавилов В. В., Муравьёв В. М.,

Варламов С. Д. — преподаватель СУНЦ МГУ. Такой представительный состав жюри определил стиль проведения физической олимпиады. Позитивным является то, что в Международной олимпиаде «Туймаада» участвует младшая лига, которая предвосхитила идею I Международной юниорской олимпиады по естественным наукам (Индонезия, 2004 год). Во всех олимпиадах «Туймаада» самое активное участие принимает вторая сборная по физике Румынии. В первые годы команда Румынии явно лидировала, но они не зазнавались и приезжали каждый год, за что оргкомитет им искренне благодарен. В конце концов, у них впоследствии появились равные партнёры. Призёрами первых олимпиад были: Седельников Олег (Верхневиллойская гимназия, окончил физфак МГУ), Захаров Анатолий (РК г. Якутск, окончил С.-Петербургский технический университет), Заякин Андрей (шк. № 26 г. Якутск, окончил физфак МГУ), Соболев Николай (РК г. Якутск, окончил МФТИ), Яковлев Вадим (РК г. Якутск, окончил физфак МГУ), Попова Надежда (РК г. Якутск, окончила мехмат МГУ), Кондаков Василий (РК г. Якутск, студент 6-го курса МФТИ). Как видно, они успешно окончили лучшие вузы России, в этом немалую роль сыграло их участие в Международной олимпиаде «Туймаада».

С 1999 года начался новый этап физико-математического движения республики — начал работу физико-математический форум «Ленский край». Он дал качественный скачок в подготовке сборной РС(Я) по физике. На базе форума сейчас работает круглогодичная физическая школа. Помощниками стали преподаватели и студенты МФТИ, МГУ. Среди них есть бывшие призёры Международной олимпиады «Туймаада». В 2001 году участники и призёры олимпиады Татаринев Айсен, Мохначевский Александр стали членами сборной РФ по физике, и из Республики Саха (Якутия) именно они были первыми дипломантами I-й степени Международной олимпиады «Туймаада» по физике. Сейчас они активно помогают в подготовке молодого поколения олимпиадников. Их воспитанники Попов Айсен, Сивцев Пётр, Харбанов Михаил, Иванов Виктор, Сидоров Степан, Григорьев Тимур тоже стали обладателями дипломов I, II, III степеней.

По опыту организации Международной олимпиады «Туймаада» в Казахстане в 2005 году проведена I Международная Жаутыковская олимпиада по математике и по физике, и первым абсолютным чемпионом среди старшей группы стал дипломант Международной олимпиады «Туймаада» Иванов Виктор (РК г. Якутск), ныне студент МФТИ. Особо хочется подчеркнуть работу первых членов жюри Международной олимпиады «Туймаада». Именно их профессиональная грамотность и человеческая порядочность подняли престиж олимпиады. Первым председателем жюри стал к.х.н. Попов К. Ф., постоянный председатель оргкомитета республиканской олимпиады по физике, затем его заменили к.ф.-м.н. Семёнов С. С., профессор ЯГУ Сыромятников В. Г. Члены жюри: кандидаты физико-математических наук Соло-

вьёв Т. Н., Сивцев В. И., Бочкарёв Р. Н., Герасимов К. С., д.т.н. Петров З. Е., д.ф.-м.н. Саввинова Н. А., преподаватели Муксунов И. Х., Соловьёва Н. М., Андрианова О. Г., Николаев Н. Е. Сейчас в оргкомитет вошёл новый состав во главе с профессором ЯГУ д.ф.-м.н. Григорьевым Ю. М. В него вошли Мохначевский А. Н., Татаринов А. П., Харбанов М. В.

В Международной олимпиаде «Туймаада» за одиннадцать лет приняли участие более тысячи школьников из 15 городов, 5 республик и округов России, 11 зарубежных стран. В последние годы в олимпиаде приняли участие члены сборной РФ на Международную олимпиаду. В перспективе планируется участие второй сборной РФ по физике. В связи с этим имеется надежда на поддержку министерства образования и науки РФ в организации и проведении Международной олимпиады «Туймаада».

В настоящую книгу включены задачи по физике олимпиад «Туймаада», состоявшихся в 1995–2005 годах. Книга составлена как учебник по решению задач. Мы уверены, что она будет полезной для тех, кто интересуется организацией и проведением физических олимпиад.

Призёры олимпиады «Туймаада» по физике

1994 год

1. Дину Валентин диплом I степени, Румыния.
2. Тинаса Елена диплом II степени, Румыния.
3. Седельников Олег диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
4. Чертов Максим диплом IV степени, г. Томск.
5. Сереп Салдыс диплом V степени, Республика Тыва.
6. Терешкин Григорий диплом VI степени, Республика Саха (Якутия).

1995 год

1. Бозго Лилио диплом I степени, Румыния.
2. Бурдан Минаи диплом I степени, Румыния.
3. Седельников Олег диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Захаров Анатолий диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
5. Чертов Максим диплом IV степени, г. Томск.
6. Кызыл-оол Айдар диплом V степени, Республика Тыва.
7. Денисенко Антон диплом V степени, г. Братск.

1996 год

1. Бора Флорин диплом I степени, Румыния.
2. Энкулеску Михаэла диплом II степени, Румыния.
3. Заякин Андрей диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

1997 год

1. Разуан Александр Попа диплом I степени, Румыния.
2. Моника-Мария Гвика диплом I степени, Румыния.
3. Заякин Андрей диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Соболев Николай диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
5. Ильин Александр диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
6. Дашицыренов Дугар диплом III степени, Республика Бурятия.
7. Ке Лао диплом III степени, Китай.
8. Бобков Алексей диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
9. Стучебров Сергей диплом III степени, г. Томск.

1998 год

1. Чу Минг диплом I степени, Китай.
2. Маринойу Богдан диплом I степени, Румыния.
3. Заякин Андрей диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Андреа Цепойу диплом II степени, Румыния.
5. Ильин Александр диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
6. Бобков Алексей диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
7. Яковлев Вадим диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

1999 год

1. Шварц Осип диплом I степени, г. Новосибирск.
2. Ротаев Михаил диплом I степени, г. Новосибирск.
3. Тодер Евгений диплом II степени, г. Новосибирск.
4. Ахметов Алексей диплом II степени, г. Томск.
5. Хие Ю диплом II степени, Китай.
6. Лукьянов Михаил диплом II степени, г. Барнаул.
7. Кондаков Василий диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
8. Попова Надежда диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2000 год (Высшая лига)

1. Ахмеров Антон диплом I степени, г. Новосибирск.
2. Дозморов Андрей диплом I степени, г. Иркутск.
3. Андрейка Мугурел диплом I степени, Румыния.
4. Геку Флорин диплом I степени, Румыния.
5. Димитру Даниель диплом II степени, Румыния.
6. Кондаков Василий диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
7. Давыдов Сергей диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
8. Еремеев Пётр диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2000 год (Первая лига)

1. Дружинин Андрей диплом I степени, г. Ноябрьск.
2. Петров Андрей диплом I степени, г. Иркутск.
3. Таллаев Егор диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
4. Татаринов Айсен диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
5. Гибински Андрей диплом II степени, г. Дубна.
6. Журавлёв Михаил диплом III степени, г. Ноябрьск.
7. Мохначевский Александр диплом III степени, Республика Саха.
8. Егоров Юрий диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
9. Ефремов Александр диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2001 год (Высшая лига)

1. Идрисов Георгий диплом I степени, г. Бийск.
2. Егоров Юрий диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
3. Киданов Вадим диплом II степени, г. Бийск.
4. Изотов Виталий диплом II степени, г. Владивосток.
5. Ахметов Антон диплом III степени, г. Новосибирск.
6. Череджи Виорел диплом III степени, Румыния.
7. Унгурену Сержиу диплом III степени, Румыния.

2001 год (Первая лига)

1. Татаринов Айсен диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
2. Егоров Николай диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
3. Фёдоров Андрей диплом II степени, г. Владивосток.
4. Мохначевский Александр диплом II степени, Республика Саха.
5. Аполонская Инна диплом III степени, г. Бийск.
6. Ильин Алексей диплом III степени, г. Владивосток.
7. Чжун Хао диплом III степени, Китай.
8. Акимов Фёдор диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2002 год (Высшая лига)

1. Татаринов Айсен диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
2. Мохначевский Александр диплом II степени, Республика Саха.
3. Ефремов Александр диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Хенинг Александру диплом III степени, Румыния.
5. Денисов Андрей диплом III степени, г. Владивосток.
6. Константин Андрей диплом III степени, Румыния.

2002 год (Первая лига)

1. Шавлюгин Евгений диплом I степени, г. Владивосток.
2. Харбанов Михаил диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
3. Ожегов Александр диплом II степени, г. Иркутск.
4. Сыромятников Николай диплом III степени, Республика Саха.
5. Антипин Василий диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
6. Гуляев Алексей диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2003 год (Высшая лига)

1. Молдован Михай диплом I степени, Румыния.
2. Татаринов Айсен диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
3. Мохначевский Александр диплом II степени, Республика Саха.
4. Проистосеску Кристиан диплом II степени, Румыния.
5. Карп Александру-Михай диплом III степени, Румыния.
6. Харбанов Михаил диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2003 год (Первая лига)

1. Флегонтова Екатерина диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
2. Гизатулин Денис диплом II степени, г. Владивосток.
3. Кириллов Василий диплом III степени, г. Иркутск.
4. Богач Максим диплом III степени, г. Иркутск.
5. Дайнеко Артём диплом III степени, г. Зеленогорск.
6. Григорьев Тимур диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
7. Готовцев Михаил диплом III степени, Республика Саха (Якутия).

2004 год (Высшая лига)

1. Харбанов Михаил диплом I степени, Республика Саха (Якутия).
2. Дзябура Евгений диплом II степени, г. Сергиев Посад (сборная РФ).
3. Ангел Андрей диплом II степени, Румыния.
4. Станческу Траян диплом III степени, Румыния.
5. Богословский Никита диплом III степени, г. Саратов (сборная РФ).
6. Григорьев Тимур диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
7. Моржаков Василий диплом III степени, г. Пермь (сборная РФ).
8. Григорьев Алексей диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
9. Иванов Виктор диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
10. Стойка Богдан диплом III степени, Румыния.
11. Рамазанов Болат диплом III степени, Казахстан.
12. Гизатулин Денис диплом III степени, г. Владивосток.

2004 год (Первая лига)

1. Кузин Денис диплом I степени, Мордовия.
2. Ретивых Владимир диплом II степени, г. Иркутск.
3. Попов Айсен диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Ефремов Александр диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
5. Васильева Сахаяна диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
6. Жуплев Антон диплом III степени, г. Владивосток.
7. Габышев Анатолий диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
8. Готовцев Михаил диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
9. Афанасьев Александр диплом III степени, г. Владивосток.

2005 год (Высшая лига)

1. Тимофеев Олег диплом I степени, г. Новочебоксарск (сборная РФ).
2. Гусихин Павел диплом I степени, г. Казань (сборная РФ).
3. Иванов Виктор диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Гизатулин Денис диплом II степени, г. Владивосток.
5. Михайлеску Ион Габриэль диплом III степени, Румыния.
6. Сидоров Степан диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
7. Рындин Максим диплом III степени, г. Березники, Пермская область.
8. Томозеу Михай-Мариан диплом III степени, Румыния.
9. Григорьев Тимур диплом III степени, Республика Саха (Якутия).
10. Мокану Лаура Моника диплом III степени, Румыния.
11. Истомин Роман диплом III степени, г. Пермь.

2005 год (Первая лига)

1. Сметнев Денис диплом I степени, г. Саров, Нижегородская область.
2. Соловьёва Ксения диплом II степени, г. Пермь.
3. Сивцев Пётр диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
4. Попов Айсен диплом II степени, Республика Саха (Якутия).
5. Афанасьев Александр диплом II степени, г. Владивосток.
6. Кузин Денис диплом III степени, Мордовия.
7. Урозаев Диас диплом III степени, Казахстан.

Варианты олимпиады «Туймаада» по физике. 1995–2005

На самой первой олимпиаде «Туймаада», состоявшейся в 1994 году, варианты по предметам (в том числе и по физике) не составлялись, поскольку в тот год олимпиада представляла собой летний лагерь, где соревновались как бы «на уроках».

1995 год

1) 1.28; 2) 1.21; 3) 2.7; 4) 3.3; 5) 3.10.

1996 год

1) 1.10; 2) 1.11; 3) 1.23; 4) 2.1; 5) 4.1.

1997 год

1) 1.2; 2) 1.16; 3) 1.19; 4) 2.2.

1998 год

1) 1.12; 2) 1.25; 3) 3.8; 4) 2.3.

1999 год

1) 1.3; 2) 1.29; 3) 2.8; 4) 2.11; 5) 4.2.

2000 год

1) 1.15; 2) 1.14; 3) 3.4; 4) 4.3.

2001 год. Высшая лига

1) 1.9; 2) 1.27; 3) 4.4.

2001 год. Первая лига

1) 1.8; 2) 1.13; 3) 2.4; 4) 3.11.

2002 год. Высшая лига

1) 1.5; 2) 2.13; 3) 3.9; 4) 3.16.

2002 год. Первая лига

1) 1.1; 2) 1.4; 3) 3.7; 4) 2.5.

2003 год. Высшая лига

1) 3.5; 2) 1.26; 3) 2.12; 4) 3.12.

2003 год. Первая лига

1) 3.1; 2) 1.6; 3) 1.24; 4) 1.17.

2004 год. Высшая лига

1) 1.31; 2) 2.10; 3) 3.15; 4) 4.5.

2004 год. Первая лига

1) 3.2; 2) 2.9; 3) 1.30; 4) 4.5.

2005 год. Высшая лига

1) 1.18; 2) 1.22; 3) 3.13; 4) 3.14.

2005 год. Первая лига

1) 1.7; 2) 1.20; 3) 2.6; 4) 3.6.

Оглавление

Предисловие	3
Условия задач	5
Механика	5
Теплота и молекулярная физика	17
Электричество и магнетизм	23
Оптика	33
Решения задач	35
Механика	35
Теплота и молекулярная физика	86
Электричество и магнетизм	104
Оптика	136
Заключение	150
Международная физическая олимпиада «Туймаада»	150
Призёры олимпиады «Туймаада» по физике	152
Варианты олимпиады «Туймаада» по физике. 1995–2005	157

