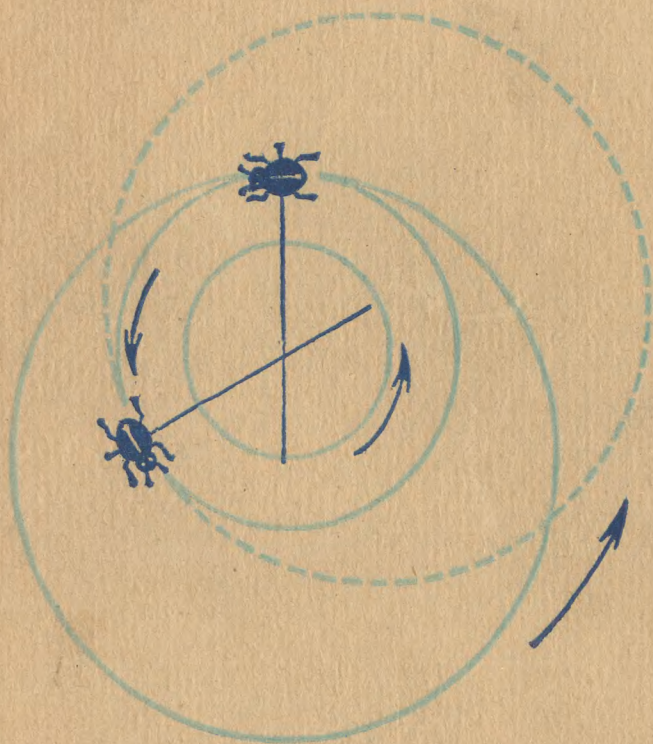

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФИЗИКЕ



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФИЗИКЕ

Пособие для самообразования

Издание четвертое,
переработанное



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

530.1

С 23

УДК 530.10 (075.4)

Авторы:

Б. В. БУХОВЦЕВ, В. Д. КРИВЧЕНКОВ, Г. Я. МЯКИШЕВ,
И. М. САРАЕВА

Сборник задач по элементарной физике. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974 г.

Настоящий сборник задач по физике составлен в соответствии с материалом, изложенным в «Элементарном учебнике физики» под редакцией академика Г. С. Ландсберга. Большинство задач значительно превосходит по трудности задачи, предлагаемые обычно учащимся средних школ. Все они снабжены подробными решениями. Часть задач сборника составляют переработанные задачи школьных олимпиад последних лет, которые проводились на физическом факультете Московского университета.

Задачник может быть рекомендован для самообразования учащимся старших классов средних общеобразовательных школ, техникумов и специальных средних школ. Ряд задач может быть полезен для студентов первых курсов высших учебных заведений.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974 г., с изменениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	5	
Из предисловия к первому изданию	5	
	Задачи	Ответы и решения
Глава I. Механика	7	163
§ 1. Кинематика равномерного прямолинейного движения	7	163
§ 2. Кинематика неравномерного и равноперемен- ного прямолинейного движения	10	170
§ 3. Кинематика криволинейного движения . . .	13	174
§ 4. Динамика прямолинейного движения	20	188
§ 5. Закон сохранения количества движения . .	29	199
§ 6. Статика	31	203
§ 7. Работа и энергия	36	214
§ 8. Динамика криволинейного движения	43	226
§ 9. Закон всемирного тяготения	52	241
§ 10. Гидро- и аэростатика	54	246
§ 11. Гидро- и аэродинамика	61	254
Глава II. Теплота. Молекулярная физика	67	259
§ 12. Тепловое расширение твердых и жидких тел	67	259
§ 13. Закон сохранения энергии. Теплопроводность	68	261
§ 14. Свойства газов	70	263
§ 15. Свойства жидкостей	75	271
§ 16. Взаимные превращения жидких и твердых тел	78	275
§ 17. Упругость и прочность	79	276
§ 18. Свойства паров	82	278
Глава III. Электричество и магнетизм	85	280
§ 19. Электростатика	85	280
§ 20. Постоянный электрический ток	95	301
§ 21. Электрический ток в газах и вакууме	105	319
§ 22. Магнитное поле тока. Действие магнитного поля на ток и движущиеся заряды	109	325

§ 23. Электромагнитная индукция. Переменный ток	114	331
§ 24. Электрические машины	122	343
<i>Глава IV. Колебания и волны</i>	126	348
§ 25. Механические колебания	126	348
§ 26. Электрические колебания	131	358
§ 27. Волны	133	360
<i>Глава V. Геометрическая оптика</i>	136	363
§ 28. Фотометрия	136	363
§ 29. Основные законы оптики	137	365
§ 30. Линзы и сферические зеркала	142	375
§ 31. Оптические системы и оптические приборы .	146	382
<i>Глава VI. Физическая оптика</i>	153	400
§ 32. Интерференция света	153	400
§ 33. Дифракция света	158	407
§ 34. Дисперсия света и цвета тел	161	411

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание значительно переработано по сравнению с тремя предыдущими. Исключено большое количество простых задач и добавлены задачи повышенной трудности. Бóльшая часть новых задач являются оригинальными. В издание включен также ряд задач школьных олимпиад последних лет, проводимых на физическом факультете Московского университета.

Авторы

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник задач по физике составлен на основе материала, изложенного в «Элементарном учебнике физики» под редакцией академика Г. С. Ландсберга. Поэтому содержание, уровень задач и характер расположения материала в основном соответствуют указанному учебнику. В сборник не включен раздел «Атомная физика», так как упражнения по этому вопросу в учебнике Ландсберга достаточно полно иллюстрируют изложенный материал. Отдельные задачи на данную тему включены в другие главы сборника.

При составлении сборника авторы уделяли большое внимание задачам повышенной трудности, требующим глубокого понимания основных физических законов и умения использовать их при самых разнообразных условиях. Все трудные задачи снабжены подробными решениями. Кроме того, в целях развития навыков и культуры решения физических задач некоторые более простые задачи также снабжены решениями.

Часть задач сборника составляют переработанные задачи школьных олимпиад, которые проводились на физическом факультете Московского университета. В переработанном виде включено некоторое количество задач из сборников для высшей школы. Большинство задач являются оригинальными.

Авторы

Глава I. МЕХАНИКА

§ 1. Кинематика равномерного прямолинейного движения

3. 1. Идущая вверх по реке моторная лодка встретила сплавляемые по течению реки плоты. Через час после встречи лодочный мотор заглох. Ремонт мотора продолжался 30 мин. В течение этого времени лодка свободно плыла вниз по течению. После ремонта лодка поплыла вниз по течению с прежней относительно воды скоростью и нагнала плоты на расстоянии $S=7,5$ км от места их первой встречи. Определить скорость течения реки, считая ее постоянной.

5. 2. Из Москвы в Пушкино с интервалом $t=10$ мин вышли два электропоезда со скоростями $v=30$ км/ч. С какой скоростью u двигался поезд, идущий в Москву, если он повстречал эти электропоезда через $\tau=4$ мин один после другого?

± 3. Завод, на котором работает инженер, находится за городом. Каждый раз к приходу поезда на станцию приезжает заводская машина, которая доставляет инженера на место работы. Однажды инженер приехал на станцию на час раньше обычного и, не дожидаясь машины, пошел на завод пешком. По дороге он встретил автомашину и приехал на завод на 10 минут раньше обычного. Сколько времени шел инженер до встречи с заводской автомашиной? (Решить задачу графически.)

+ — 4. Трое туристов, обладающих одним велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время оценивается по последнему прибывшему). Велосипед может взять лишь двоих, поэтому третьему туристу приходится сначала идти пешком. Велосипедист довозит второго туриста до некоторой точки дороги, откуда тот продолжает движение пешком, и возвращается за третьим. Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода $v_1=4$ км/ч, а велосипедиста $v_2=20$ км/ч.

5

5. Почтовая связь между речными пристанями M и K осуществляется двумя катерами. В условленное время катеры отплывают от своих пристаней, встречаются, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Если катеры отплывают от своих пристаней одновременно, то катер, выходящий из M , тратит на путь в оба конца 3 часа, а катер из K — 1,5 часа. Скорости обоих катеров относительно воды одинаковы. Определить графически, на сколько позже должен отплыть катер из M после отплытия катера из K , чтобы оба катера находились в пути одно и то же время.

6. Используя условия предыдущей задачи, определить скорость катеров относительно воды, скорость течения реки и место встречи катеров в случае, если они отплывают от своих пристаней одновременно. Расстояние между пристанями равно 30 км.

7. От пристани C к пристани T по реке плывет со скоростью $v_1 = 3$ км/ч относительно воды весельная лодка. От пристани T к пристани C одновременно с лодкой отходит катер, скорость которого относительно воды $v_2 = 10$ км/ч. За время движения лодки между пристанями катер успевает пройти это расстояние четыре раза и прибывает к T одновременно с лодкой. Определить направление течения.

8. Человек высотой h проходит в стороне от фонаря, висящего на высоте H над землей. Найти величину и направление скорости перемещения по земле тени от головы человека, если скорость человека равна v .

9. Две свечи, высоты которых в начальный момент были одинаковы и равны h , находятся на расстоянии a друг от друга. Расстояние между каждой свечой и ближайшей

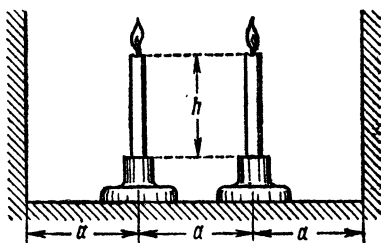


Рис. 1.

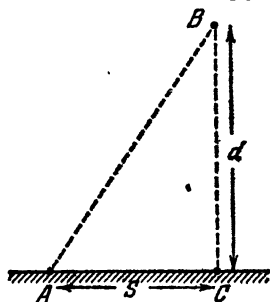


Рис. 2.

к ней стеной также равно a (рис. 1). С какой скоростью движутся тени от свечей по стенам, если одна свеча сгорает за время t_1 , а другая — за t_2 ?

5
10. Человек находится на берегу озера в точке A . Ему необходимо в кратчайшее время попасть в точку B , находящуюся на озере (рис. 2). Расстояние от точки B до берега $BC=d$, а расстояние $AC=S$. Скорость движения человека в воде v_1 , а по берегу v_2 ($v_2 > v_1$). Каким путем должен двигаться человек: плыть ли из точки A по прямой AB или пробежать по берегу некоторое расстояние и после этого плыть по направлению к точке B ?

11. По шоссе со скоростью $v_1=16$ м/с движется автобус, а человек находится на расстоянии $a=60$ м от шоссе и $b=400$ м от автобуса. В каком направлении должен бежать человек, чтобы выйти к какой-либо точке шоссе одновременно с автобусом или раньше него? Человек может бежать со скоростью $v_2=4$ м/с.

12. При какой наименьшей скорости человек (см. задачу 11) может встретить автобус? В каком направлении должен при этом бежать человек?

13. В данный момент автобус (см. задачу 11) находится в точке A и движется по прямому шоссе AE . Найти геометрическое место тех точек, где может находиться в настоящий момент человек, чтобы успеть сесть в автобус.

14. Человек на лодке должен попасть из точки A в точку B , находящуюся на противоположном берегу реки (рис. 3). Расстояние $BC=a$. Ширина реки $AC=b$. С какой наименьшей скоростью u относительно воды должна плыть лодка, чтобы приплыть в B ? Скорость течения реки v_0 .

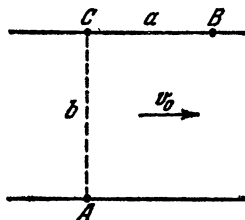


Рис. 3.

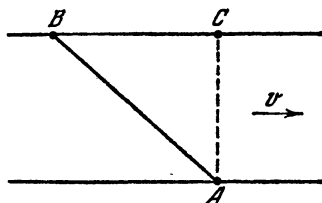


Рис. 4.

15. Из пункта A , расположенного на берегу реки, необходимо попасть в пункт B , двигаясь по прямой AB (рис. 4). Ширина реки $AC=1$ км, расстояние $BC=2$ км, максимальная скорость лодки относительно воды $u=5$ км/ч, а скорость течения реки $v=2$ км/ч. Можно ли проплыть расстояние AB за 30 минут?

16. По реке из точки A в точку B , находящуюся на противоположном берегу, вдоль прямой AB , образующей

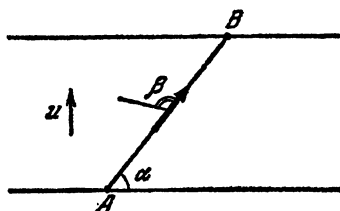


Рис. 5.

с линией берега угол α , плывет катер (рис. 5). Под прямым углом к берегу дует ветер со скоростью u . Флаг на мачте катера образует угол β с направлением движения катера. Определить скорость катера относительно берега. Можно ли по данным, приведен-

ным в условии задачи, определить скорость течения реки?

17. По пересекающимся под углом α дорогам движутся две автомашины с постоянными скоростями v_1 и v_2 . Определить величину и направление скорости одного автомобиля относительно другого. Через какое время после встречи на перекрестке расстояние между машинами будет равно S ?

18. Автомашины (см. задачу 17) не встретились на перекрестке, причем вторая машина проехала перекресток на промежуток времени τ позже первой. Каково было наименьшее расстояние между автомашинами?

19. Две пересекающиеся прямые движутся поступательно в разные стороны со скоростями v_1 и v_2 , перпендикулярными соответствующим прямым. Угол между прямыми равен α . Определить скорость точки пересечения прямых.

§ 2. Кинематика неравномерного и равнопеременного прямолинейного движения

20. Определить среднюю скорость и среднее ускорение точки за 5 и 10 секунд, если движение ее задано графиком скорости (рис. 6).

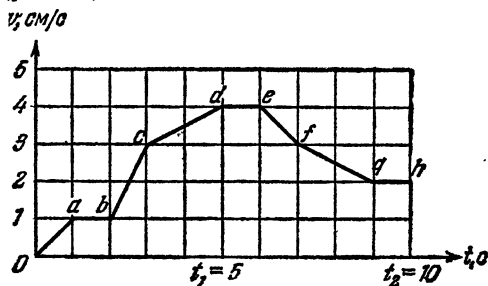


Рис. 6.

21. Человек, стоящий на крутом берегу озера, тянет за веревку находящуюся на воде лодку. Скорость, с которой человек выбирает веревку, постоянна и равна v . Какую скорость будет иметь лодка в момент, когда угол между веревкой и поверхностью воды равен α ?

22. Точечный источник света S находится на расстоянии l от вертикального экрана AB . От источника к экрану по прямой SA движется поступательно, с постоянной скоростью v непрозрачный предмет высоты h . Определить мгновенную скорость перемещения верхнего края тени предмета по экрану (рис. 7).

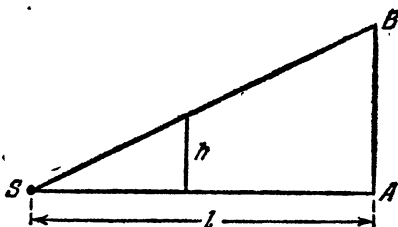


Рис. 7.

23. Координата точки, движущейся прямолинейно вдоль оси x , меняется со временем по закону $x = 11 + 35t + 41t^2$ (x измеряется в см, а t — в секундах). Определить скорость и ускорение точки.

24. Демонстрационная тележка двигалась вдоль длинной линейки с постоянным ускорением. В момент, когда секундомер показывал $t_1 = 7$ с, тележка находилась против отметки $x_1 = 70$ см, в момент $t_2 = 9$ с — против отметки $x_2 = 80$ см и при $t_3 = 15$ с — против отметки $x_3 = 230$ см. С каким ускорением двигалась тележка?

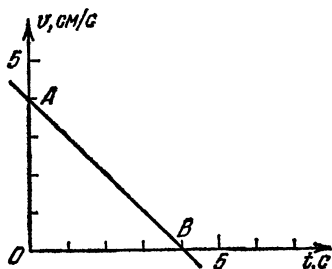


Рис. 8.

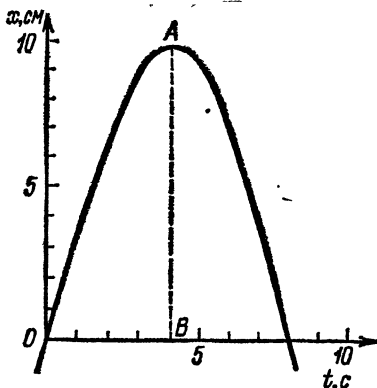


Рис. 9.

25. На рис. 8 и 9 изображены: график скорости тела и график изменения координаты тела (парабола) в зависимости от времени. Начало отсчета времени на обоих

графиках совпадает. Одинаковые ли движения изображены на этих графиках?

26. Пункты A и B расположены на расстоянии $l=4$ км друг от друга. Из пункта A по направлению к пункту B выехал автомобиль, который двигался все время равномерно. Одновременно навстречу первому из пункта B с начальной скоростью $v_0=32$ м/с выехал автомобиль, движущийся с постоянным ускорением $a=0,2$ м/с², направленным все время так же, как скорость первого автомобиля. Известно, что в пути автомобили два раза обгоняли друг друга. В каких пределах лежит скорость первого автомобиля?

27. С высоты H на упругую горизонтальную подставку свободно падает шарик. Построить график изменения координаты и скорости шарика в зависимости от времени, считая, что временем соударения можно пренебречь. Удар абсолютно упругий.

28. На упругую плиту свободно падают стальные шарик. Первый падает с высоты $h_1=44$ см, второй — спустя время τ после первого, с высоты $h_2=11$ см. Через некоторое время скорости шариков совпадают по величине и направлению. Определить время τ и промежуток времени, в течение которого скорости обоих шариков равны. Шарик между собой не соударяются.

29. За какое время тело, свободно падающее без начальной скорости, проходит n -й сантиметр своего пути?

30. С высокой башни друг за другом бросают два тела с одинаковыми по величине скоростями v_0 . Первое тело бросают вертикально вверх; спустя время τ бросают второе — вертикально вниз. Определить скорость тел друг относительно друга и расстояние между ними в момент времени $t > \tau$.

31. Три точки A , B и C в начальный момент времени расположены на одной горизонтальной прямой, на равных расстояниях друг от друга. Точка A начала двигаться вертикально вверх с постоянной скоростью v , а точка C — без начальной скорости, вертикально вниз с постоянным ускорением a . Как должна двигаться по вертикали точка B , чтобы все три точки находились все время на одной прямой? Точки начинают двигаться одновременно.

32. Лифт движется с ускорением a . Пассажир, находящийся в лифте, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно пола лифта, если лифт движется вверх? Если лифт движется вниз?

33. Два автомобиля выехали навстречу друг другу из городов A и B с одинаковыми по величине скоростями и

одинаковыми по величине ускорениями, равными a . Ускорение автомобиля, выехавшего из A , было все время направлено в A , а выехавшего из B — направлено в B . На сколько позже выехал один из этих автомобилей, если третий автомобиль, двигавшийся все время с постоянной скоростью v_1 , присутствовал при обеих встречах первых двух автомобилей?

34. В лифте, движущемся с ускорением a , с высоты H над полом человек роняет шарик. Через время t после начала падения шарика ускорение лифта меняет знак, а через время $2t$ становится равным нулю. После этого шарик касается пола. На какую высоту от пола лифта подскочит шарик после удара? Удар считать абсолютно упругим.

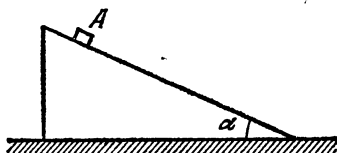


Рис. 10.

35. На клин, плоскость которого составляет угол α с горизонтом, положили тело A (рис. 10). Какое ускорение необходимо сообщить клину в горизонтальном направлении, чтобы тело A свободно падало вертикально вниз?

§ 3. Кинематика криволинейного движения

36. Маленький тяжелый шарик брошен горизонтально с начальной скоростью v_0 . Найти нормальное и тангенциальное ускорения шарика через время t после начала движения.

37. Найти величину ускорения тела A , соскальзывающего без начальной скорости по винтовому желобу с шагом h и радиусом R , в конце n -го витка (рис. 11). Трением пренебречь.

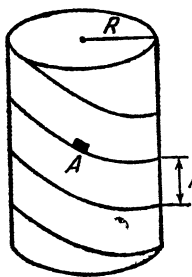


Рис. 11.

38. Скорость течения реки возрастает пропорционально расстоянию от берега, достигая своего максимального значения v_0 на середине реки. У берегов скорость течения равна нулю. Лодка движется по реке таким образом, что ее скорость u относительно воды постоянна и перпендикулярна течению. Найти расстояние, на которое будет снесена лодка при переправе, если ширина реки s . Определить также траекторию лодки.

39. Два рельса скреплены под прямым углом друг к другу. По этим рельсам движутся две тележки, скрепленные между собой шарнирно стержнем длины l . Тележка A (рис. 12) начинает движение из точки пересечения рельсов и движется равномерно вверх со скоростью v . Определить закон движения и скорость тележки B .

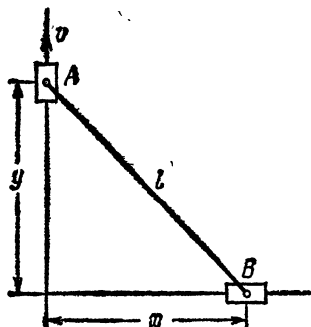


Рис. 12.

40. Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Сколько времени длится полет? На каком расстоянии от места бросания упадет тело? При каком значении угла α дальность полета тела будет максимальной?

На какой высоте тело будет через промежуток времени t после начала движения? Какую скорость будет иметь тело по величине и направлению в этот момент времени? Считать t большим, чем время подъема тела до максимальной высоты. Сопротивлением воздуха пренебречь.

41. Найти траекторию движения тела, брошенного под углом к горизонту (см. задачу 40).

42. Необходимо с земли перебросить мяч через вертикальную стенку высоты H , находящуюся на расстоянии S (рис. 13). При какой наименьшей начальной скорости это возможно? Под каким углом α к горизонту должна быть в этом случае направлена скорость?

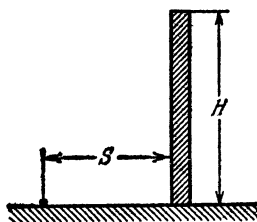


Рис. 13.

43. Испытание осколочной гранаты производится в центре дна цилиндрической ямы глубины H . Образующиеся при взрыве осколки, скорость которых не превышает v_0 , не должны попадать на поверхность земли. Каким должен быть минимальный диаметр D ямы?

44. Тело брошено в воду с крутого обрыва высотой H . Начальная скорость тела составляет угол α с горизонтом и равна v_0 . На каком расстоянии от берега упадет тело? Через какое время после начала движения тело окажется на высоте h над водой? Какова скорость тела в момент падения в воду?

45. Под каким углом к горизонту необходимо бросить камень с обрывистого берега реки, чтобы он упал в воду возможно дальше от берега? Высота обрыва $h_0=20$ м, начальная скорость камня $v_0=14$ м/с.

46. С какой наименьшей скоростью нужно бросить тело с вершины башни высотой h , чтобы оно упало на расстоянии S от подножья башни?

47. За телом, брошенным под углом α к горизонту, наблюдают в оптическую трубу, установленную в точке бросания. При каких углах α в движении тела будут моменты, когда его скорость будет перпендикулярна оси трубы?

48. Пикирующий бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты H , находясь на расстоянии L от цели. Скорость бомбардировщика v . Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

49. Шарик свободно падает с высоты h на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (рис. 14). Найти отношение расстояний между точками, в которых подпрыгивающий шарик касается наклонной плоскости. Соударения шарика с плоскостью рассматривать как абсолютно упругие.

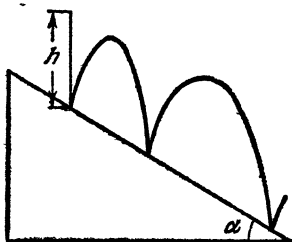


Рис. 14.

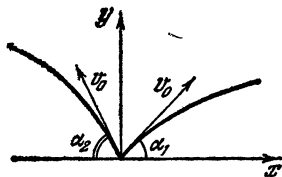


Рис. 15.

50. Из точки $x=y=0$ (рис. 15) одновременно выброшены два тела с одинаковой начальной скоростью v_0 под разными углами α_1 и α_2 к горизонту. Чему равна скорость движения тел друг относительно друга? Чему равно расстояние между телами по прошествии времени τ ? (Тела движутся поступательно.)

51. С башни по всевозможным направлениям с одинаковой начальной скоростью v_0 брошены камни. Оказалось, что камень, подлетевший к земле по наиболее пологой у самой земли траектории, имеет при подлете вектор скорости,

составляющий угол φ с горизонтом. Определить высоту башни.

52. Со стола высотой h сбрасывают упругий шарик, сообщая ему некоторую горизонтальную скорость. В момент, когда шарик испытывает одно из бесчисленных упругих соударений с полом, с того же стола горизонтально сбрасывают другой шарик, сообщая ему такую скорость, чтобы он столкнулся с первым шариком. На какой высоте произошла встреча?

53. Снаряд вылетает из пушки с начальной скоростью v_0 . Определить «зону безопасности», т. е. геометрическое место всех тех точек пространства, куда снаряд не может попасть.

54. Гусеница трактора состоит из n звеньев. Длина каждого звена a . Радиусы колес, на которые надета гусеница, R . Трактор движется со скоростью v . Предполагается, что гусеница не провисает.

1) Какое число звеньев гусеницы движется в данный момент поступательно, какое число звеньев покоится (относительно земли) и какое число звеньев участвует во вращательном движении?

2) Трактор прошел путь $S \gg na$. Сколько времени каждое звено гусеницы двигалось поступательно, покоилось и участвовало во вращательном движении?

55. Для того чтобы повернуть трактор, движущийся со скоростью $v_0 = 18$ км/ч, тракторист притормаживает одну из гусениц так, что ось ее ведущего колеса начинает двигаться вперед со скоростью $v_1 = 14$ км/ч. Расстояние между гусеницами $d = 1,5$ м. Дугу какого радиуса опишет центр трактора?

56. Можно наблюдать в горах следующее явление: звезда «на глазах» быстро скрывается за отдаленной вершиной. (То же явление можно, конечно, наблюдать на равнине, если имеется достаточно удаленное высокое сооружение.) С какой скоростью нужно бежать, чтобы все время видеть звезду на одном и том же угловом расстоянии от горы? Расстояние от наблюдателя до вершины 10 км. Наблюдение ведется на полюсе.

57. Сплошной диск катится без скольжения по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v (рис. 16).

1) Доказать, что линейная скорость вращения относительно центра O любой точки диска, лежащей на его ободе, равна скорости поступательного движения диска.

2) Определить величину и направление скорости точек A , B , C и D , лежащих на ободе диска, относительно неподвижного наблюдателя.

3) Какие точки диска имеют, относительно неподвижного наблюдателя, ту же по абсолютной величине скорость, что и центр диска?

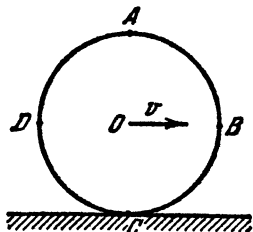


Рис. 16.

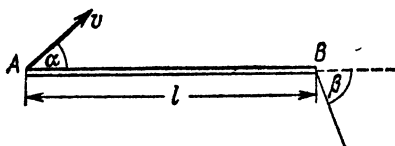


Рис. 17.

58. Палочка AB длины l движется в плоскости чертежа (рис. 17) так, что в данный момент времени скорость ее конца A направлена под углом α , а скорость конца B — под углом β к палочке. Величина скорости конца A равна v . Определить величину скорости конца B . Найти положение неподвижной оси, перпендикулярной плоскости чертежа, относительно которой в рассматриваемый момент времени палочка вращается (т. е. найти положение мгновенной оси вращения палочки).

59. Начертить распределение скоростей вдоль палочки AB в условиях предыдущей задачи.

60. Толпа муравьев волочит кусочек коры в форме равносностороннего треугольника. Известно, что в некоторый момент времени скорость вершины B равна v и направлена вдоль AB , а скорость вершины C направлена вдоль CB . Найти величину скорости вершины C в тот же момент.

61. Легковая машина едет по горизонтальному шоссе за грузовиком. Между двойными шинами задних колес грузовика застрял камень. На каком расстоянии от грузовика должна ехать легковая машина, чтобы камень, вырвавшийся из колес грузовика, не попал в нее? Машины движутся со скоростью 50 км/ч.

62. На экране демонстрируется движущаяся повозка. Радиусы передних колес повозки $r=0,35$ м, задних — $R=1,5r$. Передние колеса имеют $N_1=6$ спиц. Съёмочная камера перемещает пленку со скоростью 24 кадра в секунду. Считая, что колеса повозки катятся без скольжения, опреде-

лить, с какой минимальной скоростью должна двигаться повозка, чтобы передние колеса ее казались на экране не вращающимися? Какое наименьшее число спиц N , должны иметь при этом задние колеса, чтобы они также казались не вращающимися?

63. При каких скоростях движения повозки, движущейся слева направо (см. условие задачи 62), кинозрителям будет казаться, что 1) спицы колес вращаются против часовой стрелки? 2) спицы передних колес и задних колес вращаются в противоположные стороны?

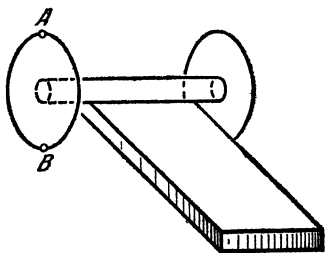


Рис. 18.

Число спиц передних и задних колес одинаково и равно 6.

64. Катушка, состоящая из цилиндрической части и двух одинаковых сплошных дисков, катится своей цилиндрической частью без скольжения по шероховатому бруску, расположенному горизонтально, с постоянной скоростью v (рис. 18). Радиус цилиндрической части r , дисков R . Какую скорость имеют точки A и B , находящиеся на ободе одного из дисков?

65. Какие точки дисков из предыдущей задачи имеют мгновенную скорость, равную по величине скорости оси катушки?

66. Начертить траектории точек A , B и C катушки (рис. 19), которая катится по бруску без скольжения своей цилиндрической частью.

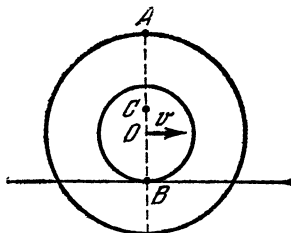


Рис. 19.

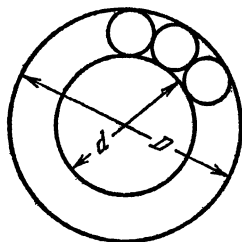


Рис. 20.

67. Шарикоподшипник поддерживает конец оси вала, вращающегося с угловой скоростью ω . Диаметр оси вала d (рис. 20), диаметр обоймы шарикоподшипника D . Найти линейную скорость движения центра одного из шариков, если

обойма неподвижна и если обойма вращается с угловой скоростью Ω . Считать, что в обоих случаях шарики катятся по валу и обойме без скольжения.

68. По плоскости без скольжения катится конус. Ось конуса вращается со скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через его вершину. Высота конуса h , угол между осью и образующей α . Чему равна угловая скорость вращения конуса вокруг своей оси? Определить линейную скорость произвольной точки диаметра основания конуса, лежащего в вертикальной плоскости.

69. На рис. 21 схематически изображена дифференциальная передача автомобиля, которая применяется для

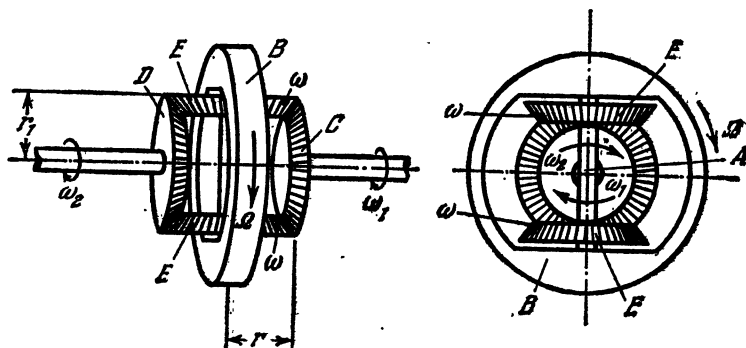


Рис. 21.

того, чтобы ведущие колеса автомобиля не скользили при прохождении ими криволинейного участка пути. (При этом они должны вращаться с различными скоростями.) Двигатель вращает колесо B , с которым жестко скреплена ось A . Вокруг нее может свободно вращаться пара конических шестерен E . Эта пара шестерен связана зубьями с другой парой конических шестерен, по которым она катится. Ось ведущих колес автомобиля (обычно задних) разрезана пополам, и на концах оси сидят шестерни C и D . Эти половинки оси могут вращаться с различными угловыми скоростями, оставаясь связанными дифференциальной передачей. Найти соотношение между угловыми скоростями Ω , ω , ω_1 и ω_2 дифференциальной передачи, если радиусы шестерен E равны r , а радиусы шестерен D и C равны r_1 .

70. Четыре черепахи находятся в углах квадрата со стороной a . Одновременно они начинают двигаться с постоянной по величине скоростью v , причем первая черепаха

все время держит курс на вторую, вторая на третью, третья на четвертую, четвертая на первую. Встретятся ли черепахи, и если встретятся, то через какое время?

71. От прямолинейного участка берега отошли одновременно два корабля A и B , находившиеся первоначально на расстоянии $a=3$ км друг от друга. Корабль A двигался по прямой, перпендикулярной к берегу. Корабль B держал непрерывно курс на корабль A , имея в каждый момент одинаковую с ним скорость. Очевидно, что через достаточно большое время второй корабль будет следовать за первым, находясь от него на некотором расстоянии. Найти это расстояние.

72. На песке покоятся две стальные плиты M и N высоты H (рис. 22). Расстояние между плитами $l=20$ см. По

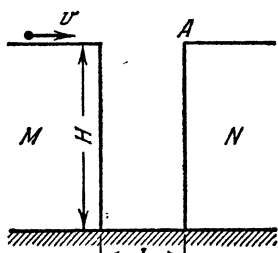


Рис. 22.

плите M равномерно движется шарик, скорость которого точно не определена. Известно только, что она лежит в интервале от 200 см/с до 267 см/с.

1) При какой высоте H нельзя предсказать направление скорости шарика по горизонтали в момент падения его на песок? (До падения на песок шарик успевает удариться о плиту N по крайней мере раз.)

2) При какой наименьшей высоте плит нельзя будет предсказать, на каком участке отрезка l упадет шарик?

Временем соударения шарика с плитой пренебречь. Удар считать абсолютно упругим.

§ 4. Динамика прямолинейного движения

73. Однородный брусок, масса которого M , движется ускоренно под действием силы F по гладкой поверхности. Найти величину T силы, с которой часть бруска A длины x действует на часть бруска B . Длина бруска l . (Рис. 23.)

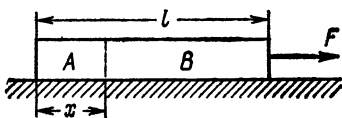


Рис. 23.

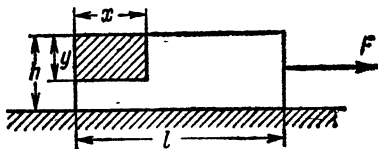


Рис. 24.

74. Однородный брусок движется ускоренно под действием силы F . Масса бруска M . Определить силы, действующие на заштрихованную часть бруска. Линейные размеры указаны на рис. 24. Трением пренебречь.

75. На однородный стержень длины L действуют две силы F_1 и F_2 , приложенные к его концам и направленные в противоположные стороны (рис. 25). С какой силой F

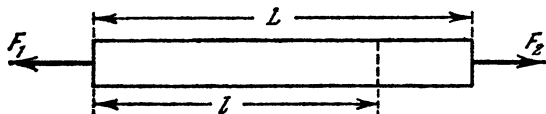


Рис. 25.

растянут стержень в сечении, находящемся на расстоянии l от одного из его концов?

76. Брусок массы m лежит на полу лифта. Лифт движется с ускорением a , направленным вниз. Определить силу, с которой брусок действует на пол лифта. При каком ускорении лифта исчезают деформации в бруске? С какой силой брусок будет действовать на пол лифта, если лифт начнет двигаться с ускорением a , направленным вверх?

77. Мальчик массы M бежит вверх по неподвижной доске массы m , находящейся на наклонной плоскости с углом при основании α . Трение между доской и плоскостью отсутствует. Какой путь прошел мальчик к моменту, когда его скорость, равная вначале v_0 , уменьшилась в 2 раза, оставаясь той же по направлению?

78. Однородный брусок висит на нити. Нить разрезают. У каких частиц бруска будет большее ускорение в начальный момент времени: у верхних или у нижних?

79. Однородный брусок лежит на горизонтальной подставке. Подставку внезапно убирают. У каких частиц бруска будет большее ускорение в начальный момент времени: у верхних или у нижних?

80. Человек с поднятыми руками стоит на платформе медицинских весов. Как изменяются показания весов при ускоренном движении рук вниз?

81. На одной чашке весов находится бутылка. В бутылке — муха. Пока муха спит, весы уравновешены. Нарушится ли равновесие весов, когда проснувшаяся муха оторвется от стенки бутылки и полетит сначала в горизонтальном направлении, а затем вверх с ускорением a ?

82. На концах нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, висят на высоте $H=2$ м от пола два груза, массы которых $m_1=100$ г и $m_2=200$ г (рис. 26). В начальный момент грузы покоятся. Определить натяжение нити при

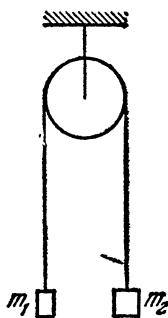


Рис. 26.

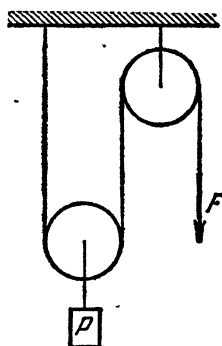


Рис. 27.

движении грузов и время, за которое груз массы m_2 достигнет пола. Массу блока и нити не учитывать.

83. К оси подвижного блока прикреплен груз весом P (рис. 27). С какой силой F нужно тянуть конец нити, перекинутой через второй блок, чтобы груз P двигался вверх с ускорением a ? Чтобы груз покоился? Массой блоков и нити пренебречь.

84. Определить ускорения грузов с массами m_1 , m_2 , m_3 , а также натяжение нитей в системе, изображенной на рис. 28, если $m_1=m_2+m_3$. Массы нитей и блоков ничтожно малы по сравнению с массами грузов.

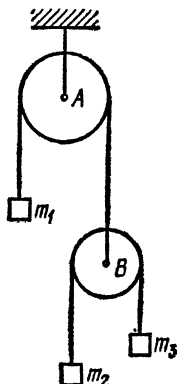


Рис. 28.

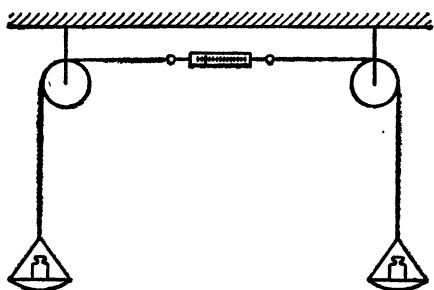


Рис. 29.

85. Через два неподвижных блока перекинута нить, к концам которой подвешены чашки с гирями весом по $P=30$ Н на каждой. Нить между блоками разрезали и присоединили к динамометру (рис. 29). Что покажет динамометр?

Какой груз P_1 нужно добавить на одну из чашек для того, чтобы показание динамометра не изменилось после того, как с другой чашки была снята гиря весом $P_2 = 10 \text{ Н}$? Массами чашек, блоков, нити и динамометра пренебречь.

86. На нити, перекинутой через блок, подвешены грузы с массами m_1 и m_2 . Блок в заторможенном состоянии (грузы не движутся) уравновешен на рычажных весах, как показано на рис. 30. На сколько придется изменить вес гирь на правой чашке, чтобы при освобождении блока и последующем движении грузов равновесие сохранилось?

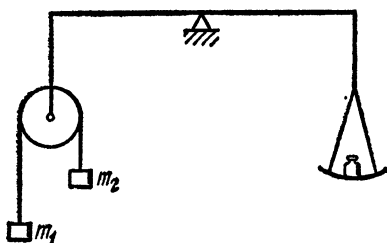


Рис. 30.

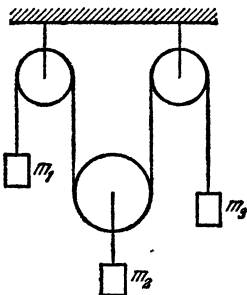


Рис. 31.

87. Система состоит из двух блоков с неподвижными осями и одного подвижного (рис. 31). Через блоки перекинута нить, на концах которой подвешены грузы с массами m_1 и m_3 , а к оси подвижного блока подвешен груз с массой m_2 . Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны. Определить ускорение каждого из грузов, если массами блоков и нитей, а также трением можно пренебречь.

88. Определить ускорения грузов в системе, изображенной на рис. 32. Массами блоков, нити и трением пренебречь. В какую сторону будут вращаться блоки при движении грузов?

89. Определить натяжения нитей, на которых висят грузы в системе, изображенной на рис. 33. Массой нитей и блоков пренебречь. Трение отсутствует. Массы грузов $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$ известны.

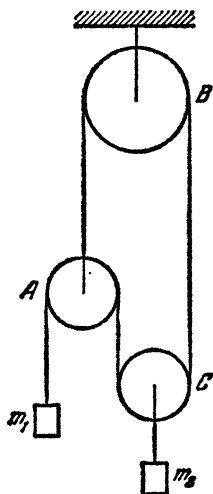


Рис. 32.

90. Определить ускорение груза массы m_4 в системе, изображенной на рис. 34. Массой нитей и блоков

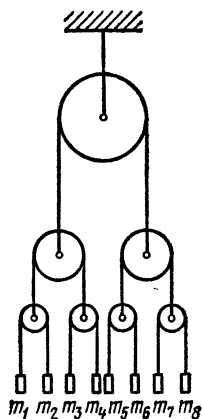


Рис. 33.

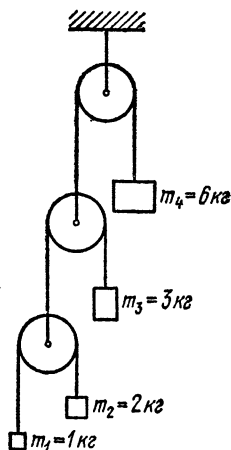


Рис. 34.

пренебречь. Трение отсутствует. Массы грузов m_1 , m_2 , m_3 , m_4 указаны на чертеже.

91. Тележка массы $M=500$ г скреплена нитью с грузом массы $m=200$ г. В начальный момент тележка имела скорость $v_0=7$ м/с и двигалась влево по горизонтальной плоскости (рис. 35). Определить величину и направление скорости тележки, место, где она будет находиться, и путь, пройденный ею, через $t=5$ с.

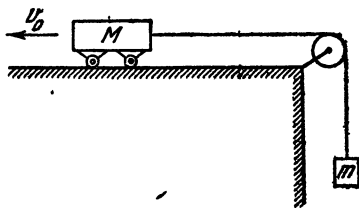


Рис. 35.

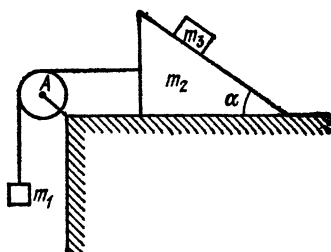


Рис. 36.

92. Для механической системы, изображенной на рис. 36, определить ускорения тел, массы которых m_1 , m_2 и m_3 . Трение между соприкасающимися поверхностями отсутствует. Массой блока A и нити пренебречь.

93. Между двумя неподвижными муфтами может без трения перемещаться вниз и вверх стержень, масса которого m . Стержень нижним концом касается гладкой поверхности клина массы M . Клин лежит на гладком горизонтальном столе (рис. 37). Определить ускорения клина и стержня.

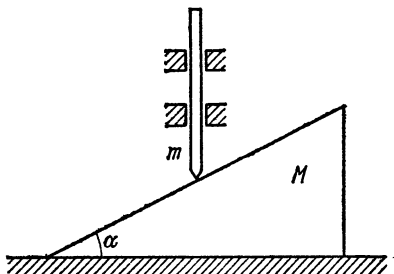


Рис. 37.

94. На стержень, длина которого $2l$, надета бусинка массы m . Бусинка может перемещаться по стержню без трения. В начальный момент бусинка находилась на середине стержня. Стержень поступательно передвигался в горизонтальной плоскости с ускорением a в направлении, составляющем угол α со стержнем (рис. 38). Определить ускорение бусинки относительно стержня, силу реакции со стороны стержня на бусинку и время, через которое бусинка покинет стержень.

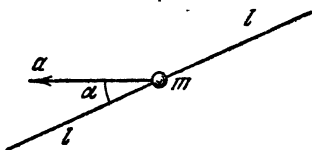


Рис. 38.

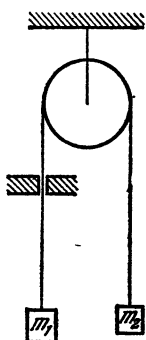


Рис. 39.

95. Невесомая нить, перекинутая через блок с неподвижной осью, пропущена через щель (рис. 39); при движении нити на нее со стороны щели действует постоянная сила трения F . На концах нити подвешены грузы, массы которых m_1 и m_2 . Определить ускорение грузов.

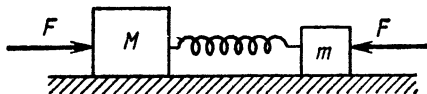


Рис. 40.

96. К концам пружины прикреплены два бруска, массы которых равны M и m ($M > m$). Под действием двух равных сил F , приложенных к брускам, как показано на рис. 40, пружина сжата. Бруски покоятся на столе. Что произойдет,

если силы F перестанут действовать? Коэффициент трения брусков о стол равен k .

97. На задней стенке вагона на нити, перекинутой через гвоздь, висит картина. Как будет двигаться картина относительно вагона, если нить оборвется, в случае, когда 1) скорость вагона возрастает? 2) скорость вагона убывает? В обоих случаях абсолютная величина ускорения вагона равна a . Коэффициент трения картины о стену вагона равен k .

98. Два груза с массами m_1 и m_2 связаны между собой нитью, перекинутой через блок. Плоскости, на которых лежат грузы, составляют с горизонталью углы α и β (рис. 41). Правый груз находится ниже левого на величину h .

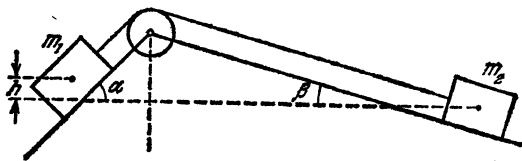


Рис. 41.

Через время τ после начала движения оба груза оказались на одной высоте. Коэффициент трения между грузами и плоскостями равен k . Определить отношение масс грузов.

99. Из точки O по желобам, лежащим в одной вертикальной плоскости и составляющим разнообразные углы с вертикалью, одновременно начинают соскальзывать песчинки. Найти геометрическое место точек, в которых окажутся песчинки через время t , если коэффициент трения каждой песчинки о желоб равен k .

100. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$; по ней пускают снизу вверх камень, который в течение $t_1 = 2$ с проходит расстояние $l = 16$ м, после чего соскальзывает вниз. Какой промежуток времени t_2 длится соскальзывание камня вниз? Каков коэффициент трения между горой и камнем?

101. Тележка массы M движется без трения по горизонтальным рельсам со скоростью v_0 . На передний край тележки кладется тело массы m . Его начальная скорость равна нулю. При какой длине тележки тело не соскользнет с нее? Размерами тела по сравнению с длиной тележки l пренебречь. Коэффициент трения между телом и тележкой равен k .

102. Брусок массы M лежит на горизонтальной плоскости. На бруске лежит тело массы m (рис. 42). Коэффициент трения между телом и бруском, а также между бруском и плоскостью, равен k . Исследовать движение при различных значениях силы F .

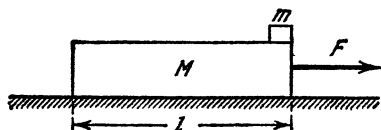


Рис. 42.

103. Брусок массы M лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит тело массы m (рис. 42). Коэффициент трения между телом и бруском равен k . При каком значении силы F , приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску? Через сколько времени тело упадет с бруска? Длина бруска l .

104. Стол весом $P_1 = 150$ Н может без трения перемещаться по горизонтальному полу. На столе лежит груз весом $P_2 = 100$ Н. К грузу прикреплена веревка, перекинутая через два блока, закрепленных на столе (рис. 43). Коэффициент

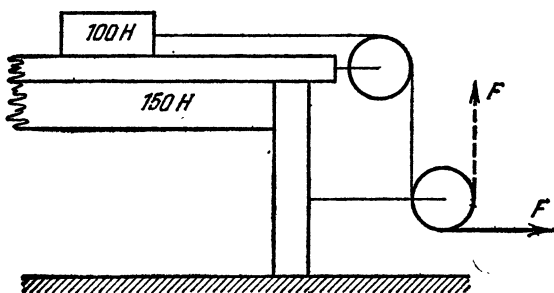


Рис. 43.

трения между грузом и столом $k = 0,6$. С каким ускорением будет двигаться стол, если к свободному концу веревки приложить постоянную силу, равную 80 Н? Рассмотреть два случая: 1) сила направлена горизонтально; 2) сила направлена вертикально вверх.

105. На стержень, длина которого $2l$, надета бусинка массы m . Коэффициент трения между бусинкой и стержнем равен k . В начальный момент бусинка находилась на середи-

не стержня. Стержень поступательно передвигается в горизонтальной плоскости с ускорением a в направлении, составляющем угол α со стержнем (рис. 38). Определить ускорение бусинки относительно стержня, силу реакции со стороны стержня на бусинку и время, через которое бусинка покинет стержень. Силу тяжести не учитывать.

106. Старинная пушка, не имеющая противооткатного устройства, стоит на горизонтальной площадке. Пушка стреляет под углом α к горизонту снарядом, масса которого m , а начальная скорость v_0 . Какую скорость v_1 будет иметь пушка непосредственно после выстрела, если масса пушки M , а ускорение снаряда в канале ствола значительно больше ускорения свободного падения? Коэффициент трения между пушкой и площадкой равен k .

107. Ракета имеет запас топлива $m=8$ тонн. Масса ракеты (включая топливо) $M=15$ тонн. Топливо сгорает за 40 с. Расход топлива и сила тяги $F=200\,000$ Н постоянны.

1) Ракета установлена горизонтально на тележке. Определить ускорение, которое имеет ракета в момент запуска. Найти зависимость ускорения от времени движения ракеты и изобразить эту зависимость графически. По графику оценить величину скорости, которую приобретает ракета через 20 с после начала движения. Трение не учитывать.

2) Ракета запускается вертикально вверх. Измерения показали, что через 20 с ускорение ракеты было равно $0,8 g$. Рассчитать силу сопротивления воздуха, которая действовала на ракету в этот момент. Ускорение g считать постоянным.

3) Для измерения ускорения ракеты на ней помещен прибор, представляющий собой пружину, закрепленную в вертикальной трубке. В покое пружина растянута прикрепленным на ее конце грузом на $l_0=1$ см. Определить зависимость растяжения пружины от ускорения ракеты. Начертить шкалу прибора.

108. Два кубика сложены вплотную и лежат на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. Ребро каждого кубика равно l , а масса равна M . В кубик попадает пуля массы m , летящая вдоль линии центров кубиков. Считая горизонтальную силу сопротивления, возникающую при движении пули, постоянной и равной F , определить, в каких пределах должна находиться начальная скорость пули, чтобы последняя прошла через первый кубик и застряла во втором

§ 5. Закон сохранения количества движения

109. Обладает ли количеством движения однородный диск, вращающийся вокруг своей оси? Ось диска неподвижна.

110. Две лодки идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Когда лодки встречаются, с одной лодки на другую перебрасывают мешок, а затем со второй лодки на первую перебрасывают такой же мешок. В другой раз мешки перекидывают из лодки в лодку одновременно. В каком случае скорость лодок после перебрасывания грузов будет больше?

111. Лягушка массы m сидит на конце доски массы M и длины L . Доска плавает на поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть при этом начальная скорость лягушки v_0 , чтобы после прыжка лягушка оказалась на другом конце доски?

112. Клин с углом при основании α лежит на гладком горизонтальном столе. По наклонной поверхности клина ползет вверх жук с постоянной относительно клина скоростью u . Определить скорость клина. Предполагается, что жук начал ползти, когда клин покоился. Масса клина равна M , масса жука равна m .

113. Клин с углом при основании α может без трения перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 44). При каком соотношении масс m_1 и m_2 грузов,

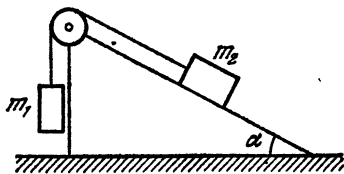


Рис. 44.

связанных нитью, перекинутой через блок, клин будет неподвижен и при каком соотношении масс клин начнет перемещаться вправо или влево? Коэффициент трения между грузом массы m_2 и клином равен k .

114. Вдоль гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонталью, начал соскальзывать с нулевой начальной скоростью ящик с песком массы M . После того, как ящик прошел путь S , в него попал камень массы m , полетевший по горизонтальному направлению. Какой была

скорость камня u , если ящик с песком после попадания в него камня на мгновение остановился? Скорости камня и ящика лежат в одной плоскости.

115. Ракета, запущенная вертикально вверх, взрывается в высшей точке своего подъема. При взрыве образуются три осколка. Доказать, что векторы начальных скоростей всех трех осколков лежат в одной плоскости.

116. На поверхности озера находится лодка. Она перпендикулярна линии берега и обращена к нему носом. Расстояние между носом лодки и берегом равно $0,75$ м. В начальный момент лодка была неподвижна. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа лодки на корму. Причалили ли лодка к берегу, если ее длина 2 м? Масса лодки $M=140$ кг, масса человека $m=60$ кг.

117. С концов неподвижной платформы длиной $l=9,2$ м бегут навстречу друг другу взрослый и ребенок. Определить, на сколько откатится платформа, когда взрослый добежит с одного конца платформы до другого. Известно, что взрослый бежит в два раза быстрее, чем ребенок. Масса платформы $m_1=600$ кг, масса взрослого $m_2=60$ кг, ребенка $m_3=30$ кг.

118. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какую траекторию будут описывать жук и центр обруча, если жук начнет двигаться вдоль обруча? Масса обруча M , радиус R , масса жука m .

119. В начальный момент ракета массы M имела скорость v_0 . В конце каждой секунды из ракеты выбрасывается порция газа массы m . Скорость порции газа отличается от скорости ракеты до сгорания данной массы газа на постоянную величину u , т. е. скорость истечения газа постоянна. Пренебрегая действием силы тяжести, определить скорость ракеты через n секунд.

120. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газов относительно ракеты меньше скорости самой ракеты, т. е. вытекающие из сопла ракеты газы летят вслед за ракетой?

121. Пушка массы M , которая может двигаться только по горизонтали, стреляет под углом α к горизонту снарядом массы m , вылетающим со скоростью v_0 . Понимая под v_0 начальную скорость снаряда относительно земли либо относительно пушки, а под углом α — угол наклона вектора начальной скорости v_0 или угол наклона ствола пушки, найти скорость u отката пушки для всех четырех вариантов.

§ 6. Статика

— 122. На неподвижный цилиндр намотана нить, длина которой $l = R\theta$, где R — радиус цилиндра, θ — угол в радианах между радиусами, проведенными в начальную и конечную точки касания нити с цилиндром. Один конец нити тянут с силой T_0 . Коэффициент трения между нитью и поверхностью цилиндра равен k . Определить силу натяжения второго конца нити, если известно, что это максимальная сила, при которой еще отсутствует проскальзывание.

5 123. На концах нити, перекинутой через два блока, висят два одинаковых груза (рис. 45). На какое расстояние опустится третий груз той же массы, если его прикрепить к середине нити? Расстояние между осями блоков равно $2l$. Трение в осях блоков существует, но очень мало.

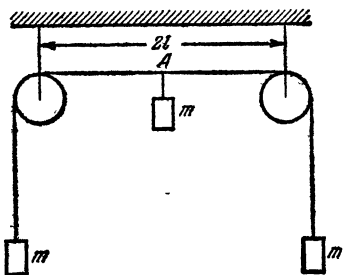


Рис. 45.

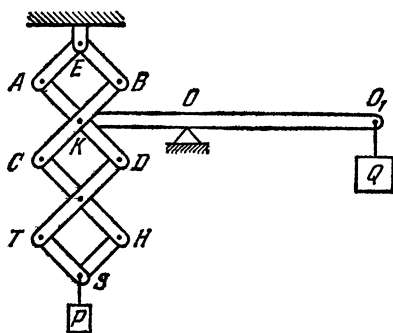


Рис. 46.

4 124. Равнобедренный клин с острым углом α забит в щель. При каких значениях угла α клин не будет вытолкнут из щели, если коэффициент трения между клином и материалом щели равен k ?

5 125. Каково соотношение между грузами P и Q , если известно, что система, изображенная на рис. 46, находится в равновесии? Длина стержней AD , BC , CH , DT и длина плеча OO_1 в два раза больше длины стержней AE , EB , TS , SH и длины плеча KO соответственно. Весом стержней и рычага пренебречь.

5 126. Для того чтобы сдвинуть прямоугольный ящик длины l и высоты h , к его верхнему ребру перпендикулярно грани прикладывают горизонтальную силу F . Какую величину должен иметь коэффициент k трения между ящиком и полом, чтобы ящик сдвинулся не опрокидываясь?

127. Однородная балка, вес которой P , лежит на полу. Коэффициент трения балки о пол равен k . Что легче: повернуть балку в горизонтальной плоскости относительно ее центра или перемещать балку поступательно? В обоих случаях балку двигают два человека.

128. Мостовой кран, вес которого $P=2 \cdot 10^4$ Н, имеет пролет $L=26$ м (рис. 47). Трос, на котором подвешен груз, находится на расстоянии $l=10$ м от одного из рельсов.

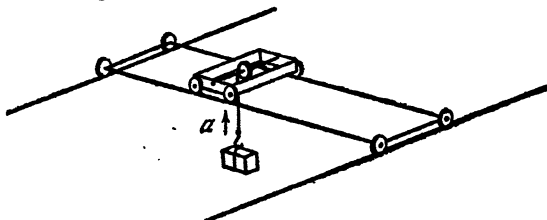


Рис. 47.

Определить силы давления крана на рельсы, если он поднимает груз весом $P_0=10^4$ Н с ускорением $a=9,8$ м/с².

129. Рычаг изогнут так, что стороны его AB , BC и CD равны между собой и образуют друг с другом прямые углы (рис. 48). Ось рычага — в точке B . Перпендикулярно плечу рычага AB в точке A приложена сила P . Определить минимальное значение силы, которую нужно приложить в точке D , чтобы рычаг находился в равновесии. Весом рычага пренебречь.

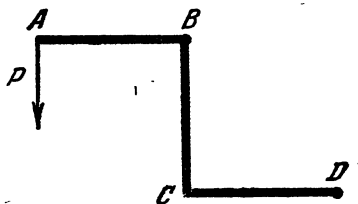


Рис. 48.

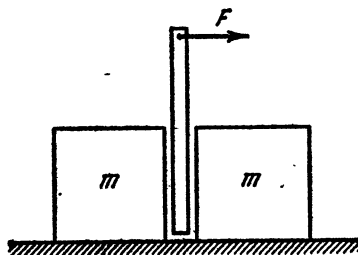


Рис. 49.

130. Между двумя одинаковыми ящиками, стоящими на полу, вставлена палка, немного не достоящая до пола (рис. 49). К верхнему концу палки приложена горизонтальная сила. Какой из ящиков сдвинется раньше?

131. Тяжелый однородный шар подвешен на нити, конец которой закреплен на вертикальной стене. Точка прикрепления нити к шару находится на одной вертикали с

центром шара. Какую величину должен иметь коэффициент трения между шаром и стеной, чтобы шар находился в равновесии?

132. Кирпич лежит на наклонной плоскости, прилегая к ней всем основанием (рис. 50). Какая половина кирпича, правая или левая, оказывает большее давление на наклонную плоскость?

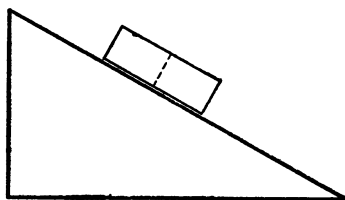


Рис. 50.

133. Для подъема тяжелого цилиндрического катка радиуса R на прямоугольную ступеньку пришлось приложить к его оси горизонтально направленную силу, равную весу катка. Определить максимальную высоту ступеньки.

134. На двух наклонных плоскостях, образующих с горизонтом углы $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$, лежит шар весом P . Определить силы давления шара на каждую из плоскостей, если известно, что трение между шаром и одной из плоскостей отсутствует.

135. На передней стенке ящика шкафа имеются две симметрично расположенные ручки. Расстояние между ручками l , длина ящика a . Коэффициент трения между ящиком и шкафом равен k . Всегда ли можно выдвинуть ящик из шкафа, прикладывая только к одной ручке силу, перпендикулярную стенке ящика?

136. На шероховатом, горизонтально расположенном бревне уравновешена однородная доска (рис. 51). После того, как утяжелили один из ее концов, обнаружилось, что равновесие достигается, когда доска составляет угол α с горизонтом. Каков коэффициент трения между доской и бревном?

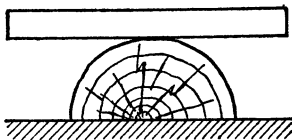


Рис. 51.

137. Верхний конец лестницы опирается на гладкую вертикальную стену, а нижний конец лестницы стоит на шероховатом полу. Коэффициент трения между лестницей и полом равен k . Определить, при каком значении угла α между лестницей и стеной лестница будет находиться в равновесии.

138. Решить предыдущую задачу в предположении, что стена не гладкая и коэффициент трения между лестницей и стеной также равен k .

139. Однородная тонкая палочка AB длиной l лежит на горизонтальной поверхности стола. К концу B палочки прикреплена нить длиной $2l$ (рис. 52). Как будет двигаться палочка, если другой конец нити C медленно поднимать вдоль

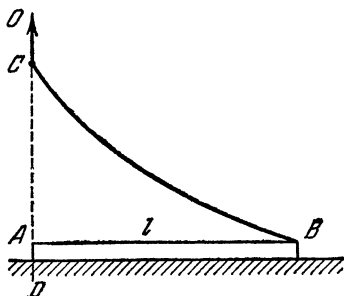


Рис. 52.

неподвижной вертикальной прямой DO , проходящей через конец A палочки? Весом нити пренебречь.

140. При каком значении коэффициента трения человек, бегущий по прямой твердой дорожке, не может поскользнуться? Максимальный угол между вертикалью и линией, соединяющей центр тяжести бегуна с точкой опоры, равен α .

141. К гладкой вертикальной стене дома прислонена лестница. Угол между лестницей и горизонтальной поверхностью земли $\alpha = 60^\circ$. Длина лестницы l . Центр тяжести ее находится посередине. Как направлена сила, действующая на лестницу со стороны земли?

142. Лестница, центр тяжести которой находится посередине, опирается на абсолютно гладкие пол и стену (рис. 53). Каким должно было бы быть натяжение веревки, привязанной к середине лестницы, чтобы удержать ее от падения?

143. По лестнице, прислоненной к гладкой вертикальной стене, поднимается человек. Лестница начинает скользить лишь тогда, когда человек поднялся на определенную высоту. Почему?

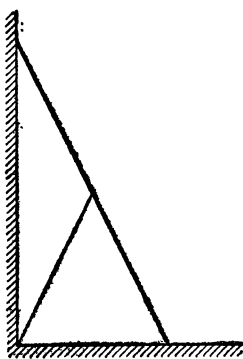


Рис. 53.

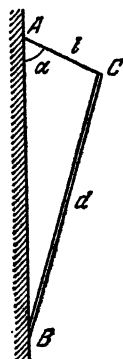


Рис. 54.

144. Картина подвешена к вертикальной стене с помощью шнура AC длины l , образующего со стеной угол α . Высота картины $BC = d$ (рис. 54). Нижняя часть картины не закреплена. При каком значении коэффициента трения между картиной и стеной картина будет в равновесии?

145. Четыре однородных стержня шарнирно скреплены друг с другом в точках B , C и D (рис. 55). Два крайних стержня AB и DE могут свободно вращаться относительно неподвижных точек A и E , расположенных на горизонтальной прямой. Длины стержней попарно равны, $AB=ED$ и $BC=CD$. Массы стержней одинаковы. Показать, что при равновесии углы α и β связаны соотношением $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

146. Чему равен коэффициент трения между полом и ящиком весом в 100 Н, если наименьшая сила, необходимая для того, чтобы сдвинуть ящик с места, составляет 60 Н?

147. На цилиндр массы m намотана невесомая нерастяжимая нить (рис. 56). С какой наименьшей силой $F_{\min}$ и под каким углом α_1 к горизонту нужно тянуть эту нить, чтобы цилиндр, вращаясь, оставался на месте?

Коэффициент трения между цилиндром и полом равен k .

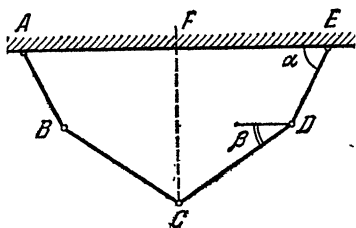


Рис. 55.

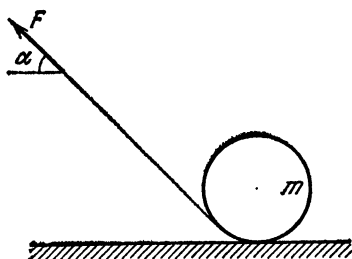
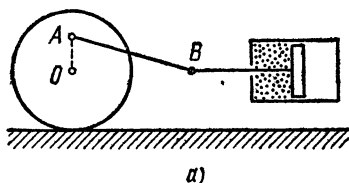
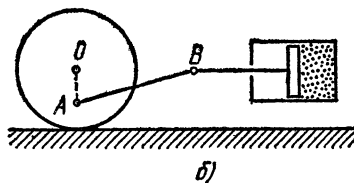


Рис. 56.

148. На рис. 57 изображена упрощенная схема паровой машины и кривошипно-шатунного механизма паровоза. Рис. 57, а и б соответствуют моментам, когда пар находится



а)



б)

Рис. 57.

в левой и правой частях цилиндра соответственно. Рассчитать силу тяги для этих случаев в момент, когда точка A лежит на одной вертикали с осью ведущего колеса. Давление пара в цилиндре p , площадь поршня S , радиус ведущего

колеса R , а расстояние $OA = r$. Массой кривошипно-шатунного механизма, поршня и ведущего колеса пренебречь.

149. Кирпичи укладывают друг на друга без связывающего вещества так, что часть каждого последующего кирпича выступает над нижележащим (рис. 58). На какое максимальное расстояние правый край верхнего кирпича может выступать над правым краем самого нижнего кирпича, служащего основанием всей кладки? Длина каждого кирпича l .

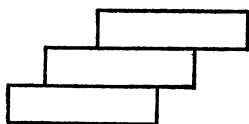


Рис. 58.

150. Найти центр тяжести тонкой однородной проволоки, согнутой в виде полуокружности радиуса r .

151. Определить положение центра тяжести однородного тонкого полукруга радиуса r .

152. Определить положение центра тяжести тонкой однородной проволоки, изогнутой по дуге радиуса r (рис. 59).

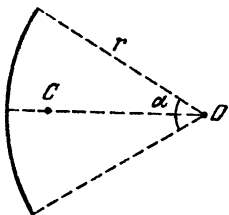


Рис. 59.

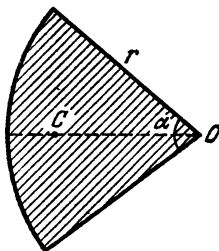


Рис. 60.

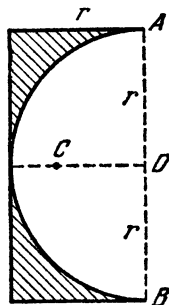


Рис. 61.

153. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластинки, вырезанной в виде сектора радиуса r , имеющего центральный угол α (рис. 60).

154. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластинки, представляющей собой прямоугольник со сторонами r и $2r$, из которого вырезан полукруг радиуса r (рис. 61).

§ 7. Работа и энергия

155. Какая работа будет совершена, если силой 30 Н поднять груз весом 10 Н на высоту 5 м?

156. Опыт Герике с «магдебургскими полушариями» состоял в том, что две медные полусферы плотно соединя-

лись основаниями и из получившегося полого шара выкачивался воздух. Атмосферное давление настолько плотно прижимало полушария друг к другу, что их могли разъединить только с помощью нескольких лошадей. Определить, сколько лошадей нужно для отрыва полушарий, если каждая лошадь тянет с силой F ? Радиус полусферы R , атмосферное давление равно p .

157. Как объяснить тот факт, что при падении камня на Землю изменение количества движения Земли равно изменению количества движения камня, а изменение кинетической энергии Земли не учитывается?

158. Сваю массой в 100 кг забивают в грунт копром, масса которого 400 кг. Копер свободно падает с высоты 5 м, и при каждом его ударе свая опускается на глубину 5 см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной.

159. Ящик с песком, имеющий массу M , подвешен на тросе длины L . Длина троса значительно больше линейных размеров ящика. Пуля, масса которой m , летит в горизонтальном направлении, попадает в ящик и застревает в нем. Трос после попадания пули отклоняется на угол α от вертикали. Определить скорость пули.

160. Две тележки с заклиненными колесами расталкиваются взрывом заряда Q , помещенного между ними (рис. 62).

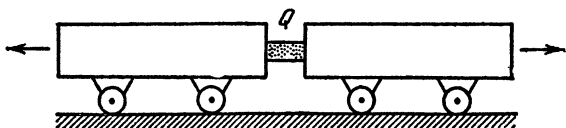


Рис. 62.

Тележка массой 100 г проходит путь 18 м и останавливается. Какой путь пройдет вторая тележка массой 300 г? Коэффициент трения между землей и тележками равен k .

161. Решить задачу 101, применяя закон сохранения количества движения и рассматривая изменение кинетической энергии тележки и тела.

162. Ракета взлетает вертикально вверх, выбрасывая раскаленные газы последовательно двумя равными порциями. Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна u . Каким должен быть промежуток времени между сгоранием порций, чтобы ракета достигла максимальной высоты? Сгорание топлива происходит мгновенно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

163. Горючее ракеты сгорает равными порциями массы m . Сгорание происходит мгновенно. Будет ли скорость истечения газов относительно ракеты постоянной, если при сгорании каждой порции механическая энергия системы изменится на одинаковую величину?

164. Тело поднимают на вершину горы один раз по пути ADC и другой раз — по ABC (рис. 63). Доказать, что

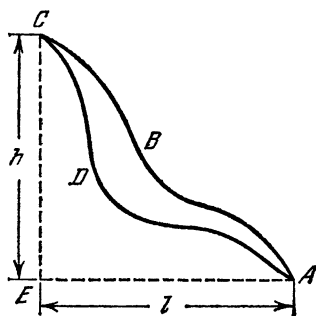


Рис. 63.

при медленном подъеме совершенная работа будет одной и той же, если коэффициент трения на обоих склонах одинаков.

165. Какую силу следует приложить к рукоятке винтового домкрата, чтобы удержать в равновесии поднятый домкратом груз P ? Шаг винта равен h , длина рукоятки R . Трение отсутствует.

166. Найти максимальный коэффициент полезного действия винтового домкрата, у которого

силы трения не позволяют грузу опускаться.

167. К корзине воздушного шара массы M привязана веревочная лестница длины l , на конце которой стоит человек массы m . Вся система находится в воздухе в положении равновесия. Определить, какую работу должен совершить человек, чтобы подняться в корзину. Какова будет скорость воздушного шара, если человек перемещается по лестнице со скоростью v относительно нее?

168. Как должна измениться мощность мотора насоса, чтобы он стал перегонять через узкое отверстие вдвое большее количество воды в единицу времени?

169. Прямоугольная яма, площадь основания которой S и глубина H , наполовину заполнена водой. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность земли через цилиндрическую трубу радиуса R .

1) Какую работу совершил насос, если он выкачал всю воду за время τ ?

2) Какую работу совершил насос за то же время, если на дне ямы лежит каменная плита прямоугольной формы, площадь основания которой S_1 и высота h ? (Глубина воды в яме по-прежнему равна $H/2$.)

170. Какую работу нужно совершить, чтобы за время τ подняться по движущемуся вниз эскалатору метро? Вы-

сота подъема h , скорость эскалатора постоянна и равна v , угол наклона эскалатора к горизонту α .

171. Берем пружину за среднюю точку O и оттягиваем на расстояние x (рис. 64), а затем отпускаем. Пружина быстро становится растянутой равномерно, причем переход к этому состоянию сопровождается некоторой потерей энергии. Оценить ее, считая жесткость k пружины очень большой. (После того, как пружина станет растянутой равномерно, возникнут колебания груза m , сопровождающиеся дополнительными потерями энергии.)

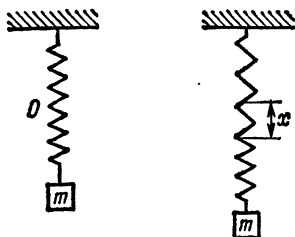


Рис. 64.

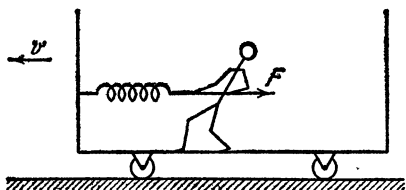


Рис. 65.

172. В вагоне равномерно движущегося поезда стоит человек, растягивающий пружину с силой F (рис. 65). Поезд прошел путь L . Какую работу совершит человек в системе координат, связанной с Землей?

173. В вагоне равномерно движущегося поезда человек растянул пружину, прикрепленную к передней стенке вагона, на длину l . За это время поезд прошел путь L . Какую работу совершил человек в системе координат, связанной с Землей? Чему равна эта работа в системе, связанной с поездом? Растягивая пружину, человек идет против движения поезда.

174. Происходит соударение двух абсолютно упругих шаров, массы которых равны m_1 и m_2 . Начальные скорости шаров v_1 и v_2 . Найти скорости шаров после удара. Удар считать центральным: скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры. Проанализировать два случая: 1) скорость второго шара до удара равна нулю; 2) массы шаров равны.

175. Происходит соударение двух абсолютно упругих шаров, массы которых равны m_1 и m_2 . Начальные скорости шаров v_1 и v_2 . Удар центральный. Определить максимальную энергию упругой деформации.

176. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости покоятся два упругих бруска равной массы m , скрепленных пружиной длины l (рис. 66). Коэффициент упругости пружины равен k . На один из брусков, например на левый, налетает со скоростью v третий брусок, имеющий также

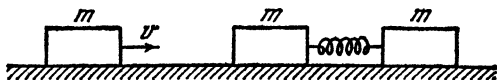


Рис. 66.

массу m . Показать, что связанные пружиной бруски всегда будут двигаться в одну сторону. Определить скорости брусков в момент, когда пружина максимально растянута.

177. Две пластинки, массы которых равны m , скреплены пружиной с коэффициентом жесткости k (рис. 67). Верхнюю пластинку опустили настолько, что деформация пружины стала равной x , и затем отпустили. Определить, на какую высоту поднимется после этого центр масс системы.

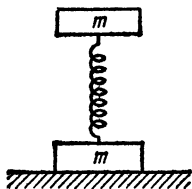


Рис. 67.

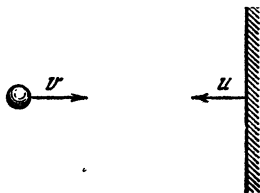


Рис. 68.

178. Шарик, движущийся со скоростью v , налетает на стенку, которая движется навстречу шарiku со скоростью u (рис. 68). Происходит упругий удар. Определить скорость шарика после удара. За счет чего изменяется кинетическая энергия шарика? Массу стенки считать бесконечно большой.

179. С высоты $h=73,5$ м сбрасывают два одинаковых по массе камня, связанных веревкой, длина которой $l=39,2$ м. Первый камень начинает падать на $\tau=2$ с раньше второго. Через какое время после начала падения камни упадут на землю? Падение происходит без начальной скорости. Рассмотреть два случая: 1) веревка абсолютно упругая; 2) веревка абсолютно неупругая.

180. Несколько одинаковых упругих шаров так подвешены рядом на нитях равной длины (рис. 69), что расстоя-

ния между соседними шарами очень малы. Как будут вести себя шары, если отклонить крайний шар и отпустить, отклонить одновременно два шара, отклонить три шара и т. д.?

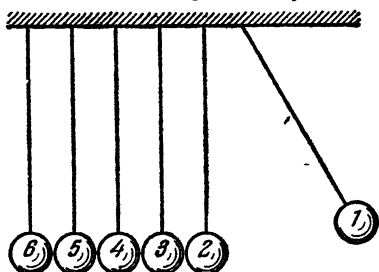


Рис. 69.

181. На плоскости лежат в ряд (с небольшими промежутками) шарики одинакового размера (рис. 70). Один из средних шариков сделан из стали, остальные — из слоновой кости (масса стального шарика больше). На шарики

справа вдоль линии центров налетает костяной шарик (той же массы). Как будут двигаться шарики после удара?



Рис. 70.

182. На концах очень длинной нити подвешены равные грузы массы m (рис. 71). Нить перекинута через два малых неподвижных блока, расположенных на расстоянии $2l$ друг от друга. Найти скорости грузов по истечении достаточно большого промежутка времени, если к середине нити прикреплен груз массы $2m$.

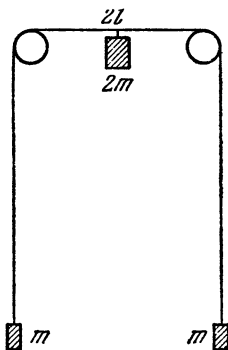


Рис. 71.

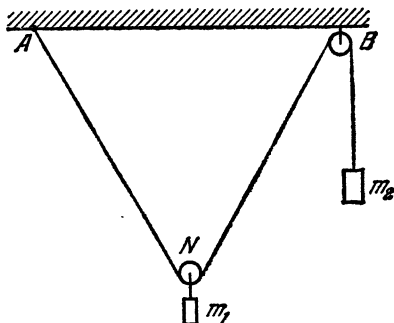


Рис. 72.

183. Груз массой $m_1 = 536$ г, удерживаемый первоначально у потолка посередине между точками A и B, начинает

опускаться вниз (рис. 72). При каком значении угла ANB его скорость по абсолютной величине станет равной скорости груза массы $m_2 = 1000$ г? Как будут двигаться грузы в дальнейшем?

184. На двух катках разных радиусов лежит тяжелая доска, образующая угол α с горизонтом. Определить, как будет двигаться доска. Проскальзывание отсутствует. Массой катков пренебречь.

185. Однородная цепочка длины $2l$ и массы M лежит на абсолютно гладкой доске. Небольшая часть цепочки пропущена в отверстие, сделанное в доске (рис. 73). В начальный момент времени лежащий на доске конец цепочки



Рис. 73.

придерживают, а затем отпускают, и цепочка начинает соскальзывать с доски под действием силы тяжести свешивающегося конца. Определить скорость движения цепочки в тот момент, когда длина свешивающейся части будет равна x ($x < l$). Определить для того же момента времени ускорение цепочки и реакцию края доски.

186. Тележка массы M может двигаться без трения по горизонтальным рельсам. На тележке укреплен математический маятник (шарик массы m , подвешенный на нити длиной l) (рис. 74). В начальный момент времени тележка и маятник покоились, и нить отклонили на угол α от вертикали. Какова скорость тележки в тот момент, когда нить маятника будет составлять с вертикалью угол β ($\beta < \alpha$)?

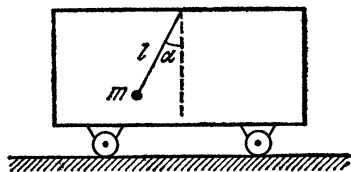


Рис. 74.

187. Клин, масса которого M , находится на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. На клине лежит брусок массы m . Брусок под действием силы тяжести может скользить по клину без трения. Считая, что в начальный момент времени система находилась в покое, определить скорость клина в тот момент времени, когда брусок опустит-ся по вертикали на высоту h .

188. Стержень, закрепленный между двумя муфтами, может свободно перемещаться в вертикальном направлении (рис. 75). Нижний конец стержня опирается на гладкий клин, лежащий на горизонтальной плоскости. Масса стержня m , клина M . Трение отсутствует. В начальный момент стержень и клин покоились. Определить: скорость v клина в момент, когда стержень опустится на высоту h ; скорость $u_{\text{отн}}$ стержня относительно движущегося клина; ускорение a стержня.

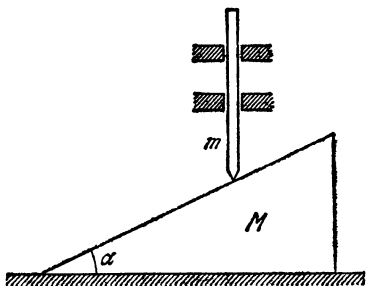


Рис. 75.

§ 8. Динамика криволинейного движения

189. Определить натяжение троса баллистического маятника (см. задачу 159) в первый момент после попадания в него пули.

190. На гибкой нерастяжимой нити, весом которой можно пренебречь, укреплены, как показано на рис. 76, четыре одинаковых груза. Вся система вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через

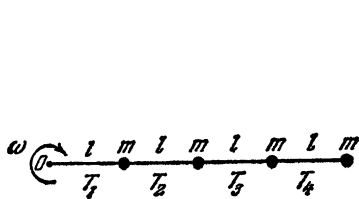


Рис. 76.

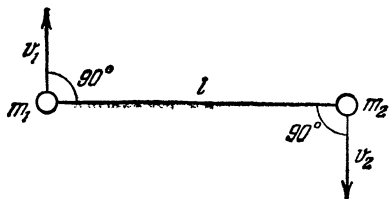


Рис. 77.

точку O . Грузы движутся по гладкой горизонтальной поверхности. Определить натяжение нити в различных участках.

191. На концах невесомого стержня длины l закреплены массы m_1 и m_2 . Скорости масс m_1 и m_2 лежат в одной плоскости и равны соответственно v_1 и v_2 (рис. 77). Определить, с какой скоростью движется центр тяжести системы и

с какой угловой скоростью вращается стержень относительно оси, проходящей через центр тяжести.

192. В центре платформы, свободно вращающейся вокруг вертикальной оси, стоит пушка. Ось вращения проходит через ее казенную часть. В горизонтальном направлении вдоль радиуса платформы сделан выстрел. Изменится ли при этом скорость вращения платформы?

193. Небольшое тело начинает скользить без начальной скорости с наклонной плоскости высоты H (рис. 78). Считая, что трение отсутствует и удар тела о горизонтальную

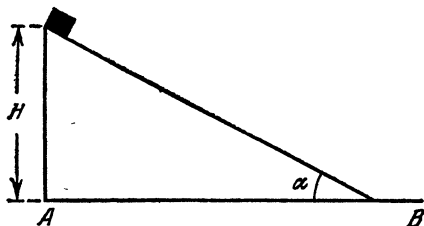


Рис. 78.

плоскость AB абсолютно упругий, определить характер движения тела после того, как оно покинет наклонную плоскость. Ответить на тот же вопрос, если удар абсолютно неупругий.

194. Чему равен минимальный радиус дуги, которую может описать мотоциклист, если его скорость $v=21$ м/с, а коэффициент трения резины о землю $k=0,3$? Под каким углом α к горизонту должен быть при этом наклонен мотоцикл, если считать его массу сосредоточенной в центре масс?

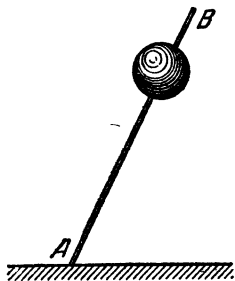


Рис. 79.

195. На легкий стержень насажен массивный шар (рис. 79). В каком случае стержень упадет быстрее: если его поставить вертикально на конец A или на конец B ? Стоящий на земле конец стержня не проскальзывает.

196. На конце легкого стержня, поставленного вертикально на пол, закреплен массивный шар. Стержень начинает падать без начальной скорости. При каком значении угла α между стержнем и вертикалью конец стержня перестанет давить на пол? При каком значении коэффициента трения конец стержня не проскользнет до этого момента?

197. На каком расстоянии от основания стержня упадет шар (см. задачу 196), если коэффициент трения $k > \sqrt{5}/2$?

198. Проволока изогнута по дуге окружности радиуса R (рис. 80). На проволоку надета бусинка, которая может без трения перемещаться вдоль проволоки. В начальный момент времени бусинка находилась в точке O . Какую горизонтальную скорость надо сообщить бусинке, чтобы, пройдя часть пути в воздухе, она в точке B попала вновь на проволоку?

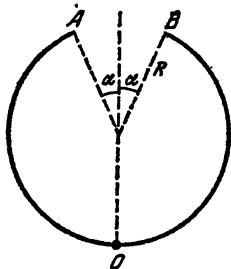


Рис. 80.

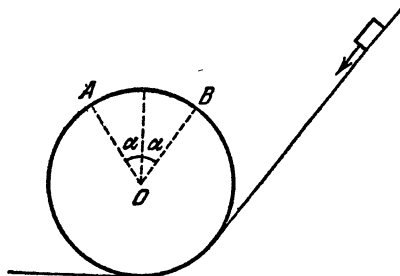


Рис. 81.

199. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности, переходящей в мертвую петлю, с минимальной высоты, при которой оно не отрывается от поверхности петли (рис. 81). Какой симметричный вырез, характеризуемый углом $\alpha < 90^\circ$, можно сделать в петле, чтобы тело, проделав часть пути в воздухе, попало в точку B петли? Как будет двигаться тело, если угол α будет больше или меньше найденного? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

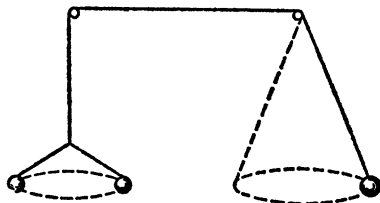


Рис. 82.

200. К концам нити, переброшенной через два гвоздя, прикрепленыдвигающиеся по окружностям грузы (рис. 82).

Слева висят два груза массы m каждый, справа — один груз массы $2m$. Будет ли система в равновесии?

201. На очень тонкой нити подвешен шарик. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. В каких точках траектории ускорение шарика направлено вертикально вниз, в каких вертикально вверх и в каких горизонтально? В начальный момент нить не растянута.

202. Невесомый стержень может вращаться в вертикальной плоскости относительно точки O . На стержне укреплены массы m_1 и m_2 на расстояниях r_1 и r_2 от O (рис. 83). Стержень отпущен без начальной скорости из положения, составляющего угол α с вертикалью. Определить линейные скорости масс m_1 и m_2 в тот момент, когда стержень занимает вертикальное положение.

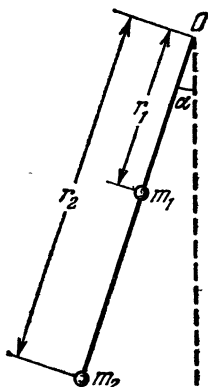


Рис. 83.

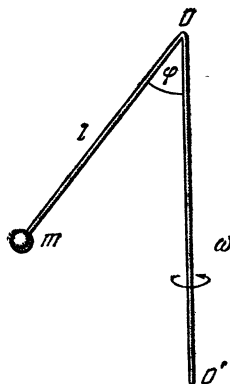


Рис. 84.

203. На оси центробежной машины укреплен отвес, к которому привязан маленький шарик на нити длиной $l=12,5$ см. Найти угол α отклонения нити от вертикали, если машина делает 1 оборот в секунду, 2 оборота в секунду.

204. Невесомый стержень, изогнутый, как показано на рис. 84, вращается с угловой скоростью ω относительно оси OO' . К концу стержня прикреплен груз массы m . Определить силу, с которой стержень действует на груз.

205. Невесомый стержень AOO' , изогнутый, как показано на рис. 85, вращается с угловой скоростью ω относительно оси OO' . На стержень надета бусинка массы m . Определить, на каком расстоянии l от точки O бусинка будет находиться в равновесии, если коэффициент трения между бусинкой и стержнем равен k .

206. К вертикальному стержню, вращающемуся с угловой скоростью ω , прикрепена нить длиной l , на конце которой находится груз массы m . К грузу в свою очередь прикреплена другая нить такой же длины, несущая на своем конце второй груз массы m . Показать, что угол между первой нитью и вертикалью будет меньше угла между вертикалью и второй нитью. Весом нити пренебречь.

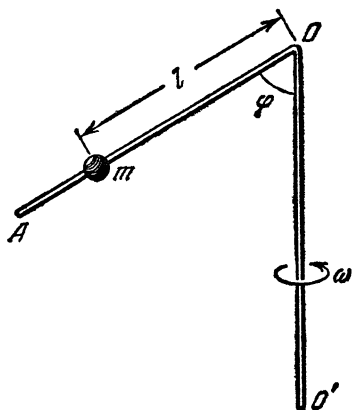


Рис. 85.

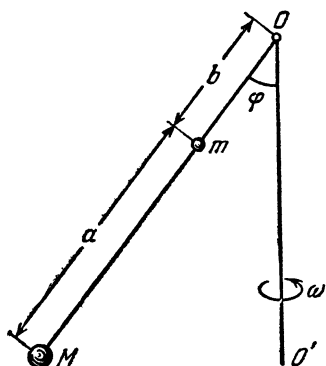


Рис. 86.

207. На невесомом стержне укреплены два груза с массами m и M . Стержень шарнирно связан с вертикальной осью OO' (рис. 86). Ось OO' вращается с угловой скоростью ω . Определить угол φ , образуемый стержнем и вертикалью.

208. Горизонтальная прямая штанга вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. По

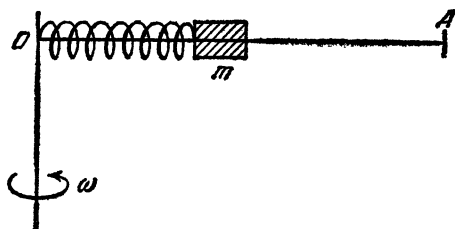


Рис. 87.

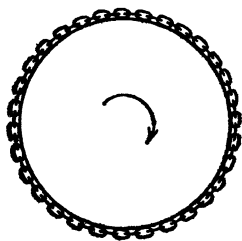


Рис. 88.

штанге может без трения скользить тело. Первоначально тело удерживается в положении равновесия пружиной (рис. 87). Что произойдет с телом, если сообщить ему на-

чальную скорость вдоль штанги? В нерастянутом состоянии длиной пружины можно пренебречь.

209. Металлическая цепочка длины $l=62,8$ см, концы которой соединены, насажена на деревянный диск (рис. 88). Диск вращается, делая $n=60$ оборотов в секунду. Определить натяжение цепочки T , если ее масса $m=40$ г.

210. По резиновой трубке, свернутой в виде кольца, циркулирует вода со скоростью v (рис. 89). Радиус кольца R , диаметр трубки $d \ll R$. С какой силой растянута резиновая трубка?

211. Однородный стержень, длина которого l , а масса m , вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. Найти натяжение стержня на расстоянии x от оси вращения.

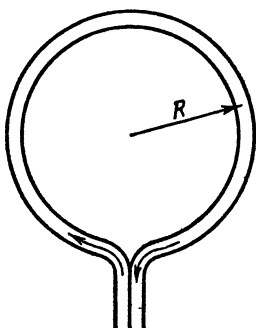


Рис. 89.

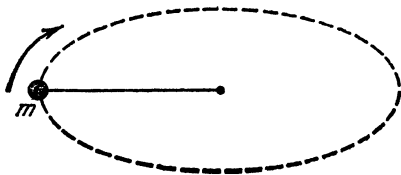


Рис. 90.

212. Шарик массы m , укрепленный на невесомом стержне, вращается с постоянной скоростью v в горизонтальной плоскости (рис. 90). Его кинетическая энергия в системе координат, неподвижной относительно оси вращения, постоянна и равна $mv^2/2$. По отношению к системе отсчета, движущейся в горизонтальной плоскости прямолинейно со скоростью v относительно оси, кинетическая энергия меняется с течением времени от нуля до $4mv^2/2$. Какая причина вызывает это изменение энергии?

213. Тонкий однородный обруч катится по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v . Как и под действием каких сил меняется полная энергия небольшого участка AB , находящегося в данный момент в наивысшей точке обруча?

214. Тяжелая катушка, с намотанной на нее нитью, лежит на горизонтальной шероховатой поверхности, по которой может катиться без скольжения. Если нить тянуть в горизонтальном направлении влево, то катушка будет катиться также влево. Если же менять направление нити (рис. 91), то при некотором значении угла α между направлением нити и вертикалью катушка покатится вправо. Определить этот угол. Что будет с катушкой при данном значении угла? Радиус внешней части катушки R , внутренней r .

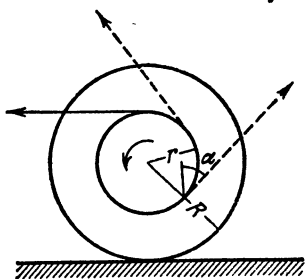


Рис. 91.

215. Найти кинетическую энергию обруча массы M и радиуса R , если он движется равномерно со скоростью v и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр.

216. Определить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v . Расстояние между осями колес, на которые надета гусеница, равно l ; радиус колес r . Единица длины гусеницы весит P .

217. Как узнать, какой из двух одинаковых по величине цилиндров полый, если они сделаны из неизвестных материалов разной плотности? Массы цилиндров равны.

218. На катушку радиуса R в один ряд намотан гибкий кабель (рис. 92). Вес единицы длины кабеля ρ . Вес всего кабеля P . Катушка без проскальзывания движется по инерции вдоль горизонтальной плоскости. Кабель разматывается и ложится на плоскость. Вначале, когда весь кабель был намотан на катушку, скорость центра катушки

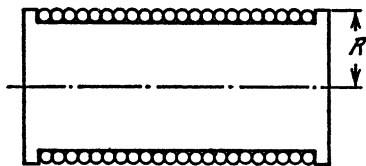


Рис. 92.

была равна v . Пренебрегая радиусом поперечного сечения кабеля (по сравнению с R) и массой самой катушки, оценить скорость центра катушки в тот момент времени, когда на плоскости будет лежать часть кабеля длиной x . За счет действия какой силы изменяется количество движения кабеля?

219. К шкиву радиуса r , вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложена сила трения f (рис. 93). Определить изменение угловой скорости шкива со временем, если в начальный момент времени угловая скорость равна ω_0 .

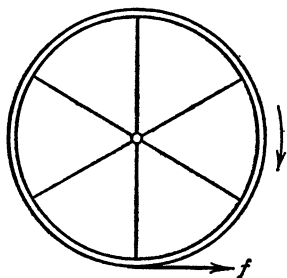


Рис. 93.

Масса шкива равна m ; массой спиц можно пренебречь.

220. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 обруч радиуса r поставили на горизонтальную шероховатую плоскость. Определить скорость v центра обруча после того, как прекратилось его проскальзывание. В начальный момент скорость центра обруча равна нулю.

221. Обручу радиуса r , поставленному на горизонтальную шероховатую плоскость, сообщили в горизонтальном направлении поступательную скорость v_0 . Определить угловую скорость ω вращения обруча после того, как проскальзывание обруча прекратилось.

222. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 обруч радиуса r поставлен на горизонтальную шероховатую плоскость. Обручу сообщена поступательная скорость v_0 (рис. 94). Считая, что сила трения скольжения равна f , определить характер движения обруча.

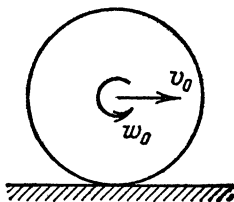


Рис. 94.

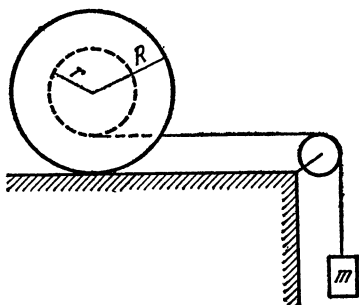


Рис. 95.

223. Цилиндрическая трубка радиуса r скреплена с помощью спиц с двумя обручами радиуса R . Масса обоих обручей равна M . Массой трубки и спиц, по сравнению с массой обручей M , можно пренебречь. На трубку намотана нить, перекинута через невесомый блок. К концу нити прикреплен груз массы m (рис. 95). Найти ускорение груза, натяжение нити и силу трения, действующую между обру-

чами и плоскостью. (Считать, что обручи не проскальзывают.) Определить, при каком значении коэффициента трения обручи будут проскальзывать.

224. На наклонной плоскости лежит катушка. На катушку намотана нить, свободный конец которой с прикрепленным к нему грузом массы m перекинут через невесомый блок (рис. 96). Предполагается, что масса катушки M равномерно распределена по окружности радиуса R . Трение отсутствует. Определить, при каком значении угла наклона α центр тяжести катушки будет оставаться в покое.

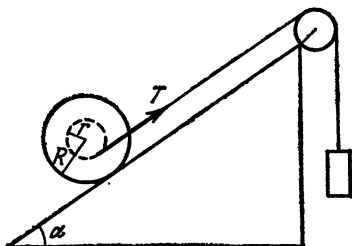


Рис. 96.

225. Доска массы M положена на два одинаковых цилиндрических катка радиуса R . Катки лежат на горизонтальной плоскости. В начальный момент времени система находилась в покое. Затем к доске приложили в горизонтальном направлении силу Q . Найти ускорение доски и величину сил трения, действующих между катками и доской, а также между катками и горизонтальной плоскостью.

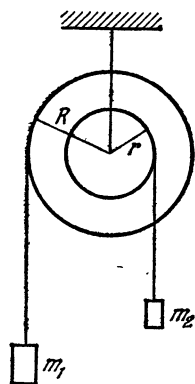


Рис. 97.

Считать, что проскальзывание отсутствует. Катки представляют собой тонкостенные цилиндры массы m каждый.

226. Двухступенчатый блок состоит из двух жестко скрепленных между собой тонких обручей, радиусы которых R и r , а массы соответственно M_1 и M_2 . На каждую из ступеней блока намотаны нити, к концам которых прикреплены грузы массой m_1 и m_2 (рис. 97). Найти ускорения грузов m_1 и m_2 , натяжения нитей и силу, с которой система действует на ось блока.

227. Однородный тонкостенный цилиндр радиуса R и массы M без скольжения скатывается под действием силы тяжести с плоскости, образующей угол α с горизонтом. Используя закон сохранения энергии, определить: 1) скорость центра тяжести и угловую скорость вращения цилиндра спустя время t после начала движения из состояния покоя; 2) ускорение центра тяжести цилиндра.

§ 9. Закон всемирного тяготения

228. Почему Земля сообщает всем телам одно и то же ускорение независимо от их массы?

229. Найти величину и размерность в системе СГС гравитационной постоянной, принимая во внимание, что средний радиус Земли $R=6,4 \cdot 10^8$ см, а масса Земли $M=6 \cdot 10^{27}$ г.

230. При каких условиях тела внутри космического корабля будут находиться в так называемом состоянии невесомости, т. е. перестанут оказывать давление на стенки кабины корабля?

231. Легкий маятник, состоящий из стержня и диска (рис. 98), укреплен на деревянной рамке, которая может свободно падать вдоль направляющих проволок. Маятник отклонили от положения равновесия на угол α и отпустили. В момент, когда маятник проходил крайнее нижнее положение, рамку перестали удерживать, и она начала свободно падать. Как будет двигаться маятник относительно рамки? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

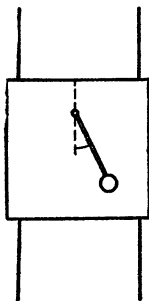


Рис. 98.

232. Планета движется по эллипсу, в фокусе которого расположено Солнце. Принимая во внимание работу силы тяготения, указать, в какой точке траектории скорость планеты будет максимальной и в какой — минимальной?

233. Искусственный спутник Земли движется на высоте $h=670$ км по круговой орбите. Найти скорость движения спутника.

234. Как изменяется со временем скорость искусственного спутника Земли при движении его в верхних слоях атмосферы?

235. По круговой орбите на небольшом расстоянии друг от друга в одном направлении движутся два спутника. С первого спутника на второй нужно перебросить контейнер. В каком случае контейнер быстрее достигнет второго спутника: если его бросить по движению первого спутника или против движения? Скорость контейнера относительно спутника u много меньше скорости спутника v .

236. Оценить массу Солнца M , зная, что средний радиус орбиты Земли $R=149 \cdot 10^6$ км.

237. Определить минимальное удаление h от поверхности Земли первого искусственного спутника, запущенного в СССР 4 октября 1957 г., если известны следующие данные: максимальное удаление спутника от поверхности Земли $H=900$ км; период обращения спутника вокруг Земли $T=96$ мин; большая полуось лунной орбиты $R=384\,400$ км; период движения Луны вокруг Земли $T=27,3$ суток и радиус Земли $R_0=6370$ км.

238. В воде имеется пузырек воздуха радиуса r и железный шарик того же радиуса. Будут ли они притягиваться друг к другу или отталкиваться? Какова величина силы взаимодействия между ними? Расстояние между центрами шарика и пузырька равно R .

239. В воде имеется два пузырька воздуха радиуса r . Притягиваются или отталкиваются пузырьки? Какова величина силы взаимодействия? Расстояние между пузырьками R .

240. Свинцовый шар радиуса $R=50$ см имеет внутри сферическую полость радиуса $r=5$ см, центр которой находится на расстоянии $d=40$ см от центра шара (рис. 99).

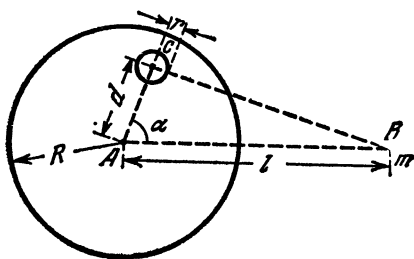


Рис. 99.

С какой силой будет притягиваться к шару материальная точка массы $m=10$ г, находящаяся на расстоянии $l=80$ см от центра шара, если линия, соединяющая центры шара и полости, составляет угол $\alpha=60^\circ$ с линией, соединяющей центр шара с материальной точкой?

241. Тело, размерами которого можно пренебречь, помещено внутрь тонкой однородной сферы. Доказать, что сила притяжения, действующая со стороны сферы на тело, равна нулю при любом положении тела внутри сферы.

242. С какой силой притягивается к центру Земли тело массы m , находящееся в глубокой шахте, если расстояние от тела до центра Земли равно r ? Плотность Земли считать всюду одинаковой и равной ρ .

§ 10. Гидро- и аэростатика

243. В стакане с водой плавает в вертикальном положении брусок. Как изменится уровень воды в стакане, если брусок перейдет в горизонтальное положение?

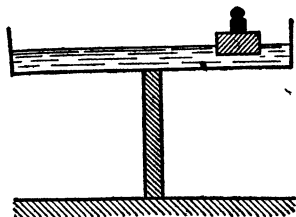


Рис. 100.

244. Сосуд с водой установлен на ребре доски (рис. 100). Нарушится ли равновесие, если на поверхность воды положить дощечку и на нее поставить гирю так, что дощечка с гирей будет плавать на поверхности воды?

245. В стакане с водой плавает кусок льда. Как изменится уровень воды в стакане, когда лед растает? Рассмотреть случаи:

- 1) лед совершенно однородный;
- 2) во льду находится вмёрзший камень;
- 3) внутри куска льда имеется пузырек воздуха.

246. Сплошное однородное тело, будучи погружено в жидкость с удельным весом d_1 , весит P_1 , а в жидкости с удельным весом d_2 весит P_2 . Определить удельный вес d тела.

247. Посередине большого озера прорубили прорубь. Толщина льда оказалась равной 10 м. Какой длины нужна веревка, чтобы зачерпнуть ведро воды?

248. В чаше с водой плавает спичечная коробочка, на дне которой лежит небольшой камень. Изменится ли уровень воды в чаше, если камень вынуть из коробочки и опустить в воду?

249. Судно проходит шлюз, поднимаясь на более высокий уровень в камере шлюза, куда вода накачивается насосами со стороны нижнего уровня (рис. 101). В каком случае насосы совершат большую работу: когда в камере находится большой теплоход или маленькая лодка?

250. Из двух пластин одинаковой толщины с плотностями $3,5 \text{ г/см}^3$ и 2 г/см^3 вырезаны квадрат со стороной a и прямоугольник со сторонами a и $2a$, причем квадрат вы-

резан из более тяжелого материала. Квадрат и прямоугольник скреплены в виде буквы Г и поставлены на дно пустого сосуда (рис. 102). Что произойдет, если сосуд заполнить водой?

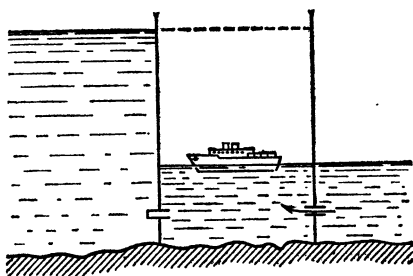


Рис. 101.

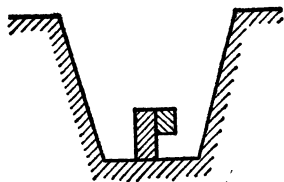


Рис. 102.

§ 251. В воде плавает в вертикальном положении труба (рис. 103). Высота выступающей из воды части трубы $h=5$ см. Внутри трубы наливается масло плотности $\rho=0,9$ г/см³. Какой длины должна быть труба для того, чтобы ее можно было заполнить маслом целиком?

§ 252. Поршень весом $P=30$ Н представляет собой круглый диск радиуса $R=4$ см с отверстием, в которое вставлена тонкостенная трубка радиуса $r=1$ см. Поршень может плотно и без трения входить в стакан и сначала лежит на дне стакана. На какую высоту H поднимется поршень, если влить в трубку $m=700$ г воды?

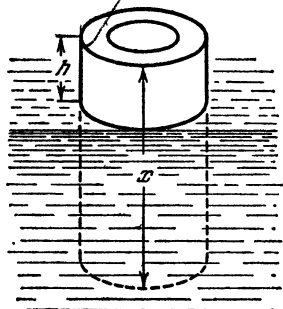


Рис. 103.

253. Резиновый мяч массы m и радиуса R погружают под воду на глубину h и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать.

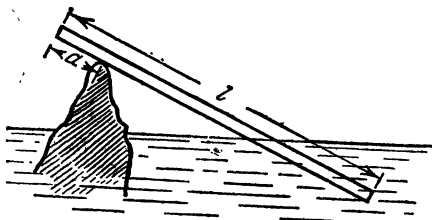


Рис. 104.

254. На камень, выступающий над водой, верхним своим концом опирается доска длины l . Часть доски длины a на-

ходится выше точки опоры (рис. 104). Какая часть доски находится под водой, если удельный вес древесины d ?

255. Человек, который нес автомобильную камеру, решил облегчить свою ношу, используя выталкивающую силу воздуха (по закону Архимеда). Для этого человек накачал камеру, увеличив тем самым ее объем. Достиг ли он этим своей цели?

256. На точных аналитических весах, находящихся под стеклянным колпаком, взвешивают тело. Изменятся ли показания весов, если выкачать из-под колпака воздух?

257. Какая ошибка допущена при взвешивании тела объемом $V=1$ л, если при взвешивании в воздухе тело было уравновешено на весах медными гири массой $M_1=800$ г? Плотность меди $d_1=8,8$ г/см³, воздуха $d_0=1,29$ г/л.

258. Оценить массу атмосферы Земли.

259. В море на большой глубине затонула незакупоренная бутылка. Увеличится или уменьшится вместимость бутылки под влиянием давления воды?

260. Сосуд представляет собой призму (рис. 105). Дно сосуда — прямоугольник с размерами a и b . В сосуд до высоты h налита жидкость, плотность которой ρ . Найти силу, с которой действуют боковые стенки на дно сосуда. Весом стенок пренебречь.

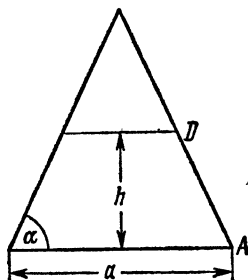


Рис. 105.

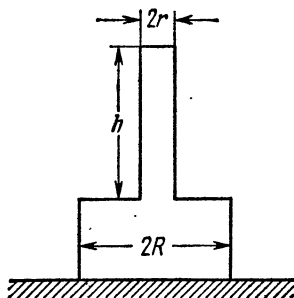


Рис. 106.

261. Сосуд без дна, имеющий форму и размеры, изображенные на рис. 106, стоит на столе. Края сосуда плотно прилегают к поверхности стола. Вес сосуда P . В сосуд наливает жидкость. После того, как уровень достигнет высоты h , сосуд под действием жидкости приподнимается. Определить плотность ρ налитой жидкости.

262. Конический сосуд без дна стоит на столе. Края сосуда плотно прилегают к поверхности стола. После того, как

уровень жидкости в сосуде достигает высоты h , давление жидкости приподнимает сосуд. Радиус нижнего, большего основания сосуда R , угол между образующей конуса и вертикалью α , вес сосуда P . Какова плотность налитой жидкости?

263. Три сосуда с приставным дном погружены в воду на одинаковую глубину. Дно каждого из сосудов (рис. 107) отпадет, если налить в них по 1 кг воды. Отпадет ли дно, если налить в сосуды по 1 кг масла? налить в сосуды по 1 кг ртути? положить в каждый сосуд по гире массой в 1 кг?

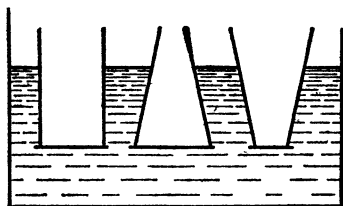


Рис. 107.

264. В двух цилиндрических сообщающихся сосудах налита ртуть, а поверх нее — вода. Уровень воды в обоих сосудах одинаков. Будет ли одинаков уровень воды и ртути, если в один из сосудов опустить кусочек дерева, а в другой долить равное ему по весу количество воды? Рассмотреть случаи одинаковых и разных сечений сосудов.

265. В сообщающиеся цилиндрические сосуды с различными площадями поперечных сечений налита ртуть. В широкий сосуд опустили железный кубик объемом V_0 , вследствие чего уровень ртути в этом сосуде повысился. Затем в этот же сосуд налили воду до тех пор, пока уровень ртути в нем не принял прежнего положения. Найти высоту столба воды h , если площадь поперечного сечения узкого сосуда равна S_1 .

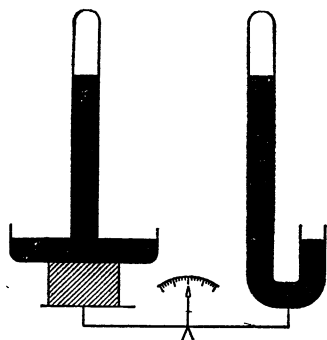


Рис. 108.

266. На весьма чувствительных весах уравновешены два ртутных барометра: чашечный (с широкой чашкой) и U-образный (рис. 108). Барометры изготовлены из одного и

того же материала, имеют одинаковый диаметр трубок и содержат одинаковое количество ртути. Расстояния между запаянными концами трубок и верхними уровнями ртути

в них также одинаковы. Как изменится равновесие весов при повышении атмосферного давления?

267. Надувной матрац заполнен воздухом до некоторого давления, превышающего атмосферное. В каком случае давление воздуха в матраце будет больше: когда человек станет на него или ляжет?

268. Колесо автомобиля устроено следующим образом: на металлический обод колеса надевается резиновая камера, заключенная в покрывку. Камера затем накачивается воздухом. Давление воздуха в нижней и верхней частях камеры одинаково. Кроме давления воздуха на обод действует сила тяжести (рис. 109). Почему же обод не опускается вниз? Что его удерживает в состоянии равновесия?

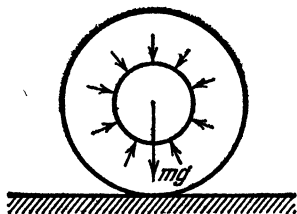


Рис. 109.



Рис. 110.

269. Паровой котел состоит из цилиндрической части и двух полусферических днищ (рис. 110). Радиусы цилиндрической части котла и обоих днищ одинаковы. Толщина стенки цилиндрической части 0,5 см. Все части котла сделаны из одного материала. Какой толщины должны быть стенки днищ, чтобы прочность всех частей котла была одинакова?

270. Какую форму должен иметь паровой котел, чтобы при данной толщине стенок прочность котла была наибольшей?

271. Сосуд с водой падает с ускорением $a < g$. Как меняется давление p в сосуде с глубиной?

272. Сосуд с плавающим в нем телом падает с ускорением $a < g$. Всплывет ли при этом тело?

273. Цистерна, имеющая вид, изображенный на рис. 111, целиком заполнена водой и движется с ускорением a

в горизонтальном направлении. Определить силу, с которой вода действует на крышку цистерны.

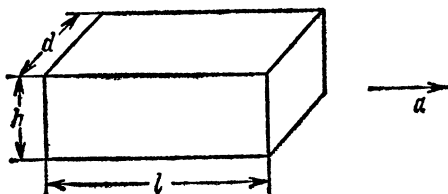


Рис. 111.

274. Определить в предыдущей задаче силу, с которой вода действует на дно цистерны.

275. На тележке стоит бак кубической формы, целиком заполненный водой (рис. 112). Тележка движется с постоянным ускорением a . Определить давление на глубине h в точке A , отстоящей от передней стенки на расстояние l , если бак сверху плотно закрыт крышкой. (При равномерном движении крышка не оказывает давления на воду.)

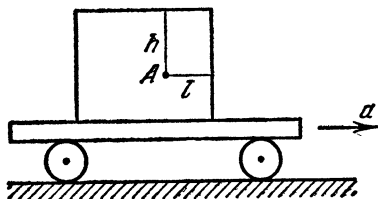


Рис. 112.

276. Прямоугольный бак без крышки (размеры бака указаны на рис. 113) движется с ускорением a . В бак налита вода

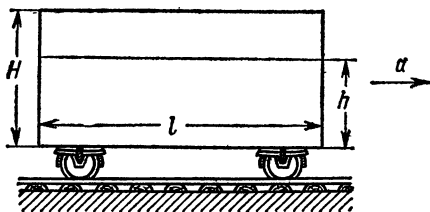


Рис. 113.

на высоту h . Каким должно быть ускорение a , чтобы вода начала выливаться из бака?

277. Сосуд с отверстием в дне укреплен на тележке. Масса сосуда с тележкой M ; площадь основания сосуда S . С какой силой F надо тянуть тележку, чтобы в сосуде

осталось максимальное количество воды? Размеры сосуда указаны на рис. 114. Трение отсутствует.

278. Можно ли с помощью сифона перекачивать воду через стенку высотой 20 м?

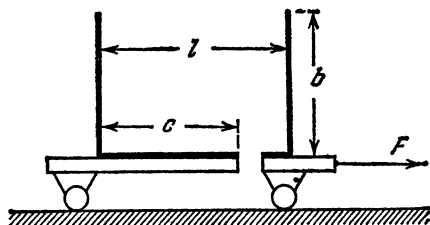


Рис. 114.

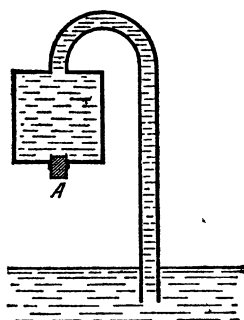


Рис. 115.

279. Сосуд, изображенный на рис. 115, целиком заполнен водой. Что произойдет, если вынуть пробку А? Радиус отверстия 0,5 см.

280. Четыре поршневых насоса сделаны из отрезков труб большого и малого диаметров. Насосы подняли воду на одинаковую высоту $H+h$ (рис. 116). Какой из поршней

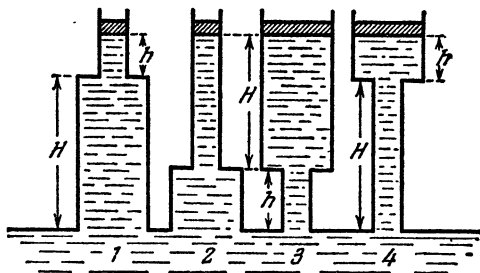


Рис. 116.

надо тянуть с большей силой, чтобы удержать его в равновесии? Весом поршней пренебречь.

281. Предложен следующий проект вечного двигателя (рис. 117). Герметичский сосуд разделен на две половины герметической же перегородкой, сквозь которую пропущена трубка и водяная турбина особого устройства. Турбина

имеет камеры с автоматически закрывающимися и открывающимися крышками. Давление p_1 в нижней части сосуда больше, чем давление p_2 в верхней части, и вода поднимается по трубке, наполняя открытую камеру турбины. После этого камера закрывается и колесо поворачивается. В нижней части сосуда камера автоматически открывается, возвращая воду. После этого камера герметически закрывается и т. д. Почему данная машина не будет работать вечно?

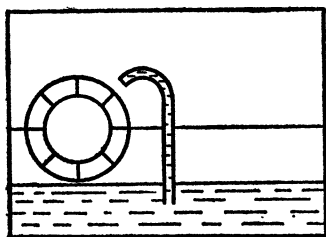


Рис. 117.

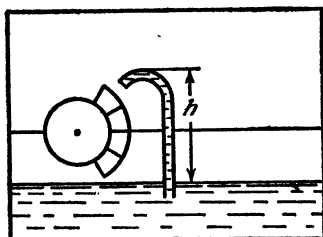


Рис. 118.

282. Предложен следующий вариант двигателя, описанного в задаче 281. Герметические камеры (рис. 118) заполняются водой в правой части колеса и опускаются вниз. Внизу камеры открываются, и, в отличие от двигателя, описанного в задаче 281, стенки камер автоматически задвигаются внутрь колеса. В верхней части сосуда стенки автоматически выдвигаются и заполняются водой. В остальном вечный двигатель устроен так же, как и описанный ранее. Почему он тоже не будет работать?

283. Почему при подъеме на стратостате обязательно берут балласт? Ведь лишний вес уменьшает «потолок» стратостата.

§ 11. Гидро- и аэродинамика

284. В стенке сосуда с водой просверлены одно над другим два отверстия площадью $S=0,2 \text{ см}^2$ каждое. Расстояние между отверстиями $H=50 \text{ см}$. В сосуд каждую секунду вливается $Q=140 \text{ см}^3$ воды. Найти точку пересечения струй, вытекающих из отверстий.

285. На гладкой поверхности стола стоит широкий сосуд с водой. Уровень воды в сосуде h , вес сосуда вместе с водой Q . В боковой стенке сосуда у дна имеется закрытое пробкой отверстие (с закругленными краями) площади S . При

каком значении коэффициента трения между дном и поверхностью стола сосуд придет в движение, если вынуть пробку?

286. При истечении струи жидкости из сосуда через отверстие площадью S_0 сила, действующая на стенку с отверстием, на $2\rho S_0$ меньше силы, действующей на противоположную стенку (см. задачу 285).

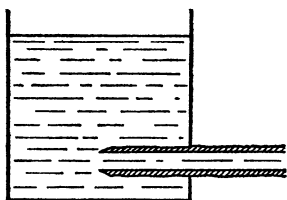


Рис. 119.

Если в отверстие вставить трубку, как показано на рис. 119, то разность сил, действующих на противоположные стенки, станет равной примерно ρS_0 , так как благодаря трубке движения жидкости у стенки не будет.

С другой стороны, изменение количества движения жидкости за единицу времени при истечении из сосуда всегда равно $2\rho S$, где S — площадь поперечного сечения струи. Как согласовать между собой эти факты?

287. Струя воды, вытекающая из трубки диаметром $d=1$ см со скоростью $v=1$ м/с, ударяется о вертикальную стенку. Определить действующую на стенку силу, считая, что трубка перпендикулярна стенке, и пренебрегая разбрызгиванием воды.

288. По изогнутой под прямым углом трубе поперечного сечения S со скоростью v течет газ. Плотность газа ρ . С какой силой газ действует на трубу? Сжатием газа и трением пренебречь.

289. Найти силу, действующую на лопасть нижнебойного колеса (рис. 120), считая, что струя после удара о лопасть продолжает движение со скоростью лопасти. Высота

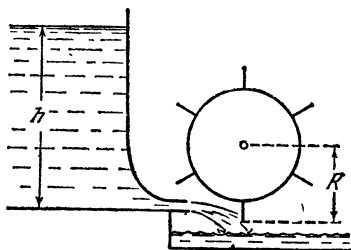


Рис. 120.

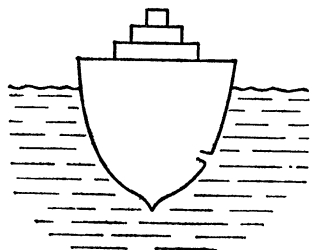


Рис. 121.

напора воды h , радиус колеса R , угловая скорость вращения колеса ω и площадь поперечного сечения струи S .

3 290. Судно получило большую пробоину в подводной части (рис. 121). В какую сторону оно начнет перемещаться вследствие этого?

291. Из широкого сосуда через узкую трубку вытекает жидкость (рис. 122). Как распределены по вертикали давление и скорость жидкости в сосуде и в трубке?

5 292. Сосуд с водой, описанный в предыдущей задаче, подвешен на пружинных весах. Нижний конец трубки закрыт пробкой. Как изменятся показания весов в первый момент, когда вынута пробка и началось вытекание жидкости?

4 293. На одной из чашек весов стоит сосуд с водой (рис. 123). Весы уравновешены. Изменится ли равновесие, если открыть кран? (Вытекающая вода попадает на ту же чашку весов, на которой стоит сосуд.)

294. На рис. 124 изображен гидравлический таран — самодействующее водоподъемное устройство. Принцип его работы основан на явлении гидравлического удара — резком возрастании давления в жидкости, текущей по трубе, при ее внезапной остановке, например при закрытии клапана, выпускающего из трубы воду. Труба длиной $l=2$ м,

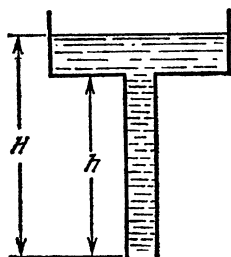


Рис. 122.

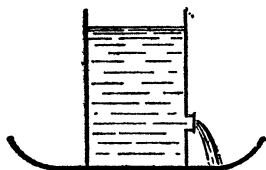


Рис. 123.

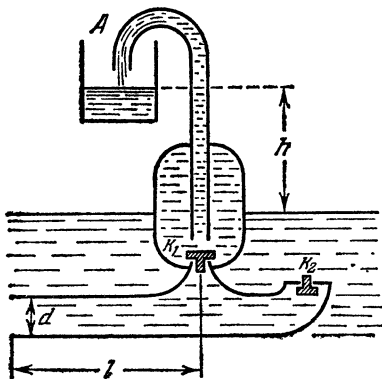


Рис. 124.

диаметром $d=20$ см опущена в ручей, скорость течения воды в котором $v=400$ см/с. Пусть вначале клапан K_2 открыт, а K_1 закрыт. Резкое увеличение давления заставляет клапан K_1 открыться (клапан K_2 при этом закрывается), и вода устремляется вверх в сосуд A . Давление падает, клапан

K_1 закрывается, а K_2 открывается. Вода в трубе приходит в движение, и явление повторяется в прежней последовательности. Определить количество воды, поднимаемое тараном за час на высоту $h=30$ м, если известно, что каждый клапан открывается 30 раз в минуту.

295. Во время бурь, когда скорость ветра достигает значительной величины, ветер срывает крыши построек. Наблюдаются два вида срыва крыш: 1) Если крыша прочнее укреплена в точках A и B , чем в коньке C , то воздушный поток как бы раскрывает крышу, ломая ее по линии конька (рис. 125, а). 2) Если крыша прочно укреплена в коньке и менее прочно в точках A и B , то воздушный поток сначала приподнимает крышу вверх, а потом уже относит в сторону (рис. 125, б). Как объяснить эти явления?

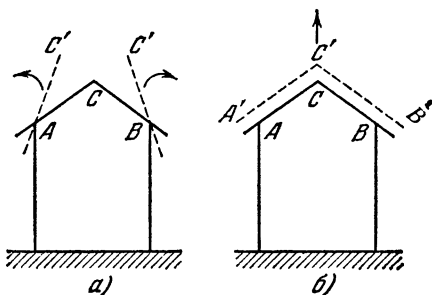


Рис. 125.



Рис. 126.

296. Почему легкий целлулоидный шарик, помещенный в струю воздуха или воды, вытекающую с большой скоростью из трубки с узким отверстием, будет свободно парить в этой струе (рис. 126)?

297. Демонстрационный прибор, изображенный на рис. 127, состоит из двух дисков A и B . В центре диска A имеется отверстие, соединенное трубкой с баллоном сжатого воздуха. Диск B висит на трех стерженьках, вдоль которых он может свободно перемещаться по вертикали. Если по трубке пропустить струю сжатого воздуха, то нижний диск начнет стучать по верхнему. Объяснить причину этого явления.

298. В дне широкого сосуда имеется узкая труба, по которой вода, заполняющая сосуд, может из него вытекать

(рис. 128). Между сосудом и трубой помещена сетка. Если легкий шарик погрузить на дно сосуда в момент, когда вода из него вытекает, то шарик не всплывет. Если вытекание воды из трубы прекратить, шарик немедленно всплывает.

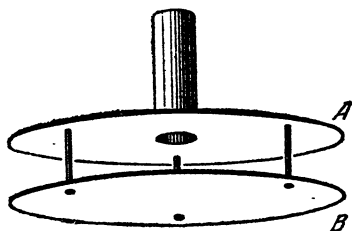


Рис. 127.

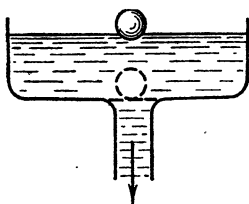


Рис. 128.

Почему? (Этот опыт легко проделать в водопроводной раковине с мячиком от настольного тенниса.)

299. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площади S и выходным отверстием площади s , расположенным у оси цилиндра. Определить скорость истечения струи из насоса, если поршень под действием силы F перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости ρ .

300. В задаче 299 при $s \rightarrow S$ скорость v становится сколь угодно большой даже при малой силе F . Объяснить, с чем связано появление этого парадоксального результата.

301. Древнегреческие водяные часы (клепсидра) представляют собой сосуд с небольшим отверстием O (рис. 129). Время отсчитывается по уровню воды в сосуде. Какова

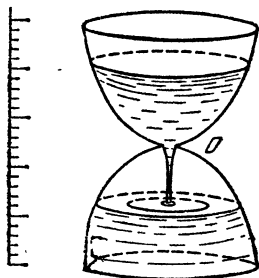


Рис. 129.

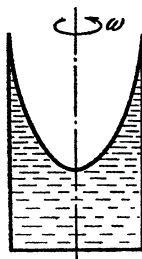


Рис. 130.

должна быть форма сосуда, чтобы шкала времени была равномерной?

302. Цилиндрический сосуд с жидкостью вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 130). Определить изменение давления в горизонтальном сечении сосуда в зависимости от расстояния до оси вращения.

(Применить метод, изложенный при решении задачи 211.)

303. Найти форму поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде, вращающемся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (т. е. найти высоту уровня жидкости в зависимости от расстояния до оси вращения).

304. Почему после размешивания чая ложкой чайники собираются в середине стакана?

Глава II. ТЕПЛОТА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 12. Тепловое расширение твердых и жидких тел

305. На деревянное колесо, имеющее диаметр 100 см, требуется надеть железную шину, диаметр которой на 5 мм меньше диаметра колеса. На сколько следует для этого повысить температуру шины? Коэффициент линейного расширения железа $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$.

306. Почему в бетонных конструкциях в качестве арматуры используется только железо (железобетон), а другие металлы, например дюралюминий, не применяются?

307. Для того чтобы измерить температуру человеческого тела, приходится держать термометр под мышкой в течение 5—8 мин. В то же время «стряхнуть» его можно практически сразу после измерения температуры. Почему?

308. При температуре t_1 высота ртутного столба, измеренная по латунной шкале, равна H_1 . Какую высоту H_0 будет иметь столб ртути при $t_0 = 0$ °C? Коэффициенты линейного расширения латуни α и объемного расширения ртути β известны.

309. Как измерить медицинским термометром температуру тела человека, если температура окружающего воздуха $+42$ °C?

310. Определить длины железной и медной линеек l'_0 и l''_0 при $t = 0$ °C, если разности их длин при $t_1 = 50$ °C и $t_2 = 450$ °C одинаковы по модулю и равны $l = 2$ см. Коэффициент линейного расширения железа $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, меди $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$.

311. Период колебаний маятника зависит от длины, которая меняется с температурой. Каким образом может быть осуществлен подвес маятника, чтобы его длина не менялась с температурой?

312. При температуре $t_0 = 0$ °C стеклянный баллон вмещает $m_0 = 100$ г ртути. При $t_1 = 20$ °C баллон вмещает

$m_1 = 99,7$ г ртути. (В обоих случаях температуру ртути считать равной температуре баллона.) Найти по этим данным коэффициент линейного расширения стекла α , учитывая, что коэффициент объемного расширения ртути $\beta_1 = 18 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$.

313. Часы с металлическим маятником спешат на $\tau_1 = 5$ с в сутки при температуре $t_1 = +15^\circ\text{C}$ и отстают на $\tau_2 = 10$ с в сутки при температуре $t_2 = +30^\circ\text{C}$. Найти коэффициент α теплового расширения металла маятника, учитывая, что период колебаний маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (l — длина маятника, g — ускорение свободного падения).

§ 13. Закон сохранения энергии. Теплопроводность

314. На тележку массы M ,двигающуюся по инерции со скоростью v_0 , опускают сверху кирпич массы m . Определить, сколько при этом выделится тепла.

315. Вдоль невесомого резинового шнура длины l_0 (рис. 131) соскальзывает железная шайба. Сила трения, действующая между шнуром и шайбой, постоянна и равна f . Коэффициент упругости шнура k известен. Найти выделившееся при этом количество тепла Q .

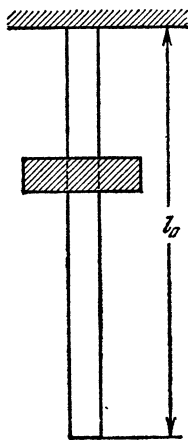


Рис. 131.

316. Холодильник, потребляющий мощность ω , за время τ превратил в лед воду, имевшую массу m и температуру t . Какое количество тепла выделит холодильник в комнате за это время при условии, что теплоемкостью холодильника можно пренебречь?

317. Понизится ли температура в комнате, если открыть дверцу работающего холодильника?

318. Проще всего отапливать помещения за счет энергии электрического тока, используя электронагревательные приборы. Является ли этот способ энергетически наиболее выгодным?

319. Равные количества соли растворяют в двух одинаковых сосудах с водой. В одном случае соль берут в виде одного большого кристалла, а в другом — в виде порошка. В каком случае температура раствора после полного растворения соли будет выше, если до растворения соль и вода находились в обоих случаях при одинаковых температурах?

320. Известно, что если нагревать или охлаждать воду с соблюдением некоторых мер предосторожности, то можно получить ее в жидком состоянии при температурах, меньших 0°C и больших $+100^\circ\text{C}$.

В калориметре, теплоемкость которого $q=1700$ Дж/град, находится $m_1=1$ кг воды, охлажденной до $t_1=-10^\circ\text{C}$. Туда же помещают $m_2=100$ г воды, перегретой до $t_2=+120^\circ\text{C}$. Какова установившаяся температура в калориметре?

321. Лампочка накаливания, расходующая $N=54$ Вт, погружена в прозрачный калориметр, содержащий $V=650$ см³ воды. За $\tau=3$ мин вода нагревается на $t=3,4^\circ\text{C}$. Какая часть Q расходуемой лампочкой энергии пропускается калориметром наружу в виде лучистой энергии?

322. Площадь кирпичной стены, выходящей на улицу, $S=12$ м², а толщина $d=1$ м. Температура наружного воздуха $T_0=-15^\circ$, а температура воздуха в комнате $T=+15^\circ$. Чему равно количество тепла, выходящего из комнаты в течение 24 часов? Коэффициент теплопроводности кирпича $k=1,3$ Дж/(м·с·град).

323. Стенка состоит из двух соприкасающихся пластин, сделанных из различных материалов. Коэффициенты теплопроводности и толщины пластин равны k_1, d_1 и k_2, d_2 соответственно (рис. 132). Температуры внешних поверхностей стенки равны T_1 и T_0 ($T_0 > T_1$) и поддерживаются постоянными. Определить температуру T_2 на поверхности раздела пластин.

324. Предполагая в задаче 323, что пластины имеют одинаковую толщину d , определить коэффициент теплопроводности стенки.

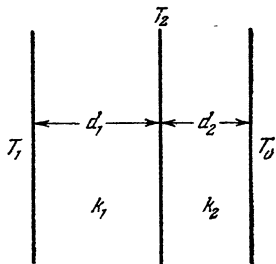


Рис. 132.

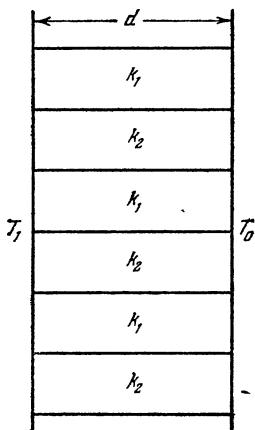


Рис. 133.

325. Стенка состоит из чередующихся брусков длины d с коэффициентами теплопроводности k_1 и k_2 (рис. 133).

Площади поперечного сечения брусьев одинаковы. Определить коэффициент теплопроводности стенки.

326. Две стенки A и B одинаковой толщины составлены из разнородных металлов так, как это указано на рис. 134

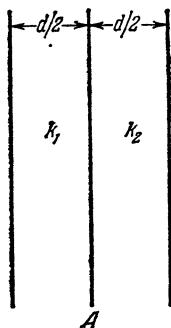


Рис. 134.

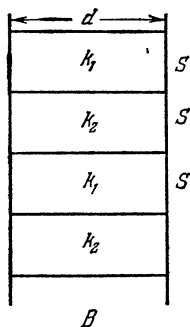


Рис. 135.

и 135. В каком случае коэффициент теплопроводности стенки больше?

327. В кастрюле с кипящей водой за секунду выкипает вода массой m . Считая, что тепло передается воде только через дно кастрюли, и пренебрегая отдачей тепла стенками кастрюли и поверхностью воды окружающему воздуху, определить температуру T поверхности дна кастрюли, соприкасающейся с нагревателем. Площадь дна кастрюли S , его толщина d и коэффициент теплопроводности k .

§ 14. Свойства газов

328. В колпачке автоматической ручки обычно делается маленькое отверстие. Если оно засорится, то ручка начинает течь: чернила вытекают из-под пера. В чем причина этого явления?

329. Барометр дает неверные показания вследствие присутствия небольшого количества воздуха над столбиком ртути. При давлении $p_{01}=755$ мм рт. ст. барометр показывает $p_1=748$ мм, а при $p_{02}=740$ мм он показывает $p_2=736$ мм. Найти длину l трубки барометра (рис. 136).

330. Стеклянная трубка, имеющая длину $l=50$ см и поперечное сечение $S=0,5$ см², запаяна с одного конца. Трубку погружают в воду, как показано на рис. 137. Какую силу F нужно приложить, чтобы удержать трубку под водой, если

расстояние от поверхности воды до запаянного конца равно $h=10$ см, а атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст.? Масса трубки $m=15$ г.

331. Через пробку сосуда с водой пропущена открытая с обеих сторон узкая трубка, не достигающая до дна сосуда. (Сосуд Мариотта, изображенный на рис. 138.) Начертить

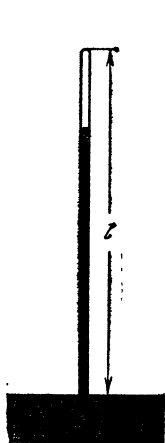


Рис. 136.

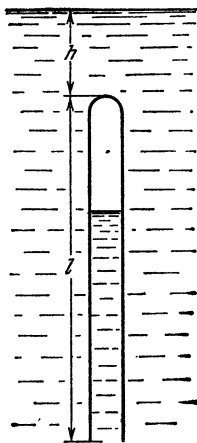


Рис. 137.

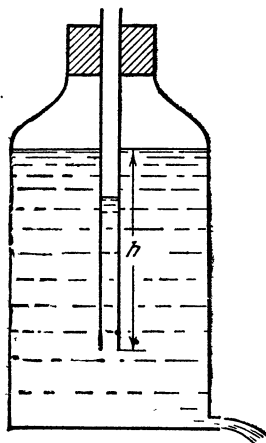


Рис. 138.

график зависимости давления p воздуха в сосуде от количества Q вытекшей воды.

332. Поршневой насос при каждом качании захватывает объем v_0 воздуха. При откачке этим насосом воздуха из сосуда объема V насос совершил n качаний. Начальное давление внутри сосуда p_0 равно атмосферному. Затем другой насос с тем же рабочим объемом v_0 начал нагнетать воздух из атмосферы, совершив также n качаний. Какое давление установится в сосуде?

333. Посередине горизонтальной, закрытой с обоих концов трубки длины L находится столбик ртути длины l . Если трубку поставить вертикально, то столбик ртути переместится на расстояние Δl от своего первоначального положения. На каком расстоянии от середины трубки будет центр столбика, если открыть один из концов трубки в горизонтальном положении? открыть верхний или нижний конец трубки в вертикальном положении? Атмосферное давление равно давлению ртутного столба высотой H . Температура неизменна.

334. Учитывая, что по закону Авогадро объем одного моля любого газа при нормальных условиях (температура 0°C и давление 1 атм) равен 22,4 л, определить постоянную в уравнении состояния идеального газа (уравнении Клапейрона — Менделеева) для количества газа, равного одному молю, и показать, что эта постоянная одинакова для всех газов.

335. Записать уравнение состояния для произвольной массы идеального газа, молярная масса которого μ известна.

336. Как изменилось бы давление внутри газа или жидкости, если бы силы притяжения между молекулами внезапно исчезли?

337. В сосуде находится 1 литр воды при температуре 27°C . Чему стало бы равным давление внутри сосуда, если бы силы взаимодействия между молекулами воды внезапно исчезли?

338. Одинаково ли давление внутри газа и у стенки сосуда, содержащего газ?

339. Одинакова ли концентрация молекул газа внутри сосуда и у его стенки?

340. Определить температуру газа, находящегося в закрытом сосуде, если давление газа увеличивается на 0,4% первоначального давления при нагревании газа на 1°C .

341. Тонкостенный резиновый шар весом $P=0,5$ Н наполнен азотом и погружен в озеро на глубину $h=100$ м. Найти массу m азота, если шар находится в положении равновесия. Будет ли равновесие устойчивым? Атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст. Температура в глубине озера $t=+4^\circ\text{C}$. Натяжением резины пренебречь.

342. Два полых стеклянных шарика соединены трубкой, посередине которой находится капелька ртути. Можно ли по положению капельки судить о температуре окружающего воздуха?

343. Закрытый с обеих сторон цилиндр разделен на две равные (по 42 см) части теплонепроницаемым поршнем. В обеих половинах находятся одинаковые массы газа при температуре 27°C и давлении в 1 атм. На сколько надо нагреть газ в одной части цилиндра, чтобы поршень сместился на 2 см? Найти давление p газа после смещения.

344. Сухой атмосферный воздух состоит из азота (78,09% по объему), кислорода (20,95%), аргона (0,93%) и углекислого газа (0,03%). Пренебрегая ничтожными примесями

других газов (гелия, неона, криптона, ксенона), определить (в процентах) состав воздуха по массе.

345. Найти среднюю (эффективную) молярную массу сухого атмосферного воздуха, предполагая известным процентный состав воздуха (см. задачу 344).

346. Плотность пара некоторого соединения углерода с водородом равна 3 г/л при 43°C и 820 мм рт. ст. Какова молекулярная формула этого соединения?

347. В каком случае изменение давления газа будет большим: при сжатии его на определенную величину в теплонепроницаемой оболочке или же при изотермическом сжатии?

348. Газ, занимающий объем $V_1=1$ л при давлении $p_1=1$ атм, расширился изотермически до объема $V_2=2$ л. Затем при этом объеме давление газа было уменьшено в два раза. В дальнейшем газ расширился при постоянном давлении до объема $V_4=4$ л. Начертить график зависимости p от V и, используя его, установить, при каком из перечисленных процессов газ совершил наибольшую работу. Как менялась температура?

349. С некоторым количеством идеального газа совершен круговой процесс (цикл) $1-2-3-1$, изображенный на графике зависимости объема от температуры (рис. 139). Изобразить тот же процесс на графике зависимости давления от объема и указать, на каких стадиях процесса газ получал, а на каких отдавал тепло.

350. Газовая нагревательная колонка потребляет $V_0=1,8$ м³ метана (CH_4) в час. Найти температуру t_2 воды, подогреваемой этой колонкой, если вытекающая струя имеет скорость $v=0,5$ м/с. Диаметр струи $D=1$ см, начальная температура воды и газа $t_1=11^{\circ}\text{C}$, теплотворная способность метана $r=55\,000$ Дж/г. Газ в трубе находится под давлением $p=1,2$ атм. К. п. д. нагревателя $\eta=60\%$.

351. В закрытом теплонепроницаемом сосуде находится озон (O_3) при температуре $t_1=527^{\circ}\text{C}$. Через некоторое время озон полностью превращается в кислород (O_2). Определить, во сколько раз возрастает при этом давление в сосуде, если на образование одного моля озона из кислорода нужно затратить $q=142\,000$ Дж. Теплоемкость одного моля кисло-

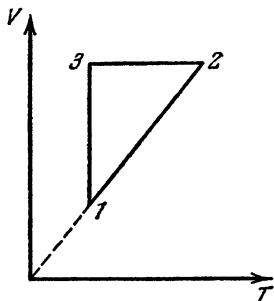


Рис. 139.

редда при постоянном объеме считать равной $C_V = 21$ Дж/(моль·град).

352. 20 г гелия, заключенных в цилиндре под поршнем, бесконечно медленно переводятся из состояния с объемом

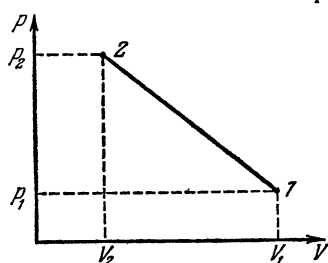


Рис. 140.

$V_1 = 32$ л и давлением $p_1 = 4,1$ атм в состояние с $V_2 = 9$ л и $p_2 = 15,5$ атм. Какой наибольшей температуры достигает газ при этом процессе, если на графике зависимости давления газа от объема процесс изображается прямой линией (рис. 140)?

353. Увеличится ли энергия воздуха в комнате, если в ней протопить печь? (Энергию u единицы массы воздуха считать пропорциональной абсолютной температуре: $u = cT$.)

354. В комнате объемом в 30 м³ температура с 15°C поднялась до 25°C . На сколько при этом изменилась масса воздуха в комнате, если атмосферное давление $p = 1$ атм? Молярную массу воздуха (среднюю) принять равной $\mu = 28,9$ г/моль.

355. В наполненном водой открытом сосуде с сеткой сверху находится маленькая, заполненная воздухом и открытая снизу непереверачивающаяся пробирка (рис. 141). Начертить график зависимости глубины погружения пробирки от температуры воды при условии, что температура первоначально медленно повышается, а затем начинает медленно понижаться.

356. В цилиндре под тяжелым поршнем находится $m = 20$ г углекислого газа. Газ нагревается от температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 108^\circ\text{C}$. Какую работу он при этом совершает?

357. Какое количество тепла должно быть сообщено углекислому газу (см. условие задачи 356), расширяющемуся при постоянном давлении вследствие нагревания? Молярная теплоемкость углекислого газа (теплоемкость одного моля) при постоянном объеме $C_V = 28,8$ Дж/(моль·град),

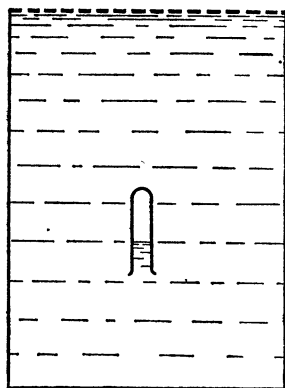


Рис. 141.

§ 15. Свойства жидкостей

358. Что «труднее» сжать до трех атмосфер: литр воздуха или литр воды?

359. Каким образом, используя явления смачивания и несмачивания, можно осуществить минимальный и максимальный термометры?

360. Поверхностный слой жидкости часто уподобляют растянутой резиновой пленке. В каком отношении эта аналогия не соответствует действительности?

361. При удалении с поверхности ткани жирного пятна рекомендуется смачивать пропитанной бензином ваткой края пятна. Смачивать бензином сразу само пятно не следует. Почему?

362. Почему разрыхление почвы при бороновании способствует сохранению в ней влаги?

363. Для того чтобы мазь лучше впитывалась в смазанные лыжные ботинки, их нагревают. Как нужно нагревать ботинки: снаружи или изнутри?

364. Почему с помощью утюга можно выводить пятна жира с костюма?

365. Почему при сушке дров на солнце на конце полена, обращенном в тень, выступают капельки воды?

366. Сосуд, дно которого имеет круглые отверстия диаметром $d=0,1$ мм, наполняется водой. Найти максимальную высоту уровня воды h , при которой она еще не выливается. Вода не смачивает дно сосуда.

367. На прямоугольную проволочную рамку, расположенную вертикально, натянута мыльная пленка (рис. 142). Какие силы удерживают участок пленки $abcd$ в равновесии?

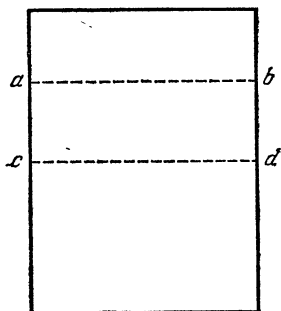


Рис. 142.

368. Смачиваемый водою кубик массы $m=20$ г плавает на поверхности воды. Ребро кубика имеет длину $a=3$ см. На каком расстоянии от поверхности воды будет находиться нижняя грань кубика?

369. Конец капиллярной трубки радиуса r опущен в воду. Какое количество тепла выделится при поднятии жидкости по капилляру?

370. Капилляр опущен в сосуд с жидкостью, давлением паров которой можно пренебречь. Плотность жидкости ρ .

Сосуд с капилляром находится в вакууме под колоколом воздушного насоса (рис. 143). Найти давление внутри жидкости в капилляре на высоте h от уровня жидкости в сосуде.

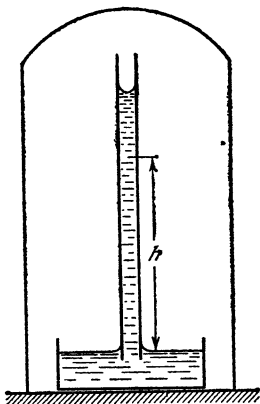


Рис. 143.

371. Для доказательства существования избыточной потенциальной энергии у молекул поверхностного слоя жидкости обычно рассуждают следующим образом. На молекулу, находящуюся внутри жидкости, действуют силы притяжения со стороны других молекул, которые в среднем компенсируют друг друга. Если же выделить молекулу на поверхности, то результирующая сил притяжения со стороны других молекул будет направлена внутрь жидкости. Поэтому молекула будет стремиться внутрь жидкости, и нужно затратить опреде-

ленную работу, чтобы извлечь ее на поверхность. Следовательно, каждая молекула поверхностного слоя обладает избытком потенциальной энергии, равным этой работе. Однако средняя сила, действующая на любую молекулу со стороны всех остальных, обязательно равна нулю при равновесии жидкости. Поэтому и работа по перемещению жидкости из глубины на поверхность должна равняться нулю. Откуда же в таком случае появляется поверхностная энергия?

372. Конец стеклянной капиллярной трубки радиуса $r=0,05$ см опущен в воду на глубину $h=2$ см. Какое давление необходимо, чтобы выдуть пузырек воздуха через нижний конец трубки?

373. Стеклянная капиллярная трубка, внутренний диаметр которой 0,5 мм, погружена в воду. Верхний конец трубки выступает на 2 см над поверхностью воды. Какую форму будет иметь мениск?

374. В капиллярной трубке, опущенной вертикально в воду на глубину l , вода поднялась на высоту h (рис. 144). Нижний конец трубки закрывают, вынимают ее из воды и вновь открывают. Определить длину столбика воды, оставшейся в трубке.

375. В сосуд с водой опущены два капилляра одинакового сечения (рис. 145). Вода в прямом капилляре поднимается на высоту h . На каком уровне установится вода в

изогнутом капилляре и какую форму примет в нем мениск? Нижний конец изогнутого капилляра расположен ниже

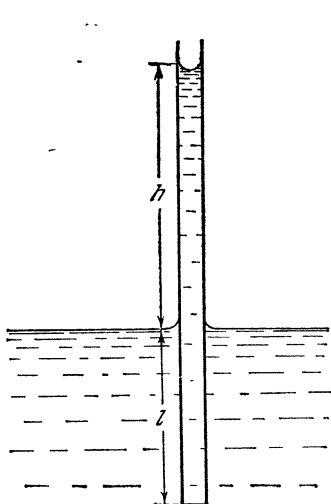


Рис. 144.

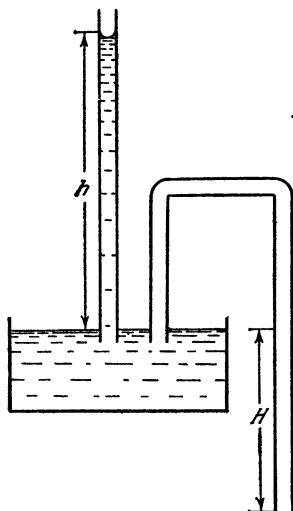


Рис. 145.

уровня воды в сосуде на расстоянии H . Рассмотреть пять случаев: 1) $H > h$; 2) $H = h$; 3) $0 < H < h$; 4) $H = 0$; 5) $H < 0$ (конец изогнутого капилляра выше уровня воды в сосуде).

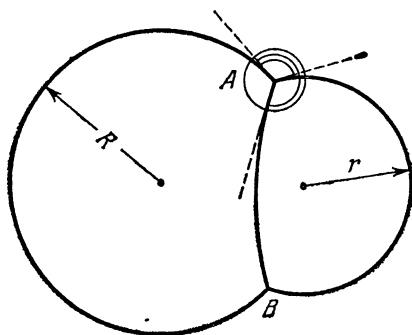


Рис. 146.

376. На мыльный пузырь радиуса R посажен другой пузырь радиуса r (рис. 146). Какую форму примет мыльная

пленка, разделяющая оба пузыря? Какие углы образуются между пленками в местах их соприкосновения?

377. В воде плавает деревянный крест. Каждая лопасть креста покрыта с одной стороны лаком (рис. 147). Вследствие различного смачивания дерева и лака вода с двух сторон

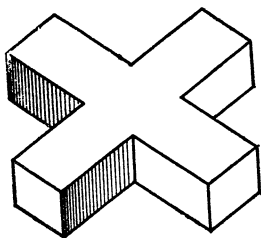


Рис. 147.

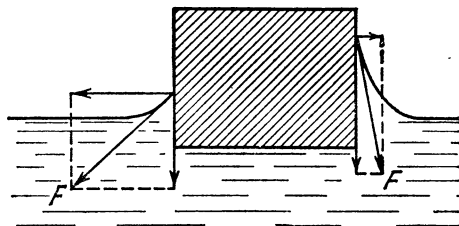


Рис. 148.

каждой лопасти поднимется на разную высоту; краевой угол будет различен, и, следовательно, горизонтальная составляющая силы поверхностного натяжения F будет различна с обеих сторон каждой лопасти (рис. 148). Будет ли крест вследствие этого вращаться?

378. Легкие тела, смачиваемые водою (например, две спички), плавая на поверхности воды, притягиваются друг к другу. То же самое наблюдается, если тела не смачиваются (например, спички, покрытые тонким слоем парафина). Если же одно тело смачивается водой, а другое не смачивается, то тела будут отталкиваться. Как объяснить эти явления?

§ 16. Взаимные превращения жидких и твердых тел

379. Вода в стакане замерзает при 0°C . Если же эту воду расчленишь на маленькие капельки, то вода в них может быть переохлаждена до -40°C . Так, например, капельки воды, из которых состоят облака, обычно начинают замерзать при температуре ниже -17°C . Как объяснить эти факты?

380. Сосуд со 100 г воды при температуре 0°C был подвешен посередине комнаты. Через 15 минут температура воды поднялась до 2°C . Когда же в сосуде находилось равное по массе количество льда, то он растаял за 10 часов. Можно ли по этим данным оценить удельную теплоту плавления льда λ ?

381. Два одинаковых кусочка льда летят навстречу друг другу с равными скоростями и при ударе обращаются в пар. Оценить минимально возможные скорости льдинок перед ударом, если их температура равна -12°C .

382. В калориметре находится лед. Определить теплоемкость калориметра, если для нагревания его вместе с содержимым от 270 до 272°K требуется $Q_1=2100$ Дж тепла, а от 272 до 274°K требуется $Q_2=69\,700$ Дж.

383. В калориметре находилось 400 г воды при температуре $+5^{\circ}\text{C}$. К ней долили еще 200 г воды при температуре $+10^{\circ}\text{C}$ и положили 400 г льда при температуре -60°C . Какая температура установится в калориметре?

384. В медный сосуд, нагретый до температуры $t_1=350^{\circ}\text{C}$, положили $m_2=600$ г льда при температуре $t_2=-10^{\circ}\text{C}$. В результате в сосуде оказалось $m_3=550$ г льда, смешанного с водой. Найти массу сосуда. Удельная теплоемкость меди $c_1=420$ Дж/(кг·град).

385. При помещении в переохлажденную воду небольшого кристаллика льда вода немедленно начинает замерзать.

1) Какое количество льда образуется из $M=1$ кг воды, переохлажденной до температуры $t=-8^{\circ}\text{C}$?

2) Какую температуру должна была бы иметь переохлажденная вода для того, чтобы целиком превратиться в лед?

Зависимость теплоемкости воды от температуры не учитывать.

386. 100 г льда при температуре 0°C заключены в тепло-непроницаемую оболочку и подвергнуты сжатию до давления $p=1200$ атм. Найти массу растаявшей части льда, если понижение температуры плавления происходит прямо пропорционально давлению и при увеличении давления на 138 атм температура плавления понижается на 1°C .

§ 17. Упругость и прочность

387. На стальной стержень радиуса $R=100,125$ см надето медное кольцо, имеющее радиус $r=100$ см и площадь поперечного сечения $S=4$ мм². С какой силой F будет растянуто кольцо, если модуль упругости меди $E=12 \cdot 10^{10}$ Н/м²? Деформацией стержня пренебречь.

388. Какую работу может совершить стальной стержень длины l и площади поперечного сечения S при нагревании на Δt ?

389. Между двумя столбами натянута проволока длины $2l$. К проволоке, точно посередине, подвешен фонарь массы M . Площадь поперечного сечения проволоки S , модуль упругости E . Определить угол α провисания проволоки, считая его малым (рис. 149).

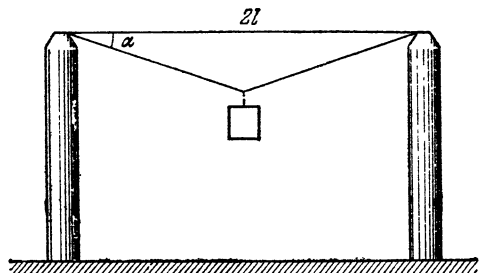


Рис. 149.

390. Между двумя неподвижными абсолютно жесткими стенками вставлен без зазора стальной стержень сечением $S=1 \text{ см}^2$. С какой силой F стержень будет действовать на стенки, если его нагреть на $\Delta t=5^\circ\text{C}$? Коэффициент линейного расширения стали $\alpha=1,1 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$, модуль упругости $E=20 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

391. Между массивными стенками расположены два стержня из разных материалов (рис. 150). Сечение стержней S . Их длины l_1 и l_2 . Стержни нагреваются на Δt градусов. Найти силу, с которой стержни действуют друг на друга, если коэффициенты теплового расширения стержней α_1 и

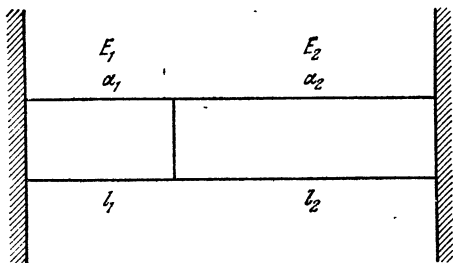


Рис. 150.

α_2 и модули упругости материала стержней E_1 и E_2 известны. Деформацией стенок пренебречь.

392. Однородный брусок массой $m=100 \text{ кг}$ висит на трех вертикальных проволоках равной длины, расположенных

симметрично (рис. 151). Определить натяжения проволок, если средняя проволока стальная, а две другие медные. Площади поперечного сечения всех проволок одинаковы.

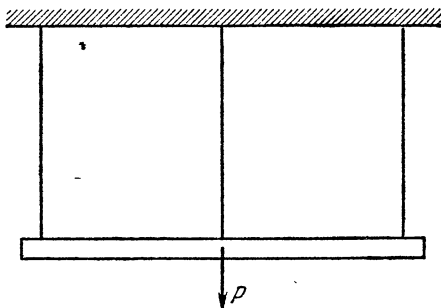


Рис. 151.

Модуль Юнга стали считать в два раза бóльшим модуля Юнга меди.

393. Железобетонная колонна сжимается силой P . Полагая, что модуль Юнга бетона E_b составляет $1/10$ модуля Юнга железа $E_{ж}$, а площадь поперечного сечения железа составляет $1/20$ площади поперечного сечения бетона, найти, какая часть нагрузки приходится на бетон.

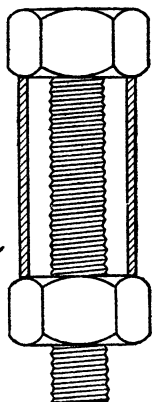


Рис. 152.

394. Стальной болт вставлен в медную трубку, как показано на рис. 152. Найти силы, возникающие в болте и трубке при повороте гайки на один оборот, если длина труб-

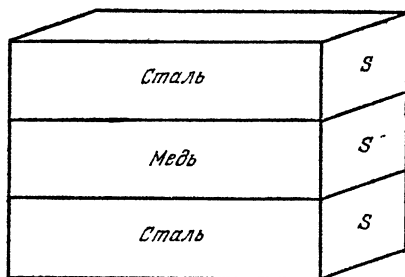


Рис. 153.

ки l , шаг нарезки болта h , а площади поперечного сечения болта и трубки равны S_b и S_m соответственно.

395. Медная пластинка сварена по концам с двумя стальными пластинками так, как изображено на рис. 153. Какие

натяжения возникнут в пластинках при повышении температуры на t ? Площади поперечного сечения всех трех пластинок одинаковы.

396. Определить максимально допустимое значение линейной скорости при вращении тонкого свинцового кольца, если предел прочности свинца $P=2000 \text{ Н/см}^2$, а его плотность $\rho=11,3 \text{ г/см}^3$.

397. Железный брусок AB закреплен неподвижно обоими концами. В середине бруска имеется отверстие, в котором укрепляется с помощью двух гаек крюк C (рис. 154).

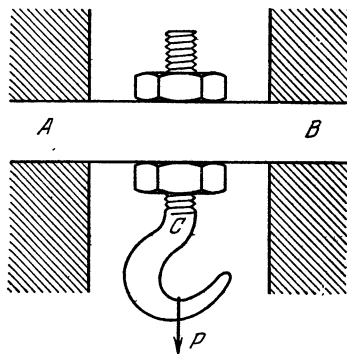


Рис. 154.

Брусок стянут гайками с силой F_0 . Какие по величине силы будут действовать на верхнюю и нижнюю гайки со стороны бруска, если на крюк подвешивать груз, вес которого может изменяться от нуля до $P=2F_0$? Прогибом бруска и весом крюка пренебречь.

§ 18. Свойства паров

398. В калориметр, содержащий 100 г льда при температуре -20°C , впускают 150 г водяного пара, имеющего температуру $+100^\circ\text{C}$. Какую температуру примет содержимое калориметра, если его теплоемкость 300 Дж/град?

399. Почему в момент выключения газовой горелки из кипящего чайника сразу же вырывается сильная струя пара, хотя до этого пара не было видно?

400. Показать, что плотность водяного пара при температурах, близких к комнатным, выраженная в г/м^3 , приблизительно равна давлению водяного пара, выраженному в миллиметрах ртутного столба.

401. Давление насыщенных паров воды в герметически закрытом сосуде возрастает с температурой так, как показано на рис. 155. Давление же идеального газа при постоянном объеме прямо пропорционально температуре. Используя таблицу свойств насыщенного водяного пара (см. табл. I), выяснить, пригоден ли уравнение состояния идеального газа для вычисления плотности или удельного объема насыщенных паров воды. Объяснить полученный результат.

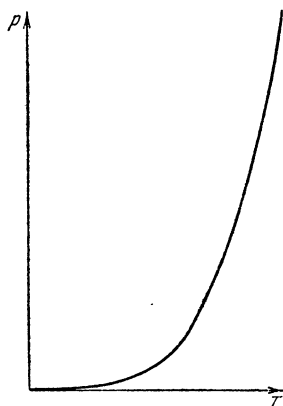


Рис. 155.

402. В цилиндре под поршнем изотермически сжимают 9 г водяного пара при температуре 30 °С. При каком объеме пар начнет конденсироваться? (Воспользоваться табл. I.)

403. В комнате при температуре 15 °С относительная влажность равнялась 10%. Как изменится относительная влажность, если температура в комнате постепенно увеличится на 10 °С?

404. На улице целый день моросит холодный осенний дождь. В комнате развешено выстиранное белье. Высохнет ли белье быстрее, если открыть форточку?

ТАБЛИЦА I

Свойства насыщенного водяного пара

$t, ^\circ\text{C}$	Давление, атм	Удельный объем пара, м ³ /кг	$t, ^\circ\text{C}$	Давление, атм	Удельный объем пара, м ³ /кг
17,2	0,02	68,3	151,1	5	0,3818
45,4	0,1	14,96	158,1	6	0,3214
59,7	0,2	7,80	164,2	7	0,2778
75,4	0,4	4,071	169,6	8	0,2448
85,45	0,6	2,785	174,5	9	0,2189
93,0	0,8	2,127	179,0	10	0,1980
96,2	0,9	1,905	187,1	12	0,1663
99,1	1	1,726	194,1	14	0,1434
100	1,0333	1,674	200,4	16	0,1261
116,3	1,8	0,996	206,2	18	0,1125
119,6	2	0,902	211,4	20	0,1015
132,9	3	0,617	232,8	30	0,0679
142,9	4	0,4708	249,2	40	0,0506

405. Два сосуда, соединенные трубками с кранами, наполнены водой до разных уровней (рис. 156). Воздух из сосудов откачан. Что произойдет, если соединить сосуды, 1) открыв кран в нижней трубке, 2) открыв кран в верхней трубке?

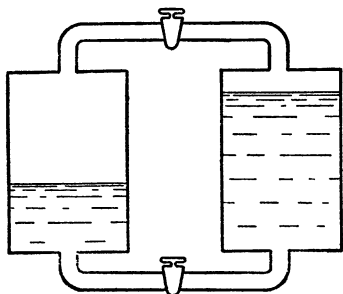


Рис. 156.

406. Чему равна относительная влажность воздуха при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$, если конденсация влаги из этого воздуха, нагретого предварительно до $t_2 = 30^\circ\text{C}$, началась при давлении в 10 атмосфер? Начальное давление воздуха равно 1 атм. (Вос-

пользоваться данными табл. I.)

407. Пористое тело было помещено для просушки под колокол вакуумного насоса. Давление под колоколом держалось на уровне 6,5 мм рт. ст. в течение часа, после чего резко упало. Производительность насоса 60 л/мин. Установившаяся под колоколом насоса температура $t = 5^\circ\text{C}$. Какое количество воды содержало тело?

408. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится $m = 30$ г воды при температуре 0°C . Площадь поршня $S = 512$ см², внешнее давление $p = 1$ атм. На какую высоту поднимется поршень, если находящийся в цилиндре электрический нагреватель выделит $Q = 24\,200$ Дж тепла?

Глава III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 19. Электростатика

409. С какой силой взаимодействовали бы точечные заряды в один кулон, находясь на расстоянии 1 км друг от друга?

410. Сравнить силы гравитационного и электрического притяжения между электроном и протоном.

411. Предположим, что сила, действующая между двумя точечными зарядами, зависит от расстояния, как $1/r^\alpha$, где 1) $\alpha > 2$; 2) $\alpha < 2$. Как будет вести себя точечный заряд, помещенный внутрь равномерно заряженной сферы? В начальный момент времени точечный заряд покоился.

412. Два маленьких шарика, заряженные равными, но разноименными зарядами, закреплены в горизонтальной плоскости на некотором расстоянии a друг от друга. Третий заряженный шарик подвешен на нити. Точку подвеса один раз перемещают так, что этот шарик в состоянии равновесия оказывается точно над первым закрепленным шариком, на расстоянии a от него, а другой раз — над вторым. Найти углы отклонения нити от вертикали, если известно, что над первым шариком угол отклонения в два раза больше, чем над вторым.

413. На расстоянии d от большой проводящей пластины находится точечный электрический заряд $+q$. С какой силой действует на него пластина?

→ 414. Два заряда $+Q$ неподвижны и расположены на расстоянии a друг от друга. Вдоль оси симметрии системы этих зарядов может перемещаться третий заряд $-q$, обладающий массой m . Считая расстояние заряда $-q$ от прямой, соединяющей заряды $+Q$, малым, определить период колебаний заряда $-q$.

• 415. Тонкое проволочное кольцо радиуса R несет электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q , причем $Q \gg q$. Определить силу, с которой растянуто кольцо.

2 416. Тело массы m подвешено на нити длины l (рис. 157). На расстоянии h под ним находится бесконечная металлическая пластина.

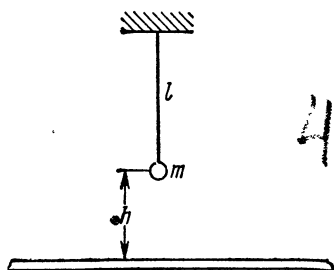


Рис. 157.

Тело имеет заряд q . Найти период свободных колебаний этого тела.

4 • 417. Определить период малых колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E = 3 \cdot 10^4$ В/м.

Полярную молекулу схематически представить в виде «гантели» длины λ ($\lambda = 10^{-8}$ см),

на концах которой находятся равные точечные массы m ($m = 10^{-24}$ г), несущие заряды $+q$ и $-q$ соответственно ($q = 15,7 \cdot 10^{-20}$ Кл).

4 418. Три одинаковых положительных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника равна a . Найти напряженность поля в вершине правильного тетраэдра, построенного на этом треугольнике.

5 419. Два точечных заряда q_1 и q_2 расположены на расстоянии d друг от друга. Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии r_1 от заряда q_1 и r_2 от заряда q_2 . Рассмотреть случаи разноименных и одноименных зарядов.

5 420. Найти напряженность поля электрического диполя с моментом $p = ql$ в точке, отстоящей от оси диполя на расстоянии r ($r \gg l$), в двух случаях: 1) точка лежит на прямой, проходящей через ось диполя; 2) точка лежит на прямой, перпендикулярной оси диполя.

Примечание. В простейшем случае электрический диполь представляет собой два одинаковых, но разных по знаку заряда ($+q$ и $-q$). Важной характеристикой диполя является его электрический момент $p = ql$. Электрическим дипольным моментом называется вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный $p = ql$, где l — расстояние между зарядами, образующими диполь.

5 421. Положительный заряд Q равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиуса R . Найти напряженность электрического поля на оси кольца в зависимости от расстояния r до центра кольца.

5 422. Тонкое проволочное кольцо радиуса R имеет электрический заряд $+Q$. Как будет двигаться точечное тело массы m , имеющее заряд $-q$, если в начальный момент времени оно покоилось в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $x \ll R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

5 423. Исходя из соображений размерности, найти (разумеется, с точностью до числового коэффициента) напряженность электрического поля, создаваемого: 1) бесконечно протяженной пластиной, заряженной с поверхностной плотностью σ ; 2) бесконечно длинной нитью, заряженной с линейной плотностью τ .

— 424. Прямоугольной металлической пластинке со сторонами a и b сообщен заряд $+q$. Толщина пластинки s много меньше a и b . Определить напряженность поля, создаваемого этой заряженной пластинкой в точках пространства, близких к центру пластинки.

425. Две металлические параллельные пластины, площадь каждой из которых равна S , несут заряды Q_1 и Q_2 . Расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров. Определить напряженность электрического поля в точках A , B , C (рис. 158).

426. Чему равна напряженность электрического поля на поверхности проводника, если плотность поверхностного заряда σ ?

427. Все пространство между двумя бесконечными параллельными пластинами занимает заряд с постоянной объемной плотностью ρ . Расстояние между пластинами a . Найти зависимость напряженности электрического поля от расстояния, отсчитанного от середины между пластинами.

428. Внутри шара радиуса R имеется объемный заряд постоянной плотности ρ . Найти зависимость напряженности электрического поля от расстояния до центра шара.

429. Найти напряженность электрического поля внутри и вне бесконечно длинного цилиндра, заряженного с объемной плотностью ρ . Радиус цилиндра R .

430. Внутри шара, заряженного с постоянной объемной плотностью ρ , имеется сферическая полость. Расстояние между центрами шара и полости равно a . Показать, что на

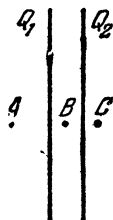


Рис. 158.

пряженность E электрического поля внутри полости равна $E = \rho a / 3\epsilon_0$ и направлена вдоль прямой, соединяющей центры сфер.

431. Внутри цилиндра, заряженного с постоянной объемной плотностью ρ , имеется цилиндрическая полость. Расстояние между осями цилиндра и полости равно a . Показать, что напряженность E поля внутри полости равна $E = \rho a / 2\epsilon_0$ и направлена параллельно перпендикуляру, соединяющему оси.

432. Молекула находится на расстоянии r от оси бесконечно длинного металлического цилиндра. Цилиндр заряжен равномерно так, что заряд, приходящийся на единицу его длины, равен τ . Молекула представляет собой «гантельку» длины λ , на концах которой находятся заряды $+q$ и $-q$. Определить силу, действующую на молекулу.

433. На некотором расстоянии от оси равномерно заряженного цилиндра находятся две молекулы равной массы. Одна молекула имеет постоянный электрический момент $p = q\lambda$ (см. задачу 420). Расстояние между зарядами другой молекулы определяется соотношением $qE = k\lambda$, где E — средняя напряженность поля, действующего на молекулу, k — постоянный коэффициент. В начальный момент электрические моменты молекул одинаковы, а их скорости равны нулю. Какая молекула под действием силы притяжения быстрее достигнет поверхности цилиндра?

434. Прямоугольной металлической пластинке со сторонами a и b сообщен заряд $+q$. Толщина пластинки c много меньше a и b . К центру пластинки на расстояние d подносится точечный заряд $+Q$. Расстояние d много меньше сторон пластинки. Определить силу, с которой действует пластинка на заряд $+Q$. В каком случае положительно заряженная пластинка будет притягивать положительный заряд?

435. Внутри шара радиуса R имеется объемный заряд постоянной плотности ρ . Найти зависимость потенциала от расстояния до центра шара.

436. На расстоянии d от точечного заряда q расположен центр незаряженного проводящего шара радиуса R . Чему равен потенциал шара?

437. На расстоянии R от точечного заряда $+q$ расположен проводящий шар радиуса r , соединенный тонкой длинной проволочкой с землей. Определить величину отрицательного заряда, индуцированного на шаре. Влиянием проволочки пренебречь.

438. В металлической трубе переменного сечения движется электрон (рис. 159). Как будет меняться его скорость при приближении к сужению трубы?

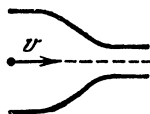


Рис. 159.

439. Две concentric незаряженные металлические сферы, радиусы которых R_1 и R_2 , причем $R_1 < R_2$, соединены тонкой проволочкой. Проволочка проходит сквозь маленькое отверстие в сфере, расположенной concentric между первыми двумя. Эта сфера имеет радиус R_2 и несет заряд $+Q$, распределенный на ней равномерно. Пренебрегая влиянием соединительной проволочки, определить заряд, индуцированный на внутренней металлической сфере.

440. На одной прямой находятся три заряда: положительный $+q$ и два отрицательных $-Q$. При каком соотношении величин зарядов они будут находиться в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым? Начертить зависимость потенциальной энергии каждого заряда от его положения на прямой при условии, что два других заряда неподвижны.

441. Может ли электрический заряд, помещенный в электростатическое поле, находиться в состоянии устойчивого равновесия?

442. Уединенный проводящий шар радиуса R имеет заряд $+Q$. Какой энергией обладает шар?

443. Две тонкие concentric металлические сферы радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) имеют заряды Q_1 и Q_2 соответственно. Определить энергию такой системы зарядов.

444. Имеется n тонких concentric металлических сфер, радиусы которых в порядке возрастания равны $r_1, r_2, \dots, r_n$. Эти сферы имеют заряды $q_1, q_2, \dots, q_n$ соответственно. Определить энергию такой системы зарядов.

445. Пластины плоского конденсатора емкости C , отстоящие на расстояние l друг от друга, несут заряды $+Q$ и $-Q$. Электрон влетел в середину конденсатора со скоростью v_0 , направленной параллельно пластинам. Чему равна скорость электрона на достаточно большом расстоянии от конденсатора? Каков характер изменения скорости электрона (по абсолютной величине) при его движении внутри и вне конденсатора? Рассмотреть случаи, когда электрон в начальный момент находится: 1) на равном расстоянии от пластин конденсатора; 2) на расстоянии $l/4$ от положительной пластины; 3) на расстоянии $l/4$ от отрицательной пластины.

446. Два одноименных точечных заряда q_1 и q_2 с массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу. В момент, когда расстояние между зарядами равно r_1 , они имеют скорости v_1 и v_2 . До какого минимального расстояния r_2 сблизятся заряды?

447. Из бесконечности к металлической пластине движется точечный заряд $+q$. Определить энергию взаимодействия заряда и пластины, а также скорость заряда в тот момент, когда он будет находиться на расстоянии d от пластины. Находясь на бесконечно большом расстоянии от пластины, заряд имел скорость, равную нулю.

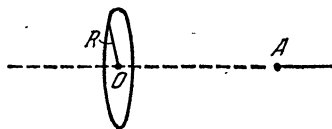


Рис. 160.

448. По тонкому кольцу радиуса R равномерно распределен заряд $+q$. Найти скорость отрицательного точечного заряда $(-q)$ в момент прохождения через центр кольца, если заряд $-q$ первоначально находился в покое в достаточно удаленной от кольца точке A на оси (рис. 160). Масса заряда $-q$ равна m . Кольцо неподвижно.

449. Положительный заряд $+Q$ равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиуса R . В центре кольца находится точечный заряд $-q$, масса которого m . Заряду сообщается начальная скорость v вдоль оси кольца. Определить характер движения заряда в зависимости от величины начальной скорости. Кольцо неподвижно.

450. Металлический шар диаметром 2 м расположен в центре большого помещения и заряжен до потенциала 100 000 В. Какое количество тепла выделится, если шар соединить проводником с землей?

451. Два маленьких шарика несут заряды, различные по величине, но одинаковые по знаку. Один из шариков закреплен. Второй шарик, удаляясь под действием электростатических сил отталкивания, может совершить механическую работу A_1 . Если перед началом движения второго шарика оба шарика на некоторое время соединить проводником, то второй, удаляясь, сможет совершить механическую работу A_2 . Определить количество тепла, выделившееся в проводнике при соединении шариков, и выяснить, за счет какой энергии выделяется это тепло и изменяется механическая работа.

452. Сферическая оболочка радиуса R заряжена равномерно зарядом Q . Найти растягивающую силу, приходящуюся на единицу площади оболочки.

453. Какой заряд Q можно сообщить капле радиуса R , если коэффициент поверхностного натяжения равен σ ?

454. Найти емкость C_0 батареи одинаковых конденсаторов (рис. 161).

455. Из проволоки сделан куб, в каждое ребро которого включено по одному конденсатору емкости C (рис. 162). Найти емкость получившейся батареи конденсаторов, если эта батарея включается в цепь

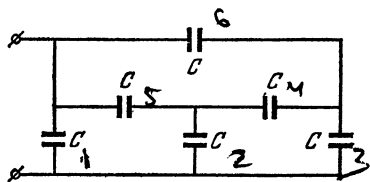


Рис. 161.

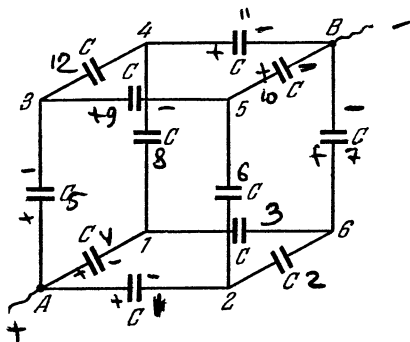


Рис. 162.

проводниками, присоединенными к противоположным вершинам A и B куба.

456. Для получения кратковременных высоких напряжений может быть использован искровой конденсаторный трансформатор Аркадьева. Схема прибора изображена на рис. 163.

Группа конденсаторов, соединенная параллельно проводниками AB и CD очень большого сопротивления подклю-

чена к источнику высокого напряжения. Верхняя пластина каждого конденсатора соединена через искровой промежуток с нижней пластиной последующего конденсатора (промежутки 1, 2, 3, 4). Каждый последующий промежуток больше предыдущего. В момент, когда разность потенциалов

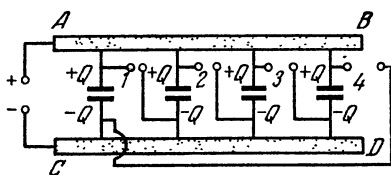


Рис. 163.

между обкладками достигнет пробивного напряжения первого промежутка, произойдет разряд. Вслед за этим будут пробиты второй, третий и четвертый промежутки. Какой величины достигнет разность потенциалов при пробое последнего промежутка, если имеется n конденсаторов и приложенное напряжение равно V_0 ?

457. Пластины заряженного плоского конденсатора попеременно заземляют. Будет ли при этом конденсатор разряжаться?

458. Два плоских конденсатора емкостью C_1 и C_2 заряжены до разности потенциалов U_1 и U_2 соответственно ($U_1 \neq U_2$). Показать, что при параллельном соединении этих конденсаторов их общая электростатическая энергия уменьшается. Почему это происходит?

459. Как известно, продолговатые кусочки диэлектрика устанавливаются вдоль силовых линий электрического поля. Но ведь отдельные молекулы неполярного диэлектрика, казалось бы, должны только растягиваться вдоль поля, но не поворачиваться. В диэлектрике, состоящем из дипольных молекул, среднее число молекул, поворачивающихся при включении поля по часовой стрелке, равно числу молекул, поворачивающихся в противоположную сторону. Почему же весь кусок диэлектрика будет поворачиваться?

460. Диэлектрический шар радиуса R поляризован однородно, т. е. дипольные электрические моменты всех молекул равны и параллельны друг другу. Найти напряженность электрического поля внутри диэлектрика, если в единице объема содержится N молекул, дипольный момент каждой из которых равен $p = ql$.

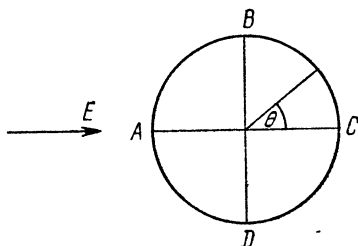


Рис. 164.

461. Диэлектрический шар помещен в однородное электрическое поле, напряженность которого равна E . Диэлектрическая проницаемость материала шара ϵ . Найти напряженность поля внутри шара, а также в точках A , B , C и D (рис. 164), лежащих вне шара.

462. Найти закон распределения поверхностного заряда на сфере, если известно, что этот заряд создает внутри сферы однородное поле с напряженностью E .

463. Металлический шар радиуса R , имеющий заряд $+Q$, помещен в однородное электрическое поле с напряженностью E . Найти зависимость поверхностной плотности заряда от угла θ , а также напряженность электрического поля в точках A , B , C и D (рис. 164), находящихся вне шара.

464. Бесконечный цилиндр из материала с диэлектрической проницаемостью ϵ поляризован однородно в направ-

лении, перпендикулярном оси цилиндра. Радиус цилиндра R . Дипольный момент молекулы p . Число молекул в единице объема N . Найти напряженность электрического поля внутри цилиндра.

465. Бесконечный цилиндр радиуса R из материала с диэлектрической проницаемостью ϵ помещен в однородное электрическое поле, напряженность которого E направлена перпендикулярно оси цилиндра. Определить напряженность поля внутри цилиндра, а также в точках A , B , C и D вне цилиндра (рис. 164).

466. Заряженный металлический цилиндр радиуса R помещен в однородное электрическое поле, напряженность которого E направлена перпендикулярно оси цилиндра. Заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен λ . Найти зависимость плотности заряда от угла θ , а также напряженность электрического поля в точках A , B , C и D (рис. 164), находящихся вне цилиндра.

467. Шар, равномерно заряженный зарядом q , помещают в однородный изотропный безграничный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ . Определить поляризационный заряд на границе диэлектрика с шаром.

468. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . В центре сфер находится точечный заряд $+Q$. Найти напряженность и потенциал как функцию расстояния от центра сфер, а также величину поляризационных зарядов.

469. Пространство между двумя тонкими концентрическими металлическими сферами радиусов r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Заряды внутренней и внешней металлических сфер $+Q$ и $-Q$ соответственно. Найти разность потенциалов, плотность поляризационных зарядов и емкость такого сферического конденсатора.

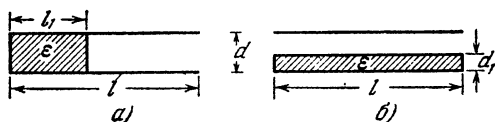


Рис. 165.

470. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , как показано на рис. 165. Площадь пластин

конденсатора S . Определить емкость конденсатора в обоих случаях.

471. Плоский конденсатор, пластины которого заряжены зарядами $+q$ и $-q$, на половину высоты пластин погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ . Какова плотность поляризационных зарядов диэлектрика, если площадь пластин S ?

472. Диэлектрик состоит из молекул, каждую из которых можно представить в виде двух зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии x друг от друга. При этом расстояние x зависит от напряженности поля E , действующего на заряды, следующим образом: $kx = qE$, где k — постоянный коэффициент.

Пусть в единице объема диэлектрика содержится n молекул. Определить напряженность поля E внутри конденсатора, заполненного таким диэлектриком, если до заполнения напряженность поля была E_0 . Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

473. Конденсатор заполнен диэлектриком, свойства которого описаны в задаче 472. Найти энергию, запасенную в диэлектрике вследствие его поляризации.

474. Две расположенные параллельно металлические пластины заряжены зарядами $+q_1$ и $-q_2$, причем $q_1 > q_2$. Пространство между пластинами заполнено однородным изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Определить силу, действующую на единицу площади поверхности диэлектрика. Площадь каждой пластины равна S .

475. Определить энергию плоского конденсатора, пространство между пластинами которого заполнено диэлектриком. Известны заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками.

476. Две прямоугольные пластины длины l и площади

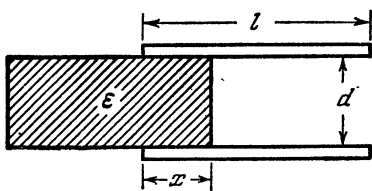


Рис. 166.

S расположены параллельно друг другу на расстоянии d . Пластины заряжены до разности потенциалов U . В пространство между пластинами втягивается диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ . Толщина диэлектрика равна d , его ширина равна ширине пластин, а длина больше l (рис. 166). Найти зависимость силы, действующей на диэлектрик со стороны поля, от расстояния x .

на d , его ширина равна ширине пластин, а длина больше l (рис. 166). Найти зависимость силы, действующей на диэлектрик со стороны поля, от расстояния x .

477. Решить задачу 476 в случае, когда разность потенциалов между пластинами поддерживается постоянной и равной U .

478. Над поверхностью жидкости, налитой в большой сосуд, находятся вертикальные пластины конденсатора, касающиеся поверхности жидкости. Площадь каждой пластины конденсатора равна S , расстояние между пластинами d , их высота l . Конденсатор присоединяют к батарее с э.д.с., равной U . Плотность жидкости ρ , ее диэлектрическая проницаемость ϵ .

Найти максимальную высоту, на которую поднимается жидкость в процессе колебаний, а также высоту, на которой установится уровень жидкости.

479. На дне сосуда находится тонкая металлическая пластинка, площадь которой S много меньше площади дна сосуда. В сосуд налита жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ . Глубина жидкости много меньше линейных размеров пластинки. Что произойдет с жидкостью, если пластинке сообщить заряд $+Q$?

§ 20. Постоянный электрический ток

480. На поверхности бесконечно длинного цилиндра распределены заряды таким образом, что правая половина поверхности цилиндра от сечения OO' заряжена положительным электричеством, а левая — отрицательным (рис. 167). В обоих направлениях плотность зарядов увеличивается прямо пропорционально расстоянию от сечения OO' . Показать, что во всех точках внутри цилиндра напряженность

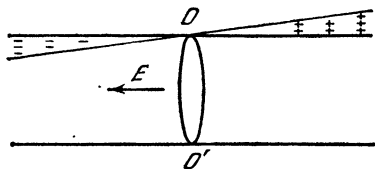


Рис. 167.

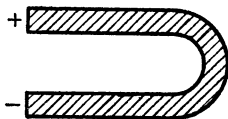


Рис. 168.

электрического поля будет везде одинакова и направлена вдоль оси цилиндра, как это указано на рисунке стрелкой.

481. Имеется ли вблизи поверхности проводника, по которому течет постоянный ток, электрическое поле?

§ 482. Начертить примерное расположение силовых линий электрического поля вокруг однородного проводника,

согнутого в форме дуги (рис. 168). По проводнику течет постоянный ток.

5483. Два проводника с температурными коэффициентами сопротивления α_1 и α_2 имеют при 0°C сопротивления R_{01} и R_{02} . Найти температурный коэффициент цепи, состоящей из этих проводников, если проводники соединены последовательно и если проводники соединены параллельно.

484. Найти сопротивление цепи, изображенной на рис. 169. Сопротивлением соединительных проводов $AC'C$ и $BC''D$ пренебречь.

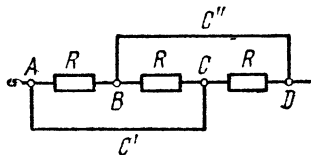


Рис. 169.

485. Из проволоки длиной L с сопротивлением R необходимо изготовить нагреватель для включения в сеть с напряжением U . Известно, что по проволоке

можно пропускать без риска ее пережечь ток не более I_0 . Какое наибольшее количество тепла q можно получить в единицу времени при помощи нагревателя? При изготовлении проволоку можно разрезать на куски и соединять последовательно и параллельно.

486. Найти сопротивление тетраэдра $ABCD$, изготовленного из шести проволонок сопротивлением R каждая. Подводящие провода присоединены к вершинам A и B .

487. Найти сопротивление шестиугольника, изображенного на рис. 170, если он включен в цепь между точками A и B . Сопротивление каждого проводника схемы равно R .

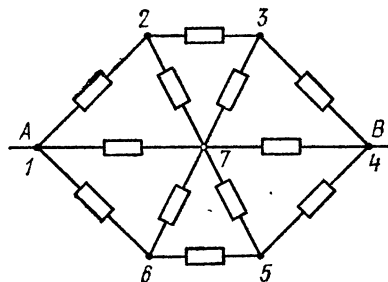


Рис. 170.

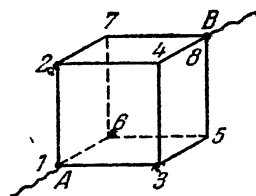


Рис. 171.

488. Найти сопротивление проволочного куба при включении его в цепь между точками A и B (рис. 171). Сопротивление каждого ребра куба равно R .

489. Из одинаковых по сечению S и удельному сопротивлению ρ проволок спаян прямоугольник $ADBC$ с диагональю AB , сделанной из проволоки такого же сечения и материала (рис. 172). Найти сопротивление между точками A и B и сопротивление между точками C и D , если $AD = BC = a$, $AC = BD = b$.

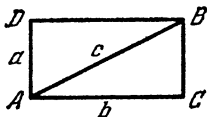


Рис. 172.

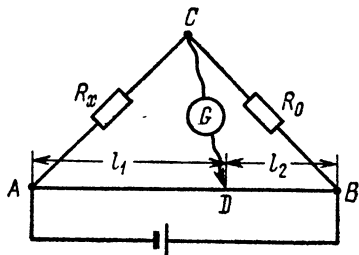


Рис. 173.

490. На рис. 173 изображена схема мостика Уитстона для измерения сопротивлений. R_x — неизвестное сопротивление, R_0 — эталонное сопротивление, G — гальванометр, соединенный скользящим контактом D с однородным проводом большого сопротивления AB (реохорд). Показать, что при отсутствии тока через гальванометр имеет место соотношение $R_x/R_0 = l_1/l_2$. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

491. Какое сопротивление необходимо включить между точками C и D (рис. 174), чтобы сопротивление всей цепочки

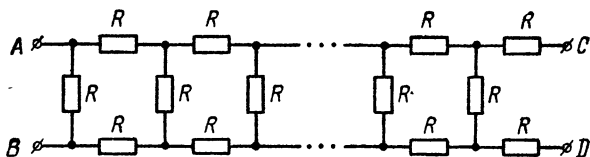


Рис. 174.

(между точками A и B) не зависело от числа элементарных ячеек?

492. В выходных цепях генераторов для уменьшения выходного напряжения в желаемое число раз применяется устройство, называемое аттенуатором. Аттенуатор представляет собой делитель напряжения, собранный по схеме, изображенной на рис. 175. Специальный переключатель дает возможность соединять с выходной клеммой или

точку с потенциалом U_0 , который вырабатывается генератором, или любую из точек $U_1, U_2, \dots, U_n$, потенциал каждой из которых меньше потенциала предыдущей в k раз

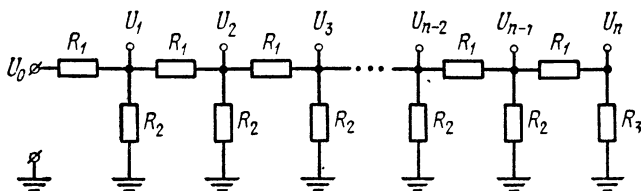


Рис. 175.

($k > 1$). Вторая выходная клемма и нижние концы сопротивлений заземлены. Найти отношение сопротивлений $R_1 : R_2 : R_3$, если число ячеек аттенюатора может быть любым.

493. Какими приборами нужно располагать, чтобы осуществить экспериментально проверку закона Ома, т. е. показать, что сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов?

494. Двум плоским одинаковым конденсаторам, соединенным параллельно, сообщен заряд Q . В момент времени $t=0$ расстояние между пластинами первого конденсатора начинает равномерно увеличиваться по закону $d_1 = d_0 + vt$, а расстояние между пластинами второго конденсатора равномерно уменьшаться по закону $d_2 = d_0 - vt$. Пренебрегая сопротивлением подводящих проводов, найти силу тока в цепи во время движения пластин конденсаторов.

495. Найти работу, совершаемую электростатическим полем (см. условие задачи 494) при одновременном увеличении расстояния между пластинами первого конденсатора и уменьшении расстояния между пластинами второго конденсатора на величину a .

496. Во время работы с очень чувствительным гальванометром экспериментатор, сидящий на стуле у стола, обнаружил любопытное явление. (Гальванометр был укреплен на стене, а концы его обмотки подведены к разомкнутому ключу, расположенному на столе.) Привстав со стула и коснувшись стола рукой, экспериментатор наблюдал заметный отброс гальванометра. Если же экспериментатор касался стола, сидя на стуле, то отброса не наблюдалось. Точно так же зайчик гальванометра не смещался и в том случае, когда

экспериментатор касался стола, не сядя предварительно на стул. Как можно объяснить эти явления?

497. У очень чувствительного гальванометра при разомкнутой цепи обнаружен следующий эффект. Если поднести к одному из концов обмотки гальванометра заряженное тело, то гальванометр даст отброс. Если же поднести это тело к другому концу обмотки, то отброс получается в ту же сторону. Как объяснить это явление?

498. Как распределен потенциал в элементе Даниэля при незамкнутой внешней цепи?

499. Изобразить графически примерный ход потенциала вдоль замкнутых цепей, изображенных на рис. 176. Определить силу тока для каждой цепи и разность потенциалов

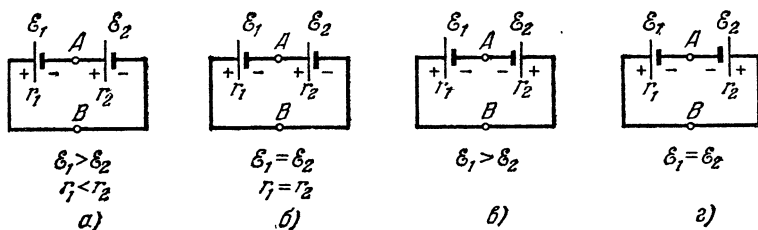


Рис. 176.

между точками A и B . Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

500. При соединении одного моля цинка с серной кислотой выделяется около $445 \cdot 10^3$ Дж тепла, а при выделении моля меди из медного купороса потребляется примерно $235 \cdot 10^3$ Дж. Найти по этим данным э. д. с. элемента Даниэля.

501. Два элемента Даниэля с внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,8$ Ом и $r_2 = 1,3$ Ом и одинаковыми э. д. с. соединены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление R . Найти отношение количеств цинка, растворившихся в этих элементах за определенный промежуток времени.

502. Элемент Даниэля составлен из абсолютно чистых материалов. Найти расход цинка и кристаллов медного купороса $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, если элемент дает ток $0,1$ А в течение 8 часов.

503. В элементе Даниэля медь заменили воском, покрытым слоем графита. Описать явления, которые будут происходить в таком элементе, если соединить проволокой цинк с графитовым слоем.

504. Как изменится э. д. с. батареи, изображенной на рис. 177, если убрать перегородку между сосудами? Электролитом служит раствор серной кислоты.

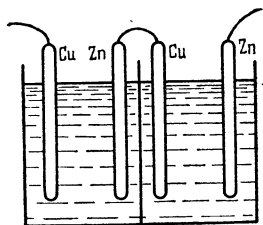


Рис. 177.

изменяться показания вольтметра, если цинковый стержень наклонить вправо или влево?

506. Пустотелая проводящая сфера радиуса $R=5$ см помещена в электролитическую ванну, наполненную раствором медного купороса. В поверхности сферы имеется отверстие радиуса $r=0,5$ мм. На сколько увеличится вес сферы, если отложение меди длится $t=30$ мин при плотности тока в электролите $j=0,01$ А/см²?

507. Если конденсатор, несущий на себе заряд Q , разрядить через электролитическую ванну с подкисленной водой, то выделится гремучий газ. По закону Фарадея количество выделяющегося при электролизе вещества зависит только от количества прошедшего электричества. Значит, если разряжать конденсатор через N последовательно соединенных ванн, то выделится в N раз больше гремучего газа. N можно сделать сколь угодно большим и получить любое количество газа. Сжигая этот газ, получим любое количество энергии, что явно противоречит закону сохранения энергии, так как начальная энергия заряженного конденсатора не бесконечно велика. В чем здесь дело?

508. При взрыве гремучего газа на каждый грамм прореагировавшего водорода выделяется $145 \cdot 10^3$ Дж тепла. Используя эти данные, найти, при каком наименьшем значении э. д. с. батареи может происходить электролиз воды.

509. При электролизе положительные и отрицательные ионы непрерывно нейтрализуются на соответствующих электродах. Какие причины поддерживают концентрацию ионов в электролитах на постоянном уровне? В каких участках электролита происходит пополнение убыли ионов?

510. Полная плотность тока в электролитах определяется как сумма двух токов — тока положительных ионов и

тока отрицательных ионов:

$$j = e(n_+v_+ + n_-v_-),$$

где e — заряд иона, n и v — концентрации и скорости положительных и отрицательных ионов. Почему количество вещества, выделившегося, к примеру, на катоде, считается пропорциональным полному току, а не току en_+v_+ ?

511. Температура горячих спаев термобатареи $t_1 = 127^\circ\text{C}$, холодных $t_2 = 27^\circ\text{C}$, э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 4$ В. Для поддержания постоянной температуры нагретых спаев к ним в единицу времени подводится две калории тепла. К батарее подключена электролитическая ванна с раствором медного купороса. Какое наибольшее (теоретически) количество меди может отлагаться на катоде в единицу времени?

512. Два металлических шарика радиусов $r_1 = 1$ см и $r_2 = 2$ см, находящиеся на расстоянии $R = 100$ см друг от друга, присоединены к батарее с электродвижущей силой $\mathcal{E} = 3000$ В. Найти силу взаимодействия шариков. Взаимодействием соединительных проводов пренебречь.

513. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, э. д. с. которой равна $\mathcal{E}$. Подсчитать механическую работу, совершаемую электрическим полем при перемещении пластин, если вначале расстояние между пластинами равно d_1 , а в конце d_2 , причем $d_2 < d_1$. Выделением тепла в батарее и подводящих проводах пренебречь.

514. Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах (рис. 178), если $\mathcal{E}_1 = 12 \cdot 10^3$ В, $\mathcal{E}_2 = 13 \cdot 10^3$ В, $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 7$ мкФ. Проводимостью диэлектриков пренебречь.

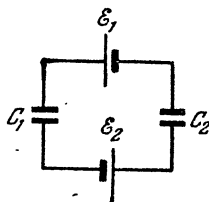


Рис. 178.

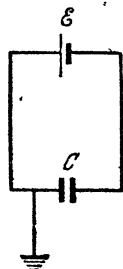


Рис. 179.

515. Одна из пластин конденсатора, присоединенного к батарее с электродвижущей силой $\mathcal{E}$, заземлена (рис. 179).

Изменяются ли потенциалы пластин конденсатора относительно земли, если заземление убрать?

516. Через аккумулятор с внутренним сопротивлением r и э. д. с. $\mathcal{E}$ течет ток силой I . Чему равна разность потенциалов на клеммах аккумулятора?

517. Почему гальванический элемент с э. д. с. в несколько вольт может дать значительный ток, а электростатическая

машина с э. д. с. в десятки тысяч вольт дает ток ничтожной силы?

518. В каком случае два последовательно соединенных гальванических элемента, замкнутых на внешнее сопротивление, дадут меньший ток, чем один из этих элементов, включенный на то же сопротивление?

519. Для определения места повреждения изоляции между проводами двухпроводной телефонной линии длиной $L=5,6$ км к одному ее концу присоединили батарею с э. д. с. $\mathcal{E}=24$ В. При этом оказалось, что если провода у другого конца линии разомкнуты, ток через батарею равен $I_1=1,5$ А, а если замкнуты накоротко, то ток через батарею равен $I_2=2$ А. Ток короткого замыкания батареи $I_3=96$ А. Сопротивление каждого провода линии $r=7$ Ом. Найти сопротивление изоляции R в месте повреждения.

520. Гальванические элементы с э. д. с. $\mathcal{E}_1=2$ В и $\mathcal{E}_2=1,5$ В соединены по схеме, указанной на рис. 180, а. Вольтметр, нуль которого находится посередине шкалы, показывает напряжение $U_1=1$ В, причем его стрелка отклоняется в ту же сторону, что и при разомкнутом ключе K . Что будет показывать вольтметр, если соединить приборы по схеме рис. 180, б? Током, ответвляющимся в вольтметр, можно пренебречь.

521. Решить задачу 520 при условии, что при замкнутом ключе K (рис. 180, а) стрелка вольтметра отклоняется в сторону, противоположную той, что при разомкнутом ключе.

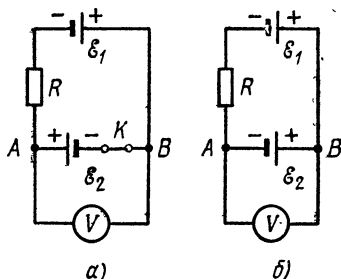


Рис. 180.

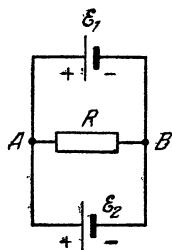


Рис. 181.

522. Два элемента с э. д. с. $\mathcal{E}_1=2$ В и $\mathcal{E}_2=1$ В соединены по схеме, указанной на рис. 181. Сопротивление $R=0,5$ Ом. Внутренние сопротивления элементов одинаковы и равны 1 Ом каждое. Определить силы токов, протекающих через элементы и сопротивление R . Сопротивление подводящих проводов не учитывать.

523. При каком значении сопротивления R в схеме задачи 522 ток через гальванический элемент с э. д. с. $\mathcal{E}_2$ не пойдет? При каких R ток через этот элемент будет направлен против э. д. с. элемента?

524. Можно ли с помощью 24 аккумуляторов, каждый из которых имеет э. д. с. $\mathcal{E}_0=2$ В и внутреннее сопротивление $r=0,3$ Ом, соединяя их в отдельные одинаковые группы, получить во внешней цепи сопротивлением $R=0,2$ Ом ток $I=21$ А?

525. Электрическую плитку, рассчитанную на напряжение 220 В, требуется переделать, не меняя и не укорачивая спирали, на 110 В так, чтобы ее мощность осталась прежней. Что нужно для этого сделать?

526. Почему при включении в сеть нагревательного прибора большой мощности (например, электроутюга) накал лампочек в квартире сразу же заметно падает, а через небольшой промежуток времени возрастает, достигая примерно прежней величины?

527. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них он закипает через время t_1 , при включении другой — через время t_2 . Через сколько времени закипит чайник, если обе обмотки одновременно включить последовательно, параллельно?

528. Электрический кипятильник имеет три обмотки. Если соединить две обмотки параллельно, подключив к ним третью последовательно, то при различных комбинациях обмоток вода в баке закипает соответственно за 20, 40, 16 минут. За сколько времени закипит вода, если все обмотки соединить 1) последовательно? 2) параллельно?

529. При передаче электроэнергии на большие расстояния с помощью трансформатора повышают напряжение так, чтобы при той же мощности сила тока стала меньше. По закону Джоуля — Ленца количество выделенного в проводах тепла $Q=I^2Rt$, и, следовательно, потери на выделение тепла будут малы при малых токах. Но ведь, с другой сто-

роны, $Q=\frac{U^2}{R}t$, т. е. количество выделенного тепла растет

с ростом напряжения. Разъяснить, почему же увеличение напряжения ведет к экономии электроэнергии при передаче ее на большие расстояния.

530. Аккумулятор с э. д. с. $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом замкнут на внешнее сопротивление R и выделяет на нем мощность $W=9$ Вт. Определить

разность потенциалов U на клеммах аккумулятора. В чем причина неоднозначности результата?

531. Две плитки, включенные параллельно в городскую сеть, потребляют общую мощность N . Если включить их последовательно, их мощность будет больше мощности любой другой пары последовательно соединенных плиток, потребляющих при параллельном включении мощность N . Какие мощности потребляют эти плитки при включении в ту же сеть по отдельности?

532. Какую максимальную полезную мощность (мощность, выделяемую на внешнем сопротивлении) может выделить аккумулятор с э. д. с. $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом? Каково при этом сопротивление внешней цепи?

533. Определить коэффициент полезного действия η аккумулятора в задачах 530 и 532. Как зависит коэффициент полезного действия от внешнего сопротивления при неизменном внутреннем сопротивлении? Как при этом меняется полезная мощность? Может ли η равняться единице?

534. Зарядка аккумулятора с начальной электродвижущей силой $\mathcal{E}$ осуществляется зарядной станцией, напряжение в сети которой равно U . Внутреннее сопротивление аккумулятора r . Определить полезную мощность, расходуемую на зарядку аккумулятора, и мощность, расходуемую на выделение тепла в аккумуляторе.

535. Превышает ли полезная мощность, расходуемая при зарядке аккумулятора, выделяемое в нем тепло?

536. По проводнику течет ток $I=10$ А. Площадь поперечного сечения проводника $S=5$ см², а число свободных электронов в 1 см³ проводника $n=10^{23}$. Определить направленную скорость электронов v , считая ее одинаковой для всех электронов.

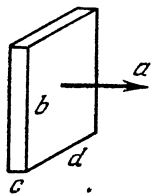


Рис. 182.

537. Металлический прямоугольный параллелепипед с размерами сторон d , b , c ($d \gg c$; $b \gg c$) движется с ускорением a в направлении меньшей стороны (рис. 182). Найти напряженность электрического поля, возникающего вследствие ускоренного движения металлического бруска, а также плотность электрических зарядов на боковых поверхностях бруска, перпендикулярных направлению ускорения.

538. Сплошной металлический цилиндр радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти

зависимость напряженности поля от расстояния до оси цилиндра и разность потенциалов между поверхностью цилиндра и осью.

539. Имеется металлический диск радиусом R (рис. 183), вращающийся с угловой скоростью ω . Диск включен в электрическую цепь при помощи скользящих контактов, касающихся оси диска и его окружности. Сопротивление диска ничтожно мало по сравнению с сопротивлением нагрузки R_0 . Определить количество тепла, выделяющееся за единицу времени. Объяснить с точки зрения электронной теории металлов, что тормозит диск.

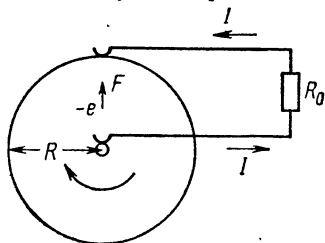


Рис. 183.

§ 21. Электрический ток в газах и вакууме

540. Две частицы с массами m_1 и m_2 испытывают центральное неупругое соударение. Энергия, необходимая для ионизации второй частицы, равна $\mathcal{E}_0$. Какой минимальной энергией $\mathcal{E}_{1 \min}$ должна обладать первая частица до соударения, чтобы эта ионизация произошла? Вторая частица до соударения покоилась.

541. На рис. 184 изображен счетчик Гейгера — Мюллера элементарных частиц. Между корпусом трубки A и тонкой проволокой создается высокое напряжение, лишь немного меньшее «критического», необходимого для зажигания разряда. При попадании в счетчик быстрой заряженной частицы происходит ионизация молекул газа и начинается разряд. Прохождение по цепи тока сопровождается падением напряжения на большом сопротивлении R . Это падение напряжения регистрируется после усиления соответствующими устройствами. Для того чтобы счетчик отвечал своему назначению, необходимо быстрое гашение вызванного частицей разряда. Вследствие какой причины происходит гашение разряда в схеме рис. 184?

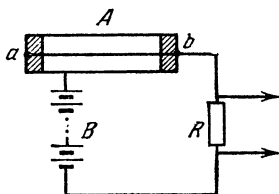


Рис. 184.

542. К источнику высокого напряжения через сопротивление $R=10^3$ Ом подключен конденсатор $C=10^{-11}$ Ф

с расстоянием между пластинами $d = 3$ мм (рис. 185). Воздух в пространстве между пластинами конденсатора ионизируется рентгеновскими лучами так, что в 1 см^3 обра-

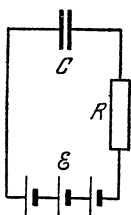


Рис. 185.

зуется $n = 10^4$ пар ионов в секунду. Заряд каждого иона равен заряду электрона. Найти падение напряжения на сопротивлении R , считая, что все ионы достигают пластин конденсатора, не успевая рекомбинировать.

543. Ионизатор создает в единицу времени в единице объема газа Δn_0 ионов каждого знака. В данный момент времени в единице объема газа имеется n_0 положительных и столько же отрицательных ионов. Газ находится между двумя плоскими параллельными электродами, площадь которых равна S и расстояние между которыми равно l . Сила тока между электродами I . Считая, что число рекомбинировавших в единице объема в единицу времени ионов равно $\Delta n'_0 = \gamma n_0^2$, где γ — постоянный коэффициент рекомбинации, определить, при каком условии концентрация ионов между электродами не будет изменяться со временем. Заряд одного иона равен q .

544. Предположим, что в предыдущей задаче ионизованный газ находится между электродами в электрическом поле, напряженность которого равна E . Показать, что при условии $I/qSl \ll \gamma n^2$ для несамостоятельной проводимости справедлив закон Ома. При этом считать, что скорости направленного движения положительных и отрицательных ионов равны $u_+ = b_+ E$ и $u_- = b_- E$ соответственно, где b_+ и b_- — постоянные коэффициенты (называемые подвижностью газовых ионов).

545. Показать, что плотность тока ионов в задаче 543 при условии $\gamma n_0^2 \ll I/qSl$ не зависит от разности потенциалов между электродами. Объяснить, почему плотность тока тем больше, чем больше расстояние между электродами.

546. Начертить график распределения напряжения в тлеющем разряде.

547. Описать поведение различных частей тлеющего разряда: 1) при передвижении анода в направлении катода; 2) при передвижении катода в направлении анода.

548. Что произойдет с горящей электрической дугой, если сильно охладить отрицательный уголь? Что будет при охлаждении положительного угля?

549. К электростатической машине подключены соединенные параллельно лейденская банка и разрядник. Ток электростатической машины $I=10^{-5}$ А. Емкость лейденской банки $C=10^{-8}$ Ф. Чтобы произошел искровой разряд, машина должна работать время $t=30$ с. Длительность разряда $\tau=10^{-6}$ с. Определить величину тока в разряде I_p и напряжение зажигания искрового разряда U_z . Емкостью разрядника пренебречь.

550. Разрядник электростатической машины, диски которой вращаются с постоянной скоростью, присоединен к обкладкам лейденской банки. Между шариками разрядника через равные промежутки времени τ_0 проскакивают искры. Через какие промежутки времени τ будут проскакивать искры, если к разряднику присоединить две лейденские банки, соединенные между собой один раз параллельно, а другой — последовательно? Емкость каждой банки такая же, как в первом случае.

551. Какую энергию в эргах приобретает электрон, пройдя в вакууме разность потенциалов 1 В? (В атомной физике эта энергия принимается за единицу «электрон-вольт».)

552. Совпадает ли траектория движения заряженной частицы в электростатическом поле с силовой линией?

553. Между нитью накала, испускающей электроны, и проводящим кольцом создана разность потенциалов U (рис. 186). Электроны движутся ускоренно вдоль оси кольца. При этом их кинетическая энергия увеличивается, в то время как батарея, создающая разность потенциалов U , не совершает работы, так как ток в цепи не идет. (Предполагается, что электроны не попадают на кольцо.) Как это согласовать с законом сохранения энергии?

554. Триод прямого накала включен в цепь, изображенную на рис. 187. Э.д.с. анодной батареи $\mathcal{E}_1=80$ В, батареи

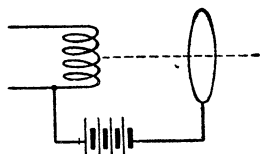


Рис. 186.

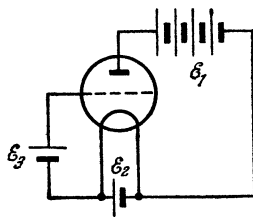


Рис. 187.

накала $\mathcal{E}_2=6$ В и сеточной батареи $\mathcal{E}_3=2$ В. С какими энергиями будут электроны достигать анода лампы? Как

изменится энергия электронов, достигающих анода, если $\mathcal{E}_3$ будет изменяться по величине или даже переменит знак? Анодный ток считать малым по сравнению с током накала.

555. Анодный ток некоторой двухэлектродной лампы в определенном интервале напряжений может быть связан с разностью потенциалов U_a между электродами уравнением $I_a = AU_a + BU_a^2$. Найти анодный ток, если такая лампа включена последовательно с сопротивлением $R_a = 2 \cdot 10^4$ Ом в цепь батареи с э.д.с. $\mathcal{E} = 120$ В. Для данной лампы $A = 0,15$ мА/В, $B = 0,005$ мА/В². Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

556. Две электронные лампы соединены параллельно и включены в цепь батареи с э.д.с. $\mathcal{E} = 300$ В последовательно с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^3$ Ом (рис. 188). Зависимость анодного тока i от анодного напряжения U_a для каждой из ламп может быть приближенно представлена в виде $i = AU_a + BU_a^2$, где для одной лампы $A_1 = 0,07$ мА/В, $B_1 = 0,005$ мА/В², а для другой лампы $A_2 = 0,03$ мА/В, $B_2 = 0,01$ мА/В². Определить анодные токи ламп. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

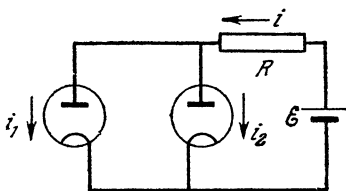


Рис. 188.

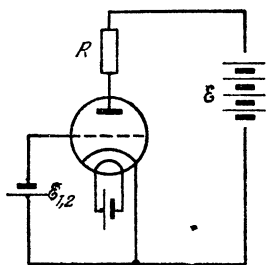


Рис. 189.

557. Электронная лампа включена в цепь батареи с э.д.с. $\mathcal{E} = 250$ В последовательно с сопротивлением $R = 10^4$ Ом (рис. 189). Сетка лампы соединена с отрицательным полюсом батареи ($\mathcal{E}_1 = 3$ В), а катод — с положительным ее полюсом. Падение напряжения на сопротивлении R при этом достигает $U_1 = 95$ В. Если же в цепи сетки стоит батарея с $\mathcal{E}_2 = 6$ В, то разность потенциалов на сопротивлении R будет $U_2 = 60$ В. Какова будет разность потенциалов между анодом и катодом лампы, если замкнуть накоротко сетку и катод? (В рассматриваемой области изменений потенциала сетки считать сеточную характеристику лампы прямой линией.)

558. Три одинаковых диода, анодные характеристики которых могут быть приближенно представлены отрезками прямых:

$$\begin{aligned} I_a &= 0 \quad \text{при } U_a \leq 0, \\ I_a &= kU_a \quad \text{при } U_a > 0, \end{aligned}$$

где $k=0,12$ мА/В, включены в цепь, как показано на рис. 190. Начертить график зависимости тока I в цепи

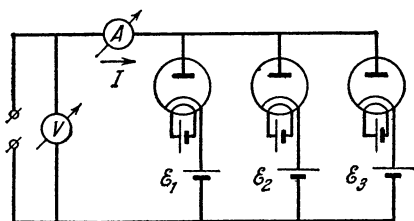


Рис. 190.

от напряжения V , если $\varepsilon_1=2$ В, $\varepsilon_2=5$ В, $\varepsilon_3=7$ В, а V может меняться от -10 В до $+10$ В.

559. Вычислить чувствительность электронно-лучевой трубки к напряжению, т. е. величину отклонения пятна на экране, вызванного разностью потенциалов в 1 В на управляющих пластинах. Длина управляющих пластин l , расстояние между ними d , расстояние от конца пластин до экрана L , и ускоряющая разность потенциалов U_0 .

§ 22. Магнитное поле тока. Действие магнитного поля на ток и движущиеся заряды

560. Исходя из соображений размерности, определить напряженность магнитного поля на расстоянии r от 1) бесконечно длинной прямой нити, по которой течет ток I ; 2) бесконечной плоскости, по которой течет поверхностный ток плотности j .

561. По бесконечной прямолинейной тонкостенной трубе течет ток I . Определить индукцию магнитного поля в произвольной точке внутри трубы.

562. Учитывая, что индукция магнитного поля внутри длинного цилиндрического проводника равна $B=k \cdot 2\pi jr$, где j — плотность тока, r — расстояние от оси проводника, k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц, определить индукцию магнитного поля в произвольной

точке внутри длинной цилиндрической полости, вырезанной параллельно оси проводника. По проводнику течет ток плотности j . Расстояние между осями проводника и полости равно d .

563. Начертить распределение линий индукции магнитного поля в полости проводника, описанного в задаче 562.

• 564. По контуру в виде круга радиуса R течет ток. Определить индукцию магнитного поля в центре круга, если сила тока равна I .

Примечание. При определении индукции магнитного поля можно воспользоваться законом Био—Савара—Лапласа. Этот закон утверждает, что элемент контура Δl , по которому течет ток I , создает в произвольной точке A пространства магнитное поле, индукция которого равна

$$\Delta B = k \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2},$$

где r — расстояние от элемента Δl до точки A , α — угол, который составляет радиус-вектор $\mathbf{r}$ с элементом Δl , k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Направление ΔB определяется правилом буравчика: направление вращения головки буравчика соответствует направлению тока I в элементе контура Δl . Вектор ΔB перпендикулярен к плоскости, содержащей элемент Δl и радиус-вектор $\mathbf{r}$.

• 565. По контуру в виде кольца радиуса R течет ток I . Определить индукцию магнитного поля в произвольной точке, лежащей на перпендикуляре, восставленном к плоскости кольца из его центра.

• 566. По бесконечно длинному проводнику ABC , изогнутому под прямым углом, течет ток I (рис. 191). Во сколько

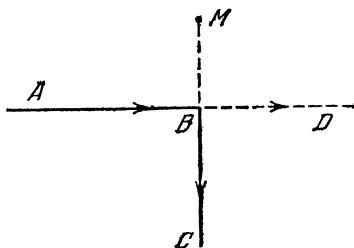


Рис. 191.

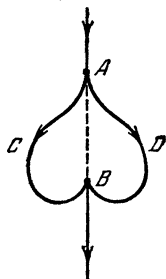


Рис. 192.

раз изменится напряженность магнитного поля в точке M , если к точке B присоединить бесконечно длинный пря-

мой провод BD так, чтобы ток I разветвлялся в точке B на две равные части, а ток в проводнике AB оставался бы прежним?

• 567. По проводнику, расположенному в одной плоскости, как изображено на рис. 192, течет ток. Найти индукцию магнитного поля в произвольной точке линии AB , являющейся осью симметрии проводника.

568. Под длинной горизонтальной шиной на двух одинаковых пружинах (коэффициент упругости каждой равен k) подвешен провод длиной l . Когда по шине и проводу токи не текут, расстояние между ними h . Найти расстояние между шиной и проводом, если по шине течет ток I , а по проводу i . Провод не может выйти из вертикальной плоскости.

• 569. Определить силу, с которой действует бесконечно длинный прямой провод на прямоугольный контур, расположенный в плоскости провода. Известно, что по проводу течет ток I , а по контуру — I_1 . Стороны контура AD и BC имеют длину a и расположены параллельно проводу. Расстояние от AD до провода x . Длина сторон $AB=DC=h$. Направления токов указаны на рис. 193 стрелками.

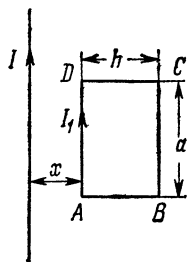


Рис. 193.

• 570. Медный провод сечением S , согнутый в виде трех сторон квадрата, может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис. 194). Провод находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Когда по проводу течет ток I , провод отклоняется на угол α от вертикали. Определить индукцию поля. Плотность меди равна ρ .

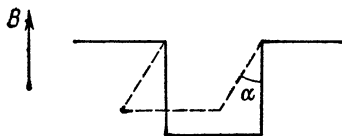


Рис. 194.

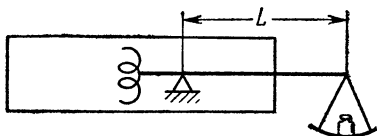


Рис. 195.

571. В центре длинного соленоида, на каждый сантиметр длины которого приходится n витков, находится короткая катушка, состоящая из N витков и имеющая сечение S . Ось этой катушки перпендикулярна оси длинного соленоида и направлена вертикально. Внутренняя катушка укреп-

лена на одном конце коромысла весов, которые в отсутствие тока находятся в равновесии. Когда через обе катушки пропускают один и тот же ток I , для уравнивания весов на правое плечо коромысла (рис. 195) приходится добавить груз P . Длина правого плеча коромысла равна L . Определить силу тока I .

П р и м е ч а н и е. Индукция магнитного поля вблизи центра длинного соленоида равна $B = \mu_0 n I$, где n — число витков на единицу длины соленоида, а I — сила тока, текущего по соленоиду.

572. По проволочному кольцу радиуса R , подвешенному на двух гибких проводниках, течет ток I . Кольцо помещено в однородное магнитное поле с индукцией B . Линии индукции горизонтальны. С какой силой растянуто кольцо?

573. Проволочное кольцо радиуса R находится в неоднородном магнитном поле, линии индукции которого составляют в точках пересечения с кольцом угол α относительно нормали к плоскости кольца (рис. 196). Индукция магнитного поля, действующего на кольцо, равна B . По кольцу течет ток I . С какой силой магнитное поле действует на кольцо?

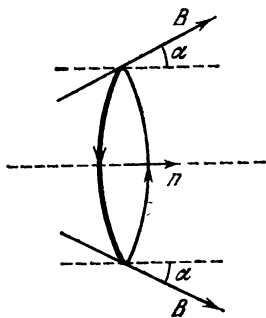


Рис. 196.

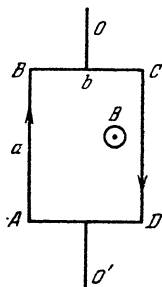


Рис. 197.

574. Прямоугольный контур $ABCD$, стороны которого имеют длину a и b , находится в однородном магнитном поле индукции B и может вращаться вокруг оси OO' (рис. 197). По контуру течет постоянный ток I . Определить работу, совершенную магнитным полем при повороте контура на 180° , если вначале плоскость контура была перпендикулярна магнитному полю и расположена так, как показано на рис. 197.

575. Как будет двигаться в однородном магнитном поле электрон, если в начальный момент его скорость составляет угол α с линиями индукции поля?

576. По металлической ленте ширины $AB=a$ течет ток I . Лента помещена в магнитное поле, индукция которого перпендикулярна ленте (рис. 198). Определить разность потенциалов между точками A и B ленты.

577. Незаряженный металлический брусок представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами a, b, c ($a \gg c, b \gg c$). Брусок движется в магнитном поле в направлении стороны a со скоростью v . Индукция магнитного поля B перпендикулярна осно-

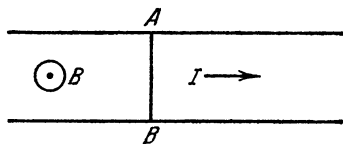


Рис. 198.

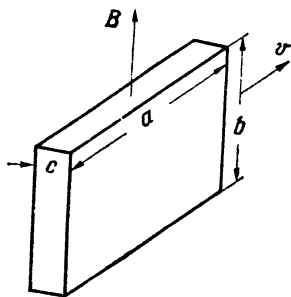


Рис. 199.

ванию бруска со сторонами a, c (рис. 199). Определить напряженность электрического поля в бруске и плотность электрических зарядов на боковых поверхностях параллелепипеда, образованных сторонами a, b .

578. Незаряженный металлический цилиндр радиуса r вращается в магнитном поле с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Индукция магнитного поля направлена вдоль оси цилиндра. Каково должно быть значение индукции магнитного поля, чтобы в цилиндре не возникло электростатическое поле?

579. Найти напряженность электростатического поля в цилиндре (см. задачу 578), если индукция магнитного поля равна B .

580. Пучок однозарядных ионов попадает в область пространства, где имеется однородное электрическое поле с напряженностью $E=100$ Н/Кл и однородное магнитное поле с индукцией $B=0,02$ Н/(А·м). Электрическое и магнитное поля направлены под прямым углом друг к другу и оба перпендикулярны к пучку. Ионы проходят эти скрещенные электрическое и магнитное поля без отклонения и проникают через щель в область однородного магнитного поля с индукцией $B'=0,09$ Н/(А·м), направленной перпендику-

лярно движению ионов. Если ионы представляют собой смесь с массами, равными 20 и 22 атомным единицам массы, то на каком расстоянии друг от друга эти ионы окажутся, пройдя половину окружности?

§ 23. Электромагнитная индукция. Переменный ток

581. Реактивный самолет с размахом крыльев 20 м летит прямо на север со скоростью 960 км/ч и на такой высоте, где вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $6 \cdot 10^{-5}$ Т. Чему равна разность потенциалов между концами крыльев? На каком крыле более высокий потенциал?

582. По двум направляющим металлическим рейкам движется без трения с постоянной скоростью проводник длины l , электрическое сопротивление которого равно r . Рейки соединены неподвижным проводником, сопротивление которого равно R . Все проводники расположены в одной плоскости и находятся в постоянном магнитном поле, индукция которого равна B и направлена перпендикулярно плоскости проводников (рис. 200). Электрическое сопротивление реек мало по сравнению с r и R . Определить разность потенциалов электрического поля между точками A и B . Объяснить причину возникновения электрического тока.

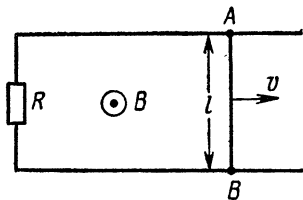


Рис. 200.

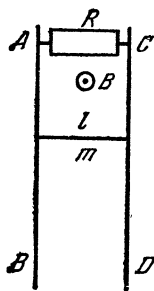


Рис. 201.

583. По двум вертикальным рейкам AB и CD , соединенным сопротивлением R , может без трения скользить проводник, длина которого l и масса m . Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого B перпендикулярна плоскости рисунка (рис. 201). Как будет двигаться подвижный проводник в поле силы тяжести, если пренебречь сопротивлением самого проводника и реек?

584. По двум металлическим параллельным рейкам, расположенным в горизонтальной плоскости и замкнутым на конденсатор емкости C , может без трения двигаться проводник массой m и длины l . Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция которого B направлена вверх. К середине проводника перпендикулярно к нему и параллельно рейкам приложена сила F (рис. 202). Определить ускорение подвижного проводника, если сопротивление реек, подводящих проводов и подвижного проводника равно нулю. В какие виды энергии превращается работа силы F ? Считать, что в начальный момент скорость проводника равна нулю.

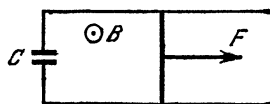


Рис. 202.

585. Прямоугольная рамка расположена в плоскости бесконечного прямолинейного проводника с током, причем стороны AD и BC параллельны проводнику (рис. 203). В середине стороны DC включен прибор, измеряющий заряд, протекающий по контуру (на рисунке не показан). Рамку можно перевести в

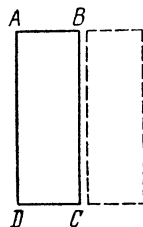


Рис. 203.

новое положение, изображенное на рис. 203 пунктиром, двумя способами: 1) перемещая ее параллельно самой себе; 2) вращая на 180° вокруг стороны BC . В каком случае заряд, протекший через прибор, будет больше?

586. Катушка из n витков, площадь каждого из которых S , присоединена к баллистическому гальванометру. (Баллистический гальванометр измеряет количество прошедшего через него электричества.) Сопротивление всей цепи R . Вначале катушка находится между полюсами магнита в области, где магнитное поле однородно и индукция его B перпендикулярна площади витков. Затем катушку переместили в пространство, где магнитное поле отсутствует. Чему равно количество электричества, прошедшего через гальванометр?

587. Прямоугольный контур $ABCD$ перемещается поступательно в магнитном поле тока I , текущего по длинному прямому проводу OO' . Стороны AD и BC параллельны проводу. Определить величину и направление тока, индуциро-

ванного в контуре, если контур перемещается с постоянной скоростью v . $AD=BC=a$, $AB=DC=b$. Сопротивление контура R . (Рис. 204.)

588. Проволочное кольцо радиуса r находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости кольца и меняется с течением времени по закону $B=kt$. Определить напряженность электрического поля в витке.

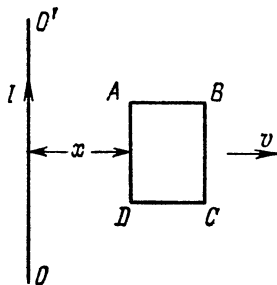


Рис. 204.

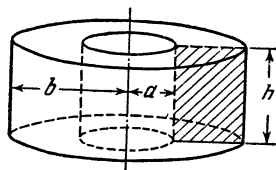


Рис. 205.

589. Кольцо прямоугольного сечения (рис. 205) сделано из материала с удельным сопротивлением ρ . Кольцо находится в однородном магнитном поле. Индукция магнитного поля направлена по оси кольца и увеличивается прямо пропорционально времени: $B=kt$. Найти силу тока, индуцируемого в кольце.

590. Одна половина проволочного кольца радиуса r имеет сопротивление R_1 , а другая R_2 . Кольцо находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости кольца и меняется с течением времени по закону $B=B_0+kt$ (B_0 — постоянная величина). Определить напряженность электростатического поля в кольце.

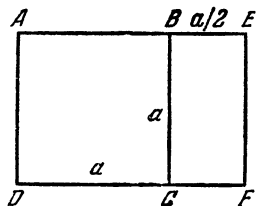


Рис. 206.

591. Определить силу тока в проводниках цепи, изображенной на рис. 206, если индукция однородного магнитного поля перпендикулярна плоскости чертежа и изменяется во времени по закону $B=kt$.

Сопротивление единицы длины проводников равно r .

592. В однородном круглом проволочном кольце создан постоянный индукционный ток I . Переменное маг-

нитное поле, создающее этот ток, перпендикулярно плоскости кольца, сосредоточено вблизи его оси симметрии и имеет ось симметрии, проходящую через центр кольца (рис. 207). Чему равна разность потенциалов между точками A и B ? Что будет показывать электрометр, присоединенный к этим точкам?

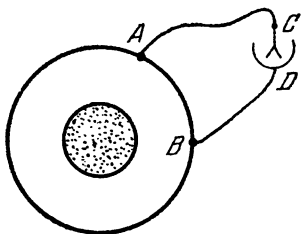


Рис. 207.

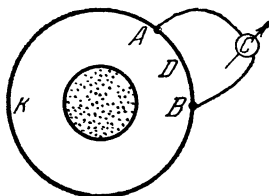


Рис. 208.

593. Переменное магнитное поле создает в кольцевом проводнике $ADBKA$ постоянную электродвижущую силу $\mathcal{E}$ (см. задачу 592). Сопротивления проводников ADB , AKB и ACB (рис. 208) равны соответственно R_1 , R_2 и R_3 . Какую силу тока будет показывать амперметр C ? Магнитное поле сосредоточено у оси кольцевого проводника.

594. Сопротивление проводника ACB (см. задачу 593) $R_3=0$. Найти силы токов I_1 , I_2 и I_3 и разность потенциалов $U_A - U_B$.

595. По двум металлическим параллельным рейкам, замкнутым на сопротивление R , перемещается проводник длины l . Скорость перемещения проводника равна v . Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат рейки, и изменяется со временем по закону $B = B_0 + kt$. В начальный момент площадь $abcd$ равна S_0 . Определить силу тока в цепи. (Рис. 209.)

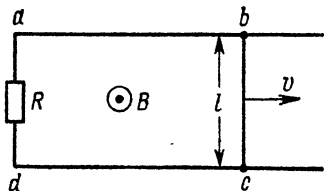


Рис. 209.

596. В однородном магнитном поле находится проволочное кольцо, способное вращаться вокруг диаметра, перпендикулярного линиям магнитной индукции. Индукция поля начинает возрастать. Найти возможные положения

равновесия кольца и указать положение устойчивого равновесия. Что изменится, если индукция будет убывать?

597. На цилиндр из немагнитного материала намотано N витков проволоки (соленоид). Радиус цилиндра r , его длина l ($r \ll l$). Сопротивление проволоки R . Каково должно быть напряжение на концах проволоки, чтобы ток возрастал прямо пропорционально времени, т. е. чтобы выполнялось равенство $I = kt$?

598. Соленоид (см. задачу 597) присоединен к батарее, э.д.с. которой равна $\mathcal{E}$. В момент времени $t=0$ замыкают ключ. Чему будет равна сила тока в цепи соленоида, если пренебречь сопротивлением R соленоида, батареи и подводящих проводов?

599. Подсчитать работу батареи (см. задачу 598) за время t . В какой вид энергии превращается эта работа?

600. Кольцо из сверхпроводника помещено в однородное магнитное поле, индукция которого нарастает от нуля до B_0 . Плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Определить силу индукционного тока, возникающего в кольце. Радиус кольца r , индуктивность L .

601. В однородном магнитном поле с индукцией B находится сверхпроводящее кольцо радиуса r . Линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости кольца. Ток в кольце нет. Найти магнитный поток, пронизывающий кольцо, после того, как магнитное поле будет выключено.

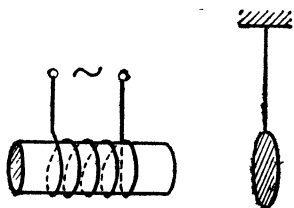


Рис. 210.

602. Перед полюсом электромагнита на длинной нити подвешено кольцо из сверхпроводника (рис. 210). Что произойдет с кольцом, если по обмотке электромагнита пропустить переменный ток?

603. Из провода длины l изготовили соленоид длины l_0 . Диаметр соленоида $d \ll l_0$. Опреде-

лить индуктивность соленоида.

604. Через соленоид длиной 1 м, имеющий 2000 витков диаметром 10 см, течет ток 1 А. Соленоид равномерно растягивается со скоростью 40 см/с, причем приложенная к соленоиду разность потенциалов непрерывно меняется так, что ток остается постоянным. Каково будет изменение разности потенциалов к тому моменту, когда соленоид растянется вдвое? Изменением диаметра соленоида при растяжении пренебречь.

605. Магнитное поле внутри разомкнутого соленоида однородно, и его индукция меняется с течением времени по закону $B = B_0 \cos \omega t$. Определить напряжение U на концах соленоида, возникающее при этом. Соленоид имеет N витков, и его радиус равен r .

606. Последовательно с соленоидом, имеющим N витков радиуса r , соединено омическое сопротивление R . Магнитное поле внутри соленоида однородно, и его индукция меняется со временем по закону $B = B_0 \cos \omega t$. Определить напряжение U_{AB} между точками A и B и ток I в цепи. (Рис. 211.)

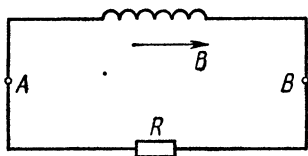


Рис. 211.

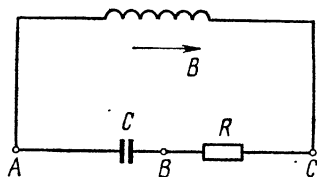


Рис. 212.

607. Последовательно с соленоидом включены конденсатор емкости C и омическое сопротивление R . Соленоид имеет N витков радиуса r . Магнитное поле внутри соленоида однородно, и его индукция изменяется со временем по закону $B = B_0 \cos \omega t$. Определить напряжение U_{AB} между точками A и B и напряжение U_{BC} между B и C , а также ток I в цепи. (Рис. 212.)

608. 1) От середины катушки с железным сердечником (обмотка — толстый медный провод с большим числом витков) сделан отвод C (рис. 213). Между точками B и C создается постоянное напряжение U_1 . Найти напряжение U_2 между точками A и B .

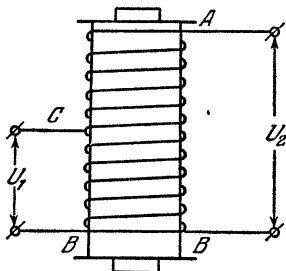


Рис. 213.

2) Между точками B и C приложено переменное напряжение (например, от городской сети) с амплитудой U_1 . Найти амплитуду U_2 переменного напряжения между точками A и B .

609. Обмотка лабораторного регулирующего автотрансформатора (ЛАТР) намотана на железном сердечнике, имеющем форму прямоугольного тороида (рис. 214). Для за-

щиты от вихревых токов (токов Фуко) сердечник набирают из тонких железных пластин, изолированных друг от друга слоем лака. Это можно сделать различными способами: 1) набирая сердечник из тонких колец, положенных стопкой одно на другое; 2) свертывая в рулон длинную ленту, имеющую ширину h ; 3) собирая сердечник из прямоугольных пластин размером $l \times h$, расположив их вдоль радиусов цилиндров.

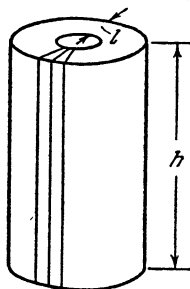


Рис. 214.

Какой способ лучше?

610. По катушке, не имеющей омического сопротивления, протекает переменный синусоидальный ток. Индуктивность катушки L . Начертить график изменения со временем произведения тока на напряжение (мгновенной мощности). Объяснить характер кривой. Чему равна средняя за период мощность, потребляемая катушкой?

611. Найти эффективную величину переменного тока, изменяющегося по закону:

$$I = I_0 \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{T}{8};$$

$$I = 0 \quad \text{при} \quad \frac{T}{8} < t < \frac{T}{2};$$

$$I = -I_0 \quad \text{при} \quad \frac{T}{2} < t < \frac{5}{8}T;$$

$$I = 0 \quad \text{при} \quad \frac{5}{8}T < t < T;$$

$$I = I_0 \quad \text{при} \quad T < t < \frac{9}{8}T$$

и т. д. (Рис. 215.)

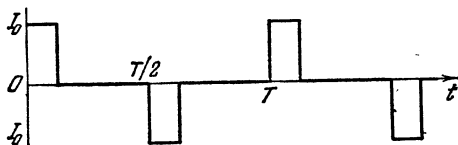


Рис. 215.

612. Почему наличие очень высокого напряжения во вторичной обмотке повышающего трансформатора не приводит к большим потерям энергии на выделение тепла в самой обмотке?

613. Зачем в сетях переменного тока, содержащих большое число электроприборов значительной индуктивности (например, дросселей), параллельно этим приборам подключают конденсаторы?

614. Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке с коэффициентом самоиндукции L и омическим сопротивлением R_L , иногда применяют метод трех вольтметров, заключающийся в следующем. Включают известное сопротивление R и три вольтметра так, как указано на рис. 216. Измерив с помощью этих вольтметров эффективные напряжения: U_1 — на катушке, U_2 — на сопротивлении R и U — между клеммами катушки и сопротивлением, определяют искомую мощность W . Какова она?

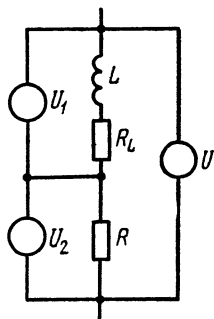


Рис. 216.

615. Поверх длинного соленоида, имеющего N_1 витков, длину l и площадь сечения S , вплотную намотан по всей длине второй соленоид, имеющий N_2 витков и такое же сечение S . Определить коэффициент взаимной индукции соленоидов. (Коэффициент взаимной индукции L_{12} двух контуров численно равен потоку магнитной индукции, пронизывающему второй контур в случае, когда через первый контур протекает ток $I=1$ А.)

616. Поверх длинного соленоида вплотную намотана катушка. Ток в соленоиде нарастает прямо пропорционально времени. Каков характер зависимости тока от времени в катушке?

617. Два сверхпроводящих кольца радиуса r находятся на расстоянии d друг от друга, причем $d \gg r$. Центры колец лежат на прямой OO' , перпендикулярной плоскостям обоих

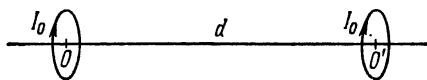


Рис. 217.

колец. Кольца могут перемещаться только вдоль этой прямой. В начальный момент по кольцам текут в одном направлении токи одинаковой величины I_0 . Какие токи установятся в кольцах после того, как они сблизятся вплотную? (Рис. 217.)

618. Описать характер движения колец задачи 617, если в начальный момент времени текущие по ним токи имели разную величину. Рассматривать только силы магнитного взаимодействия.

619. Показать, что при пренебрежении током холостого хода трансформатора и омическим сопротивлением его обмоток имеет место соотношение $I_1/I_2 = N_2/N_1$, где I_1 и I_2 — токи в обмотках, а N_1 и N_2 — числа витков в них. Обмотки рассматривать как катушки с одинаковым поперечным сечением.

620. Поверх длинного соленоида, имеющего длину l , сечение S и число витков N_1 , вплотную по всей длине намотан второй соленоид, имеющий число витков N_2 и такое же сечение S , как и первый.

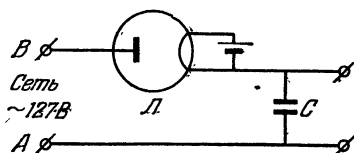


Рис. 218.

По первому соленоиду течет ток I_1 , по второму — ток I_2 . Найти энергию магнитного поля этой системы.

621. На какие пробивные напряжения должны быть рассчитаны конденсатор C и диод $Д$, если выпрямитель (рис. 218) может работать как под нагрузкой, так и без нее?

§ 24. Электрические машины

622. Сопротивление в цепи нагрузки генератора переменного тока увеличилось. Как должна измениться мощность двигателя, вращающего генератор, чтобы частота переменного тока осталась прежней?

623. К зажимам генератора синусоидальной э.д.с. *постоянной амплитуды* подключают конденсаторы C_1 и C_2 . Первый раз конденсаторы соединены между собой параллельно, второй — последовательно. Во сколько раз должна измениться частота генератора, чтобы ток через него был одинаковым в обоих случаях? Внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

624. Сила, действующая на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля (сила Лоренца), всегда перпендикулярна скорости; следовательно, эта сила не совершает работы. Почему же в таком случае работает электромотор? Ведь сила, действующая на проводник с током, возникает в результате действия поля на отдельные заряженные частицы, движение которых образует ток.

625. Может ли серийный мотор постоянного тока, включенный в сеть с напряжением $U=120$ В, развить мощность $W=200$ Вт, если сопротивление его обмоток $R=20$ Ом?

626. Серийный мотор, питающийся от источника постоянного напряжения, работает в режиме, обеспечивающем получение от него максимальной механической мощности W . Какое количество тепла за единицу времени выделится в моторе, если остановить (заклинить) его вал?

627. Какими параметрами сети определялась бы мощность серийного электромотора постоянного тока, включенного в эту сеть, если бы его обмотка была сделана из сверхпроводника?

628. Определить коэффициент полезного действия серийного и шунтового моторов при условии, что развиваемая ими мощность максимальна. Напряжение на зажимах U ; сопротивления обмоток ротора R_1 и статора R_2 одинаковы у обоих моторов и предполагаются известными.

629. Почему серийный мотор, включенный в цепь на холостом ходу, «разносит», т. е. его якорь набирает скорость, угрожающую механической прочности двигателя?

630. Ротор модели мотора постоянного тока состоит из одного витка, имеющего форму прямоугольника. Индукция магнитного поля B , создаваемая постоянным магнитом (слева — север, справа — юг), направлена по радиусу,

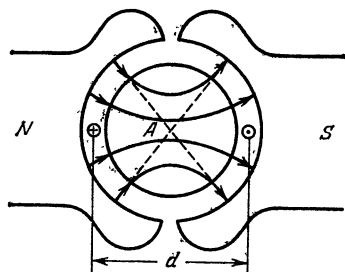


Рис. 219.

так как зазор между полюсными наконечниками и железным цилиндром A очень мал (рис. 219). К витку, площадь которого S и сопротивление R , приложена разность потенциалов U . Определить мощность мотора как функцию угловой скорости ω . При какой угловой скорости ω мощность будет максимальной? Чему будет равна при этом сила тока?

631. Используя условие предыдущей задачи, определить зависимость вращающего момента M от угловой скорости.

632. Определить характер зависимости мощности модели мотора постоянного тока (см. задачу 630) от индукции магнитного поля B при заданном числе оборотов. При каком значении B мощность максимальна?

633. Определить индукцию магнитного поля в модели мотора постоянного тока (см. задачу 630), при которой вращающий момент M максимален. Число оборотов якоря задано.

634. Шунтовой электромотор постоянного тока при напряжении на зажимах $U=120$ В развивает механическую мощность $W=160$ Вт. Число оборотов в секунду якоря мотора $n=10$ об/с. Определить максимально возможное число оборотов мотора при данном напряжении. Сопротивление якоря $R=20$ Ом.

635. Шунтовой мотор постоянного тока при напряжении на зажимах $U=120$ В имеет угловую скорость вращения якоря $\omega=100$ рад/с. Сопротивление обмотки якоря мотора $R=20$ Ом. Какую электродвижущую силу разовьет этот мотор, используемый как генератор, если его вращать с той же угловой скоростью? Напряжение на обмотках статора поддерживается постоянным и равным 120 В. Механический момент на валу двигателя при указанной скорости $M=1,6$ Н·м.

636. Как изменится скорость вращения шунтового мотора при увеличении силы тока в обмотках статора, если напряжение на якоре U и приложенный к оси якоря механический момент M остаются постоянными?

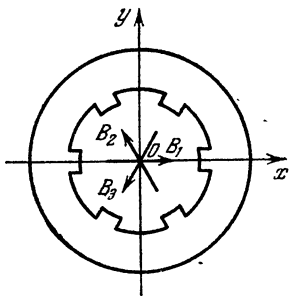


Рис. 220.

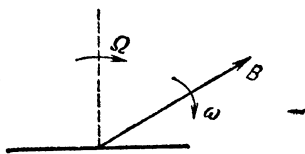


Рис. 221.

637. Доказать, что если значения индукции магнитных полей, создаваемых тремя парами электромагнитов, равны по амплитуде и смещены по фазе на $2\pi/3$ (рис. 220), то резуль-

тирующее магнитное поле можно изобразить вектором, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω вокруг точки O . Каждая пара электромагнитов создает магнитные поля, направленные по соответствующим диаметрам кольца: B_1, B_2, B_3 . Электромагниты питаются переменным током частоты ω .

638. Магнитное поле индукции B вращается в плоскости чертежа с угловой скоростью ω . В этом поле находится рамка, стороны которой равны a и b . Омическое сопротивление рамки R . Нормаль к плоскости рамки вращается в плоскости чертежа с угловой скоростью Ω . Найти силу тока, индуцированного в рамке. (Рис. 221.)

639. Найти момент сил, приложенных к рамке, описанной в задаче 638.

Глава IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 25. Механические колебания

640. На неподвижном круглом цилиндре радиуса R лежит доска, как показано на рис. 222. Толщина доски равна h . Найти условие, при котором после отклонения на

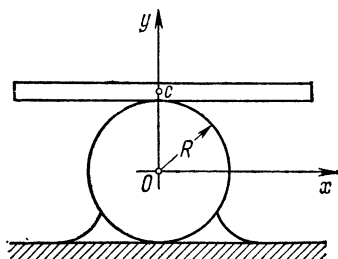


Рис. 222.

малый угол от горизонтали доска будет совершать колебания около положения равновесия. Проскальзывания нет.

641. Определить с точностью до безразмерного коэффициента период колебаний тела с массой m , прикрепленного к пружине с коэффициентом жесткости k .

642. Доказать, что период колебаний математического

маятника увеличивается с увеличением максимального угла отклонения от положения равновесия.

643. Исходя из соображений размерностей, определить период колебаний математического маятника.

644. Два бруска, массы которых равны m_1 и m_2 , связаны пружиной жесткости k . Пружина сжата при помощи двух нитей, как показано на рис. 223. Нити пережигают. Определить период колебаний брусков.

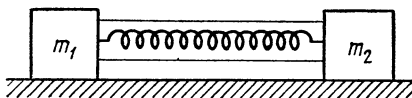


Рис. 223.

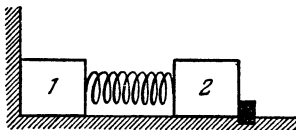


Рис. 224.

645. Два груза с массами m_1 и m_2 соединены пружиной с коэффициентом жесткости k . В начальный момент пружина

жина сжата на величину x так, что первый груз прижат вплотную к стенке (рис. 224), а второй груз удерживается упором. Как будут двигаться грузы, если упор убрать?

646. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если их последовательное соединение заменить параллельным?

647. Два математических маятника длины l каждый связаны невесомой пружиной так, как указано на рис. 225. Коэффициент упругости пружины равен k . При равновесии маятники занимают вертикальное положение и пружина не деформирована. Определить частоты малых колебаний

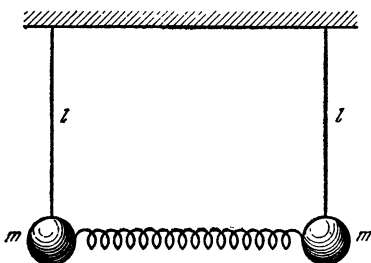


Рис. 225.

двух связанных маятников в случаях, когда маятники отклонены в одной плоскости на равные углы в одну сторону (колебания в фазе) и в разные стороны (колебания в противофазе).

648. Груз на длинной нити может совершать колебания в вертикальной плоскости, отклоняясь на угол α от вертикали (математический маятник). Этот же груз может вращаться по окружности так, что описывает конус (конический маятник). В каком случае натяжение нити, отклоненной на угол α от вертикали, будет больше?

649. Часы с маятником на поверхности земли идут точно. В каком случае эти часы больше отстанут за сутки: если их поднять на высоту 200 м или же опустить в шахту на глубину 200 м?

650. На концах невесомого стержня длиной $d = 1$ м укреплены два маленьких шарика с массами $m = 1$ г. Стержень подвешен на шарнире так, что может вращаться без трения около вертикальной оси, проходящей через его середину. На одной прямой со стержнем укреплены два больших шара с массами $M = 20$ кг. Расстояние между центрами большого и малого шаров $L = 16$ см

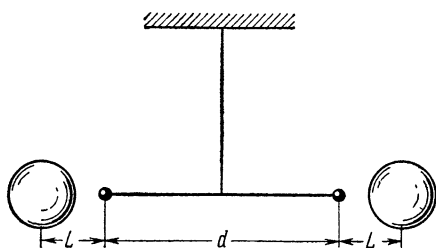


Рис. 226.

щей через его середину. На одной прямой со стержнем укреплены два больших шара с массами $M = 20$ кг. Расстояние между центрами большого и малого шаров $L = 16$ см

(рис. 226). Вычислить период малых колебаний описанного крутильного маятника.

651. Чему равен период колебаний математического маятника, находящегося в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a ?

652. Определить период колебаний маятника в лифте, движущемся вертикально с ускорением a , направленным вверх.

653. Решить предыдущую задачу в случае, когда ускорение a направлено вниз.

654. Кубик совершает малые колебания в вертикальной плоскости, двигаясь без трения по внутренней поверхности сферической чаши. Определить период колебаний кубика, если внутренний радиус чаши R , а ребро кубика много меньше R .

655. Как изменится период колебаний кубика в чаше (см. условие задачи 654), если на чашу кроме силы тяжести будет действовать сила F , направленная вертикально вверх? Масса чаши M много больше массы m кубика.

656. Как изменится период колебаний кубика в чаше (см. задачу 654), если чаша стоит на гладкой горизонтальной поверхности, по которой она может перемещаться без трения?

657. Обруч массы m и радиуса r может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиуса R (рис. 227). Определить период колебаний обруча, считая угол φ малым.

658. Найти период колебаний маятника, изображенного на

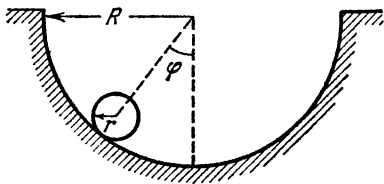


Рис. 227.

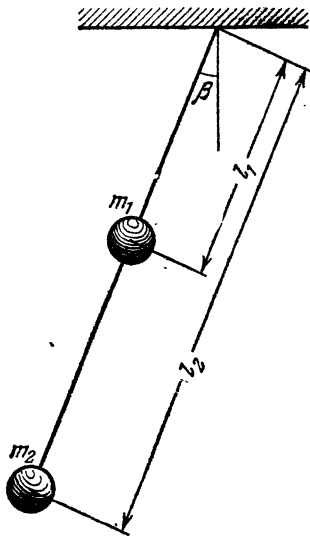


Рис. 228.

рис. 228. Стержень, на котором помещены массы m_1 и m_2 , считать невесомым.

659. Определить период колебаний маятника, состоящего из тонкого однородного полукольца радиуса r , подвешенного на невесомых нитях OA и OB , как показано на рис. 229.

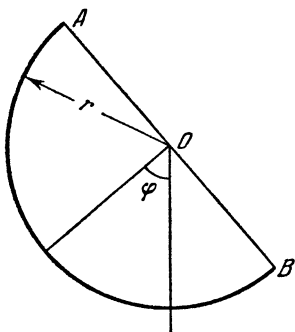


Рис. 229.

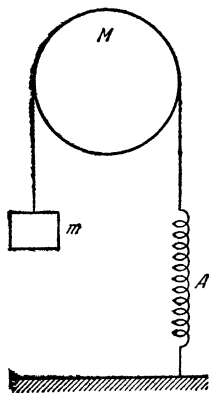


Рис. 230.

660. На рис. 230 изображена механическая система, состоящая из груза массы m , пружины A с коэффициентом упругости k и блока массы M . Груз посредством нити, перекинутой через блок, связан с пружиной. Найти период колебаний груза, если блок представляет собой тонкостенный цилиндр.

661. С какой частотой будет колебаться палка массы $m=2$ кг и площади поперечного сечения $S=5$ см², плавающая на поверхности воды в вертикальном положении? (Принять во внимание, что период колебаний груза на пружине дается выражением $T=2\pi\sqrt{m/k}$, где k — коэффициент упругости пружины.)

662. В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Найти период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда $S=0,3$ см², а масса ртути $m=484$ г. Плотность ртути $\rho=13,6$ г/см³.

663. Представим себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. За какое время тело, брошенное в эту шахту, достигнет центра Земли? Сопротивление движению отсутствует.

664. Закрепленная на концах струна растянута с силой f . К середине струны прикреплен точечный груз массы m

(рис. 231). Определить период малых колебаний прикрепленного груза. (Массой струны пренебречь. Силу тяжести не учитывать.)

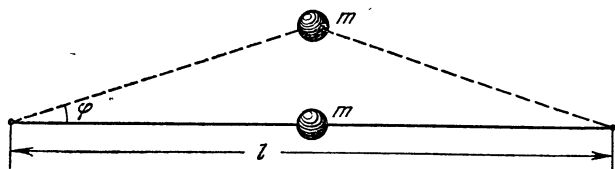


Рис. 231.

665. Два одинаковых груза массы m , скрепленные пружинами, как показано на рис. 232, лежат на абсолютно гладком горизонтальном столе. Пружины растянуты с силой F . Грузы смещают в направлении, перпендикулярном длине пружин, на одинаковое малое расстояние x в одну сторону от положения равновесия (рис. 233, а). Определить период колебаний грузов.

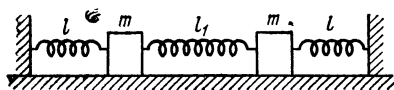
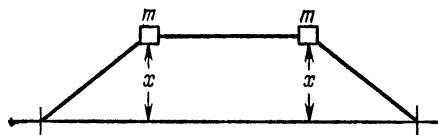
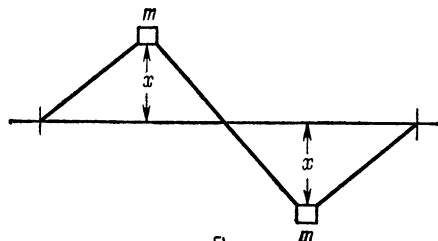


Рис. 232.

666. Грузы массы m , скрепленные пружинами, как показано на рис. 232, лежат на абсолютно гладком го-



а)



б)

Рис. 233.

ризонгальном столе. Пружины растянуты с силой F . Грузы смещают на одинаковое малое расстояние x в направлении,

перпендикулярном длине пружин, в разные стороны от положения равновесия и отпускают (рис. 233, б). Определить период колебаний грузов.

667. Для того чтобы удержать в равновесии открытую дверь в вестибюле метро (дверь открывается в обе стороны и возвращается в положение равновесия пружинами), нужно приложить к ручке двери силу 50 Н. Можно ли открыть дверь силой 1 Н, приложенной к той же ручке? Трением в петлях двери можно пренебречь.

668. С невесомым блоком радиуса r жестко скреплен невесомый стержень длины l . На конце стержня находится тело массы m (рис. 234). На блок намотана нить, к свободному концу которой прикреплен груз массы M . При каком условии движение системы будет носить колебательный характер, если в начальный момент угол α между стержнем и вертикалью равен нулю?

669. Определить отношение частот колебаний для трех молекул: водорода, дейтерия и трития.

Примечание. Равновесному положению двух протонов в молекуле отвечает определенное расстояние между ними. Если эти два протона несколько сблизить или удалить от равновесного положения, то возникает сила, возвращающая их в это положение. Она пропорциональна величине отклонения.

670. Найти частоты продольных колебаний бесконечной линейной цепочки одинаковых атомов. В положении равновесия расстояние между атомами равно a . Масса каждого атома равна m . Коэффициент жесткости связи между атомами k .

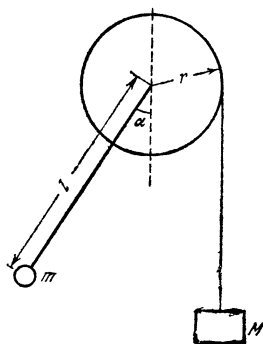


Рис. 234.

§ 26. Электрические колебания

671. Для чего в телефонной трубке нужен постоянный магнит? Почему напряженность магнитного поля этого магнита должна быть больше максимальной напряженности магнитного поля, создаваемого током, проходящим по обмотке катушки телефона?

672. Найти частоту собственных колебаний в контуре, состоящем из соленоида длины $l = 15$ см, площади попереч-

ного сечения $S_1 = 1 \text{ см}^2$ и плоского конденсатора с площадью пластин $S_2 = 6 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d = 0,1 \text{ см}$. Число витков соленоида $N = 1000$.

673. Электрический контур состоит из конденсатора постоянной емкости и катушки, в которую может вдвигаться сердечник. Один сердечник спрессован из порошка магнитного соединения железа (феррита) и является изолятором. Другой сердечник изготовлен из меди. Как изменится частота собственных колебаний контура, если в катушку вдвинуть 1) медный сердечник? 2) сердечник из феррита?

674. Что произойдет, если заряженный конденсатор соединить сверхпроводником с таким же незаряженным конденсатором?

675. На вертикально отклоняющие пластины осциллографа подано напряжение $V_1 = V_{10} \cos \omega t$, а на горизонтально отклоняющие — напряжение $V_2 = V_{20} \cos (\omega t - \varphi)$. Найти траекторию электронного луча на экране осциллографа при разности фаз между напряжениями на пластинах $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi$.

676. На рис. 235 изображена схема, состоящая из батареи E , неоновой лампы N , конденсатора C и сопротивления R . Характеристика неоновой лампы (зависимость тока в лампе от напряжения) имеет вид, изображенный на рис. 236. При малых напряжениях ток через лампу не идет. Когда потен-

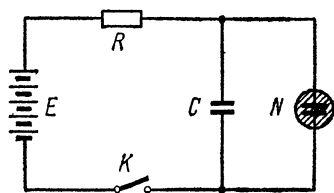


Рис. 235.

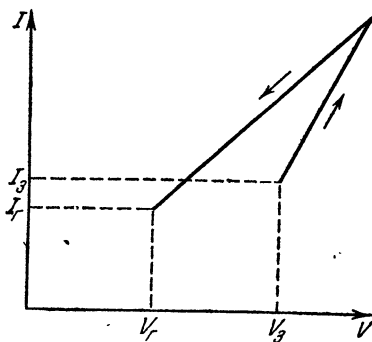


Рис. 236.

циал на лампе достигает величины V_z (потенциал зажигания), лампа вспыхивает, ток скачком достигает конечной величины I_s и в дальнейшем растет пропорционально V . При уменьшении напряжения убывание тока происходит медленнее, чем происходило возрастание. Лампа гаснет при потенциале гашения V_r . Начертить примерную зависи-

мость изменения напряжения на конденсаторе от времени при замыкании ключа K .

677. Как будет изменяться период релаксационных колебаний в схеме с неоновой лампой (см. задачу 676) при изменении емкости конденсатора C и сопротивления R ?

678. Входящий в колебательный контур плоский конденсатор таков, что его пластины могут перемещаться друг относительно друга. Каким образом посредством перемещения пластин осуществить параметрическую раскачку контура?

§ 27. Волны

679. Исходя из соображений размерностей, определить скорость распространения волн на поверхности жидкости с учетом только силы тяжести (длинные гравитационные волны). Предполагается, что глубина жидкости в сосуде $H \gg \lambda$ и амплитуда колебаний частиц в волне $a \ll \lambda$ (λ — длина волны).

680. Исходя из соображений размерностей, определить скорость распространения волн на поверхности жидкости с учетом только сил капиллярности (волны малой длины). Предполагается, что глубина жидкости в сосуде $H \gg \lambda$ и амплитуда колебаний частиц в волне $a \ll \lambda$ (λ — длина волны). Плотность жидкости ρ .

681. На рис. 237 изображено поперечное сечение бесконечно большого сосуда с жидкостью. Слева из среды

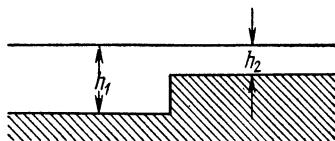


Рис. 237.

с глубиной h_1 под углом ϕ_1 к границе раздела движется плоская волна, длина которой $\lambda \gg h_1$. Под каким углом к границе раздела будет распространяться эта волна в среде, где глубина жидкости h_2 ? Известно, что скорость распространения длинных гравитационных волн в бесконечно большом сосуде равна $c = k\sqrt{gh}$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности, а h — глубина сосуда.

682. Исходя из соображений размерностей, определить с точностью до безразмерного коэффициента скорость распространения продольных волн в упругой среде плотности ρ , модуль Юнга которой равен E .

683. Тонкую струну заменили струной из того же материала, но имеющей вдвое больший диаметр. Во сколько раз нужно изменить натяжение струны, чтобы частота колебаний струны не изменилась?

684. Найти собственные частоты колебаний стальной струны длины $l=50$ см, диаметра $d=1$ мм, если натяжение струны $T=0,1$ Н. Плотность стали $\rho=7,8$ г/см³.

685. Найти собственные частоты колебаний воздушного столба в закрытой с обоих концов трубе, имеющей длину $l=3,4$ м.

686. Над цилиндрическим сосудом высотой 1 м звучит камертон, имеющий собственную частоту колебаний $\nu=340$ Гц. В сосуд медленно наливают воду. При каких положениях уровня воды в сосуде звучание камертона значительно усиливается?

687. Какую форму имеет фронт ударной волны, возникающей в воздухе при полете пули со скоростью, превышающей скорость звука?

688. Реактивный самолет пролетел со скоростью 500 м/с на расстоянии 6 км от человека. На каком расстоянии от человека был самолет, когда человек услышал его звук?

689. Известно, что если источник звука и человек находятся примерно на одной высоте, то в направлении ветра звук слышен лучше, чем в противоположном. Как объяснить это явление?

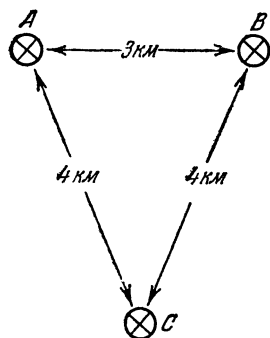


Рис. 238.

690. Почему устойчивый прием телевизионной передачи возможен только в пределах прямой видимости?

691. Радиолокатор работает в импульсном режиме. Частота повторения импульсов $f=1700$ Гц, длительность импульса $\tau=0,8$ мкс. Найти максимальную и минимальную дальность обнаружения цели данным радиолокатором.

692. Антенна телевизора (пункт С на рис. 238) наряду с волной, идущей непосредственно от передающей стан-

ции (пункт *A*), принимает волну, отраженную от железной крыши здания (пункт *B*). Вследствие этого изображение двоится. На сколько сантиметров сдвинуты изображения друг относительно друга, если антенна и крыша здания расположены на расстояниях, указанных на рис. 238? Ширина экрана телевизора $l=50$ см. (Учсть, что изображение в телевизоре разлагается на 625 строк и в секунду передается 25 кадров.)

693. Вибратор, имеющий длину $l=0,5$ м, погружен в сосуд с керосином ($\epsilon=2$). Чему равна в пустоте (по выходе из сосуда) длина электромагнитной волны, излученной данным вибратором?

Глава V. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 28. Фотометрия

694. Круглый зал диаметром $D=30$ м освещается лампой, укрепленной в центре потолка. Найти высоту h зала, если известно, что наименьшая освещенность стены зала в два раза больше наименьшей освещенности пола.

695. На высоте $H=2$ м над серединой круглого стола диаметром $D=3$ м висит лампа в $I_1=100$ кандел. Ее заменили лампой в $I_2=25$ кандел, изменив расстояние до стола так, что освещенность середины стола осталась прежней. Как изменится освещенность края стола?

696. В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника расположены источники света S_1 и S_2 равной силы (рис. 239). Как следует расположить маленькую пластинку A , чтобы освещенность ее была максимальной? Стороны треугольника $AS_1=AS_2=a$.

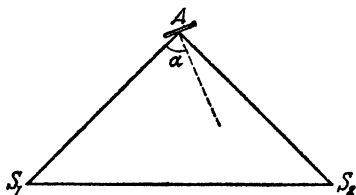


Рис. 239.

697. При определении силы света некоторого источника попытка использовать фотометр не увенчалась успехом,

так как сила света была очень велика и уравнивать освещенность полей фотометра с помощью эталонного источника не удалось даже при положении исследуемого источника на самом краю оптической скамьи. Тогда воспользовались третьим источником, сила света которого была меньше, чем у исследуемого. Эталонный источник давал ту же освещенность полей фотометра, что и третий, находясь на расстоянии $r_1=10$ см от фотометра, в то время как третий находился на расстоянии $r_2=50$ см. Затем эталонный источник заменили

исследуемым и получили равенство освещенностей при расстояниях от фотометра $r_3=40$ см (исследуемый источник) и $r_4=10$ см (вспомогательный источник).

Найти, во сколько раз сила света исследуемого источника больше, чем эталонного.

698. Лампа, имеющая силу света $I=100$ кандел, закреплена на потолке комнаты. Определить суммарный световой поток, падающий на все стены и пол комнаты.

699. На оси полого цилиндра радиуса R_1 помещена раскаленная проволока, длина которой значительно больше высоты цилиндра. Во сколько раз изменится освещенность внутренней поверхности цилиндра, если его радиус станет равным R_2 ($R_2 < R_1$)?

700. На какой высоте следует поместить лампу над центром круглого стола, чтобы на краях стола получить наибольшую освещенность?

701. Почему сквозь папиросную бумагу можно прочесть текст только в том случае, если бумагу непосредственно наложить на страницу книги?

§ 29. Основные законы оптики

702. Почему тень ног на земле резко очерчена, а тень головы более расплывчата? При каких условиях тень всюду будет одинаково отчетлива?

703. Как нужно держать карандаш над столом, чтобы получить резко очерченную тень, если источником света служит закрепленная у потолка лампа дневного света, имеющая форму длинной трубки?

704. Осенью, когда деревья потеряли всю листву, часто можно видеть тени от двух параллельных ветвей. Нижняя ветвь дает резкую темную тень, верхняя — более широкую и светлую. Если две такие тени случайно налагаются друг на друга, мы видим яркую светлую полосу посередине более темной тени, так что эта тень выглядит как бы двойной (рис. 240). Как объяснить это явление? (Миннарт, «Свет и цвет в природе».)

705. Лучи Солнца, проходя сквозь маленькое отверстие в листе на вершине высокого дерева, дают на земле пятно в форме эллипса. Большая и малая оси эллипса равны соответственно $a=12$ см и $b=10$ см. Какова высота

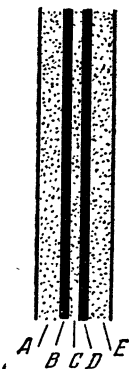


Рис. 240.

H дерева? Угловые размеры солнечного диска $\beta = 1/108$ рад. .

706. Какой наименьшей высоты должно быть плоское зеркало, укрепленное вертикально на стене, чтобы человек мог видеть свое отражение в нем во весь рост, не изменяя положения головы? На каком расстоянии от пола должен быть нижний край зеркала?

707. Солнечные лучи, отражаясь от горизонтально лежащего зеркала, падают на вертикальный экран. На

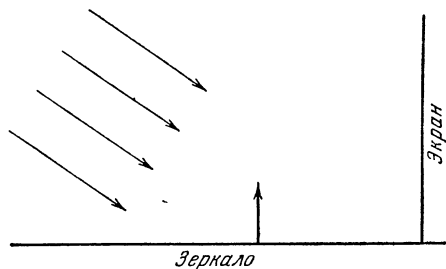


Рис. 241.

зеркале стоит продолговатый предмет (рис. 241). Описать характер тени на экране.

708. При каких условиях форма солнечного «зайчика» от небольшого зеркала не будет зависеть от формы зеркала?

709. Как отличить на фотографии реальный пейзаж от его отражения в спокойной воде?

710. Найти графически, при каких положениях глаза наблюдатель может видеть в зеркале конечных размеров изображение отрезка прямой, расположенного относительно зеркала так, как указано на рис. 242.



Рис. 242.

711. Плоское зеркало расположено параллельно стене на расстоянии l от нее. Свет от укрепленного на стене точечного источника падает на зеркало и, отражаясь, дает на стене «зайчик». С какой скоростью будет двигаться «зайчик» по стене, если приближать к ней зеркало со скоростью v ? Как будут меняться размеры «зайчика»?

712. Используя условие задачи 711, определить, будет ли меняться при движении зеркала освещенность стены в том

месте, где находится «зайчик». Считать размеры зеркала много меньшими расстояния от зеркала до источника света.

713. Плоское зеркало вращается с постоянной угловой скоростью. Число оборотов в секунду $n=0,5$. С какой скоростью будет перемещаться «зайчик» по сферическому экрану радиуса 10 м, если зеркало находится в центре кривизны экрана?

714. Опыты А. А. Белопольского по экспериментальному исследованию оптического явления Допплера состояли в наблюдении света, многократно отраженного от движущихся зеркал (рис. 243). Зеркала размещались на вращающихся в разные стороны дисках.

1) Зная угловую скорость ω вращения дисков, найти угловую скорость Ω поворота луча, испытавшего n последовательных отражений от зеркал.

2) Найти линейную скорость n -го изображения в момент, когда зеркала параллельны друг другу и их отражающие участки движутся со скоростью v в разные стороны.

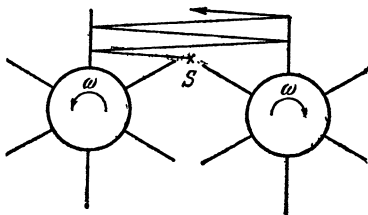


Рис. 243.

715. Решить задачу 714 при условии, что диски вращаются в одну сторону.

716. Узкий пучок света S падает на двугранный угол $\alpha=60^\circ$, образованный одинаковыми плоскими зеркалами OM и ON , закрепленными на оси O (рис. 244). После отражения от зеркал свет фокусируется линзой L и попадает в неподвижный приемник $П$. Зеркала вращаются с постоянной угловой скоростью.

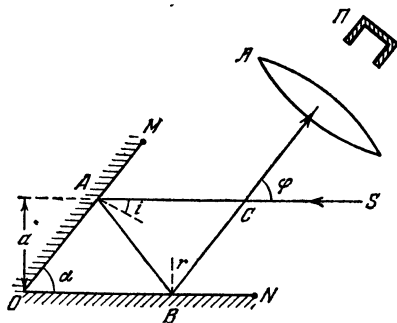


Рис. 244.

Какая часть световой энергии пучка за время, много большее периода вращения, достигнет приемника,

если пучок проходит на расстоянии a от оси, равном половине длины зеркала OM ?

717. Можно ли вместо обычного экрана для показа кино использовать плоское зеркало?

718. Два плоских зеркала AO и OB образуют двугранный угол $\varphi = 2\pi/n$, где n — целое число. Точечный источник света S находится между зеркалами на равном расстоянии от каждого из них. Найти число изображений источника в зеркалах.

719. Два плоских зеркала AO и OB образуют произвольный двугранный угол $\varphi = 2\pi/a$, где a — любое число, большее 2. Точечный источник света S находится между зеркалами на равном расстоянии от каждого из них. Найти число изображений источника в зеркалах.

720. В каком направлении нужно пустить луч света из точки A (рис. 245), находящейся внутри зеркального ящика, чтобы он попал в точку B , отразившись по одному разу от всех четырех стенок? Точки A и B находятся в одной плоскости, перпендикулярной стенкам ящика (т. е. в плоскости рисунка).

721. Почему, если с самолета, летящего над морем, смотреть вниз, кажется, что вода гораздо темнее непосредственно внизу, чем на горизонте?

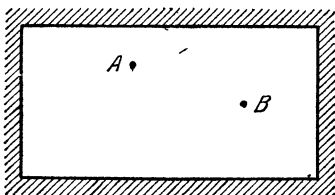


Рис. 245.

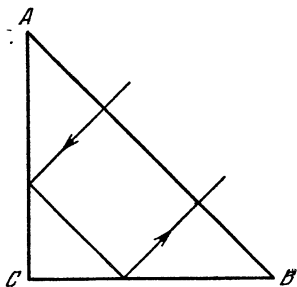


Рис. 246.

722. На какое расстояние сместится луч, проходящий через плоскопараллельную пластинку, если толщина ее d , показатель преломления n , а угол падения луча i ? Может ли смещение луча быть больше толщины пластинки?

723. При каких значениях показателя преломления прямоугольной призмы возможен ход луча, изображенный на рис. 246? Сечение призмы — равнобедренный треугольник; луч падает на грань AB нормально.

724. В воду опущен прямоугольный стеклянный клин. Показатель преломления стекла $n_1 = 1,5$. При каких зна-

чения угла α (рис. 247) луч света, падающий нормально на грань AB , целиком достигнет грани AC ?

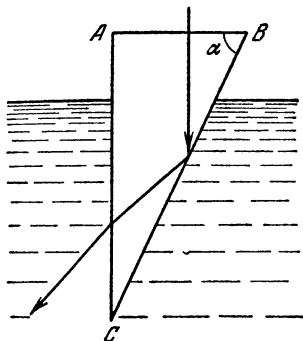


Рис. 247.

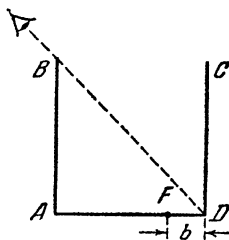


Рис. 248.

725. В ясные солнечные дни на загородных асфальтированных шоссе водители автомашин часто наблюдают такую картину: некоторые участки асфальта, находящиеся впереди автомашины на расстоянии около 80—100 м, кажутся покрытыми лужами. Когда водитель подъезжает ближе к этому месту, лужи исчезают и снова появляются впереди на других местах, примерно на том же расстоянии. Как объясняется это явление?

726. Толстая пластина сделана из прозрачного материала, показатель преломления которого изменяется от значения n_1 на верхней грани до значения n_2 на нижней грани. Луч входит в пластину под углом α . Под каким углом луч выйдет из пластины?

727. Кубический сосуд с непрозрачными стенками расположен так, что глаз наблюдателя не видит его дна, но полностью видит стенку CD (рис. 248). Какое количество воды нужно налить в сосуд, чтобы наблюдатель смог увидеть предмет F , находящийся на расстоянии $b=10$ см от угла D ? Ребро сосуда $a=40$ см.

728. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно ей. Найти угол φ между лучом падающим и лучом, вышедшим из призмы. Показатель преломления стекла $n=1,5$.

729. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из равных граней посеребрена. Луч падает нормально на другую, не посеребренную

грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найти углы призмы.

730. Падающий на грань призмы луч выходит после преломления через смежную грань. Каково максимально допустимое значение преломляющего угла призмы α , если она сделана из стекла с показателем преломления $n=1,5$?

731. Луч света входит в стеклянную призму под углом α и выходит из призмы в воздух под углом β , причем, пройдя призму, отклоняется от первоначального направления на угол γ . Найти преломляющий угол призмы φ и показатель преломления материала, из которого она сделана.

732. Стороны призмы $ABCD$, изготовленной из стекла с показателем преломления n , образуют двугранные углы: $\angle A=90^\circ$, $\angle B=75^\circ$, $\angle C=135^\circ$, $\angle D=60^\circ$ (призма $Aббе$). Луч света падает на грань AB и после полного отражения от грани BC выходит через грань AD . Найти угол падения α луча на грань AB , если известно, что луч, прошедший через призму, перпендикулярен падающему лучу.

733. Если лист бумаги полить канцелярским клеем или водой, то сквозь бумагу можно будет прочесть текст, напечатанный на другой стороне листа. Объясните, почему?

734. Пучок параллельных лучей падает на плоскопараллельную бесконечную прозрачную пластину. При каждом прохождении границы раздела двух сред доля отраженной энергии равна p , т. е. $E_{\text{отраж}} = pE_{\text{падающ}}$, а поглощение в материале пластины отсутствует. Какой частью полной энергии падающего пучка обладает прошедший свет?

§ 30. Линзы и сферические зеркала

735. Светящаяся точка движется по оси вогнутого сферического зеркала, приближаясь к нему. При каких расстояниях точки от зеркала расстояние между точкой и ее изображением в зеркале будет равно $0,75R$, где R — радиус кривизны зеркала?

• 736. Плоско-выпуклая собирательная линза изготовлена из стекла с показателем преломления $n=1,5$. Определить соотношение между фокусным расстоянием этой линзы f и радиусом кривизны ее выпуклой поверхности R .

737. Преломляющие поверхности линзы являются concentрическими сферическими поверхностями. Большой радиус кривизны $R=20$ см, толщина линзы $l=2$ см, показатель преломления стекла $n=1,6$. Собирающей или рассеивающей будет линза? Найти ее фокусное расстояние.

738. Двояковыпуклая линза, сделанная из стекла с показателем преломления $n=1,6$, имеет фокусное расстояние $f=10$ см. Чему будет равно фокусное расстояние этой линзы, если ее поместить в прозрачную среду, имеющую показатель преломления $n_1=1,5$? Найти фокусное расстояние этой линзы в среде с показателем преломления $n_2=1,7$.

739. Короткая металлическая трубка закрыта с одного конца плоско-выпуклой линзой, а с другого — тонкой плоскопараллельной пластинкой. Система погружена в жидкость с показателем преломления n_1 . Найти фокусное расстояние системы, если радиус кривизны поверхности линзы равен R и она изготовлена из вещества с показателем преломления n_2 .

740. Тонкая стеклянная линза имеет оптическую силу $D=5$ диоптрий. Когда эту линзу погружают в жидкость с показателем преломления n_2 , она действует как рассеивающая с фокусным расстоянием $f=100$ см. Определить показатель преломления n_2 жидкости, если показатель преломления стекла линзы $n_1=1,5$.

741. Двояковыпуклая стеклянная линза с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей имеет в воздухе фокусное расстояние F_1 , а в воде F_2 . На каких расстояниях F' и F'' от линзы находятся ее фокусы, когда линза расположена на границе воздуха и воды? Показатель преломления воздуха равен единице, воды $n=4/3$.

742. Расстояние между двумя точечными источниками света $l=24$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f=9$ см, чтобы изображения обоих источников получились в одной и той же точке?

743. Высота пламени свечи 5 см. Линза дает на экране изображение этого пламени высотой 15 см. Не трогая линзы, свечу отодвинули на $l=1,5$ см дальше от линзы и, передвинув экран, вновь получили резкое изображение пламени высотой 10 см. Определить главное фокусное расстояние линзы.

5 744. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу таким образом, что продолжения всех лучей пересекаются в точке, лежащей на оптической оси линзы на расстоянии $b=15$ см от нее. Найти фокусное расстояние линзы в двух случаях:

1) после преломления в линзе лучи собираются в точке, находящейся на расстоянии $a_1=60$ см от линзы;

2) продолжения преломленных лучей пересекаются в точке, находящейся перед линзой на расстоянии $a_2=60$ см от нее.

745. Расстояние между электрической лампочкой и экраном $d=1$ м. При каких положениях собирающей линзы с фокусным расстоянием $f=21$ см изображение нити лампочки будет отчетливым? Можно ли получить изображение, если фокусное расстояние $f'=26$ см?

746. Тонкая собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения равна h_1 . Не меняя расстояния между предметом и экраном, перемещают линзу и находят, что высота второго четкого изображения равна h_2 . Определить высоту H самого предмета.

747. Источник света расположен на некоторой высоте над водоемом. Линза, изготовленная из стекла с показателем преломления $n=3/2$, помещена в воду ($n_1=4/3$) и дает на дне резкие изображения источника, когда расположена на расстоянии $f_1=20$ см или $f_2=80$ см от дна. Найти фокусное расстояние такой линзы в воздухе.

748. Каков радиус R вогнутого зеркала, находящегося на расстоянии $a=2$ м от лица, если человек видит в нем свое изображение в полтора раза большим, чем в плоском зеркале, находящемся на том же расстоянии от лица?

749. На рис. 249 изображен луч AB , прошедший сквозь рассеивающую линзу. Построить ход луча до линзы, если положение ее фокусов F известно.

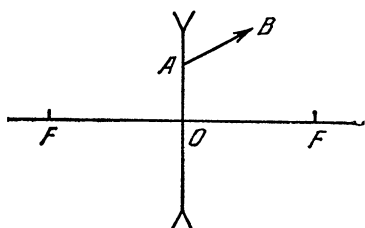


Рис. 249.

• B

• A



Рис. 250.

750. На рис. 250 изображена светящаяся точка и ее изображение, даваемое линзой, оптическая ось которой N_1N_2 . Найти положение линзы и ее фокусов.

- 7 751. На заданной оптической оси N_1N_2 линзы найти построением оптический центр линзы и ее главные фокусы,

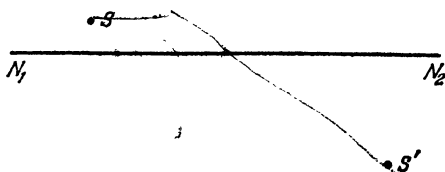


Рис. 251.

если известно положение источника S и положение изображения S' (рис. 251).

752. Дано положение оптической оси N_1N_2 , ход луча AB , падающего на линзу, и преломленный луч BC (рис. 252). Найти построением положение главных фокусов линзы.

753. Собирающая линза дает изображение источника в точке S' на главной оптической оси. Положение центра линзы O и ее фокусов F известно, причем $OF < OS'$. Найти построением положение источника S .

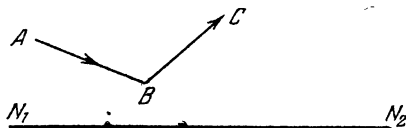


Рис. 252.

754. Точка S' есть изображение точечного источника света в сферическом зеркале, оптическая ось которого N_1N_2 (рис. 253). Найти построением положение центра зеркала и его фокуса.

• S

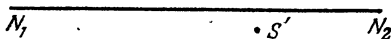


Рис. 253.

755. Дано положение оптической оси N_1N_2 сферического зеркала, расположение источника и изображения

(рис. 254). Найти построением положения центра зеркала, его фокуса и полюса для случаев:

- 1) A — источник, B — изображение;
- 2) B — источник, A — изображение.

• B

• A



Рис. 254.

756. Точечный источник света, помещенный на некотором расстоянии от экрана, создает в центре экрана освещенность 2,25 лк. Как изменится эта освещенность, если по другую сторону источника на таком же расстоянии поместить

- 1) бесконечное плоское зеркало, параллельное экрану?
- 2) вогнутое зеркало, центр которого совпадает с центром экрана?
- 3) выпуклое зеркало такого же радиуса кривизны, как и вогнутое?



Рис. 255.

757. Желая получить снимок зебры, фотограф снял белого осла, надев на объектив фотоаппарата стекло с черными полосками. Что получилось на снимке?

758. Из стекла двух сортов выполнена слоистая линза, изображенная на рис. 255. Какое изображение даст эта линза в случае точечного источника, расположенного на оптической оси? Отражение света на границе слоев не учитывать.

759. Видимые размеры дисков Солнца и Луны у горизонта кажутся увеличенными по сравнению с их видимыми размерами в зените. Как можно с помощью линзы экспериментально доказать, что это увеличение является кажущимся?

§ 31. Оптические системы и оптические приборы

760. На собирающую линзу с фокусным расстоянием 40 см падает параллельный пучок лучей. Где следует поместить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 15 см, чтобы пучок лучей после прохождения двух линз остался параллельным?

761. На каком расстоянии от двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $f=1$ м нужно поместить вогнутое сферическое зеркало, имеющее радиус кривизны $R=1$ м, чтобы луч, падающий на линзу параллельно главной оптической оси системы, после отражения от зеркала вышел из линзы, оставаясь параллельным оптической оси? Найти изображения предмета, даваемые данной оптической системой.

762. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $f_1=20$ см и $f_2=10$ см. Расстояние между линзами $d=30$ см. Предмет находится на расстоянии $a_1=30$ см от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение?

763. Определить фокусное расстояние оптической системы, состоящей из двух тонких линз: рассеивающей с фокусным расстоянием f_1 и собирающей с фокусным расстоянием f_2 . Линзы расположены вплотную друг к другу. Оптические оси линз совпадают.

764. Две одинаковые рассеивающие линзы помещены на одной оси так, что передний фокус одной и задний фокус другой располагаются в одной и той же точке A оси. Третью линзу располагают на той же оси так, что в точке A находится ее оптический центр. Фокусное расстояние третьей линзы таково, что система дает действительное изображение любого предмета, расположенного вне системы на ее оси. Какое увеличение дает система, когда расстояние между предметом и его изображением наименьшее?

765. Параллельный пучок света падает на систему из трех тонких линз с общей оптической осью. Фокусные расстояния линз соответственно равны $f_1=+10$ см, $f_2=-20$ см и $f_3=+9$ см. Расстояние между первой и второй линзами 15 см, между второй и третьей 5 см. Определить положение точки схождения пучка по выходе из системы линз.

766. Некоторая оптическая система создает действительное изображение источника в точке A . Размер изображения 1 мм. Другая оптическая система состоит из двух собирающих линз, расположенных так, что центр одной совпадает с фокусом другой и наоборот. Вторую систему располагают на одной оси с первой так, что точка A оказывается посередине между линзами. Найти размер изображения, образованного второй системой.

767. Система состоит из двух линз с одинаковыми по абсолютной величине фокусными расстояниями. Одна из линз собирающая, другая рассеивающая. Линзы располо-

жены на одной оси на некотором расстоянии друг от друга. Известно, что если поменять линзы местами, то действительное изображение Луны, даваемое этой системой, сместится на $l=20$ см. Найти фокусное расстояние каждой из линз.

768. Каким должно быть фокусное расстояние F_x собирающей линзы, которая давала бы точно такое же по величине изображение Луны, как и система из двух линз, упомянутая в задаче 767? Расстояние между линзами $a=4$ см.

769. При каком из двух расположений линз, указанных в задаче 767, размеры действительного изображения Луны будут больше?

770. Линза с фокусным расстоянием $f=30$ см дает на экране четкое изображение предмета, расположенного на расстоянии $a=40$ см от линзы. Между линзой и предметом перпендикулярно оптической оси линзы поместили плоскопараллельную пластинку толщиной $d=9$ см. На какое расстояние нужно сместить экран, чтобы изображение предмета на нем осталось четким?

Показатель преломления стекла пластинки $n=1,8$.

771. Предмет AB находится на расстоянии $a=36$ см от линзы с фокусным расстоянием $f=30$ см. На расстоянии $l=1$ м за линзой расположено плоское зеркало, повернутое по отношению к оптической оси линзы на 45° (рис. 256).

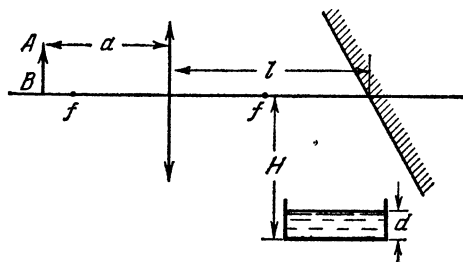


Рис. 256.

На каком расстоянии H от оптической оси нужно поместить дно кюветы с водой, чтобы получить на нем отчетливое изображение предмета? Толщина слоя воды в кювете $d=20$ см.

772. Стекланный клин с малым преломляющим углом α расположен на некотором расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием f , причем одна из поверхностей клина перпендикулярна оптической оси линзы. По другую сторону линзы в ее фокусе находится точечный источник

света. Отраженные от клина лучи дают после преломления в линзе два изображения источника, смещенные друг относительно друга на d . Найти показатель преломления стекла клина.

773. Вогнутое зеркало имеет форму полусферы радиусом $R=55$ см. В это зеркало налит тонкий слой неизвестной прозрачной жидкости. При этом оказалось, что данная оптическая система при некотором положении источника дает два действительных изображения, одно из которых совпадает с самим источником, а другое отстоит от него на расстояние $l=30$ см. Найти показатель преломления n жидкости.

774. Двояковыпуклая линза имеет фокусное расстояние $f_1=10$ см. Одна из поверхностей линзы, имеющая радиус кривизны $R=10$ см, посеребрена. Построить изображение предмета, даваемое данной оптической системой, и найти положение изображения, если предмет находится на расстоянии $a=15$ см от линзы.

775. Плоско-выпуклая линза из стекла (показатель преломления n) с посеребренной плоской стороной имеет фокусное расстояние F_1 . Какое фокусное расстояние будет иметь та же линза, если посеребрить не плоскую, а выпуклую сторону?

776. На плоской поверхности массивного куска стекла (показатель преломления n) вырезано углубление в виде шарового сегмента. Вынутый из углубления кусок стекла представляет собой тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f . Найти фокусные расстояния f_1 и f_2 получившейся сферической поверхности.

777. На прозрачный шар, имеющий радиус R и показатель преломления n , падает в направлении одного из диаметров узкий параллельный пучок световых лучей. На каком расстоянии f от центра шара лучи будут сфокусированы?

778. Алмазный шарик ($n=2,4$) радиуса R посеребрен с задней стороны. На каком расстоянии d перед шариком должен быть расположен точечный источник света, чтобы лучи, преломившись на передней поверхности, отразившись от задней и вновь преломившись на передней, образовали изображение, совпадающее с источником?

779. Найти положение главных плоскостей прозрачного шара, используемого в качестве линзы.

780. Предмет находится на расстоянии $d=2,5$ см от поверхности стеклянного шара, имеющего радиус $R=10$ см. Найти положение изображения, даваемого шаром. Показатель преломления стекла $n=1,5$.

781. Сферическая колба, толщина стенок которой ΔR значительно меньше ее радиуса R , изготовлена из стекла с показателем преломления n . Считая эту колбу оптической системой и рассматривая лишь лучи, близкие к прямой, проходящей через центр сферы, определить положение фокусов и главных плоскостей системы.

782. На капельку воды сферической формы под углом i падает луч света. Найти угол θ отклонения луча от первоначального направления в случае однократного отражения от внутренней поверхности капли.

783. На капельку воды сферической формы падает параллельный пучок лучей.

1) Вычислить значения углов θ отклонения лучей от первоначального направления для различных углов падения: 0; 20; 40; 50; 55; 60; 65; 70°.

2) Построить график зависимости θ от i и по графику найти приближенное значение угла наименьшего отклонения $\theta_{\min}$.

3) Определить, вблизи каких значений угла θ лучи, вышедшие из капли, идут приблизительно параллельно.

Показатель преломления воды считать равным $n=1,333$. (Это значение n имеет место для красных лучей.)

784. Почему в тех фотоаппаратах, в которых при наводке на резкость употребляется матовое стекло, не пользуются прозрачным стеклом?

785. Два фонаря одинаковой яркости находятся на разных расстояниях от наблюдателя.

1) Будут ли они казаться наблюдателю одинаково яркими?

2) Будут ли их изображения на фотографиях одинаково яркими, если фонари сфотографировать на разных кадрах, чтобы изображения были в фокусе?

786. Один и тот же объект фотографируют с небольшого расстояния двумя фотоаппаратами, имеющими одинаковую светосилу, но различные фокусные расстояния. Одинаковы ли должны быть выдержки?

787. При помощи линзы последовательно получают два изображения одного и того же предмета с увеличениями $k_1=5$ и $k_2=2$. Во сколько раз изменилась освещенность экрана в месте получения изображения с переходом от одного увеличения к другому?

788. Точечный источник света расположен на оси рассеивающей линзы на расстоянии $a=30$ см от нее. На экране, расположенном по другую сторону линзы на расстоянии

$l=10$ см, получается световое пятно. Если увеличить расстояние между линзой и экраном в 4 раза, то освещенность центра пятна уменьшится во столько же раз. Найти фокусное расстояние линзы.

789. Расстояние от точечного источника до собирающей линзы $d=30$ см, от линзы до экрана $l=60$ см. Известно, что освещенность центра светового пятна на экране увеличится в $n=4$ раза, если экран придвинуть вплотную к линзе. Определить фокусное расстояние линзы.

790. Небольшое количество непрозрачной жидкости покрывает посеребренный участок на дне черного сферического сосуда, в центре которого расположен точечный источник света. Когда жидкость заменили на прозрачную, освещенность верхней точки сосуда увеличилась на 25%. Определить показатель преломления прозрачной жидкости.

791. Линзы, о которых говорится в задаче 767, имеют одинаковые диаметры. Сравнить освещенности изображений Луны в случаях первого и второго расположений и при применении эквивалентной линзы.

792. Можно заметить, что освещенная заходящим Солнцем белая стена кажется ярче поверхности Луны, находящейся на той же высоте над горизонтом, что и Солнце. Означает ли это, что поверхность Луны состоит из темных пород? (Миннарт, «Свет и цвет в природе».)

793. Почему, открыв глаза под водой, мы видим только туманные очертания предметов, а в маске для ныряния предметы видны совершенно отчетливо?

794. Близорукий человек, пределы аккомодации глаза которого лежат между $a_1=12$ см и $a_2=60$ см, носит очки, с помощью которых может хорошо видеть удаленные предметы. Определить, на каком наименьшем расстоянии a_3 может этот человек читать книгу в очках.

795. Два человека, дальнозоркий и близорукий, надев свои очки, видят так же, как человек с нормальным зрением. Однажды они случайно поменялись очками. Надев очки близорукое, дальнозоркий обнаружил, что он может отчетливо видеть только бесконечно удаленные предметы. На каком наименьшем расстоянии a сможет читать мелкий шрифт близорукий в очках дальнозоркого?

796. Предмет рассматривают невооруженным глазом с расстояния D . Каково будет угловое увеличение, если тот же предмет рассматривать в лупу, расположенную на расстоянии l от глаза и помещенную таким образом, что изображение находится на расстоянии L от глаза? Фокусное

расстояние линзы равно f . Рассмотреть случаи: 1) $L = \infty$; 2) $L = D$.

797. У оптической трубы, установленной на бесконечность, вынули объектив и заменили его диафрагмой диаметра D . При этом на некотором расстоянии от окуляра на экране получилось действительное изображение диафрагмы, имеющее диаметр d . Чему было равно увеличение трубы?

798. При изготовлении двухлинзового объектива фотокамеры конструктор использовал рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $f_1 = 5$ см, поместив ее на расстоянии $l = 45$ см от пленки. Где необходимо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f_2 = 8$ см, чтобы на пленке получалось резкое изображение удаленных предметов?

799. Для трех различных расположений линз, найденных в задаче 798, рассчитать диаметр D изображения Луны на негативе. Поперечник Луны виден с Земли в среднем под углом $\varphi = 31'5'' \approx 0,9 \cdot 10^{-2}$ рад.

800. Главное фокусное расстояние объектива микроскопа $f_{об} = 3$ мм, окуляра $f_{ок} = 5$ см. Предмет находится от объектива на расстоянии $a = 3,1$ мм. Найти увеличение микроскопа для нормального глаза. Рассмотреть случаи: 1) изображение располагается на расстоянии $D = 25$ см; 2) в глаз из окуляра идут параллельные пучки лучей.

Глава VI. ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 32. Интерференция света

801. Две световые волны, налагаясь друг на друга в определенном участке пространства, взаимно погашаются. Означает ли это, что световая энергия превращается в другие формы?

802. Два когерентных источника света S_1 и S_2 , расположены на расстоянии l друг от друга. На расстоянии $D \gg l$ от источников помещается экран (рис. 257). Найти расстояние

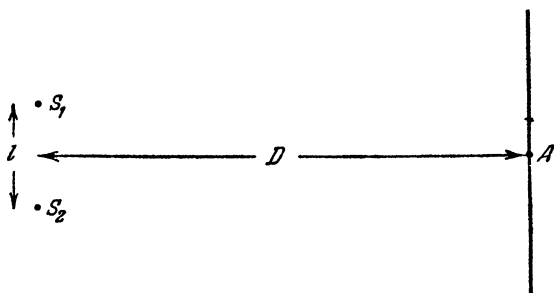


Рис. 257.

между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана (точка A), если источники посылают свет длины волны λ .

803. Два плоских зеркала образуют между собой угол, близкий к 180° (рис. 258). На равных расстояниях b от зеркал расположен источник света S . Определить интервал между соседними интерференционными полосами на экране MN , расположенном на расстоянии $OA=a$ от точки пере-

сечения зеркал. Длина световой волны известна и равна λ . (Ширма C препятствует непосредственному попаданию света источника на экран.)

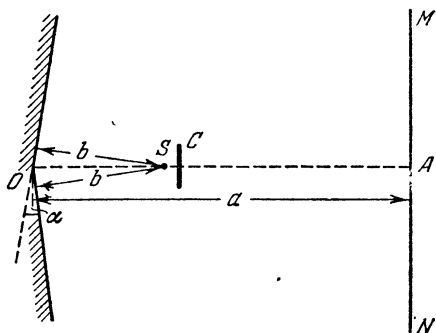


Рис. 258.

804. Интерференционный опыт Ллойда состоял в получении на экране картины от источника S и его мнимого изображения S' в зеркале AO (рис. 259). Чем будет отличаться

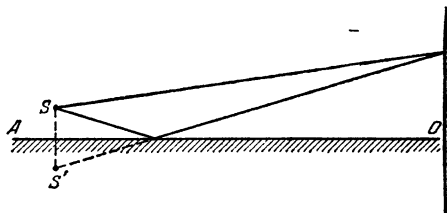


Рис. 259.

интерференционная картина от источников S и S' по сравнению с картиной, рассмотренной в задаче 802?

805. Два точечных когерентных источника, расстояние между которыми $l \gg \lambda$, расположены на прямой, перпендикулярной экрану. Ближайший источник находится от экрана на расстоянии $D \gg \lambda$. Какой вид будут иметь интерференционные полосы на экране? Каково расстояние на экране от перпендикуляра до ближайшей светлой полосы (при условии $l = n\lambda$, n — целое число)?

806. Найти радиус r_k для k -го светлого кольца (см. задачу 805) при условии, что $D = l = n\lambda$, $n \gg 1$, $k = n, n-1, n-2, \dots$

807. Как практически можно осуществить опыт, описанный в задаче 805?

808. На бипризму Френеля, изображенную на рис. 260, падает свет от источника S . Световые пучки, преломленные различными гранями призмы, частично перекрываются и дают на экране на участке AB интерференционную картину. Найти расстояние между соседними интерференционными полосами, если расстояние от источника до призмы $a=1$ м, а от призмы до экрана $b=4$ м; преломляющий угол

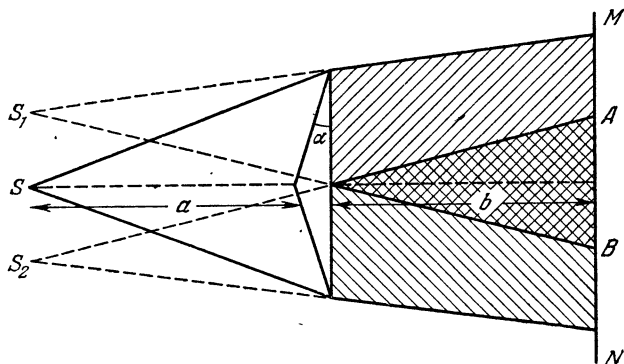


Рис. 260.

призмы $\alpha=2 \cdot 10^{-3}$ рад. Стекло, из которого изготовлена призма, имеет показатель преломления $n=1,5$. Длина световой волны $\lambda \doteq 6000 \text{ \AA}$.

809. Сколько интерференционных полос наблюдается на экране в установке с бипризмой, описанной в предыдущей задаче?

810. Трудность изготовления бипризмы с углом, близким к 180° (см. задачу 808), заставляет прибегнуть к следующему приему. Бипризма с углом β , сильно отличающимся от 180° , помещается в сосуд, заполненный жидкостью с показателем преломления n_1 , или является одной из стенок этого сосуда (рис. 261). Рассчитать угол δ эквивалентной бипризмы, находящейся в воздухе. Показатель преломления вещества призмы n_2 . Произвести вычисления для $n_1=1,5$ (бензол), $n_2=1,52$ (стекло), $\beta=170^\circ$.

811. Собирающая линза, имеющая фокусное расстояние $f=10$ см, разрезана пополам, и половинки раздвинуты на расстояние $d=0,5$ мм (билинза). Оценить число интерферен-

ционных полос на экране, расположенном за линзой на расстоянии $D=60$ см, если перед линзой имеется точечный источник монохроматического света ($\lambda=5000 \text{ \AA}$), удаленный от нее на $a=15$ см.

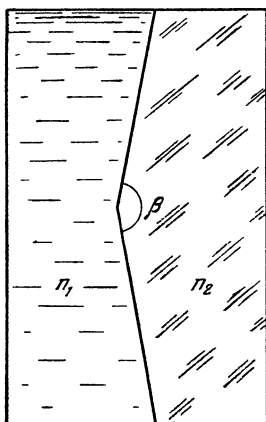


Рис. 261.

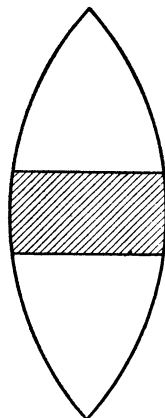


Рис. 262.

812. Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $f=10$ см вырезана центральная часть ширины $d=0,5$ мм, как показано на рис. 262. Обе половины сдвинуты вплотную. На линзу падает монохроматический свет ($\lambda=5000 \text{ \AA}$) от точечного источника, расположенного на расстоянии $a=5$ см от линзы. На каком расстоянии с противоположной стороны линзы нужно поместить экран, чтобы на нем можно было наблюдать три интерференционные полосы? Чему равно максимально возможное число интерференционных полос, которое можно наблюдать в данной установке?

813. Найти расстояние между соседними полосами интерференционной картины, даваемой линзой радиуса $R=1$ см, которая описана в задаче 812, при условии, что это расстояние не зависит от положения экрана. При каком положении экрана число интерференционных полос будет максимальным? Источник света дает монохроматический свет длины волны $\lambda=5000 \text{ \AA}$.

814. Что произойдет с интерференционной картиной в установке, описанной в задаче 812, если ввести в световой пучок, прошедший верхнюю половину линзы, плоскопараллельную стеклянную пластинку толщины $d_1=0,11$ см, а в световой пучок, прошедший нижнюю половину линзы,

пластинку толщины $d_2=0,1$ см? Показатель преломления стекла $n=1,5$. Пластины располагаются нормально к проходящим сквозь них световым пучкам.

815. Почему кольца Ньютона образуются только вследствие интерференции лучей 2 и 3, отраженных от границ воздушной прослойки между линзой и стеклом (рис. 263),

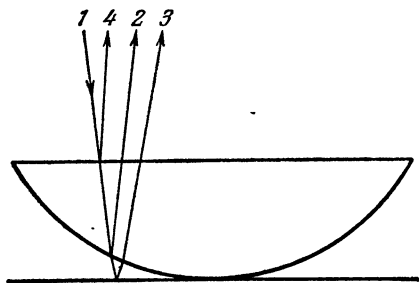


Рис. 263.

а луч 4, отраженный от плоской грани линзы, не влияет на характер интерференционной картины?

816. Изменится ли характер интерференционной картины в установке, которая описана в задаче 803, если ширму С убрать? Расстояние a считать большим (равным 1 м). Излучаемые источником волны не являются монохроматическими.

817. В каком случае кольца Ньютона видны более отчетливо: в отраженном свете или же в проходящем?

818. Контакт между плоско-выпуклой линзой и стеклянной пластинкой, на которую она положена, отсутствует вследствие попадания пыли. Радиус пятого темного кольца Ньютона равен при этом $r_1=0,08$ см. Если пыль удалить, то радиус этого кольца увеличится до $r_2=0,1$ см. Найти толщину слоя пыли d , если радиус кривизны выпуклой поверхности линзы $R=10$ см.

819. На поверхность двояковогнутой линзы, имеющую радиус кривизны R_1 , положена своей выпуклой стороной плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны поверхности $R_2 < R_1$. Найти радиусы колец Ньютона, возникающих вокруг точки соприкосновения линз, если на систему падает нормально монохроматический свет длины волны λ .

820. Чтобы уменьшить коэффициент отражения света от оптических стекол, на их поверхность наносят тонкий слой прозрачного вещества, у которого показатель преломле-

ния n меньше, чем у стекла. (Так называемый «метод просветления оптики».) Оцените толщину наносимого слоя, считая, что световые лучи падают на оптическое стекло приблизительно нормально.

821. Нормальный глаз способен различать оттенки в цвете при разности длин волн в $100 \text{ \AA}$. Учтявая это, оценить максимальную толщину тонкого воздушного слоя, при которой можно наблюдать в белом свете интерференционную картину, вызванную наложением лучей, отраженных от границ этого слоя.

822. На тонкий стеклянный клин от удаленного источника почти нормально падает поток монохроматических волн длины волны λ . На расстоянии d от клина расположен экран, на который линза с фокусным расстоянием f проецирует возникающую в клине интерференционную картину. Расстояние между интерференционными полосами на экране Δl известно. Найти угол α клина, если показатель преломления стекла равен n .

§ 33. Дифракция света

823. Вычислить радиусы зон Френеля сферической волны радиуса a для точки B , отстоящей от источника монохроматических волн длины волны λ на расстояние $a+b$, учитывая, что $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$.

824. Вычислить радиусы зон Френеля плоской волны для точки B , отстоящей от фронта волны на расстояние $b \gg \lambda$, где λ — длина волны источника.

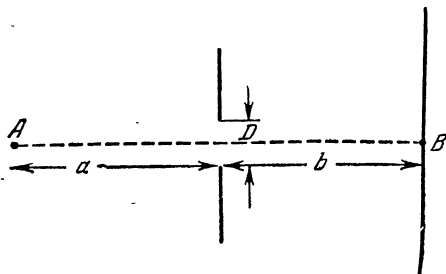


Рис. 264.

825. Точечный источник монохроматического света длины волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ находится на расстоянии $a = 6,75 \text{ м}$ от ширмы с отверстием диаметра $D = 4,5 \text{ мм}$. На расстоянии

$b=a$ от ширмы расположен экран (рис. 264). Как изменится освещенность в точке B экрана, лежащей на оси пучка, если диаметр отверстия увеличить до $D_1=5,2$ мм?

826. Как согласовать с законом сохранения энергии тот факт, что увеличение отверстия (см. условие задачи 825) может привести к уменьшению освещенности на оси пучка? Ведь при увеличении отверстия полный световой поток, проникающий за ширму, возрастает.

827. Плоская световая волна ($\lambda=6000 \text{ \AA}$) падает на ширму с круглой диафрагмой. На расстоянии $b=2$ м за диафрагмой расположен экран. При каком диаметре D диафрагмы освещенность экрана в точке B , лежащей на оси светового пучка, будет максимальна?

828. Считая расстояния от источника до ширмы и от ширмы до экрана примерно одинаковыми и равными a , оценить, при каких условиях дифракция световых волн длины λ на отверстии в ширме будет выражена достаточно отчетливо (интенсивность на оси пучка будет зависеть от диаметра отверстия).

829. Показать, что за круглым экраном C в точке B (рис. 265) будет наблюдаться светлое пятно, если размеры экрана достаточно малы.

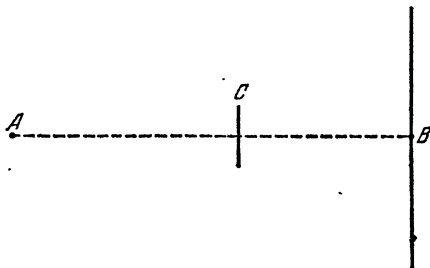


Рис. 265.

830. На каком расстоянии друг от друга должны находиться два человека для того, чтобы глаз смог различить их с расстояния около 11 км? Разрешающая способность нормального глаза составляет примерно $1'$.

831. Плоская световая волна (длина волны λ) падает нормально на узкую щель ширины b . Определить направления на минимумы освещенности.

832. Определить оптимальные размеры отверстия «дырочной камеры» в зависимости от длины волны, т. е. радиус отверстия r , при котором точечный источник изобразится

на стенке камеры кружком минимального диаметра, если расстояние от источника света до камеры велико по сравнению с ее глубиной d . Направления на минимумы освещенности по порядку величины определяются той же формулой, что и в случае щели (см. задачу 831), только вместо ширины щели b нужно взять диаметр отверстия $2r$.

833. На дифракционную решетку, имеющую период $d=4 \cdot 10^{-4}$ см, нормально падает монохроматическая волна. Оценить длину волны λ , если угол между спектрами второго и третьего порядков $\alpha=2^\circ 30'$. Углы отклонения считать малыми.

834. На дифракционную решетку, имеющую 500 штрихов на миллиметр, падает плоская монохроматическая волна ($\lambda=5 \cdot 10^{-6}$ см). Определить наибольший порядок спектра k , который можно наблюдать при нормальном падении лучей на решетку.

835. Определить постоянную решетки d , способной анализировать инфракрасное излучение с длинами волн до $\lambda=2 \cdot 10^{-2}$ см. Излучение падает на решетку нормально.

836. На дифракционную решетку, имеющую период $d=4 \cdot 10^{-4}$ см, падает нормально монохроматическая волна. За решеткой расположена линза, имеющая фокусное расстояние $f=40$ см, которая дает изображение дифракционной картины на экране. Определить длину волны λ , если первый максимум получается на расстоянии $l=5$ см от центрального.

837. Источник белого света, дифракционная решетка и экран помещены в воду. Какие изменения претерпит при этом дифракционная картина, если углы отклонения световых лучей решеткой малы?

838. На дифракционную решетку, имеющую период $d=2 \cdot 10^{-4}$ см, падает нормально свет, пропущенный сквозь светофильтр. Фильтр пропускает длины волн от $\lambda_1=5000$ Å до $\lambda_2=6000$ Å. Будут ли спектры различных порядков налагаться друг на друга?

839. Решить задачу 834 в предположении, что плоская волна ($\lambda=5 \cdot 10^{-6}$ см) падает на решетку под углом 30° .

840. Решить задачу 835 в предположении, что падение лучей на решетку может быть наклонным.

841. Найти условие, определяющее направление на главные максимумы при наклонном падении световых волн на решетку, если период решетки $d \gg k\lambda$ (k — порядок спектра).

§ 34. Дисперсия света и цвета тел

842. Луч белого света падает под углом $\alpha=30^\circ$ на призму, преломляющий угол которой равен $\varphi=45^\circ$. Определить угол θ между крайними лучами спектра по выходе из призмы, если показатели преломления стекла призмы для крайних лучей видимого спектра равны $n_k=1,62$, $n_\phi=1,67$.

843. На двояковыпуклую линзу, радиусы кривизны поверхностей которой равны $R_1=R_2=40$ см, падает белый свет от точечного источника, расположенного на оптической оси линзы на расстоянии $a=50$ см от нее. Вплотную перед линзой расположена диафрагма диаметра $D=1$ см, ограничивающая поперечное сечение светового пучка. Показатели преломления для крайних лучей видимого спектра равны $n_k=1,74$ и $n_\phi=1,8$. Какую картину можно будет наблюдать на экране, расположенном на расстоянии $b=50$ см от линзы перпендикулярно ее оптической оси?

844. Используя результаты задачи 783, построить элементарную теорию радуги, т. е. показать, что центр радуги находится на прямой, проведенной от Солнца через глаз наблюдателя, и что дуга радуги представляет собой часть окружности, все точки которой видны под углом 42° (для красного света) по отношению к прямой, соединяющей глаз наблюдателя и центр радуги.

845. Объяснить качественно причины появления двойной радуги. Каково чередование цветов в первой (основной) и второй радуге?

846. Можно ли в Москве во время летнего солнцестояния (22 июня) наблюдать радугу в полдень? (В это время Солнце в северном полушарии стоит наиболее высоко над горизонтом.)

847. Длина волны в воде уменьшается в n раз, где n — показатель преломления. Означает ли это, что ныряльщик не может видеть окружающие тела в естественном цвете?

848. На тетради написаны красным карандашом «отлично» и зеленым «хорошо». Имеются два стекла — зеленое и красное. Через какое стекло надо смотреть, чтобы увидеть оценку «отлично»?

849. Почему объективы с «просветленной оптикой» (см. задачу 820) имеют пурпурно-фиолетовый (сиреневый) оттенок?

850. Цвета тонких пленок (например, пленки нефти на воде) и цвета радуги имеют совершенно различные оттенки. Почему?

851. Тонкая мыльная пленка натянута на вертикальную рамку. При освещении белым светом на пленке наблюдаются три цветные полосы: пурпурного (малинового), желтого и голубого (сине-зеленого) цветов. Найти расположение и порядок полос.

852. Почему днем Луна имеет чистый белый цвет, а после захода Солнца принимает желтоватый оттенок?

853. Почему столб дыма, поднимающегося над крышами домов, на темном фоне окружающих предметов кажется синим, а на фоне светлого неба — желтым или даже красноватым?

854. Почему цвета влажных предметов кажутся более глубокими, более насыщенными, чем сухих?

Глава I. МЕХАНИКА

§ 1. Кинематика равномерного прямолинейного движения

1. В течение 1 часа после встречи лодки с плотами лодка удалялась от плотов. В течение 30 мин, когда мотор ремонтировался, расстояние между лодкой и плотами не увеличивалось. Лодка догонит плоты через 1 час, так как скорость ее относительно воды, а следовательно и относительно плотов, постоянна:

$$v = S/t = 7,5/(1 + 0,5 + 1) = 3 \text{ км/ч.}$$

2. Расстояние между электропоездами $S = vt$, с другой стороны, $S = v\tau + u\tau$. Отсюда

$$u = v(t - \tau)/\tau = 45 \text{ км/ч.}$$

3. На рис. 266 AMN — график обычного движения машины. CD — график пути инженера до встречи с машиной в точке D . DB — график

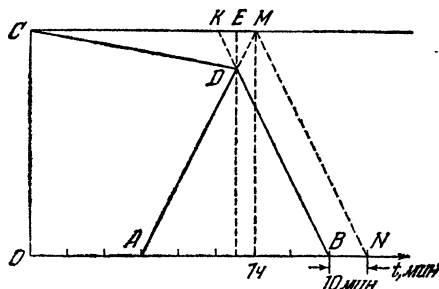


Рис. 266.

движения машины после встречи с инженером. Согласно условиям задачи $BN = KM = 10$ мин. Время движения инженера до встречи с машиной

$$CE = CM - EM = CM - KM/2 = 55 \text{ мин.}$$

4. Так как время оценивается по последнему прибывшему, кратчайшим оно будет тогда, когда все три туриста придут одновременно.

График движения туристов изображен на рис. 267. Из него следует, что движение пешком занимало у второго и третьего туристов одинаковое время ($\Delta t_1 + \Delta t_2$), где Δt_2 — время обратного движения велосипедиста. Поэтому

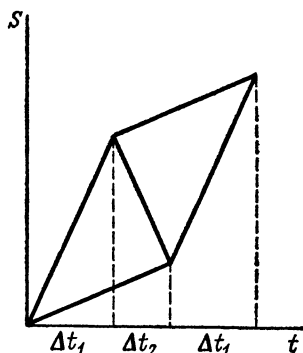


Рис. 267.

$$\begin{aligned} v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2 \Delta t_1 &= \\ &= v_{cp}(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1), \\ v_2 \Delta t_1 - v_2 \Delta t_2 &= v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2). \end{aligned}$$

Отсюда средняя скорость туристов

$$v_{cp} = \frac{3v_1 + v_2}{3v_2 + v_1} v_2 = 10 \text{ км/ч.}$$

5. Графики пути катеров, отплывающих одновременно, изображены ломаными MEB и KEA , где E — точка их встречи (рис. 268). Так как скорость катеров относительно воды одинакова, то MA и KB — прямые линии. Оба катера будут находиться

в пути одинаковое время, если они встретятся посередине между пристанями. Точка их встречи O лежит на пересечении линии KB

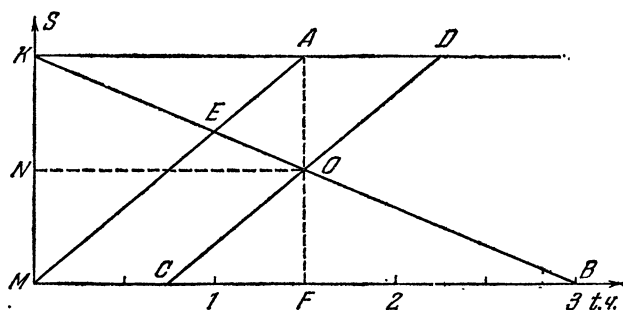


Рис. 268.

с перпендикуляром, восставленным из середины отрезка KM . Графики движения катеров изображаются линиями KOD и COB . Как видно из рисунка, $\triangle MAF \sim \triangle COF$, и, следовательно, исходное время $MC = 45$ мин.

6. Скорость катеров относительно воды v_1 и скорость реки v_2 определяются из уравнений $S = t_1(v_1 + v_2)$ и $S = t_2(v_1 - v_2)$, где t_1 и t_2 — время движения катеров по течению и против течения. Как следует из условия, $t_1 = 1,5$ ч и $t_2 = 3$ ч. Отсюда

$$v_1 = \frac{S(t_1 + t_2)}{2t_1t_2} = 15 \text{ км/ч, } v_2 = \frac{S(t_2 - t_1)}{2t_1t_2} = 5 \text{ км/ч.}$$

Место встречи находится на расстоянии 20 км от пристани M .

7. Предположим, что река течет от C к T со скоростью v_0 . Учитывая, что время движения лодки и катера одинаково, можно

написать уравнение

$$\frac{S}{v_1 + v_0} = 2 \left(\frac{S}{v_2 + v_0} + \frac{S}{v_2 - v_0} \right),$$

где S — расстояние между пристанями. Отсюда

$$v_0^2 + 4v_2v_0 + 4v_2v_1 - v_2^2 = 0.$$

Следовательно,

$$v_0 = -2v_2 \pm \sqrt{5v_2^2 - 4v_1v_2} = -20 \pm 19,5 \text{ км/ч.}$$

Решение $v_0 = -39,5$ км/ч следует отбросить, так как при этой скорости реки ни лодка, ни катер не смогут подняться против течения. Следовательно, $v_0 = -0,5$ км/ч, т. е. река течет от пристани T к пристани C .

8. Расстояние R края тени от точки O , находящейся на земле под фонарем, связано с расстоянием r человека от той же точки соотношением $R = \frac{H}{H-h} r$. Следовательно, траектория тени подобна траектории человека (центр подобия находится в точке O). Поэтому



Рис. 269.

вектор скорости края тени v_T направлен так же, как вектор скорости человека v , а по величине превосходит его в $\frac{H}{H-h}$ раз (рис. 269).

9. Пусть за время Δt первая свеча сгорела на величину Δh_1 , а вторая свеча — на Δh_2 (рис. 270). Тогда тень на левой стене (от первой свечи) опустится на расстояние

$$\Delta x = \Delta h_1 + (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_1 - \Delta h_2.$$

Тень на правой стене опустится на расстояние

$$\Delta y = \Delta h_2 - (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\Delta h_2 - \Delta h_1.$$

Учитывая, что $\Delta h_1 = \frac{h}{t_1} \Delta t$, $\Delta h_2 = \frac{h}{t_2} \Delta t$, получим

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2h}{t_1} - \frac{h}{t_2} = \frac{h}{t_1 t_2} (2t_2 - t_1),$$

$$v_2 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2h}{t_2} - \frac{h}{t_1} = \frac{h}{t_1 t_2} (2t_1 - t_2).$$

$t_2 > t_1$, следовательно, $v_1 > 0$, а v_2 может быть величиной отрицательной, т. е. на правой стене тень может перемещаться вверх.

10. Так как скорость движения в воде меньше скорости движения по берегу, то путь AB не обязательно займет минимальное время.

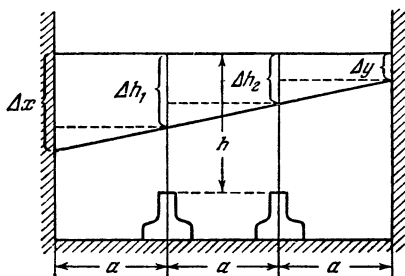


Рис. 270.

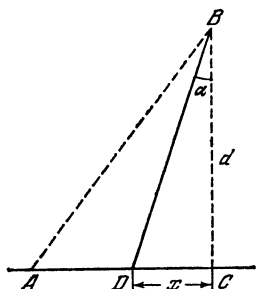


Рис. 271.

Предположим, что траектория движения человека — ломаная линия ADB (рис. 271). Необходимо определить, при каком значении x время будет минимальным. Время движения t равно

$$t = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} + \frac{S - x}{v_2} = \frac{v_2 \sqrt{d^2 + x^2} - v_1 x + v_1 S}{v_1 v_2}.$$

Это время будет минимальным, если $y = v_2 \sqrt{d^2 + x^2} - v_1 x$ будет иметь наименьшее значение. Очевидно, что x , соответствующее минимальному времени t , не зависит от расстояния S .

Для нахождения x , соответствующего минимальному значению y , выразим x через y и получим квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{2yv_1}{v_2^2 - v_1^2} x + \frac{v_2^2 d^2 - y^2}{v_2^2 - v_1^2} = 0.$$

Решение его приводит к следующему выражению:

$$x = \frac{v_1 y \pm v_2 \sqrt{y^2 + d^2 v_1^2 - v_2^2 d^2}}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Так как x не может быть комплексным, то $y^2 + d^2 v_1^2 \geq v_2^2 d^2$. Минимальное значение y равно $y_{\min} = d \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. Этому значению y соответствует $x = dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$. Если $S \leq dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, то следует сразу плыть по прямой AB к точке B . В противном случае надо пробежать по берегу отрезок, равный $AD = S - dv_1 / \sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, а потом плыть к B . Отметим, что для пути, соответствующего кратчайшему времени, $\sin \alpha = v_1 / v_2$.

11. Автобус находится в точке A , человек — в точке B (рис. 272). Точка C — место встречи человека с автобусом, α — угол между направлением на автобус и направлением, по которому должен бежать человек, $AC = v_1 t_1$, $BC = v_2 t_2$, где t_1 и t_2 — время движения автобуса и человека до точки C .

Из $\triangle ABC$ видно, что $AC = b \sin \alpha / \sin \beta$, где $\sin \beta = a/BC$. Следовательно, $\sin \alpha = \frac{a}{b} \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2}$. По условию задачи $t_1 \geq t_2$, поэтому $\sin \alpha \geq av_1/bv_2 = 0,6$. Отсюда $36^\circ 45' \leq \alpha \leq 143^\circ 15'$.

Направления, по которым может двигаться человек, заключены в пределах угла DBE . При движении вдоль BD или BE человек

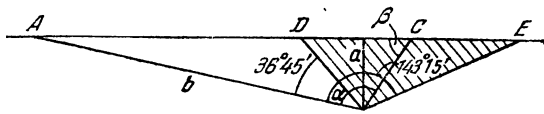


Рис. 272.

достигнет шоссе одновременно с автобусом. В любую из точек шоссе, находящуюся между точками D и E , человек прибежит раньше автобуса.

12. Наименьшую скорость можно определить из условий $t_1 = t_2$, $\sin \alpha = av_1/bv_2 = 1$. Отсюда $v_2 = \left(\frac{a}{b}\right) v_1 = 2,4$ м/с. При этом $\alpha = 90^\circ$. Следовательно, направление, по которому должен бежать человек, перпендикулярно направлению на автобус.

13. В произвольную точку D шоссе автобус приходит за время $t = l/v_1$, где l — длина участка AD шоссе. В эту же точку за время, равное или меньшее t , человек может попасть, если он находится в пределах круга радиусом $r = v_2 t$ с центром в точке D . Начертив

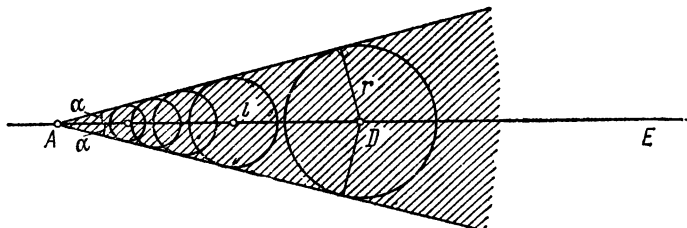


Рис. 273.

подобные круги для других точек, расположенных на шоссе, получаем искомую область. Границами ее являются две общие касательные к окружностям. Угол α , который границы составляют с шоссе, определяется равенством $\sin \alpha = r/l = v_2/v_1$ (рис. 273).

14. Скорость лодки относительно берега v направлена на AB (рис. 274). Очевидно, $v = v_0 + u$. Известны: направление вектора v и величина и направление вектора v_0 . Вектор u будет иметь минимальное значение, как видно из чертежа, при $u \perp v$. Следовательно,

$$u_{\min} = v_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = b / \sqrt{a^2 + b^2}.$$

15. Пусть скорость u направлена под углом α к берегу (рис. 275). Тогда

$$(u \cos \alpha - v) \tau = BC = a, \quad (u \sin \alpha) \tau = AC = b,$$

где τ — время движения лодки. Исключив α из этих уравнений, будем иметь

$$(u^2 - v^2) \tau^2 - 2va\tau - (a^2 + b^2) = 0.$$

Отсюда $\tau = 15/21$ часа. Следовательно, преодолеть расстояние AB за 30 минут невозможно.

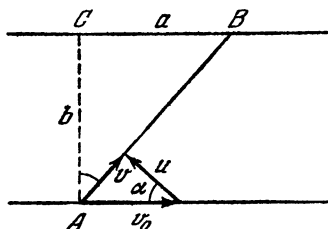


Рис. 274.

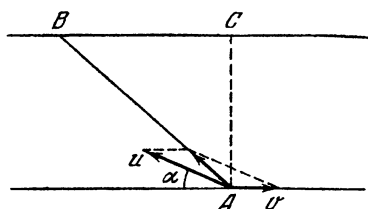


Рис. 275.

16. Пусть u_0 — скорость ветра относительно катера. Тогда флаг на катере будет направлен вдоль u_0 . Если v — скорость катера по отношению к берегу, то $u = u_0 + v$ (рис. 276). В $\triangle FCD$ $\angle DCF = \beta + \alpha - \pi/2$, а $\angle FDC = \pi - \beta$. По теореме синусов

$$\frac{v}{\sin(\alpha + \beta - \pi/2)} = \frac{u}{\sin(\pi - \beta)}.$$

Следовательно, $v = u \frac{\sin(\alpha + \beta - \pi/2)}{\sin(\pi - \beta)}$. Определить скорость течения реки по известной скорости катера относительно берега невозможно, так как неизвестно направление движущегося катера относительно воды.

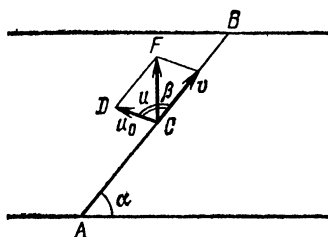


Рис. 276.

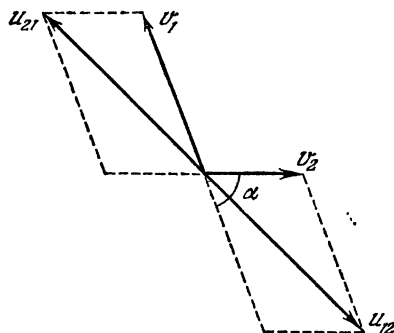


Рис. 277.

17. Введем обозначения: u_{12} — скорость второй автомашины относительно первой, u_{21} — скорость первой автомашины относительно второй. Очевидно, $u_{12} = u_{21}$ и $u_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha$ (рис. 277). Искомое время $t = S/u_{12}$.

18. Примем момент проезда перекрестка первой автомашиной за начало отсчета времени. В системе координат, изображенной на рис. 278, движение автомобилей описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x_1 &= -(v_1 \cos \alpha) t, & y_1 &= (v_1 \sin \alpha) t, \\x_2 &= -v_2 \tau + v_2 t, & y_2 &= 0.\end{aligned}$$

Расстояние между автомашинами в любой момент времени

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}S^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha) t^2 - \\&\quad - 2v_2(v_1 \cos \alpha + v_2) \tau t + v_2^2 \tau^2.\end{aligned}$$

Найдя минимум квадратного трехчлена, получим наименьшее расстояние: $S_{\min} =$

$$= \frac{v_1 v_2}{u_{12}} \tau \sin \alpha \text{ (см. решение задачи 17).}$$

19. За время Δt прямая AB переместится на расстояние $v_1 \Delta t$, а прямая CD — на расстояние $v_2 \Delta t$. При этом точка пересечения прямых перейдет в положение O' (рис. 279). Перемещение OO' точки

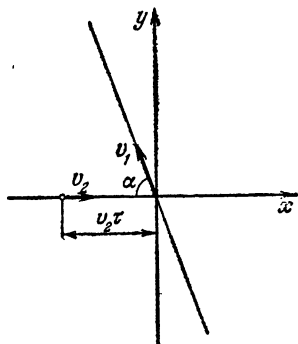


Рис. 278.

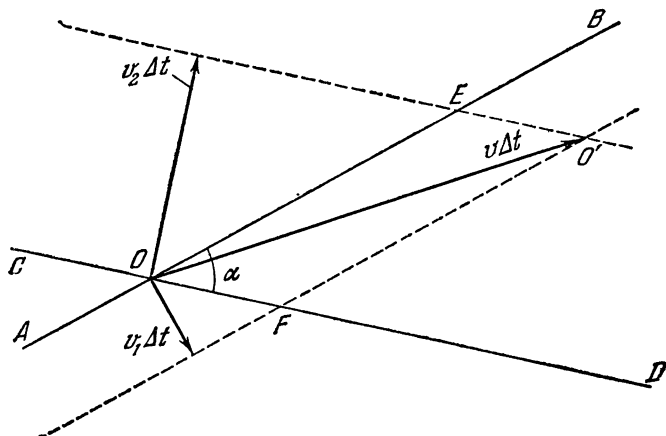


Рис. 279.

пересечения прямых найдется из треугольника OFO' или OEO' , где $OF = v_1 \Delta t / \sin \alpha = EO'$, $OE = v_2 \Delta t / \sin \alpha = FO'$:

$$OO' = \sqrt{OF^2 + OE^2 + 2OF \cdot OE \cos \alpha} = v \Delta t.$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}.$$

§ 2. Кинематика неравномерного и равнопеременного прямолинейного движения

20. Путь S , пройденный точкой за 5 с, численно равен площади, заключенной между ломаной $Oabcd$ и осью времени (рис. 280):

$v, \text{см/с}$

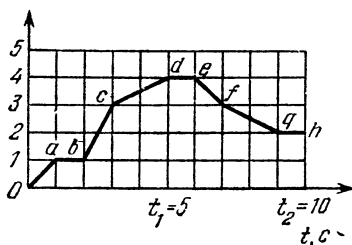


Рис. 280.

$S_1 = 10,5$ см. Средняя скорость движения точки за 5 с $v_1 = S_1/t_1 = 2,1$ см/с. Среднее ускорение точки за тот же промежуток времени $a_1 = \Delta v/t_1 = 0,8$ см/с². Путь, пройденный за 10 с, равен $S_2 = 25$ см. Следовательно, средняя скорость и среднее ускорение равны $v_2 = S_2/t_2 = 2,5$ см/с, $a_2 = 0,2$ см/с².

21. За малый интервал времени Δt нос лодки переместится из точки A в точку B (рис. 281). $AB = v_1 \Delta t$, где v_1 — скорость лодки. За это же время будет выбран отрезок веревки $OA - OB = CA = v \Delta t$.

$\triangle ABC$ можно считать прямоугольным, так как $AC \ll OA$. Следовательно, $v_1 = v/\cos \alpha$.

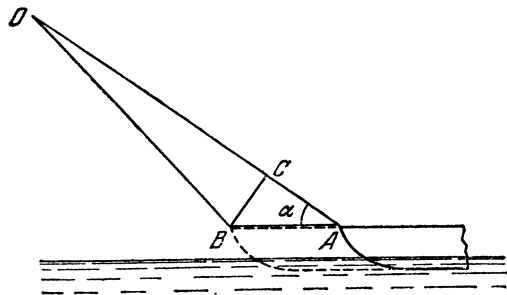


Рис. 281.

22. Пусть в начальный момент времени $t=0$ предмет находился в точке S (рис. 282), а в момент времени t занял положение CD .

Подобие $\triangle SCD$ и $\triangle SBA$ приводит к равенству $AB = hl/SD = hl/v_1 t$. Скорость точки B в данный момент времени $v_2 = BB'/\Delta t$ при условии, что время Δt , за которое край тени переместится на расстояние BB' , стремится к нулю. Так как

$$BB' = AB - AB' =$$

$$= \frac{hl}{v_1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + \Delta t} \right) = \frac{hl \Delta t}{t(t + \Delta t)},$$

то $v_2 = \frac{hl}{v_1 t(t + \Delta t)}$, или, учитывая, что $\Delta t \ll t$, $v_2 = \frac{hl}{v_1 t^2}$.

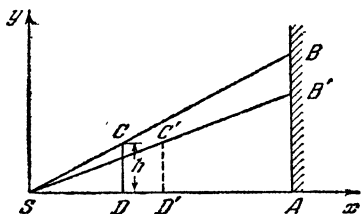


Рис. 282.

23. Для равноускоренного движения $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$. Следовательно, $v_0 = 35$ см/с, $a = 82$ см/с², $x_0 = 11$ см — начальная координата точки.

$$24. a = \frac{2}{t_3 - t_1} \left(\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_2} - \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) = 5 \text{ см/с}^2.$$

25. Из графика скорости (см. рис. 8) вытекает, что начальная скорость $v_0 = 4$ см/с ($OA = 4$ см/с). Ускорение $a = OA/OB = 1$ см/с². Вначале скорость тела убывает. В момент $t_1 = 4$ с скорость тела равна нулю, а затем возрастает по величине. Второй график (см. рис. 9) изображает также равнопеременное движение. До остановки тело проходит путь $h = 10$ см. Согласно же первому графику путь до остановки, численно равный площади $\triangle OAB$, составляет 8 см. Следовательно, графики изображают разные движения. Второму графику соответствует другая начальная скорость: $v'_0 = 2h/t_1 = 5$ см/с — и другое ускорение: $a' = 2h/t_1^2 = 1,25$ см/с².

26. График движения второго автомобиля представляет собой параболу, изображенную на рис. 283. Очевидно, что скорость первого автомобиля не может быть слишком большой, иначе обгон

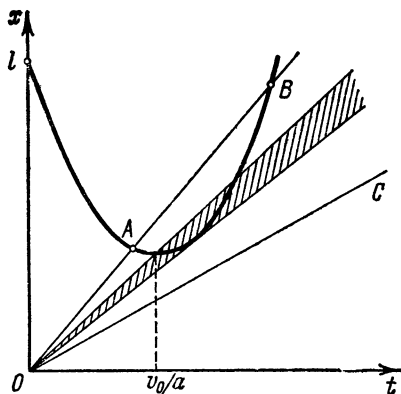


Рис. 283.

совершится всего один раз (точка B на рис. 283, между тем как точка A соответствует встрече машин). Скорость не может быть и слишком малой (прямая OC на рис. 283), так как в противном случае автомобили вообще не смогут оказаться рядом. Таким образом, уравнение, выражающее равенство координат автомобилей: $v_1 t = l - v_0 t + at^2/2$, должно иметь два действительных решения, причем оба они соответствуют более поздним моментам времени, чем момент остановки (мгновенной) второго автомобиля, определенный равенством $-v_0 + at = 0$. Оба условия дают

$$\sqrt{2al} - v_0 < v_1 < \frac{al}{v_0} - \frac{v_0}{2},$$

или $8 \text{ м/с} < v_1 < 9 \text{ м/с}$.

27. Наибольшая скорость, которую будет иметь шарик при соприкосновении с подставкой, $v_{\max} = \sqrt{2gH}$. При ударе скорость шарика

изменяет направление на противоположное, оставаясь неизменной по абсолютной величине. График скорости имеет вид, изображенный на рис. 284, а. На рис. 284, б представлено изменение координаты со временем.

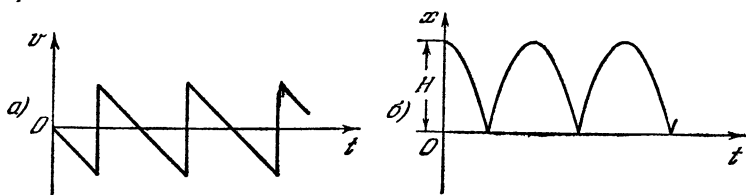


Рис. 284.

28. Время падения первого шарика $t_1 = \sqrt{2h_1/g} = 0,3$ с. Отношение максимальных скоростей шариков $v_2/v_1 = \sqrt{h_2/h_1} = 1/2$.

Как следует из графика скоростей (рис. 285), минимальное время $\tau = 0,3$ с. Кроме того, второй шарик может начать падение через 0,6;

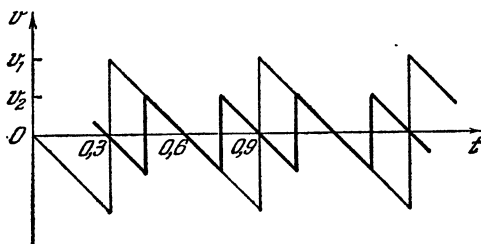


Рис. 285.

0,9; 1,2 с и т. д. после начала падения первого шарика. Время t , в течение которого скорости обоих шариков совпадают, равно 0,3 с. Процесс периодически повторяется через 0,6 с.

29. Исходными являются уравнения

$$gt^2/2 = n, \quad g(t - \tau)^2/2 = n - 1,$$

где τ — время движения тела на n -м сантиметре пути. Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2n}{g}}, \quad t - \tau = \sqrt{\frac{2(n-1)}{g}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

30. Обозначая через x_1 и v_1 координату и скорость первого тела относительно башни, а через x_2 и v_2 — второго, можно написать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t - gt^2/2, & v_1 &= v_0 - gt, \\ x_2 &= -v_0(t - \tau) - g(t - \tau)^2/2, & v_2 &= -v_0 - g(t - \tau). \end{aligned}$$

(Направление вверх считается здесь положительным.) Скорость первого тела относительно второго равна $u = v_1 - v_2 = 2v_0 - g\tau$ и не ме-

няется с течением времени. Расстояние между телами равно

$$S = x_1 - x_2 = (2v_0 - g\tau)t - v_0\tau + g\tau^2/2.$$

Друг относительно друга тела движутся равномерно, и, следовательно, расстояние между ними изменяется линейно со временем.

31. По условию задачи $AA' = vt$, $CC' = at^2/2$ (рис. 286). Из подобия треугольников $AA'O$, $BB'O$ и $CC'O$ имеем

$$AA'/AO = BB'/BO = CC'/CO.$$

Как видно из рис. 286, $AO = AB + BO$, $CO = BC - BO$. Эти соотношения позволяют определить

$$BB' = \frac{(AA' - CC')}{2} = \frac{vt}{2} - \frac{at^2}{4}.$$

Следовательно, точка B движется с начальной скоростью $v/2$, направленной вверх, и постоянным ускорением $a/2$, направленным вниз. Достигнув высоты $h = v^2/4a$, точка будет двигаться вниз.

32. Величина ускорения книги относительно пола лифта зависит не от направления движения лифта (направления его скорости), а от направления ускорения лифта. Если ускорение лифта направлено вверх, то ускорение книги будет равно $g + a$. Если же его ускорение направлено вниз, то ускорение книги будет $g - a$.

33. В момент встречи всех автомобилей первые два имеют относительно равномерно движущегося третьего одинаковую скорость v_2 . Относительно дороги скорости автомобилей $(v_2 + v_1)$ и $(v_2 - v_1)$. Поэтому остановка (мгновенная) одного из автомобилей произойдет после первой встречи через время $(v_2 + v_1)/a$, а другого — через $(v_2 - v_1)/a$. Остановка одного из автомобилей запаздывает на столько же, на сколько запаздывает его отправление. Следовательно, искомое время запаздывания

$$t = \frac{(v_1 + v_2)}{a} - \frac{(v_2 - v_1)}{a} = \frac{2v_1}{a}.$$

34. Если бы скорость лифта не изменялась, то шарик подскочил бы над его полом на высоту H . В системе отсчета, имеющей постоянную скорость, равную скорости лифта в момент, когда шарик начал падать, лифт поднимается за время τ на высоту $h_1 = a\tau^2/2$, а за следующий интервал времени τ — еще на высоту $h_2 = a\tau^2 - a\tau^2/2$. Полная высота подъема $h = h_1 + h_2 = a\tau^2$. Искомая высота, на которую подскочит шарик над полом лифта, $x = H - h = H - a\tau^2$.

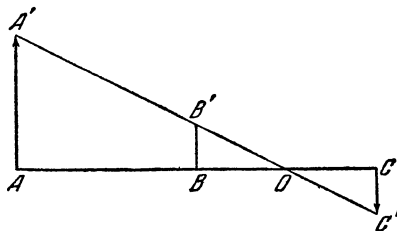


Рис. 286.

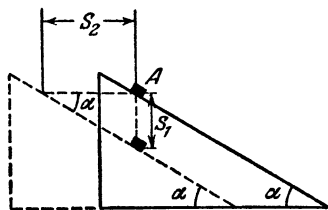


Рис. 287.

35. При свободном падении за время t тело A пройдет по вертикали путь $S_1 = gt^2/2$. За это же время клин должен сместиться на

расстояние $S_2 = at^2/2$. Если тело все время соприкасается с клином, то, как видно из рис. 287, $S_2/S_1 = \operatorname{ctg} \alpha$. Следовательно, искомое ускорение $a = g \operatorname{ctg} \alpha$. Если ускорение клина в горизонтальном направлении будет больше $g \operatorname{ctg} \alpha$, то тело оторвется от клина.

§ 3. Кинематика криволинейного движения

36. Полное ускорение шарика в любой точке траектории равно g (ускорение свободного падения). Нормальное ускорение равно $a_n = g \sin \alpha$, где α — угол, который составляет касательная к траектории с вертикалью. Тангенциальное ускорение равно $a_\tau = g \cos \alpha$. Из простых геометрических соображений можно получить

$$\sin \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{g\tau}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}.$$

Следовательно,

$$a_n = g \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}, \quad a_\tau = g \frac{g\tau}{\sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2}}.$$

37. Движение тела можно рассматривать как наложение движения по окружности радиуса R в горизонтальной плоскости и падения по вертикали. Соответственно скорость тела v в данный момент

можно представить как геометрическую сумму двух составляющих: $v_1 = v \cos \alpha$ — направленной горизонтально, и $v_2 = v \sin \alpha$ — направленной вертикально (рис. 288). Здесь α — угол, образованный винтовой линией желоба с горизонтом.

Ускорение тела при криволинейном движении равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорений. Нормальное ускорение, соответствующее движению по окружности, $a_{1n} = v_1^2/R = v^2 \cos^2 \alpha/R$. Движение по вертикали прямолинейно, поэтому $a_{2n} = 0$.

Искомое ускорение $a = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{2\tau}^2 + a_{1n}^2}$, где $a_{1\tau}$ и $a_{2\tau}$ — тангенциальные ускорения, соответствующие движению по окружности и вдоль вертикали. Полное тангенциальное ускорение,

очевидно, равно $a_\tau = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{2\tau}^2}$. Его можно найти, мысленно развернув поверхность цилиндра, на которую навит винтовой желоб, в плоскость. При этом желоб превратится в наклонную плоскость с высотой nh и длиной основания $2\pi Rn$. Очевидно, $a_\tau = g \sin \alpha = gh/\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}$.

Для определения a_{1n} найдем v из закона сохранения энергии: $mv^2/2 = mghn$. Следовательно, $v^2 = 2ghn$ и $a_{1n} = 8\pi^2 nhgR/(h^2 + 4\pi^2 R^2)$. Подставив найденные ускорения a_τ и a_{1n} в выражение для искомого ускорения, найдем

$$a = \frac{gh \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2 + 64\pi^4 n^2 R^2}}{h^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

38. Точку A отправления лодки примем за начало отсчета системы координат. Направление осей указано на рис. 289. Движение лодки в направлении, перпендикулярном течению, происходит с постоянной скоростью u . Поэтому лодка будет находиться на расстоянии y от берега через время $t = y/u$ после отправления. Рассмотрим движение лодки до середины реки ($y \leq c/2$). На расстоянии y от берега скорость течения равна $v = \frac{2v_0}{c} y$.

Подставляя $y = ut$ в выражение для скорости течения, получим $v = 2v_0 ut/c$. Из последнего соотношения следует, что движение лодки в направлении, параллельном берегам, происходит с постоянным ускорением $a = 2v_0 u/c$. Лодка достигает середины реки за время $T = c/2u$. За это же время она будет снесена вниз по течению на

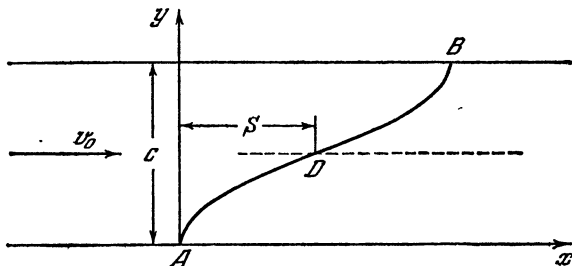


Рис. 289.

расстояние $S = aT^2/2 = v_0 c/4u$. При движении от середины реки (точка D) до противоположного берега лодка будет снесена дополнительно еще на расстояние S . Таким образом, искомое расстояние равно $v_0 c/2u$. При движении лодки до середины реки $x = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 u}{c} t^2$, а $y = ut$. Из этих соотношений определяем траекторию лодки от A до D : $y^2 = \frac{cu}{v_0} x$ (парабола). Вторая половина траектории (DB) имеет тот же характер, что и первая.

39. Закон движения тележки A : $y = vt$. Закон движения тележки B : $x = \sqrt{l^2 - v^2 t^2}$. Движение тележки B вдоль горизонтального рельса можно представить как сумму двух независимых движений: движения вертикально вверх со скоростью v и вращения вокруг точки A с некоторой скоростью ω ($\omega \perp l$). Из простых геометрических соображений следует, что $u/vt = v/x$, где x — расстояние тележки B от начала координат. Отсюда получим $u = -v^2 t / \sqrt{l^2 - v^2 t^2}$.

40. Относительно системы отсчета, изображенной на рис. 290, координаты и скорости тела в любой момент времени определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} t, & (1) & & v_x &= v_{0x}, & (3) \\ y &= v_{0y} t - gt^2/2, & (2) & & v_y &= v_{0y} - gt. & (4) \end{aligned}$$

Здесь $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ и $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ — проекции начальной скорости на оси x и y . Уравнения (1) — (4) позволяют ответить на все вопросы, поставленные в условии задачи.

Время полета T определяется уравнением (2). При $y=0$ $(v_0 \sin \alpha) T - gT^2/2 = 0$. Отсюда $T = 2v_0 \sin \alpha / g$. Дальность полета $L = (v_0 \cos \alpha) T = v_0^2 \sin 2\alpha / g$. Максимальное значение L принимает при $\alpha = 45^\circ$: $L_{\max} = v_0^2 / g$.

Высота, на которой будет находиться тело спустя время τ , равна $h = (v_0 \sin \alpha) \tau - g\tau^2/2$. Скорость тела в момент времени τ равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y = v_0 \sin \alpha - g\tau$. Отсюда скорость $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 \tau^2 - 2v_0 g \tau \sin \alpha}$. Она составляет с вертикалью угол β , определяемый равенством $\operatorname{tg} \beta = v_0 \cos \alpha / (v_0 \sin \alpha - g\tau)$.

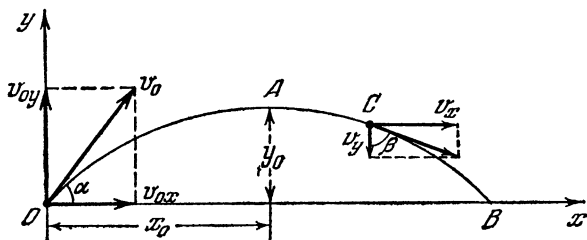


Рис. 290.

41. Координаты тела x и y меняются с течением времени по закону

$$y = (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2, \quad x = (v_0 \cos \alpha) t.$$

Исключив отсюда время, мы получим уравнение:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha) x.$$

Это уравнение параболы. Обозначая через x_0 и y_0 координаты вершины параболы (точка A на рис. 290), можно записать уравнение траектории в форме $y - y_0 = k(x - x_0)^2$, где

$$k = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

42. Траектория мяча проходит через точку с координатами H и S . Поэтому (см. задачу 41) $H = -gS^2/2v_0^2 \cos^2 \alpha + S \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда имеем: $v_0^2 = gS^2/2 \cos^2 \alpha (S \operatorname{tg} \alpha - H) = gS^2/(S \sin 2\alpha - H \cos 2\alpha - H) = gS^2/[\sqrt{S^2 + H^2} \sin(2\alpha - \varphi) - H]$, где $\operatorname{tg} \varphi = H/S$. Наименьшее значение $v_0 = \sqrt{gS^2/(\sqrt{S^2 + H^2} \sin(2\alpha - \varphi) - H)} = \sqrt{g(\sqrt{S^2 + H^2} + H)}$ достигается при $\alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

43. (Рис. 291.)

$$\begin{aligned} (v_0 \cos \alpha) t &= D/2, \quad (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2 = H, \\ t &= \frac{D}{2v_0 \cos \alpha}, \quad \frac{D}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{gD^2}{8v_0^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = H, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{4v_0^2}{gD} \operatorname{tg} \alpha + \left(\frac{8Hv_0^2}{gD} + 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

При заданном D последнее уравнение дает два значения α , соответствующих навесной и настильной траектории, или два одинаковых значения (критический случай), или ни одного (осколок не попадает на край ямы). Следовательно, яма должна быть такой, чтобы это уравнение не имело решений:

$$\left(\frac{4v_0^2}{gD}\right)^2 \leq 4 \left(\frac{8Hv_0^2}{gD^2} + 1\right), \quad D^2 \geq \frac{4v_0^2}{g^2} (v_0^2 - 2gH).$$

Отсюда следует, что если $v_0 < \sqrt{2gH}$, то D —любое; если же $v_0 \geq \sqrt{2gH}$, то

$$D \geq \frac{2v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gH}, \quad D_{\min} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

44. Координаты и скорости тела в любой момент времени относительно системы отсчета, изображенной на рис. 292, определяются

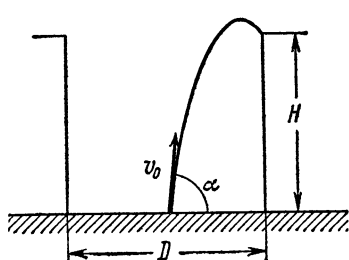


Рис. 291.

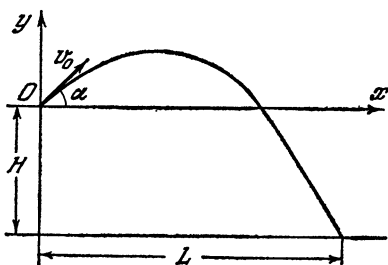


Рис. 292.

теми же уравнениями, что и в задаче 41. В момент падения тела в воду его координата $y = -H$. Поэтому время полета T определяется уравнением

$$-H = (v_0 \sin \alpha) T - gT^2/2.$$

Отсюда

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g}.$$

Так как $T > 0$, следует оставить знак плюс. Расстояние от берега

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}.$$

Тело окажется на высоте h над водой спустя время

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2g(H-h)}}{g}.$$

Если $|h| < |H|$, то физический смысл имеет только знак плюс. При $h \geq H$ имеют смысл оба решения. Тело дважды во время падения окажется на одной высоте над водой.

Конечную скорость v проще всего найти с помощью закона сохранения энергии

$$mv_0^2/2 + mgH = mv^2/2.$$

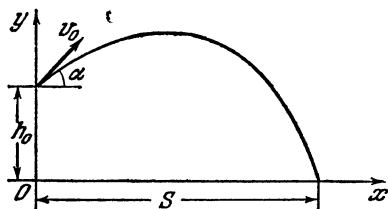
Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

45. В системе отсчета, изображенной на рис. 293, координаты камня в любой момент времени определяются следующими уравнениями:

$$x = (v_0 \cos \alpha) t, \quad y = h_0 + (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2.$$

В момент падения камня $y=0$ и $x=S$, где S — дальность полета камня. Решая эти уравнения относительно угла α , получим



$$\operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{v_0^2}{gS} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh_0}{v_0^2} - \frac{g^2 S^2}{v_0^4}} \right).$$

Это выражение имеет смысл при

$$1 + \frac{2gh_0}{v_0^2} - \frac{g^2 S^2}{v_0^4} \geq 0.$$

Рис. 293.

Откуда $S \leq v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}/g$. Следовательно, $S_{\max} = v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}/g$. При меньших S каждому значению S соответствуют два значения угла α , разность между которыми тем меньше, чем ближе значение S к максимальному. Следовательно, при максимальной дальности полета

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gS_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

46. Движение тела описывается уравнениями

$$h + (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2} = 0, \quad (v_0 \cos \alpha) t = S.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{gS^2}{2 \cos^2 \alpha (h + S \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{gS^2}{2} \frac{1}{h \cos^2 \alpha + S \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= gS^2 \frac{1}{h (2 \cos^2 \alpha - 1) + S \sin 2\alpha + h} = gS^2 \frac{1}{h + (h \cos 2\alpha + S \sin 2\alpha)} = \\ &= \frac{gS^2}{h + \sqrt{h^2 + S^2} \cos (2\alpha - \varphi)}, \end{aligned}$$

где φ — некоторый угол. Следовательно,

$$v_{0 \min} = S \sqrt{\frac{g}{h + \sqrt{h^2 + S^2}}} = \sqrt{g (\sqrt{h^2 + S^2} - h)}.$$

47. В любой момент времени труба составляет с горизонтом угол β такой, что $\operatorname{tg} \beta = y/x$, где

$$y = (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2, \quad x = (v_0 \cos \alpha) t$$

(координаты тела). Вектор скорости тела составляет с горизонтом угол φ , причем $\operatorname{tg} \varphi = (v_0 \sin \alpha - gt)/(v_0 \cos \alpha)$. По условию $\beta - \varphi = \pi/2$. Воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}(\beta - \varphi) = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi)/(1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi)$, придем к уравнению $g^2 t^2 - 3g(v_0 \sin \alpha)t + 2v_0^2 = 0$. Отсюда

$$t = \frac{v_0}{2g} [3 \sin \alpha \pm \sqrt{1 - 9 \cos^2 \alpha}].$$

Это выражение имеет смысл (дает два разных или одинаковых действительных значения t) лишь при $\cos \alpha \leq 1/3$.

48. Путь S , пройденный бомбой по горизонтальному направлению, равен $S = \sqrt{L^2 - H^2} = (v \cos \alpha) t$, где t — время падения бомбы. Пройденный по вертикали путь $H = (v \sin \alpha) t + gt^2/2$ (рис. 294). Исключив время из этих уравнений, находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v^2}{gS} \pm \sqrt{\left(\frac{v^2}{gS}\right)^2 + \frac{2Hv^2}{gS^2} - 1}.$$

Имеет смысл решение со знаком плюс. Знаку минус соответствует $\alpha < 0$, т. е. случай сбрасывания бомбы в момент, когда самолет летит вверх.

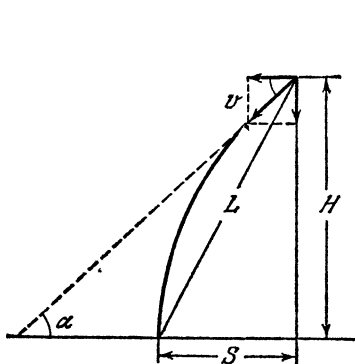


Рис. 294.

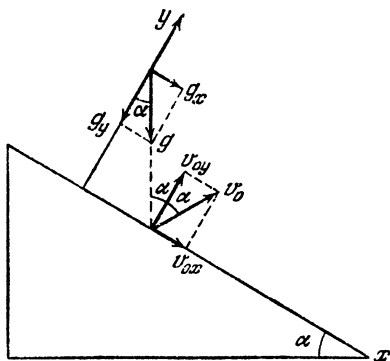


Рис. 295.

49. Решение задачи значительно упростится, если оси координат направить вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней (рис. 295). Тогда проекции ускорения шарика на оси x и y будут соответственно равны $a_x = g_x = g \sin \alpha$, $a_y = g_y = -g \cos \alpha$. Скорость шарика в момент первого соударения с наклонной плоскостью будет равна $v_0 = \sqrt{2gh}$. Начальная скорость шарика после первого соударения равна v_0 и образует с осью y угол α (рис. 295).

Расстояние между точками первого и второго соударений шарика с плоскостью равно

$$l_1 = (v_0 \sin \alpha) t_1 + \frac{(g \sin \alpha) t_1^2}{2},$$

где t_1 — время полета. Это время определяется уравнением

$$(v_0 \cos \alpha) t_1 - (g \cos \alpha) t_1^2 / 2 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 2v_0/g$ и $l_1 = 8h \sin \alpha$. Скорость шарика в момент второго соударения определяется равенствами

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v_{0x} + a_x t_1 = v_0 \sin \alpha + (g \sin \alpha) t_1 = 3v_0 \sin \alpha, \\ v_{1y} &= v_{0y} + a_y t_1 = v_0 \cos \alpha - (g \cos \alpha) t_1 = -v_0 \cos \alpha. \end{aligned}$$

После окончания процесса соударения эти скорости равны

$$v_{2x} = v_{1x}, \quad v_{2y} = -v_{1y}.$$

Расстояние между точками второго и третьего соударений равно

$$l_2 = (3v_0 \sin \alpha) t_2 + (g \sin \alpha) t_2^2 / 2,$$

где t_2 — время полета. Так как начальная скорость вдоль оси y та же, что и при первом соударении, то $t_2 = t_1$. Поэтому $l_2 = 16h \sin \alpha$. Аналогично можно показать, что расстояние между следующими точками $l_3 = 24h \sin \alpha$. Следовательно, отношение $l_1 : l_2 : l_3 \dots = 1 : 2 : 3 \dots$

50. Составляющие скоростей тел вдоль x и y в любой момент времени определяются так:

$$\begin{aligned} v_{1y} &= v_0 \sin \alpha_1 - gt, & v_{2y} &= v_0 \sin \alpha_2 - gt, \\ v_{1x} &= v_0 \cos \alpha_1, & v_{2x} &= -v_0 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Пусть u — скорость первого тела относительно второго. Тогда

$$\begin{aligned} u_y &= v_0 \sin \alpha_1 - gt - v_0 \sin \alpha_2 + gt = v_0 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2), \\ u_x &= v_0 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \end{aligned}$$

Следовательно, скорость u равна

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Тела движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. По прошествии времени τ расстояние между ними будет

$$S = 2 \left(v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \tau.$$

51. Скорость любого камня при подлете к земле $v_{\text{кон}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Камень, подлетевший по наиболее пологой траектории, имеет наибольшую горизонтальную скорость. Но последняя равна $v_{\text{гор max}} = v_0$. Поэтому $\cos \varphi = v_0 / \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Отсюда $h = \frac{v_0^2}{2g} \tan^2 \varphi$.

52. Первый шарик отражается от пола, имея вертикальную составляющую скорости $v_0 = \sqrt{2gh}$. Его вертикальная координата $y_1 = v_0 t - gt^2/2$, в то время как вертикальная координата второго шарика $y_2 = h - gt^2/2$. В момент встречи $y_1 = y_2$. Отсюда следует, что шарики встретились на высоте $0,75h$.

53. Из решения задачи 43 следует, что снаряд не попадает в точку, расположенную на высоте y , если расстояние по горизон-

тали от этой точки до пушки

$$r > \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gy}.$$

Следовательно, граница «опасной зоны» определяется уравнением

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} r^2.$$

Сечение такой поверхности (параболоида) представляет собой параболу, которая совпадает с траекторией снаряда, выпущенного со скоростью v_0 горизонтально из пушки, установленной на высоте $H = v_0^2/2g$.

54. 1) Обозначим через $L = na$ длину гусеницы. Тогда $l = (L - 2\pi R)/2$ — расстояние между осями колес. В поступательном движении участвуют $n_1 = l/a = (L - 2\pi R)/2a$ звеньев. Такое же число звеньев находится в покое относительно земли. Во вращательном движении участвуют $n_2 = 2\pi R/a$ звеньев.

2) Время движения трактора $t_0 = S/v$. За полный оборот гусеницы звено пройдет поступательно путь $2l$, двигаясь со скоростью $2v$. Время поступательного движения звена за один оборот l/v . Всего гусеница сделает $N = S/L$ оборотов. Следовательно, время поступательного движения звена $t_1 = Nl/v$. Столько же времени звено покоится. Звено будет участвовать во вращательном движении в течение времени

$$t_2 = t_0 - \frac{2Nl}{v} = \frac{S + 2\pi RN - NL}{2v}.$$

При условии $S \gg L$ можно считать число оборотов целым, пренебрегая временем неполного оборота гусеницы.

55. Обозначим искомый радиус через R и угловую скорость движения

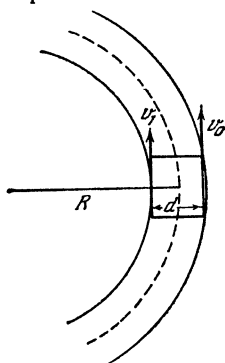


Рис. 296.

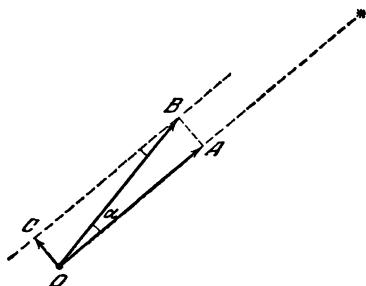


Рис. 297.

трактора по дуге через ω . Тогда $v_1 = \omega(R - d/2)$, $v_0 = \omega(R + d/2)$ (рис. 296). Отсюда

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{R - d/2}{R + d/2}, \quad R = \frac{d}{2} \frac{v_0 + v_1}{v_0 - v_1} = 6 \text{ м.}$$

56. Первоначально наблюдатель находится на полюсе (точка O , рис. 297). Земная ось проходит через точку O перпендикулярно

чертежу. OA (параллельное BC) — направление на звезду. Гора находится справа от точки A . $\alpha = \omega \Delta t$ — угол, на который повернется земной шар за время Δt , ω — угловая скорость вращения Земли. Чтобы видеть звезду, наблюдатель должен за это время пробежать расстояние $OC \approx OA\omega \Delta t$. Скорость наблюдателя $v = OC/\Delta t = OA\omega = 0,7$ м/с.

57. 1) За время полного оборота T диск пройдет путь, равный длине окружности диска, т. е. $S = 2\pi r$, где r — радиус диска. Следовательно, поступательная скорость любой точки диска $v_n = 2\pi r/T = v$. С другой стороны, линейная скорость вращения относительно центра O точек, лежащих на ободе диска, равна $v_d = \omega r$, где ω — угловая скорость вращения. Так как $\omega = 2\pi/T$, то $v_d = 2\pi r/T = v_n$, что и требовалось доказать.

2) Скорость точек обода относительно неподвижного наблюдателя складывается из двух скоростей: скорости поступательного и скорости вращательного движений. Для точки A суммарная скорость будет равна $2v$. Для точек B и D суммируемые скорости равны по абсолютной величине, и их сумма составляет $\sqrt{2}v$ (рис. 298, а). Для

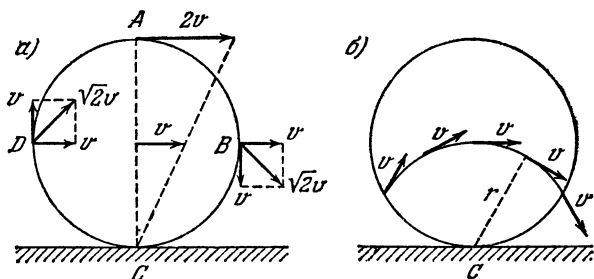


Рис. 298.

точки C суммарная скорость относительно неподвижного наблюдателя равна нулю, так как скорости поступательного движения и вращательного движения равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны.

3) Мгновенные скорости точек диаметра AC возрастают прямо пропорционально расстоянию от точки C . Поэтому движение диска в данный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг точки соприкосновения диска с плоскостью. Ось, проходящая через точку C перпендикулярно плоскости диска, носит название мгновенной оси вращения. Она перемещается при движении диска, проходя все время через точку соприкосновения диска с плоскостью. Следовательно, в данный момент времени все точки диска, отстоящие от точки C на одно и то же расстояние, будут иметь одинаковую суммарную скорость относительно неподвижного наблюдателя. Точки, находящиеся на расстоянии радиуса диска от мгновенной оси (от точки C), будут иметь ту же по абсолютной величине скорость, что и скорость оси, т. е. v (рис. 298, б).

58. Составляющая скорости вдоль палочки для всех точек палочки одинакова и равна $u = v \cos \alpha$. Следовательно, скорость конца палочки B равна $v_B = v \cos \alpha / \cos \beta$. Движение палочки можно рассматривать как поступательное движение вдоль AB со скоростью u

и одновременное вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через некоторую точку O палочки. Расстояние от конца палочки A легко определить из соотношения

$$\frac{v \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{v \sin \alpha} = \frac{l - AO}{AO}, \quad AO = l \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Движение палочки в данный момент времени можно также рассматривать как чистое вращение вокруг оси O' , перпендикулярной плоскости чертежа и расположенной на перпендикуляре OO' к AB . Расстояние OO' равно

$$OO' = AO \operatorname{ctg} \alpha = l \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

59. Распределение скоростей различных точек палочки показано на рис. 299. Скорость v_C произвольной точки C палочки по величине равна

$$v_C = \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha \frac{CO^2}{AO^2}}$$

и направлена перпендикулярно прямой, проведенной из точки O' (см. предыдущую задачу) в данную точку C .

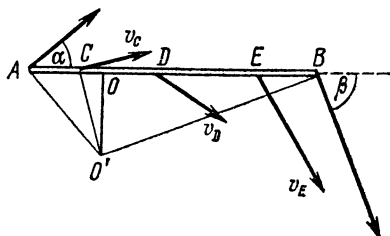


Рис. 299.

60. $v_C = v_B \cos 60^\circ = v/2$.

61. Удобнее всего решать эту задачу в системе отсчета, связанной с равномерно движущимися автомобилями. В этой системе дорога движется назад со скоростью $v = 50$ км/ч, автомашины находятся в покое друг относительно друга, а их колеса вращаются. Линейная скорость точек на окружности колеса и линейная скорость зажатого камня также равны v . Камень пролетит наибольшее расстояние, если он вырвется в момент, когда его скорость составляет с горизонтом угол 45° . Найдем это расстояние. Пренебрегая тем обстоятельством, что в момент вылета камень находится несколько выше уровня шоссе, получим $l = v^2 \sin 2\alpha / g = v^2 / g = 19,6$ м. Расстояние между машинами должно быть не меньше 19,6 м.

62. Угол между соседними спицами переднего колеса равен $\varphi = 2\pi/N_1$. Колесо будет казаться зрителю невращающимся, если за время между съемками двух соседних кадров ($\tau = 1/24$ с) колесо повернется на угол $\alpha = k\varphi$, где k — целое положительное число. С другой стороны, угол поворота колеса за время τ равен $\alpha = \omega\tau$, где ω — угловая скорость колеса. Следовательно, переднее колесо будет казаться невращающимся, если $\omega = 2\pi k/N_1\tau$. При этом скорость повозки $v = \omega r = 2\pi k r/N_1\tau$. Она будет иметь наименьшее значение $v_{\min} = 2\pi r/N_1\tau = 8,8$ м/с. Задние колеса также будут казаться невращающимися, если $2\pi k_1 r/N_1\tau = 2\pi k_2 R/N_2\tau$. Отсюда при $k_1 = k_2 = 1$ $N_2 = N_1 R/r = 9$.

63. 1) Спицы кажутся вращающимися против часовой стрелки, если за время τ (см. задачу 62) колесо повернется на угол β_1 , удовлетворяющий условию $k\varphi > \beta_1 > k\varphi - \varphi/2$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Последовательные положения спиц колеса для данного случая изображены

на рис. 300, а. Зрителю кажется, что каждая спица повернулась на угол $\alpha < \varphi/2$ против часовой стрелки. Возможные значения угловой скорости заключены соответственно в интервале

$$\frac{k\varphi}{\tau} > \omega_1 > \frac{(2k-1)\varphi}{2\tau}.$$

Так как число спиц передних и задних колес одинаково, то для

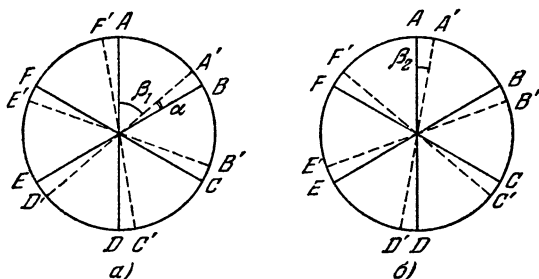


Рис. 300.

того, чтобы колеса казались вращающимися против часовой стрелки, скорость повозки должна удовлетворять неравенствам

$$\frac{k\varphi r}{\tau} > v > \frac{k\varphi r}{\tau} - \frac{\varphi r}{2\tau}, \quad (1)$$

$$\frac{k\varphi R}{\tau} > v > \frac{k\varphi R}{\tau} - \frac{\varphi R}{2\tau}. \quad (2)$$

$R=1,5r$, поэтому второе неравенство можно переписать следующим образом:

$$1,5 \frac{k\varphi r}{\tau} > v > \frac{1,5k\varphi r}{\tau} - \frac{1,5\varphi r}{2\tau}.$$

Оба неравенства, совместимые лишь при $k=1$, дают допустимые значения скорости повозки в виде $\varphi r/\tau > v > 0,75\varphi r/\tau$, или, так как $\varphi=2\pi/6$, $8,8 \text{ м/с} > v > 6,6 \text{ м/с}$.

2) Спицы заднего колеса будут казаться вращающимися по часовой стрелке, если за время τ колесо повернется на угол β_2 , удовлетворяющий условию $(2k-1)\varphi/2 > \beta_2 > (k-1)\varphi$ (рис. 300, б). Отсюда для скорости повозки вытекает неравенство

$$1,5 \frac{(2k-1)\varphi r}{2\tau} > v > \frac{1,5(k-1)\varphi r}{\tau}.$$

Одновременно должно быть удовлетворено неравенство (1). При $k=1$ оба неравенства совместимы, если $0,75\varphi r/\tau > v > 0,5\varphi r/\tau$; при $k=2$ они совместимы при условии $2\varphi r/\tau > v > 1,5\varphi r/\tau$. Если $k > 2$, то неравенства несовместимы. Следовательно, $6,6 \text{ м/с} > v > 4,4 \text{ м/с}$ или $17,6 \text{ м/с} > v > 14,2 \text{ м/с}$.

64. Через точку C (рис. 301) проходит мгновенная ось вращения (см. задачу 57). Поэтому точка A имеет скорость, равную $v_A = v(R+r)/r$. Точка B имеет скорость $v_B = v(R-r)/r$.

65. Мгновенную скорость, равную скорости оси катушки, имеют точки, расположенные на окружности радиуса r , центром которой является точка C .

66. Траектории точек A , B и C изображены на рис. 302. Точка B описывает кривую, называемую обыкновенной циклоидой; точки A и C описывают удлиненную и укороченную циклоиды.

67. Линейная скорость точек на окружности вала $v_1 = \omega d/2$. Линейная скорость точек обоймы $v_2 = \Omega D/2$. Так как шарики катятся без скольжения, таковы же будут и мгновенные скорости тех точек шарика, которые в данный момент соприкасаются с валом и обоймой. Но мгновенную скорость любой точки шарика можно

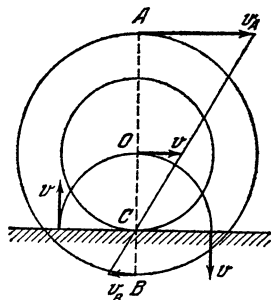


Рис. 301.

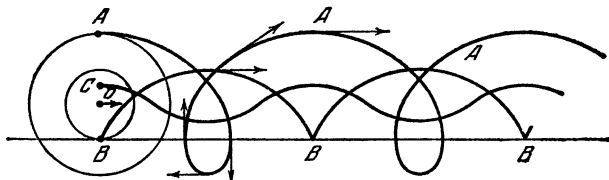


Рис. 302.

рассматривать как сумму двух скоростей: скорости движения его центра v_0 и линейной скорости вращательного движения вокруг

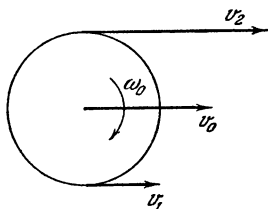


Рис. 303.

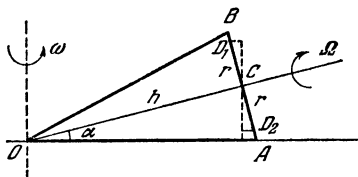


Рис. 304.

центра. Вращение шарика будет происходить с некоторой угловой скоростью ω_0 (рис. 303). Поэтому $v_1 = v_0 - \omega_0 r$, $v_2 = v_0 + \omega_0 r$. Отсюда

$$v_0 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{4}(\omega d + \Omega D).$$

В этом выражении каждая из угловых скоростей может быть как положительной (вращение по часовой стрелке), так и отрицательной (вращение против часовой стрелки). При $\Omega = 0$ $v_0 = \omega d/4$.

68. Так как конус катится без скольжения, то точки образующей OA (рис. 304) должны быть неподвижны. Из этого условия

определяется скорость Ω вращения конуса вокруг собственной оси. Для точки A это условие дает $\omega h / \cos \alpha = \Omega h \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда $\Omega = \omega / \sin \alpha$. Скорость произвольной точки D_1 диаметра AB основания конуса складывается из двух скоростей:

$$v_1 = \omega (h \cos \alpha - r \sin \alpha) + r \omega / \sin \alpha,$$

где r — расстояние от центра C основания до данной точки. Для точки D_2 , лежащей ниже центра C , будем иметь

$$v_2 = \omega (h \cos \alpha + r \sin \alpha) - r \omega / \sin \alpha.$$

Крайняя нижняя точка имеет скорость, равную нулю, а крайняя верхняя — скорость $2\omega h \cos \alpha$.

69. В местах сцепления конических шестерен E и C , а также шестерен E и D линейные скорости должны быть одинаковы. Так как шестерни E вращаются вокруг оси A со скоростью ω , а сама ось вращается в другой плоскости со скоростью Ω , то для сцепления колес E и C имеет место равенство $r_1 \omega_1 = r \omega + r_1 \Omega$. Для сцепления колес E и D аналогичное равенство имеет вид $r_2 \omega_2 = -r \omega + r_1 \Omega$.

Отсюда $2\Omega = \omega_1 + \omega_2$, $2\omega = \frac{r_1}{r} (\omega_1 - \omega_2)$. При определенной скорости Ω приводимого во вращение двигателем колеса B угловые скорости ведущих колес автомобиля могут отличаться друг от друга на величину от нуля до 2Ω .

70. Из соображений симметрии очевидно, что в любой момент времени черепахи будут располагаться в углах квадрата, сторона которого все время уменьшается (рис. 305). Скорость каждой черепахи

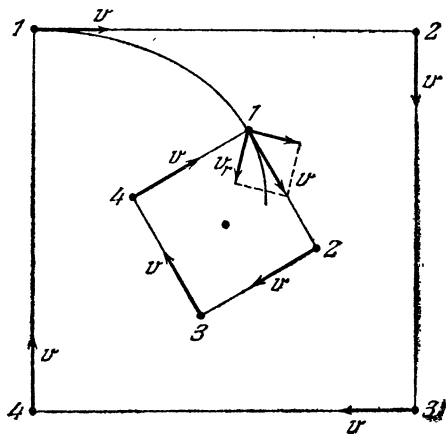


Рис. 305.

можно разложить на радиальную (направленную к центру) и перпендикулярную ей. Радиальная скорость, т. е. скорость приближения к центру, будет равна $v_r = v / \sqrt{2}$. Каждой черепахе предстоит пройти до центра расстояние $l = a / \sqrt{2}$. Следовательно, черепахи встретятся в центре квадрата через время $t = l / v_r = a / v$.

71. Корабль B движется по направлению к кораблю A со скоростью v . В то же время корабль A удаляется от корабля B со скоростью $v \cos \alpha$ (рис. 306). Следовательно, расстояние AB сокращается со скоростью $v(1 - \cos \alpha)$. Точка C (проекция точки B на траекторию корабля A) движется со скоростью $v \cos \alpha$. Поэтому расстояние AC увеличивается со скоростью $v(1 + \cos \alpha)$. Следовательно, сумма расстояний $S = AB + AC$ остается при движении кораблей постоянной. В начальный момент точка C совпадала с A и потому $S = AB = a$. Через достаточно большое время точка C будет совпадать с B . При этом $AB = AC = S/2 = a/2$. Корабли будут двигаться на расстоянии 1,5 км друг от друга.

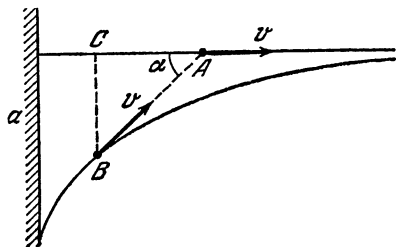


Рис. 306.

72. Движение шарика можно рассматривать, по обыкновению, как результат сложения движений по вертикали (равноускоренное движение) и горизонтали (равномерное движение).

Проще всего решить задачу, построив график зависимости координаты шарика вдоль горизонтали от времени для предельных значений скорости 267 см/с и 200 см/с (рис. 307). Нижняя ломаная соответствует максимальной скорости, а верхняя — минимальной.

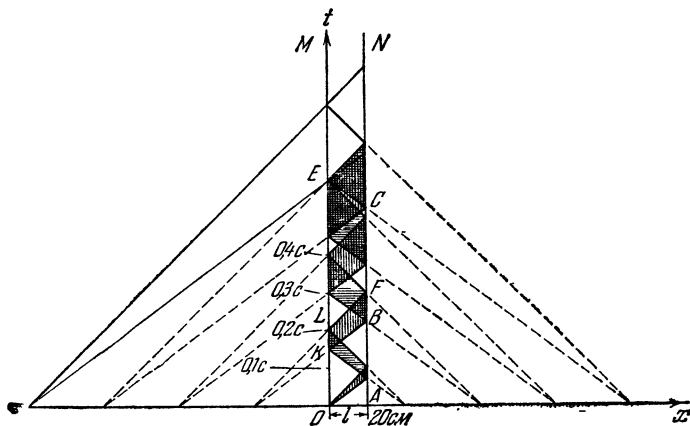


Рис. 307.

С течением времени, как видно из графика, неопределенность координаты шарика x , даваемая отрезком горизонтальной прямой, заключенной между линиями графика, увеличивается. Вертикальная штриховка на рис. 307 соответствует движению шарика от M к N , а горизонтальная — от N к M . Области пересечения штриховок соответствуют неопределенности в направлении горизонтальной скорости.

1) Непосредственно из графика видно, что направление скорости шарика по горизонтали после того, как он один раз отскочит от

плиты N , будет неопределенным при времени падения $OK \leq t \leq OL$ или $t > AB$ ($OK = 0,15$ с; $OL = 0,2$ с; $AB = 0,225$ с). Следовательно, $10 \text{ см} \leq H \leq 20 \text{ см}$ или $H \geq gt^2/2 \approx 26 \text{ см}$.

2) Шарик может попасть в любую точку основания, на котором покоятся плиты, если время падения шарика $t \geq AF = 0,3$ с. Следовательно, $H_{\min} = 44 \text{ см}$.

§ 4. Динамика прямолинейного движения

73. $T = Fx/l$.

74. $T = Fxy/lh$ — действует в горизонтальном направлении вправо. $N = M \frac{xy}{lh} g$ — действует вертикально вверх.

75. Масса левой части стержня $m_1 = \frac{M}{L} l$, а правой $m_2 = \frac{M}{L} (L-l)$, где M — масса всего стержня. Под действием приложенных к ним сил каждая часть стержня движется с одним и тем же ускорением a . Поэтому

$$F_1 - F = m_1 a,$$

$$F - F_2 = m_2 a.$$

Отсюда растягивающая сила

$$F = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2} = F_1 \frac{L-l}{L} + F_2 \frac{l}{L}.$$

76. К бруску приложены две силы mg и N . Источником силы N является деформированный пол лифта. Из уравнения движения бруска $ma = mg - N$ следует, что $N = m(g - a)$. По третьему закону Ньютона брусок (вследствие того, что он деформирован) действует на пол лифта с силой, равной N . Если $a = g$, то $N = 0$, т. е. брусок перестает действовать на пол (в бруске исчезли деформации). При ускоренном движении вверх $N = m(g + a)$.

77. Чтобы доска не съезжала, составляющая силы, приложенной к доске со стороны мальчика, должна быть направлена вдоль доски вверх. Следовательно, на мальчика со стороны доски действует равная и противоположная сила, направленная вдоль доски вниз. Выбрав положительное направление координатной оси вдоль наклонной плоскости вверх, запишем уравнения движения мальчика:

$$-Mg \sin \alpha - F = Ma,$$

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad \frac{v_0}{2} = v_0 + at.$$

Доска находится в равновесии, поэтому $F - mg \sin \alpha = 0$. Решив данную систему, находим

$$S = \frac{3Mv_0^2}{8(M+m)g \sin \alpha}.$$

78. Большее ускорение ($a > g$) у частиц бруска в верхнем сечении. Частицы бруска в нижнем сечении в начальный момент времени имеют ускорение $a = g$.

79. В верхнем сечении в начальный момент времени частицы бруска имеют ускорение $a=g$, в нижнем сечении — ускорение $a > g$.

80. Показания весов уменьшаются.

81. При движении крыльев воздух сжимается под крыльями и разрежается над крыльями. Вследствие деформации воздуха возникает подъемная сила N . Из уравнения движения $ma = N - mg$ следует, что $N = ma + mg$. По третьему закону Ньютона крылья мухи действуют на воздух с силой N , направленной вниз. Вследствие этого чашка весов, на которой находится бутылка с мухой, будет опускаться.

82. На рис. 308 изображены силы, действующие на грузы. Уравнения движения для грузов запишутся следующим образом:

$$m_1 a = T - m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T,$$

где T — натяжение нити, a — ускорение. (Ускорения грузов одинаковы, так как нить считается нерастяжимой. Невесомость нити и блока определяет постоянство T .) Отсюда $a = [(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)] g = 327 \text{ см/с}^2$, $T = m_1(a + g) = 1,3 \text{ Н}$. Время движения $t = \sqrt{2H/a} \approx 1 \text{ с}$.

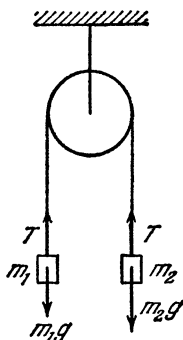


Рис. 308.

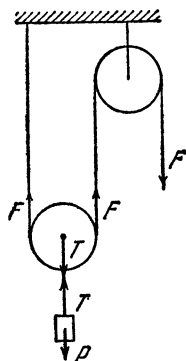


Рис. 309.

83. Если масса блоков и нити пренебрежимо мала (рис. 309), то $2F - T = 0$, $T - P = ma$. Отсюда $F = (1 + a/g) P/2$. При $a = 0$ $F = P/2$.

84. Уравнения движения для тел с массами m_1 , m_2 , m_3 имеют вид

$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$

$$m_2 b = m_2 g - T_2,$$

$$m_3 c = m_3 g - T_3,$$

где a , b , c — ускорения относительно неподвижного блока A . Ускорение считается положительным, если оно направлено вниз. Если масса нити ничтожно мала по сравнению с массами m_1 , m_2 , m_3 , то натяжение постоянно вдоль всей нити. Отсюда следует, что $T_2 = T_3$, и сила, с которой нить, перекинутая через блок A , действует на блок B , равна T_1 (рис. 310).

Рассмотрим ту часть нити, которая находится в данный момент времени на блоке B . На эту часть вертикально свисающий левый конец нити действует с силой T_2 , а правый — с силой T_3 ($T_2 = T_3$). Так как масса любой части нити ничтожно мала, то сумма всех действующих на нее сил должна стремиться к нулю. Следовательно, блок B действует на лежащую на нем часть нити с силой $F = T_2 + T_3$, направленной вверх. По третьему закону Ньютона деформированная нить в свою очередь действует на блок с силой $T_2 + T_3$. Так как масса блока B ничтожно мала, то $T_1 = T_2 + T_3$.

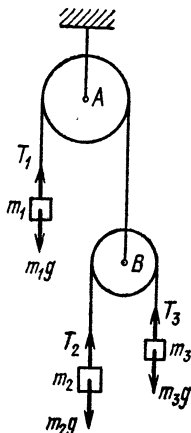


Рис. 310.

По прошествии некоторого времени (весьма малого) после начала движения тел деформация нитей прекращается, и длины после этого не изменяются с течением времени. Это означает, что ускорение блока B будет равно $(-a)$, а ускорения грузов m_2 и m_3 относительно блока B равны и противоположны по направлению. Обозначив через d ускорение тела m_2 относительно блока B , получим

$$b = (-a) + d, \\ c = (-a) + (-d),$$

откуда $b + c = -2a$. Таким образом, окончательно имеем следующую систему уравнений:

$$m_1 a = m_1 g - T, \\ m_2 b = m_2 g - T/2, \\ m_3 c = m_3 g - T/2, \\ b + c = -2a.$$

Решая эту систему уравнений, получим (при условии $m_1 = m_2 + m_3$)

$$a = \frac{(m_2 - m_3)^2}{(m_2^2 + m_3^2 + 6m_2 m_3)} g, \quad b = \frac{m_1^2 - 4m_2^2}{m_1^2 + 4m_2 m_3} g, \\ c = \frac{m_1^2 - 4m_3^2}{m_1^2 + 4m_2 m_3}, \quad T = \frac{8m_1 m_2 m_3}{m_1^2 + 4m_2 m_3} g.$$

В общем случае

$$T = \frac{8m_1 m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)} g.$$

85. Показание динамометра вначале равно $F = 30$ Н. Если показания динамометра не меняются, то на груз 20 Н действует направленная вверх сила натяжения нити, равная 30 Н. Следовательно, этот груз движется вверх с ускорением $a = g/2$. С тем же ускорением движется вниз другой груз. Дополнительный груз на второй чашке находится из уравнения

$$\frac{P + P_1}{2} g = P + P_1 - F,$$

откуда $P_1 = 30$ Н.

86. Чтобы восстановить равновесие, надо с правой чашки весов снять груз весом $P = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g$.

87. Так как массой блоков и нити мы пренебрегаем, натяжение нити будет всюду одинаково (рис. 311). Поэтому

$$\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 a_1, \\ m_2 g - 2T &= m_2 a_2, \\ m_3 g - T &= m_3 a_3, \\ a_2 &= -(a_1 + a_3)/2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4m_1 m_3 - 3m_2 m_3 + m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g, \\ a_2 &= \frac{m_1 m_2 - 4m_1 m_3 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g, \\ a_3 &= \frac{4m_1 m_3 - 3m_1 m_2 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2} g. \end{aligned}$$

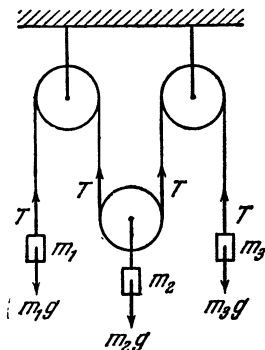


Рис. 311.

88. Так как масса блоков и нити пренебрежимо мала, натяжение нити всюду одно и то же. Поэтому

$$\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 a_1, \\ m_2 g - 2T &= m_2 a_2, \\ 2T - T &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $T=0$ и $a_1=a_2=g$. Оба груза свободно падают с ускорением g . Блоки B и C вращаются против часовой стрелки, блок A — по часовой стрелке.

89. Пусть в некоторый момент i -й груз находится на расстоянии x_i от потолка. Тогда из нерастяжимости всех нитей следует, что сумма всех таких расстояний остается во время движения постоянной: $\sum_{i=1}^8 x_i = L$. За время Δt произойдет изменение каждого из этих расстояний, поэтому через время Δt

$$\sum_{i=1}^8 \left[x_i + v_i \Delta t + \frac{a_i (\Delta t)^2}{2} \right] = L.$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим после сокращения на Δt :

$$\sum_{i=1}^8 \left(v_i + \frac{1}{2} a_i \Delta t \right) = \sum_{i=1}^8 v_i + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^8 a_i = 0.$$

Поскольку это равенство должно быть справедливым при любом Δt , ускорения грузов связаны соотношением $\sum_{i=1}^8 a_i = 0$. Так как массы

блоков и трение в их осях пренебрежимо малы, то натяжение одной и той же нити, перекинутой через любой блок, по обе стороны блока одинаково и равно половине натяжения той нити, на которой этот блок висит. Отсюда следует, что натяжения всех нитей, на которых висят грузы, равны между собой. Обозначив это натяжение через T , запишем уравнение движения i -го груза в виде

$$m_i g - T = m_i a_i,$$

или

$$g - \frac{T}{m_i} = a_i.$$

Сложив все 8 таких уравнений, получим

$$8g - T \sum_{i=1}^8 \frac{1}{m_i} = \sum_{i=1}^8 a_i = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{8g}{\sum_{i=1}^8 (1/m_i)}.$$

90. Обозначим натяжение нити, на которой висят грузы m_1 и m_2 , через T . Тогда натяжение нити, на которой висит груз m_3 , равно $2T$, а натяжение нити, на которой висит груз m_4 , равно $4T$. Уравнения движения для грузов запишутся в виде

$$m_1 g - T = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - T = m_2 a_2,$$

$$m_3 g - 2T = m_3 a_3,$$

$$m_4 g - 4T = m_4 a_4.$$

Из-за нерастяжимости нитей ускорения грузов связаны соотношением

$$a_1 + a_2 + 2a_3 + 4a_4 = 0.$$

(Это соотношение можно получить тем же способом, как в решении задачи 89.) Решив полученную систему уравнений при заданных значениях m_1, m_2, m_3, m_4 , найдем $a_4 = g/33 \approx 0,3 \text{ м/с}^2$.

91. Для данного случая уравнения динамики запишутся в виде $mg - T = ma, T = Ma$, где T — натяжение нити. Отсюда $a = \frac{m}{M+m}g = \frac{2}{7}g$. Уравнения кинематики дают $x = v_0 t - at^2/2, v_t = v_0 - at$.

Решая данную систему уравнений, найдем, что через 5 с тележка будет находиться на том же месте ($x=0$) и будет иметь скорость $v_t = 7 \text{ м/с}$, направленную вправо. Тележка пройдет путь

$$S = 2 \left\{ v_0 \frac{t}{2} - \frac{a(t/2)^2}{2} \right\} = 17,5 \text{ м}.$$

92. На рис. 312 изображены стрелками все силы, действующие на тела m_1 , m_2 , m_3 . Обозначим через a ускорение тел m_1 и m_2 , а через c и b — горизонтальное и вертикальное ускорения тела m_3 .

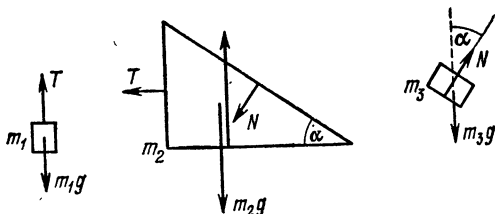


Рис. 312.

Запишем проекции уравнений движения на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T, & m_2 a &= T + N \sin \alpha, \\ m_3 b &= m_3 g - N \cos \alpha, & m_3 c &= N \sin \alpha. \end{aligned}$$

Из геометрических соображений следует соотношение $b/(a+c) = \operatorname{tg} \alpha$. Решая эти уравнения, находим a , b , c :

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 + m_3 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \sin^2 \alpha} g, \\ b &= \frac{m_1 \sin \alpha \cos \alpha + (m_1 + m_2 + m_3) \sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \sin^2 \alpha} g, \\ c &= \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha \cos \alpha - m_1 \sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 + m_3 \sin^2 \alpha} g. \end{aligned}$$

Решение справедливо при $\operatorname{tg} \alpha - 1 \leq m_2/m_1$ (см. задачу 35).

93. На рис. 313 изображены все силы, действующие на стержень и клин. Обозначим через a ускорение стержня относительно неподвижного стола, а через b — ускорение клина. Запишем проекции

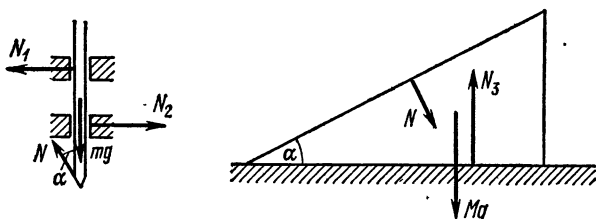


Рис. 313.

уравнений движения стержня и клина на горизонтальное и вертикальное направления:

$$\begin{aligned} ma &= mg - N \cos \alpha, & 0 &= N_1 - N_2 + N \sin \alpha, \\ Mb &= N \sin \alpha, & 0 &= N_3 - N \cos \alpha - Mg. \end{aligned}$$

Из геометрических соображений следует уравнение кинематической

связи между ускорениями стержня и клина: $a/b = \operatorname{tg} \alpha$. Решая уравнения, получаем

$$a = \frac{m \operatorname{tg}^2 \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha} g, \quad b = \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

94. Единственной силой, действующей на бусинку, является сила реакции стержня N , которая направлена перпендикулярно стержню. Абсолютное ускорение w_a бусинки (ускорение относительно неподвижного наблюдателя) будет направлено в сторону действия силы реакции N . Относительное ускорение w_o направлено вдоль стержня (рис. 314); $w_a = a + w_o$. Из треугольника ускорений следует: $w_o = a \cos \alpha$, $w_a = a \sin \alpha$. На основании второго закона Ньютона сила реакции равна $N = ma \sin \alpha$. Время движения бусинки по стержню τ определяется из уравнения $l = (a \cos \alpha) \tau^2 / 2$. Отсюда $\tau = \sqrt{2l / (a \cos \alpha)}$.

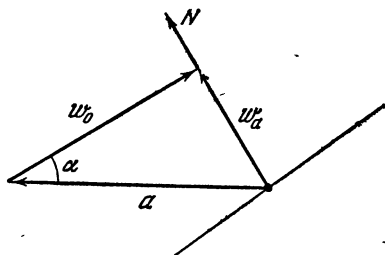


Рис. 314.

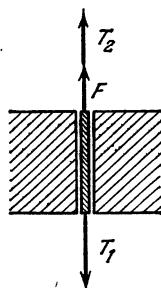


Рис. 315.

95. Рассмотрим элемент нити, находящийся в щели. Пусть нить движется вниз. Тогда на элемент нити действуют силы натяжения нити с обеих сторон и сила трения (рис. 315). Так как массой рассматриваемого кусочка нити мы пренебрегаем, то $T_1 - F - T_2 = 0$. Уравнения динамики запишутся следующим образом:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \quad m_2 g - T_2 = -m_2 a.$$

Отсюда

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g - F}{m_1 + m_2}.$$

96. 1) Если $F \leq kmg$, то бруски не будут двигаться.

2) Если $kMg \geq F > kmg$, то будет двигаться меньший брусок.

3) Если $F > kMg$, то бруски будут двигаться в разные стороны.

(Предполагается, что пока действовали силы F , трение отсутствовало.)

97. 1) Если скорость вагона возрастает, картина будет скользить вдоль задней стенки вагона вниз с ускорением $g - ka$. (Если $ka > g$, то картина будет находиться в покое.)

2) Если скорость вагона убывает, картина будет двигаться вниз с ускорением g и вперед с ускорением a .

98. По второму закону Ньютона

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta - k m_1 g \cos \alpha - k m_2 g \cos \beta.$$

Грузы окажутся на одном уровне после прохождения пути S , удовлетворяющего следующим уравнениям:

$$S \sin \alpha = h - S \sin \beta, \quad S = at^2/2.$$

Исключая S и a из системы трех уравнений, получим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{gt^2 (\sin \alpha + \sin \beta) (k \cos \beta + \sin \beta) + 2h}{gt^2 (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - k \cos \alpha) - 2h}.$$

99. Рассмотрим желоб, составляющий произвольный угол φ с вертикалью (рис. 316). Если $k < \operatorname{ctg} \varphi$, то путь, пройденный песчинкой, $S = at^2/2$, где $a = g(\cos \varphi - k \sin \varphi)$. Координаты песчинки: $x = S \sin \varphi$, $y = S \cos \varphi$. Отсюда

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= S^2 = \\ &= \left(\frac{gt^2}{2} \right)^2 \left(\frac{y}{S} - k \frac{x}{S} \right)^2, \end{aligned}$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 = (gt^2/2)^2 (y - kx)^2.$$

Учтем, что $k < y/x$, и обозначим $A = gt^2/4$. Тогда

$$x^2 + y^2 = 2A(y - kx).$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$(x + kA)^2 + (y - A)^2 = A^2(1 + k^2).$$

Это — уравнение окружности радиуса $R = A \sqrt{1 + k^2} = \left(\frac{gt^2}{4} \right) \sqrt{1 + k^2}$ с центром, лежащим ниже точки O на $A = \frac{gt^2}{4}$ и левее вертикали на $kA = kgt^2/4$. По другую сторону вертикали геометрическое место искомым точек составляет аналогичную дугу.

100. Уравнения движения дают для ускорения камня следующие выражения:

$$a_1 = g(\sin \alpha + k \cos \alpha) \text{ при движении вверх,}$$

$$a_2 = g(\sin \alpha - k \cos \alpha) \text{ при движении вниз.}$$

Кинематические уравнения запишутся следующим образом:

$$l = v_0 t_1 - a_1 t_1^2/2, \quad l = a_2 t_2^2/2, \quad v_0 - a_1 t_1 = 0.$$

Из этих пяти уравнений находим

$$k = \frac{2l - gt_1^2 \sin \alpha}{gt_1^2 \cos \alpha} \approx 0,37, \quad t_2 = t_1 \sqrt{\frac{l}{gt_1^2 \sin \alpha - l}} = 4,2 \text{ с.}$$

101. Тележка первоначально движется равнозамедленно. Скорость тележки равна $v = v_0 - (f/M)t$, где f — сила трения, равная kmg . Тело движется равноускоренно. Скорость тела $u = (f/m)t$. Если

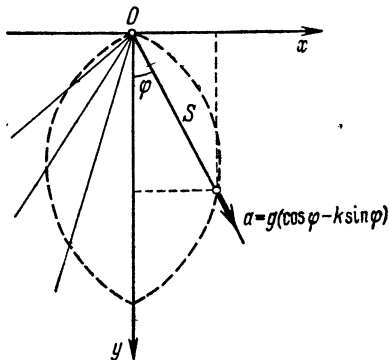


Рис. 316.

тележка длинная, то скорости тела и тележки могут сравняться. Это произойдет в момент времени $\tau = v_0 / (f/m + f/M)$. После этого и тело, и тележка начнут двигаться с постоянной скоростью, равной $Mv_0 / (M + m)$. Тележка к этому моменту времени пройдет путь $S = v_0 \tau - (f/2M) \tau^2$, а тело — путь $s = (f/2m) \tau^2$. Путь, пройденный телом относительно тележки, равен $S - s$. Этот путь должен быть меньше l . Таким образом, тело не покинет тележку при условии $S - s \leq l$, т. е.

$$\frac{Mv_0^2}{2gk(M+m)} \leq l.$$

102. Если $F \leq k(m+M)g$, движения нет. Пусть $F > k(m+M)g$. Исследуем случай отсутствия скольжения тела по бруску. Уравнения движения при этом будут иметь вид

$$ma = f, \quad Ma = F - f - k(m+M)g; \quad f \leq kmg.$$

Отсюда

$$a = \frac{F}{m+M} - kg, \quad f = \frac{mF}{m+M} - kmg \leq kmg,$$

что возможно, если

$$k(m+M)g < F < 2k(m+M)g.$$

Если же $F > 2k(m+M)g$, то тело будет скользить по бруску. В этом случае уравнения движения имеют вид

$$ma = kmg, \quad Mb = F - kmg - k(M+m)g,$$

откуда

$$a = kg, \quad b = \frac{F}{M} - k \frac{(2m+M)}{M} g.$$

Легко убедиться в том, что $b > a$.

103. Уравнения движения бруска и тела имеют вид

$$\begin{aligned} ma &= f, & (1) \\ Mb &= F - f, & (2) \end{aligned}$$

где f — сила трения, a и b — ускорения. Предположим, что проскальзывания нет, тогда $a = b$. Из уравнений движения можно определить ускорение и силу трения. Сила трения $f = mF / (M + m)$. Чтобы не было проскальзывания, сила трения должна удовлетворять неравенству $f \leq kmg$, т. е. $F / (M + m) \leq kg$. Если $F > k(M + m)g$, то возникает скольжение. Уравнения (1) и (2) в этом случае примут вид

$$ma = kmg, \quad Mb = F - kmg.$$

Из этих уравнений находим a и b : $a = kg$, $b = (F - kmg) / M$. Очевидно, что $b > a$. Ускорение тела относительно бруска будет направлено в сторону, противоположную движению, и по величине равно $(F - kmg) / M - kg$. Время движения тела по бруску $\tau =$

$$= \sqrt{\frac{2lM}{F - kg(M+m)}}.$$

104. 1) Силы, действующие на стол и груз, изображены на рис. 317. Уравнения движения по горизонтали имеют следующий вид: для стола с блоками

$$F - F + F_{\text{тр}} = \frac{P_1}{g} a_1;$$

для груза

$$F - F_{\text{тр}} = \frac{P_2}{g} a_2.$$

Предположим, что сила F настолько мала, что груз не скользит по столу. Тогда $a_1 = a_2$ и $F_{\text{тр}} = FP_1/(P_1 + P_2)$. Увеличивая постепенно силу F , мы тем самым будем постепенно увеличивать и силу

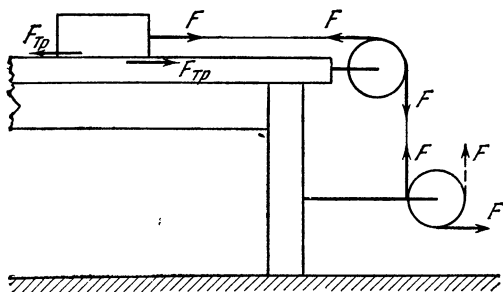


Рис. 317.

трения $F_{\text{тр}}$. Однако если стол и груз неподвижны друг относительно друга, то сила трения между ними не может превысить значения $F_{\text{тр max}} = kP_2$. Поэтому скольжение груза по столу начнется при

$$F > F_{\text{тр max}} \frac{P_1 + P_2}{P_1} = k \frac{P_2}{P_1} (P_1 + P_2) = 100 \text{ Н.}$$

В нашем случае $F = 80 \text{ Н}$, следовательно, груз проскальзывает не будет и

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{P_1 + P_2} g = \frac{8}{25} g \approx 3,14 \text{ м/с}^2.$$

2) Уравнения движения для стола с блоками и груза в этом случае имеют вид

$$-F + F_{\text{тр}} = \frac{P_1}{g} a_1, \quad F - F_{\text{тр}} = \frac{P_2}{g} a_2.$$

Ускорения стола и груза направлены в противоположные стороны, поэтому проскальзывание обязательно будет. Следовательно, $F_{\text{тр}} = kP_2$. Ускорение стола равно

$$a_1 = \frac{-F + kP_2}{P_1} g = -\frac{2}{15} g \approx -1,31 \text{ м/с}^2.$$

Стол будет двигаться влево.

105. При движении бусинки на нее действуют две силы: сила трения kN и сила реакции N . Абсолютное ускорение будет направлено по результирующей силе F . Из рис. 318 следует:

$$N = ma \sin \alpha, \quad w_0 = a \cos \alpha - kN/m = a(\cos \alpha - k \sin \alpha).$$

Отсюда $\tau = \sqrt{\frac{2l}{a(\cos \alpha - k \sin \alpha)}}$.

Если $k \geq \operatorname{ctg} \alpha$, то бусинка не будет двигаться относительно стержня, и в этом случае сила трения равна $ma \cos \alpha$.

106. По второму закону Ньютона изменение количества движения системы пушка—снаряд за время выстрела τ должно равняться импульсу действующих на систему сил:

по горизонтали

$$mv_0 \cos \alpha - Mv_1 = F_{\text{тр}} \tau,$$

где $F_{\text{тр}} \tau$ —импульс сил трения;
по вертикали

$$mv_0 \sin \alpha = N\tau - (Mg + mg)\tau,$$

где $N\tau$ —импульс сил нормального давления (реакции горизонтальной площадки), $(Mg + mg)\tau$ —импульс сил тяжести. Учитывая, что $F_{\text{тр}} = kN$, получим

$$v_1 = \frac{m}{M} v_0 \cos \alpha - k \frac{m}{M} v_0 \sin \alpha - k \frac{M+m}{M} g\tau$$

или, так как $g\tau \ll v_0$,

$$v_1 \approx \frac{m}{M} v_0 (\cos \alpha - k \sin \alpha).$$

Данное решение пригодно для $k \leq \operatorname{ctg} \alpha$. При $k > \operatorname{ctg} \alpha$ пушка останется неподвижной.

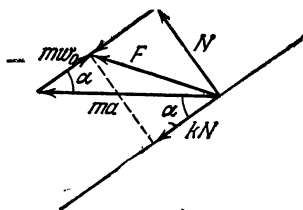


Рис. 318.

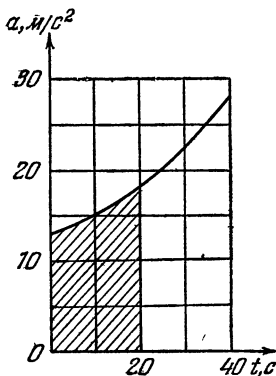


Рис. 319.

107. 1) Ускорение в начальный момент $a_0 = F/M \approx 13,3 \text{ м/с}^2$. В зависимости от времени ускорение меняется по закону $a = F/(M - \mu t)$,

где $\mu = 200$ кг/с — масса топлива, расходуемая ракетой в секунду. График ускорения имеет вид, изображенный на рис. 319. Скорость спустя 20 с численно равна площади, заштрихованной на чертеже, $v \approx 300$ м/с.

2) Второй закон Ньютона запишется так:

$$(M - \mu t) a = F - (M - \mu t) g - f.$$

По условию $t = 20$ с, $a = 0,8g$. Отсюда сила сопротивления воздуха

$$f = F - (M - \mu t) g - (M - \mu t) 0,8g \approx 125 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

3) Уравнение Ньютона для груза дает $m_1 a = kx - m_1 g$, где m_1 — масса груза на конце пружины, a — ускорение ракеты, k — коэффициент упругости пружины, x — удлинение пружины. По условию задачи $m_1 g = k l_0$. Следовательно, $x = \frac{l_0}{g} (a + g)$. Шкала прибора должна быть равномерной. Делению в один сантиметр соответствует ускорение g .

108. В системе отсчета, связанной со вторым кубиком, имеем

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_1 l, \quad v_2^2 - v_1^2 = 2a_2 l,$$

где $a_1 = -F(2M + m)/2Mm$ — ускорение пули в первом кубике, v_1 — ее скорость при выходе из него, $a_2 = -F(M + m)/Mm$ — ускорение пули во втором кубике, v_2 — ее скорость при выходе из него. Положив $v_1 = 0$, найдем нижний предел скорости v_0 , а положив $v_2 = 0$, получим верхний предел. Следовательно,

$$\sqrt{Fl(2M + m)/mM} \leq v_0 \leq \sqrt{Fl(4M + 3m)/mM}.$$

§ 5. Закон сохранения количества движения

109. Разобьем массу диска на пары одинаковых элементов, лежащих на одном диаметре на равных расстояниях от центра. Количество движения каждой пары равно нулю, так как количества движения обеих масс равны, но направлены в противоположные стороны. Следовательно, количество движения всего диска равно нулю.

110. Пусть масса лодки M , масса мешка m , начальная скорость лодок v_0 . При выбрасывании мешка с лодки на нее действует некоторая сила в направлении, перпендикулярном v_0 . Однако изменения количества движения лодки не происходит, так как сила сопротивления воды препятствует поперечному движению лодок. Количество движения лодки изменяется только при попадании в нее мешка.

Применяя закон сохранения количества движения к системе мешок — лодка, в первом случае можно написать:

$$\begin{aligned} (M + m) v_0 - m v_0 &= (M + 2m) v_1 \text{ для одной лодки,} \\ -M v_0 + m v_1 &= (M + m) v_2 \text{ для другой.} \end{aligned}$$

Здесь v_1 и v_2 — конечные скорости лодок. Из данной системы уравнений имеем $v_1 = -v_2 = \frac{M}{M + 2m} v_0$.

В случае, когда мешки перебрасываются одновременно, конечные скорости лодок v_1' и v_2' определяются из уравнений

$$Mv_0 - mv_0 = (M + m)v_1', \quad -Mv_0 + mv_0 = (M + m)v_2'.$$

Отсюда $v_1' = -v_2' = \frac{M - m}{M + m} v_0$. Таким образом, конечная скорость лодок в первом случае будет больше.

111. Количество движения системы доска — лягушка в горизонтальном направлении не изменяется. Следовательно, можно написать

$$mv_0 \cos \alpha = Mu,$$

где u — скорость доски относительно неподвижной поверхности пруда. Чтобы лягушка оказалась на другом конце доски, должно выполняться условие

$$L - u\tau = (v_0 \cos \alpha) \tau,$$

где τ — время, в течение которого лягушка находилась в воздухе; оно равно $\tau = 2v_0 \sin \alpha / g$. Из имеющихся уравнений можно определить v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(m/M + 1) \sin 2\alpha}}.$$

112. Поскольку в горизонтальном направлении система жук — клин замкнута, для определения скорости v клина можно воспользоваться законом сохранения количества движения

$$Mv + m(v - u \cos \alpha) = 0,$$

где $(v - u \cos \alpha)$ — горизонтальная составляющая скорости жука относительно неподвижной системы отсчета. Отсюда $v = \frac{m}{M + m} u \cos \alpha$.

113. Так как внешние силы, действующие на систему по горизонтали, отсутствуют, проекция общего количества движения системы клин — грузы на горизонтальное направление должна оставаться постоянной (равной нулю). Отсюда следует, что клин начнет двигаться только в том случае, если будут двигаться грузы. Чтобы груз m_2 двигался вправо, должно выполняться условие

$$m_2 g \sin \alpha \geq m_1 g + k m_2 g \cos \alpha.$$

Отсюда $m_1/m_2 \leq \sin \alpha - k \cos \alpha$. При этом условии клин будет двигаться влево. Чтобы груз m_2 двигался влево, должно выполняться условие

$$m_1 g \geq m_2 g \sin \alpha + k m_2 g \cos \alpha$$

или $m_1/m_2 \geq \sin \alpha + k \cos \alpha$. Клин при этом будет двигаться вправо. Следовательно, для равновесия клина отношение масс грузов должно удовлетворять неравенству

$$\sin \alpha - k \cos \alpha \leq m_1/m_2 \leq \sin \alpha + k \cos \alpha.$$

114. Для направления вдоль наклонной плоскости можно написать

$$mv \cos \alpha + Mu = 0,$$

где u — скорость ящика в момент попадания в него камня; она равна $u = \sqrt{2gS \sin \alpha}$. Следовательно,

$$v = -\frac{M}{m} \frac{\sqrt{2gS \sin \alpha}}{\cos \alpha}.$$

115. В высшей точке подъема скорость ракеты равна нулю. Изменение общего количества движения частей ракеты под действием внешних сил (силы тяжести) крайне незначительно, так как импульс этих сил весьма мал ввиду кратковременности взрыва. Поэтому общее количество движения частей ракеты до и сразу после взрыва остается постоянным и равным нулю. Между тем три вектора ($m_1 \mathbf{v}_1$, $m_2 \mathbf{v}_2$, $m_3 \mathbf{v}_3$) могут в сумме дать нуль только тогда, когда они лежат в одной плоскости. Отсюда следует, что и векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ лежат в одной плоскости.

116. Скорость лодки относительно берега u связана со скоростью человека относительно лодки v соотношением $u = \frac{m}{m+M} v$. Отношение

скоростей во время движения остается постоянным. Поэтому отношение пройденных путей будет равно отношению скоростей: $S/l = m/(m+M)$, где S — путь, пройденный лодкой, а l — длина лодки (расстояние, пройденное человеком относительно лодки). Следовательно, для того чтобы лодка причалила, ее длина должна быть не менее $l = \frac{m+M}{m} S = 2,5$ м. Лодка не причалит.

117. Примем за начало координат ту точку, откуда начинал двигаться взрослый. Тогда начальная координата центра масс будет равна

$$x_1 = \frac{m_1 l/2 + m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Обозначим через x_2 координату центра масс в момент, когда взрослый добежит до края платформы. Тогда

$$x_2 = \frac{m_1 (l/2 - s) + m_2 (l - s) + m_3 (l/2 - s)}{m_1 + m_2 + m_3},$$

где s — перемещение платформы. Так как в горизонтальном направлении система взрослый — ребенок — платформа замкнута, то $x_1 = x_2$. Из этого равенства находим s :

$$s = \frac{2m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \frac{l}{2}.$$

При заданных числовых значениях это дает $s = 0,6$ м.

118. На систему обруч — жук в горизонтальном направлении внешние силы не действуют. Поэтому центр тяжести системы (точка C на рис. 320) не будет перемещаться в горизонтальной плоскости.

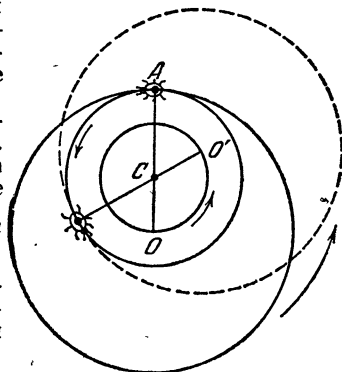


Рис. 320.

Расстояние от центра тяжести системы до центра обруча равно $CO = \frac{m}{m+M} R$. Так как оно постоянно, центр обруча O будет описывать относительно неподвижной точки C окружность радиуса CO . Легко видеть, что траектория жука представляет собой окружность радиуса $AC = \frac{M}{m+M} R$. Взаимное расположение, а также направление движения жука и обруча указаны на рис. 320.

119. Обозначим через v_k скорость ракеты в конце k -й секунды. В конце $(k+1)$ -й секунды из ракеты выбрасывается газ массы m , который уносит с собой количество движения, равное $m(-u + v_k)$. Из закона сохранения количества движения следует, что

$$(M - km) v_k = [M - (k+1)m] v_{k+1} + m(-u + v_k).$$

Изменение скорости ракеты за одну секунду равно

$$v_{k+1} - v_k = \frac{mu}{M - (k+1)m}.$$

Зная изменение скорости за одну секунду, можно написать выражение для скорости в конце n -й секунды:

$$v_n = v_0 + u \left(\frac{m}{M-m} + \frac{m}{M-2m} + \dots + \frac{m}{M-nm} \right).$$

120. Скорость ракеты будет увеличиваться. Это становится очевидным, если перейти к системе отсчета, относительно которой ракета в данный момент покоится. Давление вытекающих газов будет толкать ракету вперед.

121. Для рассмотрения всех четырех возможностей обозначим: v_1 — начальная скорость снаряда относительно пушки, v_2 — начальная

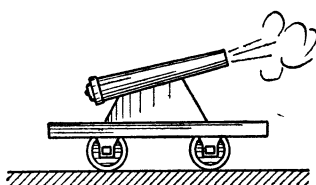


Рис. 321.

скорость снаряда относительно земли, β — угол наклона ствола пушки, γ — угол наклона вектора начальной скорости v_2 (рис. 321). Соотношения между указанными величинами определяются равенствами

$$v_1 \cos \beta + v = v_2 \cos \gamma, \quad (1)$$

$$v_1 \sin \beta = v_2 \sin \gamma, \quad (2)$$

$$mv_2 \cos \gamma + Mv = 0. \quad (3)$$

Если под v_0 понимается начальная скорость снаряда относительно земли, а угол α — угол наклона вектора v_0 (т. е. $v_0 = v_2$, $\alpha = \gamma$), то из уравнения (3) имеем

$$v = -\frac{m}{M} v_2 \cos \gamma = -\frac{m}{M} v_0 \cos \alpha.$$

Пусть теперь v_0 — начальная скорость снаряда относительно ствола пушки, который направлен под углом α к горизонту ($v_0 = v_1$, $\alpha = \beta$). Тогда из (1) и (3) получим

$$v = -\frac{m}{M+m} v_1 \cos \beta = -\frac{m}{M+m} v_0 \cos \alpha.$$

Если задана начальная скорость относительно земли и угол наклона

пушки ($v_0 = v_2$, $\alpha = \beta$), то

$$v = - \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \sin^2 \beta + M^2 \cos^2 \beta}} v_2 \cos \beta =$$

$$= - \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \sin^2 \alpha + M^2 \cos^2 \alpha}} v_0 \cos \alpha.$$

Наконец, если v_0 — начальная скорость относительно ствола пушки и задан угол наклона вектора начальной скорости относительно земли (начальный угол траектории), то $v_0 = v_1$ и $\alpha = \gamma$. Тогда

$$v = - \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \cos^2 \gamma + M^2 \sin^2 \gamma}} v_1 \cos \gamma =$$

$$= - \frac{m}{\sqrt{(m+M)^2 \cos^2 \alpha + M^2 \sin^2 \alpha}} v_0 \cos \alpha.$$

Во всех случаях знак минус означает, что пушка откатится в сторону, противоположную движению снаряда.

§ 6. Статика

122. Рассмотрим часть нити, прилегающую к цилиндру. Разобьем угол θ на большое число n частей и обозначим $\theta/n = \alpha$. Представим нить как n связанных между собой кусочков и выделим j -й кусочек (рис. 322). На него действуют соседние части нити с силами T_j и T_{j+1} , реакция цилиндра N_j и сила трения kN_j . Учтя, что угол α мал, получим следующие уравнения равновесия:

$$T_{j+1} - T_j - kN_j = 0,$$

$$N_j - T_j \alpha/2 - T_{j+1} \alpha/2 = 0.$$

Отсюда $T_{j+1} = T_j(1 + k\alpha)$, т. е.

$$T_1 = T_0(1 + k\alpha),$$

$$T_2 = T_1(1 + k\alpha), \dots,$$

$$T_n = T_{n-1}(1 + k\alpha).$$

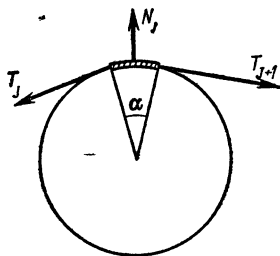


Рис. 322.

Следовательно, $T_n = T_0(1 + k\alpha)^n = T_0(1 + k\theta/n)^n$, и при $n \rightarrow \infty$ получим

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(1 + k\theta/n)^n = T_0 e^{k\theta},$$

где $e = 2,71828 \dots$ — основание натуральных логарифмов.

123. В положении равновесия (рис. 323) $mg - 2mg \cos \alpha = 0$. Следовательно, $\alpha = 60^\circ$. Искомое расстояние $h = l \operatorname{ctg} \alpha = l/\sqrt{3}$. Равновесие установится после того, как затухнут колебания, возникающие при опускании груза.

124. Равенство проекций сил на направление вертикали (рис. 324) приводит к уравнению

$$2N \sin(\alpha/2) - 2F_{\text{тр}} \cos(\alpha/2) = 0,$$

где N — сила нормального давления, а $F_{\text{тр}} \leq kN$ — сила трения. (Массой клина обычно можно пренебречь.) Следовательно, $\text{tg}(\alpha/2) \leq k$ и $\alpha \leq 2 \arctg k$.

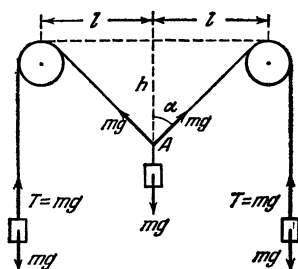


Рис. 323.

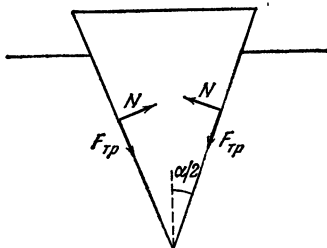


Рис. 324.

125. Если груз P опустится на высоту h , то точка K опустится на $1/3h$. Груз Q при этом поднимается на $2/3h$. Применяя «золотое» правило механики, имеем $Ph = Q^2/3h$. Отсюда $P = 2/3Q$.

126. Если ящик не опрокидывается, то момент силы F , вращающий его против часовой стрелки вокруг ребра при основании, меньше или равен моменту силы тяжести, вращающему ящик по часовой стрелке. Чтобы ящик скользил, сила F должна быть больше максимальной силы трения, приложенной к ящику. Следовательно, $Fh \leq mgl/2$, $F \geq kmg$. Отсюда $k \leq l/2h$.

127. Для поворота балки необходимо, чтобы момент сил, приложенных к концам балки, был больше момента сил трения, когда эти силы достигают своего максимального значения. Силы трения распределены равномерно вдоль балки (рис. 325). Среднее плечо сил

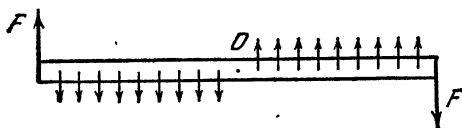


Рис. 325.

трения, действующих на левую или правую часть балки, равно $l/4$, если длину всей балки обозначить через l . Момент всех сил трения относительно центра балки равен $2(kP/2)(l/4)$. Следовательно, для поворота балки необходимо, чтобы приложенные силы F удовлетворяли неравенству $2Fl/2 > kPl/4$. Отсюда $F > kP/4$. Для поступательного перемещения балки необходимо, чтобы $2F > kP$. Следовательно, балку легче повернуть.

128. Уравнение движения груза имеет вид $P_0 a/g = F - P_0$ (рис. 326). Сумма сил, действующих на кран по вертикали, равна нулю. Поэтому $P_1 + P_2 = P + F$. Равенство нулю суммы моментов сил относительно точки A дает уравнение $Fl + PL/2 = LP_2$. Решая данную систему уравнений, найдем

$$P_1 \approx 2,23 \cdot 10^4 \text{ Н}, \quad P_2 \approx 1,77 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

129. Для равновесия рычага приложенная к точке D сила должна создать момент, равный $P \cdot AB$. Сила будет минимальной при максимальном плече, равном BD . Следовательно, $F = P \cdot AB / BD = P / \sqrt{2}$ и направлена перпендикулярно BD .

130. Если трение между полом и ящиками отсутствует, то ящики сдвинутся одновременно. Если же коэффициент трения не равен нулю, то раньше сдвинется правый ящик (см. рис. 49), так как сила, приложенная к нему со стороны палки, будет больше, чем сила, приложенная к левому ящику. Действительно, со стороны правого ящика на палку действует сила F_1 , направленная против F , а со стороны левого ящика — сила F_2 , направленная по F . Сумма

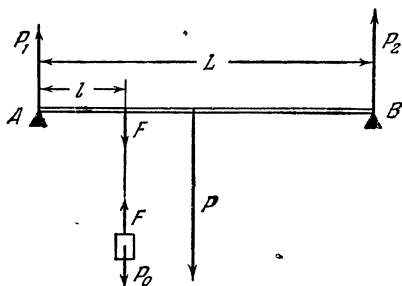


Рис. 326.

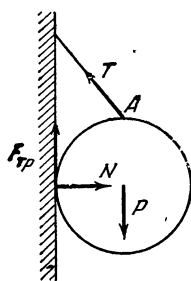


Рис. 327.

сил при равновесии равна нулю. Следовательно, $F_1 = F + F_2$, и сила F_1 раньше, чем F_2 , достигнет значения максимальной силы трения покоя.

131. Равенство нулю суммы моментов сил, действующих на шар, относительно точки A (рис. 327) приводит к уравнению

$$F_{\text{тр}} R - N R = 0.$$

Так как $F_{\text{тр}} \leq kN$, то $k \geq 1$.

132. Для того чтобы тело находилось в покое, необходимо, чтобы суммарный момент сил, стремящийся повернуть тело по часовой стрелке, был равен моменту сил, стремящемуся повернуть тело против часовой стрелки вокруг какой-либо точки (например, вокруг центра тяжести). В данном случае момент сил трения, вращающий кирпич по часовой стрелке, должен быть равен моменту сил давления плоскости на кирпич. Отсюда следует, что сила давления плоскости на правую часть кирпича должна быть больше, чем на левую. По третьему закону Ньютона и сила давления правой половины кирпича на плоскость должна быть больше силы давления левой.

133. Для того чтобы каток поднялся на ступеньку, необходимо, чтобы момент сил, вращающих каток вокруг точки A (рис. 328) против часовой стрелки, был бы по крайней мере равен моменту сил, вращающих его по часовой стрелке:

$$P(R-h) = P \sqrt{R^2 - (R-h)^2}.$$

Отсюда $h = (2 \pm \sqrt{2})R/2$. Так как $h < R$, то

$$h = (1 - \sqrt{2}/2)R \approx 0,29R.$$

134. Так как на одной из плоскостей сила трения равна нулю, то она равна нулю и на другой плоскости. В противном случае шар вращался бы вокруг своего центра, ибо момент всех остальных сил относительно этого центра равен нулю (ввиду равенства нулю плеча каждой из этих сил относительно центра шара). Суммы проекций

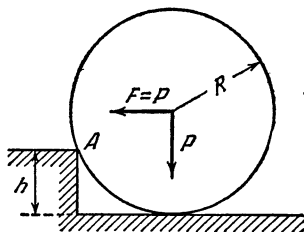


Рис. 328.

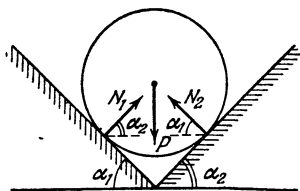


Рис. 329.

сил на вертикальное и горизонтальное направления равны нулю (рис. 329). Поэтому

$$N_1 \cos \alpha_2 - N_2 \cos \alpha_1 = 0, \quad P - N_1 \sin \alpha_2 - N_2 \sin \alpha_1 = 0,$$

где N_1 и N_2 — искомые силы давления. Отсюда

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}, \quad N_2 = \frac{P}{\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

135. Обозначим через F силу, приложенную к одной ручке. Из-за действия силы F произойдет поворот ящика, вследствие чего возникнут в точках A и B упругие силы N_1 и N_2 (рис. 330), действующие на ящик со стороны шкафа. Эти приложенные к ящику

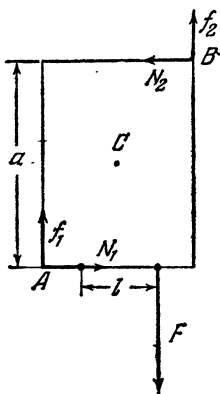


Рис. 330.

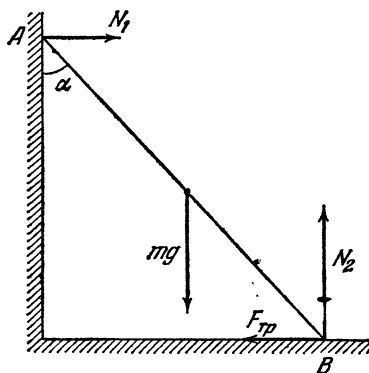


Рис. 331.

силы равны друг другу: $N_1 = N_2 = N$. Из условия равенства нулю момента всех действующих сил относительно центра ящика C следует, что $N = Fl/2a$. Ящик может быть выдвинут, если приложен-

ная сила F больше максимальной силы трения покоя: $F > f_1 + f_2 = 2kN$. Для того чтобы последнее неравенство выполнялось, необходимо, чтобы $k < a/l$.

136. Доска, отклоненная на угол α от горизонтального положения на шероховатом бревне, аналогична телу, удерживаемому силами трения на наклонной плоскости с углом при основании α . Поэтому при равновесии $F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha$. Учитывая, что $F_{\text{тр}} \leq kmg \cos \alpha$, имеем $\operatorname{tg} \alpha \leq k$.

137. Силы, приложенные к лестнице, изображены на рис. 331. В случае равновесия суммы проекций сил вдоль вертикали и горизонтали равны нулю. Следовательно, $N_1 = F_{\text{тр}}$, $N_2 = mg$. Равенство нулю суммы моментов сил относительно точки B дает еще одно уравнение:

$$N_1 \cos \alpha = (mg \sin \alpha)/2.$$

Отсюда $F_{\text{тр}} = (mg \operatorname{tg} \alpha)/2$. Так как сила трения удовлетворяет неравенству $F_{\text{тр}} \leq kN_2$, то для равновесия получаем следующее необходимое и достаточное условие: $\operatorname{tg} \alpha \leq 2k$.

138. Приложенные к лестнице силы изображены на рис. 332. Из условия равенства нулю суммы сил и суммы моментов сил имеем

$$f + N_2 = mg, \quad (1)$$

$$N_1 = F_{\text{тр}}, \quad (2)$$

$$f \sin \alpha + N_1 \cos \alpha = (mg \sin \alpha)/2. \quad (3)$$

Силы трения f и $F_{\text{тр}}$ удовлетворяют неравенствам $f \leq kN_1$ и $F_{\text{тр}} \leq kN_2$. Используя первое неравенство и уравнения (1) и (3), получаем $\operatorname{ctg} \alpha \geq N_2/2N_1 - k/2$. Так как $k \geq N_1/N_2$, то $\operatorname{ctg} \alpha \geq (1 - k^2)/2k$. Введя обозначение $k = \operatorname{tg} \beta$, данному неравенству можно придать более удобную для вычислений форму: $\operatorname{ctg} \alpha \geq \operatorname{ctg} 2\beta$, или $\alpha \leq 2\beta$.

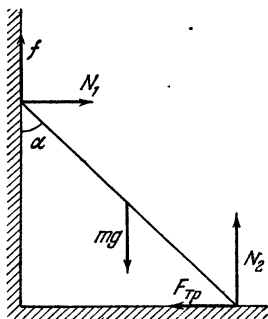


Рис. 332.

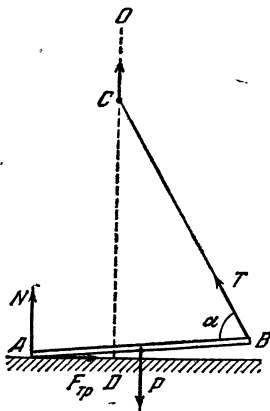


Рис. 333.

139. Если в момент, когда конец палочки B начнет приподниматься, значение силы трения $F_{\text{тр}} \leq kN$ окажется достаточным для того, чтобы конец A не проскальзывал, то палочка начнет вращаться вокруг точки A . В противном случае конец A начнет скользить до тех пор, пока сила трения $F_{\text{тр}} = kN$ не окажется способной удержать

палочку в равновесии (рис. 333). После этого палочка начнет вращаться вокруг конца A .

Найдем, какие значения должен иметь коэффициент трения k , чтобы скольжение прекратилось при определенном угле α между палочкой и нитью. Равенство сил в момент, когда палочка почти горизонтальна, приводит к уравнениям

$$F_{\text{тр}} = T \cos \alpha, \quad P = N + T \sin \alpha.$$

Равенство моментов сил относительно точки A запишется следующим образом:

$$Pl/2 = Tl \sin \alpha.$$

Используя данную систему уравнений, найдем

$$k = F_{\text{тр}}/N = \text{ctg } \alpha.$$

Для того чтобы палочка вообще не начала скользить, необходимо, чтобы $k \geq \text{ctg } 60^\circ = 1/\sqrt{3}$.

140. Сумма моментов сил, действующих на человека относительно его центра тяжести, равна нулю. Поэтому сила F , действующая со стороны земли, обязательно направлена к центру тяжести человека C (рис. 334). Горизонтальная составляющая этой силы не может быть больше максимальной силы трения покоя: $F \sin \alpha \leq kF \cos \alpha$. Отсюда $k \geq \text{tg } \alpha$.

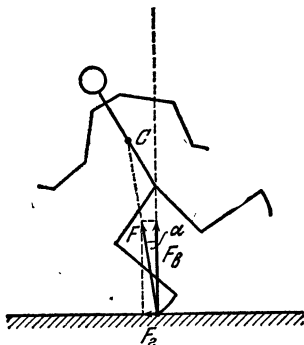


Рис. 334.

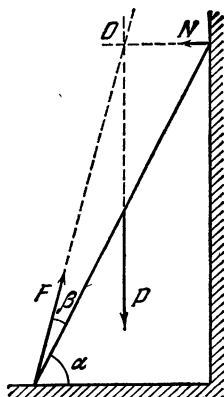


Рис. 335.

141. На лестницу действуют сила тяжести P , сила F со стороны земли и реакция опоры N . Так как стена гладкая, сила N (рис. 335) перпендикулярна ей. Направление силы F проще всего определить, если найти точку, относительно которой моменты сил P и N равны нулю. Такой точкой будет точка пересечения прямых ON и OP . Тогда и момент силы F относительно этой точки тоже должен быть равен нулю. Следовательно, сила должна быть направлена таким образом, чтобы ее продолжение прошло через точку O . Как вытекает из рис. 335, направление силы F составляет с лестницей угол $\beta = 30^\circ - \text{arctg}(1/2 \sqrt{3}) \approx 14^\circ 10'$. Сила, действующая на лестницу со стороны земли, будет направлена вдоль лестницы только в том

случае, если все остальные силы будут приложены к центру масс лестницы или же будут действовать вдоль нее.

142. Лестницу нельзя удержать от падения с помощью веревки, привязанной к ее середине. Моменты сил реакции пола и стены, а также момент силы натяжения веревки относительно точки O равны нулю при любом натяжении T (рис. 336). Момент силы тяжести относительно той же точки отличен от нуля. Поэтому лестница обязательно упадет.

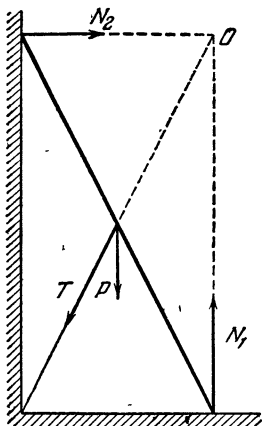


Рис. 336.

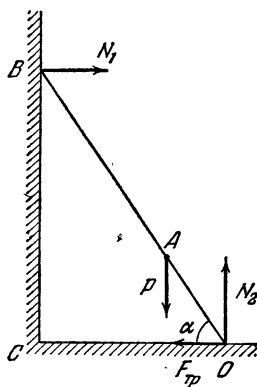


Рис. 337.

143. Со стороны стены на лестницу действует реакция N_1 , перпендикулярная стене. На нижний конец лестницы действуют силы N_2 (реакция опоры) и $F_{тр}$ (сила трения) (рис. 337). Если для простоты не учитывать массу лестницы, то кроме этих сил на нее действует еще вес человека P . Равенство проекций сил по горизонтали и вертикали дает $N_2 = P$ и $N_1 = F_{тр}$. Пусть вначале человек находится в нижней части лестницы (точка A). Равенство моментов сил относительно точки O приводит к уравнению $N_1 CB = P \cos \alpha \cdot AO$. Следовательно, чем выше находится человек, тем большее значение будет иметь сила N_1 . Но $F_{тр} = N_1$. Поэтому и сила трения, удерживающая лестницу, растет по мере того, как человек поднимается вверх. Когда $F_{тр}$ достигнет своего максимального значения, равного kP , лестница начнет скользить.

144. При равновесии сумма сил, действующих на картину (рис. 338), равна нулю. Следовательно, $P = F_{тр} + T \cos \alpha$, $N = T \sin \alpha$. Сила трения должна удовлетворять неравенству $F_{тр} \leq kN$ или $k \geq F_{тр}/N$. Равенство моментов относительно точки B дает уравнение

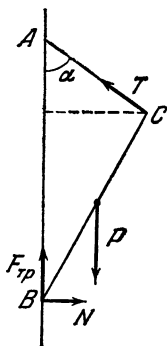


Рис. 338.

$$\frac{P}{2} l \sin \alpha = T (l \cos \alpha + \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}) \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{l \cos \alpha + 2 \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha},$$

$$k \geq \frac{l \cos \alpha + 2 \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha}.$$

145. Найдем первоначально направление силы f , с которой стержень BC действует на стержень CD . Предположим, что у этой силы имеется вертикальная составляющая, направленная вверх. Тогда по третьему закону Ньютона стержень CD действует на стержень BC с силой, у которой вертикальная составляющая направлена вниз. Однако это противоречит симметрии задачи. Следовательно, вертикальная составляющая силы f должна быть равна нулю. Сила, действующая на стержень CD со стороны стержня DE , будет иметь и

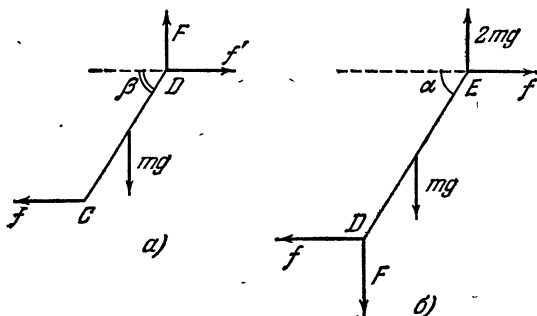


Рис. 339.

горизонтальную и вертикальную составляющие, как указано на рис. 339, а.

Из равенства нулю всех сил, действующих на CD , следует, что $F = mg$ и $f = f'$. Равенство нулю момента сил относительно D дает

$$f \sin \beta \cdot CD = mg \cdot CD (\cos \beta) / 2, \text{ или } \operatorname{tg} \beta = mg / 2f.$$

На рис. 339, б изображены силы, действующие на стержень DE . Из условия равенства нулю момента сил относительно E вытекает

$$f \sin \alpha \cdot DE = F \cos \alpha \cdot DE + mg \frac{\cos \alpha}{2} DE, \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3mg}{2f}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

146. Действующие на ящик силы изображены на рис. 340. Условия равновесия имеют вид $Q \cos \alpha = F_{\text{тр}}$ и $P = N + Q \sin \alpha$. В момент нарушения равновесия сила трения достигает максимальной величины $F_{\text{тр}} = kN$. Отсюда $Q = kP / (\cos \alpha + k \sin \alpha)$. Величина Q будет минимальной при значении угла α , соответствующем максимуму знаменателя дроби. Для нахождения максимума преобразуем знаменатель, введя вместо k новую величину φ , так что $\operatorname{tg} \varphi = k$. Тогда $\cos \alpha + k \sin \alpha = \cos (\alpha - \varphi) / \cos \varphi$, или $\cos \alpha + k \sin \alpha =$

$= \sqrt{1+k^2} \cos(\alpha - \varphi)$. Так как максимальное значение $\cos(\alpha - \varphi)$ равно 1, то $Q_{\min} = kP / \sqrt{1+k^2}$. Отсюда $k = Q / \sqrt{P^2 - Q^2} = 0,75$.

147. Силы, действующие на цилиндр, изображены на рис. 341. Так как цилиндр поступательно не движется, то

$$F_{\text{тр}} - F \cos \alpha = 0, \quad F \sin \alpha - mg + N = 0.$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = kN$. Отсюда $F = kmg / (\cos \alpha + k \sin \alpha)$. Знаменатель этого выражения можно представить в виде $A \sin(\alpha + \varphi)$, где $A = \sqrt{1+k^2}$. Следовательно, минимальная сила, с которой нужно

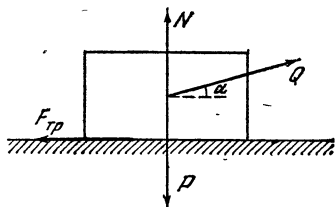


Рис. 340.

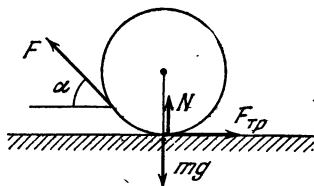
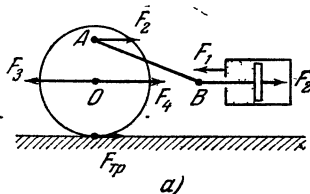


Рис. 341.

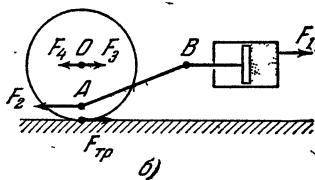
тянуть нить, $F_{\min} = kmg / \sqrt{1+k^2}$. Угол α_1 найдется из уравнения $\cos \alpha_1 + k \sin \alpha_1 = \sqrt{1+k^2}$, откуда $\tan \alpha_1 = k$.

148. Силы, действующие на поршень и заднюю крышку цилиндра, равны $F_1 = F_2 = pS$ (рис. 342, а). На точку колеса А в горизонтальном направлении действует также сила F_2 , передаваемая от поршня через кривошипно-шатунный механизм.

Сумма моментов сил, действующих на колесо, относительно его оси равна нулю. (Массой колеса мы пренебрегаем.) Следовательно, $F_{\text{тр}}R = F_2r$, где $F_{\text{тр}}$ — сила трения. Так как сумма сил, действующих



а)



б)

Рис. 342.

на колесо, также равна нулю, то сила F_3 , действующая на ось со стороны подшипников паровоза, равна $F_3 = F_{\text{тр}} + F_2$. По третьему закону Ньютона на паровоз со стороны оси действует сила $F_4 = F_3$. Следовательно, сила тяги $F = F_4 - F_1 = F_{\text{тр}} = pSr/R$.

Во втором положении поршня и кривошипно-шатунного механизма интересующие нас силы изображены на рис. 342, б. $F_{\text{тр}} = F_2r/R$ по тем же соображениям, что и в предыдущем случае. Сила тяги $F = F_1 - F_4 = F_{\text{тр}} = pSr/R$. Как и следовало ожидать, сила тяги равна силе трения, ибо сила трения — единственная внешняя сила, действующая на паровоз.

149. Наибольшая длина выступающей части самого верхнего кирпича равна $l/2$. Центр тяжести двух верхних кирпичей C_2 находится на расстоянии $l/4$ от края второго кирпича (рис. 343). Следовательно, на эту длину второй кирпич может быть выдвинут относительно третьего.

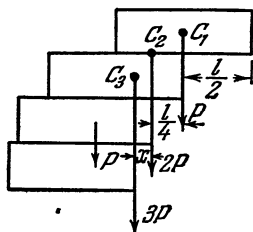


Рис. 343.

Центр тяжести трех верхних кирпичей C_3 определяется равенством моментов сил тяжести относительно C_3 : $P(l/2 - x) = 2Px$. Отсюда $x = l/6$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым не более чем на $l/6$. Аналогично можно найти, что четвертый кирпич выступает над пятым на $l/8$, и т. д. Характер изменения длины выступающей части с увеличением числа кирпичей очевиден. Максимальное расстояние, на

которое правый край верхнего кирпича может выступать над правым краем кирпича, служащего основанием, записывается в виде ряда

$$L = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right).$$

При неограниченном увеличении числа кирпичей эта сумма стремится к бесконечности. Действительно, сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

больше суммы ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{1/2} + \overbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}^{1/2} + \dots,$$

а эта последняя сумма заведомо бесконечно велика в случае бесконечного числа членов. Центр тяжести всех кирпичей проходит через правый край самого нижнего кирпича. Равновесие будет неустойчивым. (Данная картина имела бы место в случае, если бы Земля была плоской.)

150. В окружность радиуса r впишем правильный многоугольник (рис. 344). Найдем далее момент (относительно оси AK) сил тяжести, приложенных к серединам сторон многоугольника AB, BC, CD, DE и т. д., считая, что сила тяжести действует перпендикулярно чертежу. Этот момент равен $\rho g (ABx_1 + BCx_2 + CDx_3 + DEx_4 + EFx_5 + FKx_6)$, где ρ — масса единицы длины проволоки.

Рассматривая подобие соответствующих треугольников, можно показать, что произведения ABx_1, BCx_2, CDx_3 и т. д. равны соответственно $AB'h, B'C'h, C'D'h$ и т. д., где h — апофема многоугольника. Таким образом, момент равен

$$\rho gh (AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'K) = \rho gh 2r.$$

Если число сторон безгранично возрастает, то величина h стремится

к r , а момент — к $2r^2\rho g$. С другой стороны, момент равен произведению силы тяжести проволоки $\pi r \rho g x$ на расстояние x центра тяжести от оси AK . Итак, $2r^2\rho g = \pi r \rho g x$, откуда $x = 2r/\pi$.

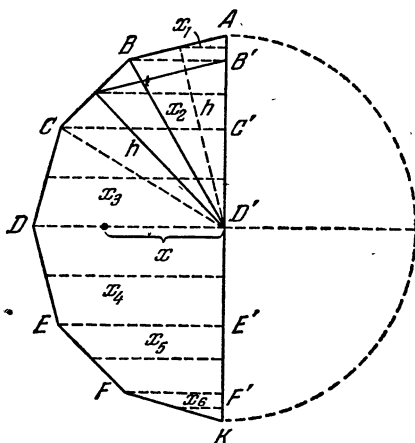


Рис. 344.

151. Разбиваем полукруг на треугольники и сегменты, как показано на рис. 345. Центр тяжести треугольника лежит, как известно, на пересечении медиан.

В данном случае центр тяжести каждого треугольника находится на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от точки O (h — апофема). При безграничном увеличении числа сторон центры тяжести треугольников будут лежать на окружности радиуса $\frac{2}{3}r$, а площади сегментов будут стремиться к нулю. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы определить центр тяжести полуокружности радиуса $\frac{2}{3}r$. Из решения задачи 150 следует, что x — расстояние центра тяжести полуокружности от точки O — равняется

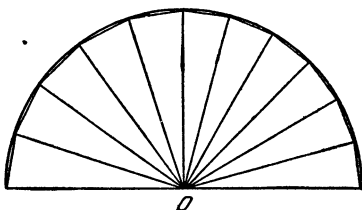


Рис. 345.

$$x = \frac{2}{\pi} \frac{2}{3} r = \frac{4}{3\pi} r.$$

152. Применяя метод, изложенный в решении задач 150 и 151, можно показать, что центр тяжести находится в точке C , расположенной на расстоянии $CO = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\alpha} r$ от центра кривизны дуги (см. рис. 59).

153. Используя решения задач 150, 151, 152, можно показать, что центр тяжести находится в точке C , отстоящей от точки O на расстоянии $CO = \frac{4}{3} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} r$.

154. При определении положения центра тяжести пластинку с вырезом формально можно рассматривать как сплошную, если

считать, что на нее наложен полукруг отрицательной массы, равной по величине массе вырезаемой части. Момент сил тяжести положительной и отрицательной масс относительно оси AB равен

$$\rho g \left(2r^2 \frac{r}{2} - \frac{\pi r^2}{2} \frac{4}{3\pi} r \right) = \frac{1}{3} r^3 \rho g,$$

если сила тяжести действует перпендикулярно чертежу, ρ — масса единицы площади пластинки (см. решение задачи 151). С другой стороны, этот момент равен произведению силы тяжести пластинки на расстояние $x = OC$ от центра ее тяжести до оси AB . Следовательно, $x \rho g (2r^2 - \pi r^2/2) = \frac{1}{3} r^3 \rho g$. Отсюда $x = \frac{2}{3(4-\pi)} r$.

§ 7. Работа и энергия

155. Работа силы не зависит от массы того тела, на которое действует данная сила. Сила в 30 Н совершит работу $A = Fh = 150$ Дж. Эта работа пойдет на увеличение потенциальной энергии (50 Дж) и кинетической энергии (100 Дж) груза.

156. Прежде всего нужно найти силу давления воздуха на одно из полушарий. Представим себе, что его основание закрыто плоской крышкой — диском радиуса R . Тогда, если из получившегося сосуда откачать воздух, сила давления на плоскую крышку будет $F_1 = pS = p\pi R^2$. Очевидно, такова же будет и сила давления воздуха на полушарие. В противном случае силы взаимно не уравниваются и сосуд должен будет вечно двигаться в сторону, большей силы. Число лошадей должно быть равно F_1/F , так как другое полушарие может быть просто привязано к столбу. Натянутая веревка создаст точно такую же силу, как и упряжка лошадей, тянущая с другой стороны.

157. Изменение количества движения тела равно импульсу силы тяжести. Так как силы, действующие на камень и Землю, равны и действуют одинаковое время, то равны и изменения количества движения этих тел. Изменение кинетической энергии тела равно работе сил тяготения. Силы равны, но пути, пройденные камнем и Землей, обратно пропорциональны их массам. Именно поэтому закон сохранения энергии можно записать в форме, не учитывающей изменения кинетической энергии Земли: $mv^2/2 + W = \text{const}$, где m — масса камня, а W — потенциальная энергия взаимодействия.

158. По закону сохранения энергии $m_1 gh = m_1 v_1^2/2$, где m_1 — масса копра, h — высота падения копра, v_1 — скорость копра перед ударом. Ввиду кратковременности удара сила сопротивления не может заметно изменить общего количества движения системы. Так как удар неупругий, то $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$, где m_2 — масса сваи, v_2 — скорость копра и сваи в первый момент после удара. Механическая энергия копра и сваи расходуется на работу против силы сопротивления грунта F :

$$\frac{(m_1 + m_2) v_2^2}{2} + (m_1 + m_2) gS = FS,$$

где S — глубина погружения сваи в грунт. Отсюда

$$F = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{h}{S} m_1 g + m_1 g + m_2 g \approx 24\,500 \text{ Н.}$$

159. В результате неупругого удара линейная скорость ящика с находящейся в нем пулей в первый момент будет равна $u = \frac{mv}{M+m}$, где v — скорость пули. Угол отклонения α на основании закона сохранения энергии связан со скоростью v соотношением

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(M+m)} = (M+m)L(1 - \cos \alpha)g.$$

Отсюда

$$v = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{M+m}{m} \sqrt{Lg}.$$

160. Ввиду кратковременности взрыва внешние горизонтальные силы (силы трения) не могут за время взрыва заметно изменить общего количества движения системы. До взрыва и сразу после него оно остается равным нулю. Следовательно, $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$. Отсюда $v_1/v_2 = -m_2/m_1$. Так как тележки в конце концов останавливаются, их начальные кинетические энергии тратятся на работу против сил трения:

$$m_1v_1^2/2 = km_1gS_1, \quad m_2v_2^2/2 = km_2gS_2.$$

Отсюда $v_1^2/v_2^2 = S_1/S_2$, и, следовательно, $S_2 = 2m$.

161. Обозначим через u скорость тела и тележки после прекращения их относительного движения. На основании закона сохранения количества движения

$$(M+m)u = Mv_0. \quad (1)$$

Тележка теряет кинетическую энергию ввиду того, что сила трения f , действующая на тележку, совершает отрицательную работу: $Mv_0^2/2 - Mu^2/2 = fS$, где S — путь, пройденный тележкой. Тело приобретает кинетическую энергию за счет того, что сила трения, действующая на тело, совершает положительную работу: $mu^2/2 = fs$. Здесь s — путь, пройденный телом.

Изменение кинетической энергии системы

$$\frac{Mv_0^2}{2} - \left[\frac{Mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} \right] = f(S-s), \quad (2)$$

как легко видеть, равняется силе трения, умноженной на относительное перемещение тела вдоль тележки. Из уравнений (1) и (2) следует, что $S-s = \frac{mMv_0^2}{2f(M+m)}$. Так как $S-s \leq l$, то $l \geq \frac{mMv_0^2}{2f(M+m)}$.

Учитывая, что $f = kmg$, получаем $l \geq \frac{Mv_0^2}{2kg(M+m)}$.

162. В результате сгорания второй порции топлива скорость v ракеты увеличится на величину Δv . По закону сохранения количества движения (так как сгорание происходит мгновенно)

$$(M+m)v = M(v + \Delta v) + m(v-u),$$

где m — масса порции топлива, M — масса ракеты без топлива, u — скорость истечения газов относительно ракеты. Приращение скорости

ракеты $\Delta v = \frac{m}{M} u$ и не зависит от скорости v ракеты перед сжиганием второй порции. Напротив, приращение кинетической энергии ракеты (без топлива)

$$\Delta E_k = \frac{M(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = mu \left(\frac{m}{2M} u + v \right)$$

будет тем больше, чем больше v .

Высота подъема ракеты определяется полученной ею энергией. Поэтому вторую порцию топлива выгоднее сжечь в момент, когда скорость ракеты наибольшая, т. е. непосредственно вслед за первой порцией. При этом наибольшая часть механической энергии, возникающей при сгорании топлива, будет сообщена ракете, а механическая энергия продуктов сгорания минимальна.

163. Достаточно рассмотреть последовательное сгорание двух порций топлива. Пусть вначале масса ракеты с топливом равна $M + 2m$. После сгорания первой порции скорость ракеты $v = mu_1/(M + m)$, где u_1 — скорость газов относительно ракеты. Начальная скорость ракеты принимается равной нулю. Приращение скорости ракеты после сгорания второй порции $\Delta v = mu_2/M$, где u_2 — новое значение скорости газов относительно ракеты.

При сгорании первой порции выделилась механическая энергия $\Delta E_1 = (M + m)v^2/2 + mu_1^2/2$. При сгорании второй порции выделяется энергия

$$\Delta E_2 = \frac{M(v + \Delta v)^2}{2} + \frac{m(v - u_2)^2}{2} - \frac{(M + m)v^2}{2}.$$

По условию задачи $\Delta E_1 = \Delta E_2$. Отсюда

$$u_1^2 \left(\frac{m^2}{2(M + m)} + \frac{m}{2} \right) = u_2^2 \left(\frac{m^2}{2M} + \frac{m}{2} \right).$$

Следовательно, $u_1 > u_2$ — скорость газов относительно ракеты уменьшается. Это связано с уменьшением массы ракеты в процессе сгорания топлива.

164. Оба склона можно разбить на множество сколь угодно малых наклонных плоскостей с различными углами наклона. Рассмотрим

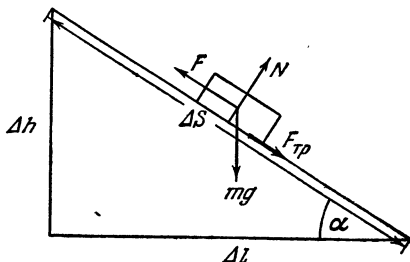


Рис. 346.

одну из них (рис. 346). Работа по подъему тела на такой наклонной плоскости равна работе против сил тяжести $mg \Delta h$ плюс работа против сил трения $F_{тр} \Delta S$. Но $F_{тр} = kmg \cos \alpha$ и $\Delta S = \Delta l / \cos \alpha$

Отсюда $F_{\text{тр}} \Delta S = kmg \Delta l$. Общая работа $\Delta A = mg(\Delta h + k \Delta l)$. Если рассмотреть все наклонные плоскости и сложить элементарные работы, то общая работа будет равна

$$A = \sum \Delta A = mg(\sum \Delta h + k \sum \Delta l) = mgh + kmgl.$$

Работа определяется только высотой горы h и длиной l ее основания.

165. Сила, приложенная к рукоятке, будет минимальна, если она составляет с ней прямой угол. Обозначая через F значение искомой силы, на основании «золотого» правила механики будем иметь $2\pi RF = Ph$. Отсюда $F = Ph/2\pi R$.

166. По определению коэффициент полезного действия $\eta = A_1/(A_1 + A_2)$, где $A_1 = PH$ — работа по поднятию груза P на высоту H , а A_2 — работа, совершаемая при этом против сил трения. Так как сила трения способна удержать груз в равновесии, то работа этой силы не может быть меньше, чем работа A_1 . Минимальное значение работы сил трения $A_2 = A_1$. Следовательно, $\eta \leq 50\%$.

167. За время подъема человека по лестнице шар опустится на некоторую высоту h . Следовательно, работа, совершенная человеком, пойдет на увеличение потенциальной энергии человека на величину $mg(l-h)$ и на увеличение потенциальной энергии шара на величину mgh (на шар без человека действует подъемная сила mg , направленная вверх); отсюда

$$A = mg(l-h) + mgh = mgl.$$

Этот результат можно получить сразу, рассчитывая работу человека в системе, связанной с лестницей.

Если человек поднимается со скоростью v относительно лестницы, то относительно Земли он имеет скорость $v-v_1$, где v_1 — скорость шара во время подъема человека. По закону сохранения количества движения $(v-v_1)m = Mv_1$. Отсюда $v_1 = \frac{m}{M+m} v$.

168. Для того чтобы прогнать за единицу времени вдвое большее количество воды, нужно сообщить вдвое большей массе воды вдвое большую скорость. (Работа мотора идет на сообщение воде кинетической энергии $mv^2/2$.) Поэтому мощность мотора должна быть увеличена в восемь раз.

169. 1) На подъем воды из ямы затрачивается работа

$$A_1 = \rho g \frac{H}{2} S \cdot \frac{3}{4} H = \frac{3}{8} \rho g SH^2,$$

где ρ — плотность воды. На сообщение воде кинетической энергии затрачена работа

$$A_2 = \frac{1}{2} \rho \frac{H}{2} Sv^2.$$

Скорость v , с которой вытекает вода из трубы на поверхность земли, определяется из соотношения $(H/2)S = \pi R^2 vt$. Полная работа равна

$$A = \frac{3}{8} \rho g SH^2 + \frac{1}{16} \rho \frac{H^3 S^3}{\pi^2 R^4 t^2}.$$

2) Работа, затраченная на подъем воды во втором случае, меньше A_1 на величину $\Delta A'_1 = \rho g S_1 h (H - h/2)$. Работа, затраченная на сообщение воде кинетической энергии, равна $A'_2 = \frac{1}{2} \rho \frac{(HS/2 - hS_1)^3}{\pi^2 R^4 \tau^2}$. Полная работа $A' = A_1 - \Delta A'_1 + A'_2$.

170. Проще всего решить задачу в системе координат, связанной с эскалатором. Человек пройдет относительно него расстояние $l = h/\sin \alpha + vt$, где vt — путь, пройденный эскалатором. При этом он должен совершить работу $A = (h/\sin \alpha + vt) mg \sin \alpha$, так как во время подъема сила mg была приложена на пути l и составляла с ним угол $90^\circ - \alpha$. Часть работы mgh идет на увеличение потенциальной энергии человека, другая часть работы, $mgvt \sin \alpha$, вместе с работой мотора, приводящего эскалатор в движение, идет на преодоление сил трения.

171. Энергия пружины, оттянутой за среднюю точку O , равна $W_1 = (2k)x^2/2$. Когда пружину отпустили, ее энергия стала равной $W_2 = kx^2/2$, так как за время перераспределения упругих деформаций в пружине масса m не успевает сдвинуться. Следовательно, потери энергии в пружине $W_1 - W_2 = kx^2/2$. Это, конечно, грубая оценка.

172. Человек, действуя с силой F на пружину, совершает работу $A_1 = -FL$. Одновременно на пол вагона со стороны человека действует сила трения F . Работа этой силы $A_2 = FL$. Следовательно, полная работа, совершенная человеком в системе координат, связанной с Землей, равна нулю, так же как и в системе, связанной с поездом.

173. В системе поезда совершенная работа равна потенциальной энергии растянутой пружины $A = kl^2/2$, так как сила трения между человеком и полом вагона в этой системе не совершает работы. В системе, связанной с Землей, работа человека по растяжению пружины равна произведению средней силы $kl/2$ на пройденный путь $L - l$, т. е. $A_1 = (kl/2)(L - l)$. На пол вагона человек действует с той же средней силой $kl/2$. Ее работа $A_2 = (kl/2)L$. Полная работа в данной системе координат $A = A_1 + A_2 = kl^2/2$ та же, что и в системе вагона.

174. На основании законов сохранения количества движения и энергии можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}, \end{aligned}$$

где v'_1 и v'_2 — скорости шаров после соударения. Решая данную систему уравнений, получим

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

1) Если второй шар до удара покоился ($v_2 = 0$), то

$$v'_1 = (m_1 - m_2)v_1/(m_1 + m_2), \quad v'_2 = 2m_1 v_1/(m_1 + m_2).$$

При $m_1 > m_2$ первый шар продолжает двигаться в том же направлении, что и до удара, но с меньшей скоростью. Если $m_1 < m_2$, то

первый шар отскакивает после удара назад. Второй шар будет двигаться в ту же сторону, в которую двигался до удара первый шар.

2) Если $m_1 = m_2$, то

$$v'_1 = 2mv_2/2m = v_2, \quad v'_2 = 2mv_1/2m = v_1.$$

Шары при ударе обмениваются скоростями.

175. Энергия упругой деформации станет максимальной тогда, когда относительная скорость шаров станет равной нулю. Для этого момента времени закон сохранения механической энергии и закон сохранения количества движения можно записать следующим образом:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} u^2 + W,$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

где u — абсолютная скорость шаров в тот момент, когда они обладают максимальной энергией W упругой деформации. Следовательно,

$$W = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

176. В результате упругого соударения левый брусок приобретает скорость v . Правый брусок в этот момент времени еще покоится, так как пружина не деформирована. Обозначим через u_1 и u_2 скорости левого и правого брусков в произвольный момент времени, а через x — абсолютное удлинение пружины в тот же момент времени. На основании законов сохранения количества движения и энергии имеем

$$m(u_1 + u_2) = mv,$$

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

или $kx^2 = m[v^2 - (u_1^2 + u_2^2)]$. Заменяя в последнем уравнении v через $u_1 + u_2$, получим $kx^2 = 2mu_1 u_2$. Следовательно, $u_1 u_2 = kx^2/2m$ и $u_1 + u_2 = v$. Из двух последних выражений видно, что u_1 и u_2 будут иметь один и тот же знак — оба бруска движутся в одну сторону.

Величина x^2 будет иметь максимальное значение тогда, когда произведение скоростей u_1 и u_2 будет максимальным. Следовательно, для ответа на второй вопрос, поставленный в задаче, нужно найти максимальное значение произведения $u_1 u_2$ при условии, что сумма $u_1 + u_2$ постоянна и равна v . Рассмотрим очевидное неравенство $(u_1 - u_2)^2 \geq 0$, или $u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2 \geq 0$. Прибавим к правой и левой частям неравенства $4u_1 u_2$. Тогда $u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2 \geq 4u_1 u_2$, или $(u_1 + u_2)^2 \geq 4u_1 u_2$. Так как $u_1 + u_2 = v$, то $4u_1 u_2 \leq v^2$. Следовательно, наибольшее значение $u_1 u_2$ равно $v^2/4$, и оно достигается при $u_1 = u_2 = v/2$. Расстояние между брусками в этот момент равно

$$l \pm x_{\max} = l \pm v\sqrt{m/2k}.$$

177. До тех пор, пока нижняя пластинка лежит на столе, из закона сохранения механической энергии следует:

$$\frac{kx^2}{2} - mgx = \frac{ky^2}{2} + mgy + \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

где y — удлинение пружины, v — скорость верхней пластинки. В момент отрыва нижней пластинки от стола

$$ky = mg, \quad y = mg/k,$$

причем $v > 0$. Учитывая эти соотношения, получаем из (1)

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} - mgx - \frac{3}{2} \frac{m^2 g^2}{2k} > 0. \quad (2)$$

Для того чтобы выполнялось (2), должно быть $x > 3mg/k$.

Скорость v_C центра масс в момент отрыва нижней пластинки от стола равна $v_C = v/2$. После отрыва нижней пластинки от стола центр масс будет двигаться вверх равнозамедленно с ускорением g и начальной скоростью v_C . Следовательно, максимальная высота подъема центра масс равна

$$H = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{v^2}{8g}, \quad H = \frac{1}{8g} \left(\frac{kx^2}{m} - 2gx - 3 \frac{mg^2}{k} \right),$$

где H отсчитывается от положения центра масс в момент отрыва нижней пластинки от стола.

(Разобранная задача дает представление о процессах, происходящих при прыжках в высоту.)

178. В системе отсчета, связанной со стенкой, скорость шарика равна $v+u$. После удара в той же системе отсчета скорость шарика будет $-(v+u)$. Скорость шарика после удара относительно неподвижной системы отсчета равна

$$-(v+u) - u = -(v+2u).$$

Кинетическая энергия после удара $m(v+2u)^2/2$. Кинетическая энергия до удара $mv^2/2$. Изменение кинетической энергии равно $2mu(u+v)$.

Теперь подсчитаем работу упругих сил, действующих на шарик при ударе. Пусть удар длится время τ ; предполагаем для простоты, что во время удара упругая сила постоянна (результат не зависит от этого предположения). Так как в результате удара количество движения изменилось на величину $2m(v+u)$, то упругая сила равна $F = 2m(v+u)/\tau$. Работа этой силы

$$A = FS = Fut = 2m(v+u)u\tau/\tau = 2m(v+u)u.$$

Как легко видеть, эта работа равна изменению кинетической энергии.

179. 1) До момента, когда веревка натянется, камни падают свободно:

$$S_1 = gt^2/2, \quad S_2 = g(t-\tau)^2/2.$$

Момент натяжения веревки определяется из условия $l = S_1 - S_2$. Отсюда $t = 3$ с, $S_1 = 44,1$ м, $S_2 = 4,9$ м. Время отсчитывается с момента падения первого камня. При натяжении веревки происходит упругий удар, и камни обмениваются скоростями (см. задачу 174). В момент удара $v_1 = gt = 29,4$ м/с, $v_2 = g(t-\tau) = 9,8$ м/с.

Время t_1 падения первого камня (после того как веревка натянется) находится из условия

$$h - S_1 = v_2 t_1 + gt_1^2/2.$$

Время t_2 падения второго камня — из условия

$$h - S_2 = v_1 t_2 + g t_2^2 / 2.$$

Отсюда $t_1 \approx 1,6$ с, $t_2 \approx 1,8$ с. Первый камень падает 4,6 с, второй 2,8 с.

2) В случае неупругой веревки скорости камней после ее натяжения выравниваются (неупругий удар): $v = (v_1 + v_2) / 2 = 19,6$ м/с. Время падения камней после того, как веревка натянется, определяется уравнениями

$$h - S_1 = v t_1' + g t_1'^2 / 2, \quad h - S_2 = v t_2' + g t_2'^2 / 2.$$

S_1 и S_2 те же, что и в первом случае. Отсюда $t_1' \approx 1,2$ с, $t_2' \approx 3,3$ с. Первый камень падает 4,2 с, второй 4,3 с.

180. Если отклонить один правый шар, то после удара слева отскочит крайний левый шар на угол, равный углу отклонения правого шара. Если отклонить одновременно два шара и отпустить их, то после удара слева отскочат два крайних левых шара. Если отклонить три правых шара, отскочат три левых и т. д.

При ударе первого шара о второй первый шар остановится, передав свое количество движения второму шару (см. решение задачи 174); второй передаст это же количество движения третьему, третий — четвертому и т. д. У крайнего левого шара нет «соседа» слева, поэтому шар отскочит (если нет трения и потерь энергии) на тот же угол, на который был отклонен крайний правый шар. Когда левый шар, после отклонения на максимальный угол, ударит предпоследний шар, процесс передачи количества движения по цепочке шаров повторится в обратном направлении.

При отклонении одновременно двух правых шаров они передадут свое количество движения цепочке не одновременно, а по очереди, через очень малый (неуловимый на взгляд) промежуток времени. Таким образом, цепочка шаров получит не один «двойной» импульс, а два, которые будут распространяться по цепочке с некоторым временным интервалом. Крайний левый шар отскочит, получив «первую порцию» количества движения. Следом за ним отклонится его «сосед», получив следующую порцию количества движения, переданную ему от крайнего правого шара.

При отклонении трех правых шаров цепочка получит три следующих один за другим через очень малые промежутки времени порции количества движения соответственно от третьего, второго и первого шаров. Если отклонить и одновременно отпустить четыре шара, то отскочат слева также четыре шара, а два останутся неподвижными.

181. Ударяющий шарик отскочит назад, следующие шарики до стального останутся неподвижными. Стальной шарик и все последующие начнут двигаться влево, причем скорости их будут различны. Наиболее быстро будет двигаться крайний левый шарик. Следующий будет двигаться медленнее и т. д. Шарик разойдутся (см. решение задач 174 и 180).

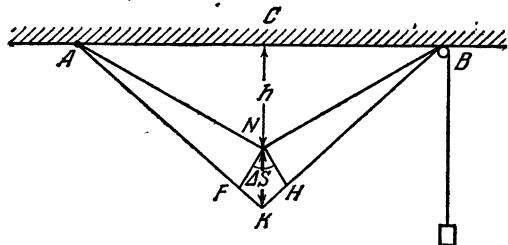
182. Пусть груз $2m$ опустился на высоту H . Тогда грузы m поднимутся на высоту h (рис. 347). На основании закона сохранения энергии

$$2mgh + \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{2} = 2mgH, \quad \text{или} \quad v_1^2 + v_2^2 = 2g(H - h),$$

The diagram shows a mechanical system with two pulleys at the top, separated by a horizontal distance of $2l$. A rope is draped over the pulleys, with a central segment forming a V-shape. A mass of $2m$ is suspended from the vertex of this V. The two outer segments of the rope hang vertically down to two masses, each of mass m . These masses are at a height h above a horizontal surface. A dashed line indicates the initial horizontal position of the masses, and a vertical arrow labeled H points from the initial level to the vertex of the V.

ники NHK и NFK тем ближе к прямоугольным, чем меньше мы выберем отрезок Δs . При $\Delta s \rightarrow 0$ углы NHK и NFK стремятся к

ники NHK и NFK тем ближе к прямоугольным, чем меньше мы выберем отрезок Δs . При $\Delta s \rightarrow 0$ углы NHK и NFK стремятся к



прямым, а углы KNH и KNF — к 30° . Следовательно, скорости будут равны при $\angle ANB = 120^\circ$. Используя закон сохранения энергии, найдем значения этих скоростей:

$$m_1gh = 2(2 - \sqrt{3})m_2gh + \frac{m_1 + m_2}{2}v^2.$$

$$v^2 = 2gh \frac{m_1 - 2(2 - \sqrt{3})m_2}{m_1 + m_2} \approx 0.$$

184. Так как проскальзывание доски по каткам и катков по горизонтальной поверхности отсутствует, то расстояние между осями катков во время движения останется постоянным. Поэтому движение

доски будет поступательным. Доска будет перемещаться в горизонтальном направлении и одновременно двигаться вниз вдоль катков. Если катки сместятся на некоторое расстояние l , то каждая точка доски (в частности, ее центр тяжести A) пройдет вдоль горизонтали то же расстояние l и одновременно переместится на это же расстояние вдоль катков: $AB = BC = l$ (рис. 349). (Последнее становится особенно очевидным, если рассмотреть движение катков в системе координат, перемещающейся вместе с катками.) В результате центр тяжести доски будет двигаться вдоль прямой AC , наклоненной к горизонту под углом $\alpha/2$, так как треугольник ABC равнобедренный.

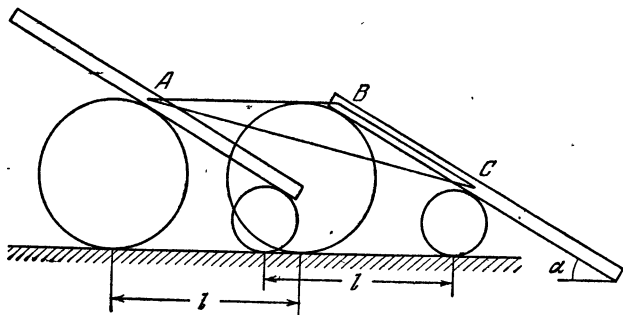


Рис. 349.

Движение будет равноускоренным. Доска приобретет кинетическую энергию за счет уменьшения потенциальной: $mv^2/2 = mgl \sin \alpha$, или $v^2 = 2gl \sin \alpha$. С другой стороны, при равноускоренном движении $v^2 = 2aS$, где $S = AC = 2l \cos(\alpha/2)$. Следовательно, ускорение $a = v^2/2S = g \sin(\alpha/2)$.

185. Подсчитаем разность потенциальных энергий для двух положений цепочки: цепочка полностью лежит на доске и часть цепочки длины x свешивается с доски. Эта разность равна силе тяжести $(M/2l)gx$ свешивающейся части, умноженной на $x/2$, поскольку цепочка однородна и центр тяжести свешивающегося конца находится на расстоянии $x/2$ от края доски. На основании закона сохранения энергии имеем $Mv^2/2 = (Mg/4l)x^2$, или $v = \sqrt{gx^2/2l}$. Ускорение в этот же момент времени можно найти из второго закона Ньютона: $Ma = (M/2l)gx$. Следовательно, $a = gx/2l$. Для подсчета реакции края доски найдем первоначально натяжение цепочки в точке соприкосновения с доской. Оно равно произведению массы части цепочки, лежащей на доске, на ускорение цепочки: $Mxg(2l-x)/4l^2$.

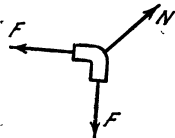


Рис. 350.

Рассмотрим теперь очень малый элемент цепочки, соприкасающийся с краем доски. На этот малый элемент цепочки действуют три силы (рис. 350). Они вызывают изменение его количества движения по горизонтали и вертикали:

$$(N \cos \alpha - F) \Delta t = -Mv^2 \Delta t/2l,$$

$$(F - N \sin \alpha) \Delta t = Mv^2 \Delta t/2l.$$

Следовательно, угол наклона силы N к горизонту $\alpha = 45^\circ$ и $N = Mg x(l-x) \sqrt{2}/l^2$.

186. Обозначим через v скорость тележки. Горизонтальная составляющая скорости маятника относительно тележки равна $u \cos \beta$ (рис. 351), а относительно рельсов равна $v + u \cos \beta$. В горизонтальном направлении на систему внешние силы не действуют. Поэтому на основании закона сохранения количества движения имеем

$$m(v + u \cos \beta) + Mv = 0, \quad (1)$$

так как вначале система покоилась. Вертикальная составляющая скорости маятника относительно тележки и рельсов равна $u \sin \beta$. На

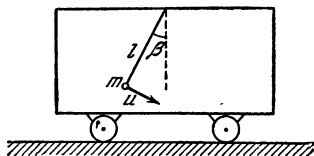


Рис. 351.

основании теоремы Пифагора квадрат скорости маятника относительно рельсов равен $(v + u \cos \beta)^2 + u^2 \sin^2 \beta$. Используя закон сохранения энергии, получаем второе уравнение, связывающее скорости v и u :

$$\frac{m}{2} [(v + u \cos \beta)^2 + u^2 \sin^2 \beta] + \frac{M}{2} v^2 = mgl (\cos \beta - \cos \alpha). \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) можно найти

$$v^2 = \frac{2m^2 gl (\cos \beta - \cos \alpha) \cos^2 \beta}{(M + m)(M + m \sin^2 \beta)}.$$

В частном случае при $\beta = 0$ (считая $m/M \ll 1$) получаем

$$v^2 = 2 \frac{m^2}{M^2} gl (1 - \cos \alpha),$$

или

$$v = 2 \frac{m}{M} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl}.$$

187. Обозначим через v скорость клина, а через u_x и u_y — горизонтальную и вертикальную составляющие скорости u бруска относительно неподвижной системы отсчета (рис. 352). На основании законов сохранения количества движения и энергии можно написать:

$$-Mv + mu_x = 0,$$

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m}{2} (u_x^2 + u_y^2) = mgh.$$

Заметим, что угол α с горизонтальной плоскостью составляет не абсолютная скорость бруска u (под абсолютной скоростью в данном

случае понимаем скорость относительно неподвижной горизонтальной плоскости), а относительная скорость $u_{отн}$, т. е. скорость бруска относительно движущегося клина.

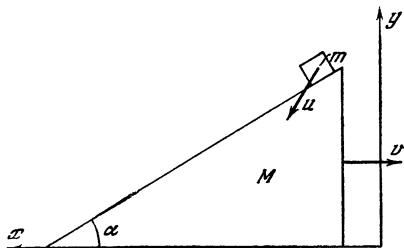


Рис. 352.

Из треугольника скоростей (рис. 353) следует, что $u_y/(v+u_x) = \operatorname{tg} \alpha$. Решая данные уравнения относительно v , получим

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M+m \left[\left(\frac{M}{m} \right)^2 + \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \right]}} = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m} \right)^2 + \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Абсолютная скорость бруска в тот же момент времени равна

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M} \left(1 + \frac{M}{m} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

В случае, когда масса клина много больше массы бруска, u стремится, как и следовало ожидать, к величине $\sqrt{2gh}$.

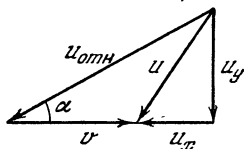


Рис. 353.

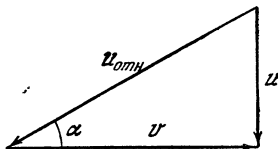


Рис. 354.

188. Скорость стержня относительно движущегося клина направлена под углом α к горизонту. Если к этой относительной скорости прибавить скорость клина, то в результате получим абсолютную скорость стержня u (рис. 354). Очевидно, что отношение скоростей равно $u/v = \operatorname{tg} \alpha$.

Из закона сохранения энергии следует: $\frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mgh$.

Исключая из этих двух уравнений u , получим выражение для v : $v = \sqrt{2mgh/(M + m \operatorname{tg}^2 \alpha)}$. Тогда для относительной скорости стержня мы можем написать

$$u_{\text{отн}} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{2mgh}{M + m \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Скорость стержня

$$u = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2mgh}{m + M \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{2 \frac{mg \operatorname{tg}^2 \alpha}{m + M \operatorname{tg}^2 \alpha} h}.$$

Из последнего выражения видно, что скорость стержня меняется с пройденным путем h по закону равноускоренного движения:

$$u = \sqrt{2ah}. \text{ Следовательно, ускорение стержня } a = \frac{mg \operatorname{tg}^2 \alpha}{m + M \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

§ 8. Динамика криволинейного движения

189. На основании второго закона Ньютона

$$\frac{(M+m)u^2}{L} = T - (M+m)g, \text{ где } u = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{Lg}$$

(см. задачу 159). Отсюда $T = (M+m)g \left(4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right)$.

190. $T_1 = 10m\omega^2 l$; $T_2 = 9m\omega^2 l$; $T_3 = 7m\omega^2 l$; $T_4 = 4m\omega^2 l$.

191. Расстояния от центра тяжести до грузов с массами m_1 и m_2 равны соответственно

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \quad y = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

Обозначим через u скорость центра тяжести, а через ω — угловую скорость вращения. Тогда $u + \omega x = v_1$ и $u - \omega y = v_2$. Отсюда $\omega = \frac{v_1 - v_2}{l}$, $u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

192. Скорость вращения замедлится. Платформа сообщает снаряду дополнительное количество движения по касательной к траектории конца ствола пушки. По третьему закону Ньютона вылетающий из ствола снаряд будет оказывать давление на внутреннюю часть ствола, направленное против вращения.

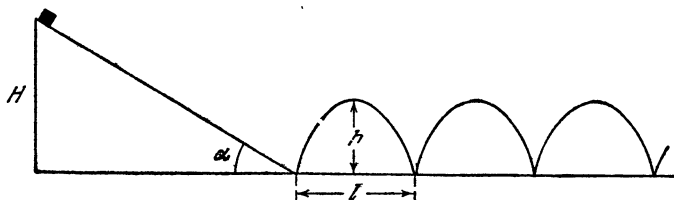


Рис. 355.

193. В момент соприкосновения тела с горизонтальной плоскостью вертикальная и горизонтальная составляющие скорости тела

будут иметь значения $v_v = \sqrt{2gH} \sin \alpha$ и $v_r = \sqrt{2gH} \cos \alpha$. В случае абсолютно упругого удара вертикальная составляющая изменит знак, а горизонтальная составляющая останется без изменений. Траектория тела будет представлять собой куски парабол (рис. 355), причем $h = H \sin^2 \alpha$, а $l = 2H \sin 2\alpha$. Если удар абсолютно неупругий, то вертикальная составляющая скорости станет равной нулю и тело будет двигаться равномерно по горизонтальной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gH} \cos \alpha$.

194. Со стороны земли на мотоцикл действуют две силы (рис. 356): N — реакция опоры и f — сила трения. Сумма этих сил T направлена вдоль мотоцикла. (В противном случае относительно центра тяжести O действовал бы момент сил, опрокидывающий мотоцикл.) На центр тяжести тела, таким образом, действует результирующая сила $F = T + P$, где P — сила тяжести. И так как $F = T \cos \alpha = f$, то центростремительное ускорение мотоциклу сообщает только сила трения f . По второму закону Ньютона $f = mv^2/R$, причем $f \leq kmg$. Как видно из рис. 356, $mg = f \tan \alpha$. Минимальное значение R из данной системы уравнений равно $R_{\min} = v^2/kg = 147$ м, при этом $\tan \alpha = Rg/v^2 \approx 3,33$ и, следовательно, $\alpha \approx 73^\circ 20'$.

195. Рассмотрим промежуточное положение стержня, когда он отклонился от вертикали на угол α . По закону сохранения энергии $MgR = MgR \cos \alpha + M\omega^2 R^2/2$, где R — расстояние от конца стержня до центра тяжести шара. Отсюда угловая скорость ω выражается следующим образом:

$$\omega = 2 \sin(\alpha/2) \sqrt{g/R}.$$

При данном α она тем меньше, чем больше R . Следовательно, стержень упадет скорее, если он поставлен на конец B .

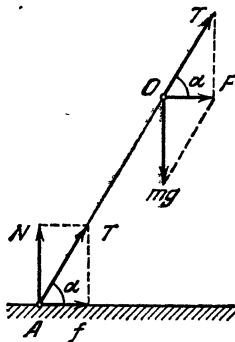


Рис. 356.

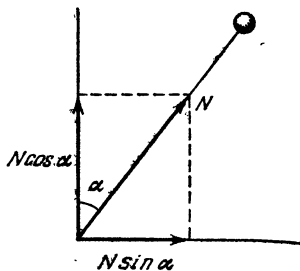


Рис. 357.

196. По второму закону Ньютона $m\omega^2 R = mg \cos \alpha - N$, где N — сила, с которой деформированный стержень действует на шар. В момент прекращения давления стержня на пол деформация стержня исчезнет и $N = 0$. Как показано в задаче 195, $\omega = 2 \sqrt{g/R} \sin(\alpha/2)$. Подставляя это значение ω в уравнение движения, найдем $\cos \alpha = 2/3$. Отсюда $\alpha = 48^\circ 10'$. Чтобы стержень не проскользнул, необходимо выполнение условия $N \sin \alpha \leq kN \cos \alpha$ (рис. 357). Следовательно, $k \geq \tan \alpha$. Отсюда $k \geq \sqrt{5/2}$.

197. Если $k > \sqrt{5}/2$, то стержень не проскользнет до тех пор, пока N не станет равным нулю, т. е. до тех пор, пока $\alpha \leq \arccos(2/3)$. При $\alpha > \arccos(2/3)$ уравнение $m\omega^2 R = mg \cos \alpha - N$ дает $N < 0$. Это означает, что если бы конец стержня был прикреплен к полу, то стержень был бы растянут. При незакрепленном стержне шар начнет падать свободно с момента, когда угол достигнет значения $\alpha_0 = \arccos(2/3)$. В этот момент скорость $v = \omega R = \sqrt{2/3} gR$ составляет угол α_0 с горизонтом, а высота шара над полом $CD = 2/3 R$ (рис. 358). Используя законы свободного падения, найдем искомое расстояние:

$$AB = AD + DB = R(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})/27 \approx 1,12R.$$

198. На участке ADB (рис. 359) бусинка движется под действием силы тяжести. Для того чтобы она, покинув проволоку в точке A ,

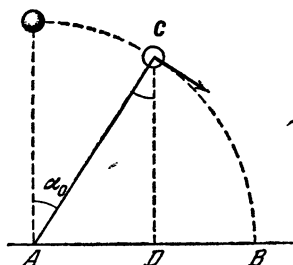


Рис. 358.

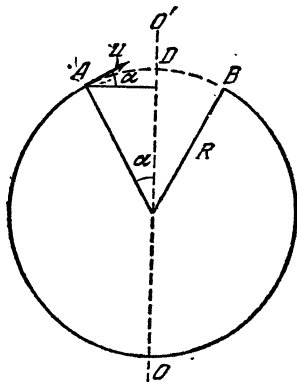


Рис. 359.

попала в точку B , необходимо, чтобы пройденный ею по горизонтали путь был равен $2R \sin \alpha$. Для этого скорость бусинки в точке A должна удовлетворять условию

$$(2u^2 \sin \alpha \cos \alpha)/g = 2R \sin \alpha$$

(см. задачу 40). Отсюда $u^2 = gR/\cos \alpha$.

Бусинка будет иметь в точке A скорость u , если в точке O ей сообщена скорость v , равная по закону сохранения энергии

$$v = \sqrt{u^2 + 2gR(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{gR \left(2 + 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}.$$

199. Пусть выреза нет. Тогда в точке C (рис. 360)

$$mg = mv^2/R. \quad (1)$$

По закону сохранения энергии

$$mgh = mg2R + mv^2/2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $h = \frac{5}{2}R$. Скорость в точке A определится из закона сохранения энергии

$$mg \frac{5}{2} R = mv_A^2/2 + mgR(1 + \cos \alpha). \quad (3)$$

Тело, брошенное под углом α к горизонту, пролетит по горизонтали расстояние

$$AB = (v_A^2 \sin 2\alpha)/g. \quad (4)$$

С другой стороны,

$$AB = 2R \sin \alpha. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует: $v_A^2 = Rg/\cos \alpha$. Подставляя это значение в (3), получим

$$mg \frac{5}{2} R = \frac{mgR}{2 \cos \alpha} + mgR + mgR \cos \alpha.$$

Отсюда $\cos \alpha = (3 \pm 1)/4$, и, следовательно, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 60^\circ$.

Нетрудно убедиться, что, если $\alpha > 60^\circ$, тело упадет внутрь петли; если $\alpha < 60^\circ$, тело вылетит наружу.

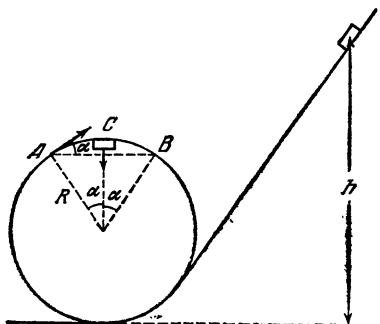


Рис. 360.

200. Рассмотрим силы, действующие на нить, перекинутую через левый гвоздь (рис. 361). Вертикальные составляющие сил натяжения T , действующих на тела, равны mg , если нить закреплена на гвозде. На узел (точку O) по третьему закону Ньютона действуют

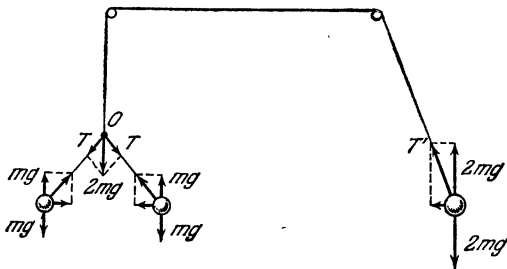


Рис. 361.

те же силы T . Их сумма направлена вертикально вниз и равна $2mg$. В случае одного вращающегося тела вертикальная составляющая натяжения нити T' равна $2mg$ (если тело не опускается вниз). Но само натяжение нити $T' > 2mg$ (рис. 361). Следовательно, наша система не будет в равновесии. Правый груз перетянет.

201. Направление ускорения совпадает с направлением результирующей силы. Вниз ускорение направлено при крайних верхних положениях B и C шарика (рис. 362). Вверх ускорение направлено при крайнем нижнем положении A и горизонтально при положениях D и L , определяемых углом α . Найдем α . По второму закону Ньютона произведение массы на центростремительное ускорение

равно сумме проекций сил на направление радиуса вращения:

$$m\omega^2/l = T - mg \cos \alpha.$$

С другой стороны, как видно из рис. 362, $T = mg/\cos \alpha$. На основании закона сохранения энергии имеем

$$m\omega^2/2 = mgl \cos \alpha.$$

Из этих уравнений находим, что $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$, и, следовательно, $\alpha \approx 54^\circ 45'$.

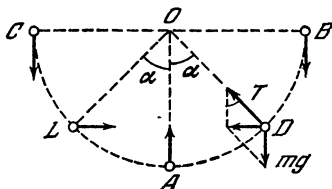


Рис. 362.

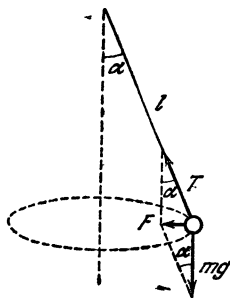


Рис. 363.

202. Обозначим через ω угловую скорость стержня в момент прохождения стержня через вертикаль. На основании закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = g(1 - \cos \alpha) (m_1 r_1 + m_2 r_2),$$

или

$$\omega = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}},$$

откуда

$$v_1 = \omega r_1 = 2r_1 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}},$$

$$v_2 = \omega r_2 = 2r_2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{g \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}.$$

203. Равнодействующая сил, приложенных к шарiku, $F = mg \tan \alpha$ должна создавать центростремительное ускорение $a = \omega^2 r$, где $r = l \sin \alpha$ (рис. 363). Отсюда

$$mg \tan \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \arccos(g/\omega^2 l).$$

Во втором случае имеют место оба решения: $\alpha_1 = 0$ (при этом шарик находится в состоянии неустойчивого равновесия) и $\alpha_2 = 60^\circ$. В первом случае имеет место только решение $\alpha_1 = 0$.

204. Силу F , действующую со стороны стержня на груз m , разложим на взаимно перпендикулярные составляющие T и N (рис. 364). Спроецируем силы на вертикаль и горизонталь и запишем уравнения Ньютона для этих направлений:

$$m\omega^2 l \sin \varphi = T \sin \varphi - N \cos \varphi, \quad mg = T \cos \varphi + N \sin \varphi.$$

Из этих уравнений определяем T и N :

$$T = m(\omega^2 l \sin^2 \varphi + g \cos \varphi), \quad N = m(g - \omega^2 l \cos \varphi) \sin \varphi.$$

Следовательно,

$$F = \sqrt{T^2 + N^2} = m \sqrt{g^2 + \omega^4 l^2 \sin^2 \varphi}.$$

205. Действующие на бусинку силы изображены на рис. 365: f — сила трения, mg — сила тяжести, N — сила нормальной реакции.

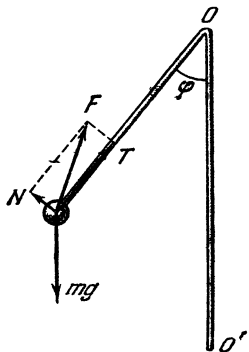


Рис. 364.

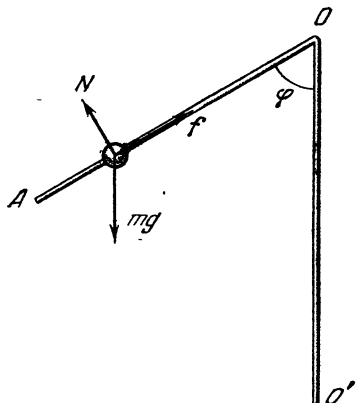


Рис. 365.

Уравнения Ньютона для проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления имеют вид

$$m\omega^2 l \sin \varphi = f \sin \varphi - N \cos \varphi,$$

$$f \cos \varphi + N \sin \varphi = mg.$$

Из этих уравнений находим, что

$$f = m\omega^2 l \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi,$$

$$N = mg \sin \varphi - m\omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi.$$

При равновесии $f \leq kN$, или

$$m\omega^2 l \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi \leq k(mg \sin \varphi - m\omega^2 l \sin \varphi \cos \varphi).$$

Отсюда

$$l \leq \frac{k \sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi (\sin \varphi + k \cos \varphi)} \frac{g}{\omega^2}.$$

В частном случае $\varphi = \pi/2$ $l \leq kg/\omega^2$.

206. На рис. 366 изображены силы, действующие на грузы. T_1 и T_2 — натяжения нитей. Запишем уравнения Ньютона для проекций на горизонтальное и вертикальное направления:

для первого груза:

$$\begin{aligned} T_1 \sin \varphi - T_2 \sin \psi &= m\omega^2 l \sin \varphi, \\ T_1 \cos \varphi - T_2 \cos \psi - mg &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

для второго груза:

$$\begin{aligned} m\omega^2 l (\sin \varphi + \sin \psi) &= T_2 \sin \psi, \\ T_2 \cos \psi &= mg. \end{aligned} \quad (2)$$

Исключив из системы уравнений (1) и (2) T_1 и T_2 , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} a \sin \varphi &= 2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi, \\ a (\sin \varphi + \sin \psi) &= \operatorname{tg} \psi, \end{aligned}$$

где $a = \omega^2 l/g$. Из этих уравнений вытекает, что $2 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi < \operatorname{tg} \psi$ и, следовательно, $\varphi < \psi$.

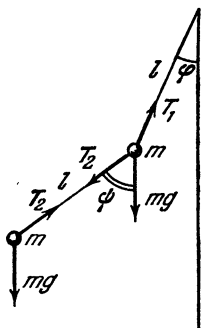


Рис. 366.

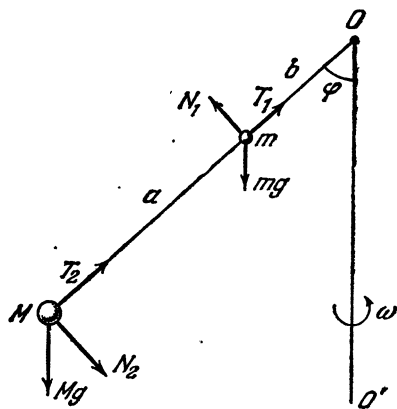


Рис. 367.

207. Действующие на грузы силы изображены на рис. 367. T_1 , N_1 и T_2 , N_2 — составляющие сил, действующих со стороны стержня на грузы m и M . N_1 и N_2 направлены в противоположные стороны, так как сумма моментов сил, действующих на стержень, относительно точки O равна нулю вследствие невесомости стержня: $N_1 b - N_2 (b + a) = 0$. Уравнения движения грузов для проекций на

горизонтальное и вертикальное направления имеют вид

$$m\omega^2 b \sin \varphi = T_1 \sin \varphi - N_1 \cos \varphi, \quad T_1 \cos \varphi + N_1 \sin \varphi = mg,$$

$$M\omega^2 (b+a) \sin \varphi = T_2 \sin \varphi + N_2 \cos \varphi, \quad T_2 \cos \varphi - N_2 \sin \varphi = Mg.$$

Исключив из системы неизвестные T_1 , T_2 , N_1 и N_2 , найдем:

$$1) \varphi = 0;$$

$$2) \cos \varphi = \frac{g}{\omega^2} \frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}.$$

Первое решение справедливо при любых угловых скоростях вращения, второе — при $\omega \geq \sqrt{g \frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}}$ (см. решение задачи 203).

208. В состоянии равновесия $m\omega^2 x = kx$, где x — расстояние тела от оси. Отсюда ясно, что при любом x пружина сообщает телу необходимое для вращения центростремительное ускорение. Поэтому после толчка тело будет двигаться с постоянной скоростью до упора А или до тех пор, пока для пружины выполняется закон прямой пропорциональности между силой и деформацией.

209. Запишем второй закон Ньютона для малого участка цепочки массы $(m/l) R \Delta\alpha$, изображенного на рис. 368:

$$(m/l) R \Delta\alpha (2\pi n)^2 R = 2T \sin (\Delta\alpha/2).$$

Так как угол $\Delta\alpha$ мал, то $\sin (\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$; отсюда $T = mln^2 \approx 90$ Н.

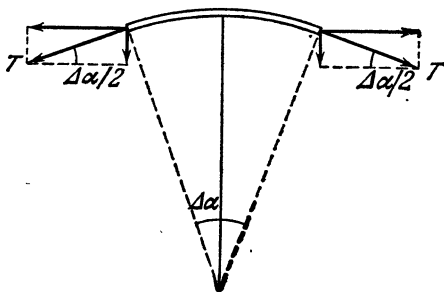


Рис. 368.

210. Выделим малый элемент трубки длиной $R \Delta\alpha$ (рис. 369). Растянутые стенки трубки сообщают жидкости, протекающей по этому элементу, ускорение $a = v^2/R$. По третьему закону Ньютона на элемент трубки со стороны жидкости будет действовать сила

$$\Delta F = \rho \frac{\pi d^2}{4} R \Delta\alpha \frac{v^2}{R},$$

где ρ — плотность жидкости. Сила ΔF уравнивается силами натяжения кольца T . Из условия равновесия, учитывая, что $\Delta\alpha$ мало,

имеем

$$\Delta F = 2T \sin(\Delta\alpha/2) \approx T \Delta\alpha.$$

Следовательно, искомая сила $T = (\rho \pi d^2/4) v^2$.

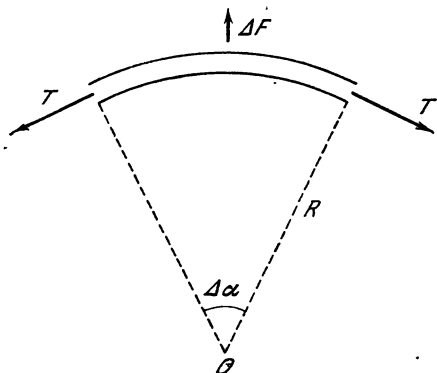


Рис. 369.

211. Разобьем стержень на n участков одинаковой длины и рассмотрим произвольный участок с номером i (рис. 370). Ускорение различных точек этого участка будет неодинаково, поскольку расстояния точек до оси вращения различны. Однако если разность $r_{i+1} - r_i$ мала, то мы можем считать, что ускорение i -го участка равно $\omega^2 (r_{i+1} + r_i)/2$, и это тем точнее, чем меньше длина участка.

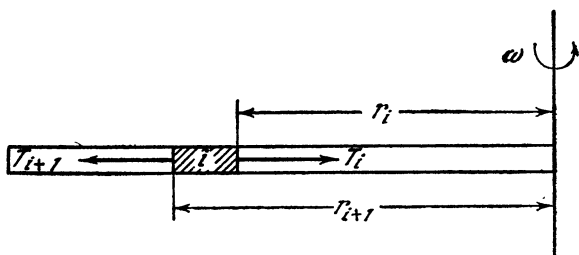


Рис. 370.

На i -й участок действует упругая сила T_{i+1} со стороны деформированного участка $i+1$ и сила T_i со стороны участка $i-1$. Так как масса i -го участка равна $(m/l)(r_{i+1} - r_i)$, то на основании второго закона Ньютона можно написать

$$T_i - T_{i+1} = \frac{m}{l} (r_{i+1} - r_i) \omega^2 \frac{r_{i+1} + r_i}{2},$$

или

$$T_{i+1} - T_i = -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

Запишем уравнения движения для участков от n до k включительно, считая, что $r_{n+1}=l$, а $r_k=x$:

$$\begin{aligned} -T_n &= -\frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r_n^2), \\ T_n - T_{n-1} &= -\frac{m\omega^2}{2l} (r_n^2 - r_{n-1}^2), \\ &\dots\dots\dots \\ T_{k+2} - T_{k+1} &= -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{k+2}^2 - r_{k+1}^2), \\ T_{k+1} - T_x &= -\frac{m\omega^2}{2l} (r_{k+1}^2 - x^2). \end{aligned}$$

В первом уравнении этой системы учтено, что упругая сила на конец стержня не действует, т. е. $T_{n+1}=0$. Сложив уравнения системы, получим, что искомое натяжение $T_x = \frac{m\omega^2}{2} (l^2 - x^2)$. Чем ближе участки стержня к оси вращения, тем в большей степени они растянуты.

212. В неподвижной относительно оси системе отсчета сила натяжения стержня не совершает работы, так как она все время перпендикулярна скорости шарика. В движущейся системе эта сила совершает работу, отличную от нуля, и за счет ее меняется кинетическая энергия шарика.

213. Участок обруча AB массы m обладает в наивысшем положении энергией $mg2R + m(2v)^2/2$. При движении кинетическая и потенциальная энергии участка AB начинают уменьшаться. Уменьшение энергии происходит за счет работы сил упругой деформации

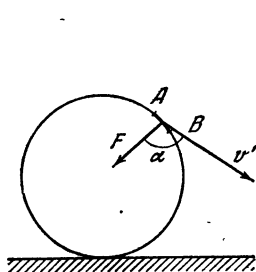


Рис. 371.

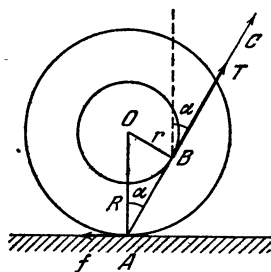


Рис. 372.

обруча, равнодействующая которых дает центростремительную силу, направленную всегда к центру. Скорость участка AB составляет тупой угол α с силой F (рис. 371). Поэтому работа силы $A_1 = F \Delta S \cos \alpha$ отрицательна, и, следовательно, уменьшается энергия участка массы m . После того, как участок AB пройдет крайнее нижнее положение, работа силы F , как легко видеть, станет положительной и энергия участка AB начнет возрастать.

214. Проведем из точки A , являющейся «мгновенной осью вращения» (см. задачу 57), касательную к внутренней окружности катушки (рис. 372). Если направление нити будет совпадать с направ-

лением касательной AC , то момент сил, вращающих катушку относительно мгновенной оси, будет равен нулю. Поэтому покоящаяся катушка не начнет поворачиваться вокруг мгновенной оси, и, следовательно, катушка не будет катиться. Значение угла α , при котором происходит изменение направления движения катушки, определяется из треугольника AOB :

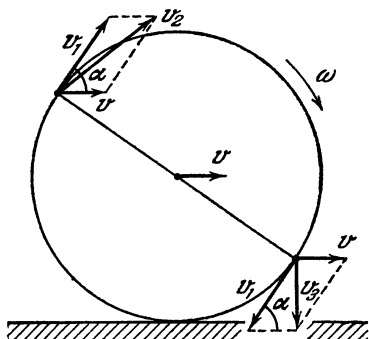


Рис. 373.

$\sin \alpha = r/R$. Если наклон нити больше α , катушка покатится вправо, если меньше, то влево, при условии, что нет проскальзывания. Если натяжение нити T удовлетворяет условию $Tr \leq fR$, где f — сила трения, то катушка останется неподвижной. В противном случае при $\sin \alpha = r/R$ она начнет вращаться на месте против часовой стрелки вокруг точки O .

215. Разобьем весь обруч на равные малые участки массы Δm каждый. Рассмотрим два симметричных (относительно центра) участка. Все частицы обруча участвуют одновременно в двух движениях — поступательном со скоростью v и вращательном со скоростью $v_1 = \omega R$. Результирующая скорость v_2 верхнего участка обруча найдется как геометрическая сумма скоростей v и v_1 (рис. 373):

$$v_2^2 = v^2 + v_1^2 + 2vv_1 \cos \alpha.$$

Для симметричного участка

$$v_3^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \alpha.$$

Суммарная кинетическая энергия обоих участков

$$\Delta E = \Delta m v_2^2/2 + \Delta m v_3^2/2 = \Delta m v^2 + \Delta m \omega^2 R^2.$$

Так как это выражение имеет место для любых двух участков, то для всего обруча можно записать

$$E = Mv^2/2 + MR^2\omega^2/2.$$

Если обруч катится без проскальзывания, то $v = \omega R$ и, следовательно, $E = Mv^2$.

$$216. E = \frac{2Pv^2}{g} (\pi r + l).$$

217. Цилиндр из более плотного материала, очевидно, будет полым. При одинаковых скоростях поступательного движения кинетическая энергия вращательного движения будет больше у полого цилиндра, так как частички его массы дальше отстоят от центра и, следовательно, имеют большие скорости. Поэтому при скатывании без проскальзывания с наклонной плоскости полый цилиндр приобретет меньшую скорость, чем сплошной. Полные кинетические энергии обоих цилиндров в конце пути одинаковы, что возможно только при различных скоростях, так как при одинаковых скоростях энергии поступательного движения равны, а энергия враща-

тельного движения сплошного цилиндра обязательно меньше, чем полого.

218. При движении катушки сила трения не совершает работы, так как нет проскальзывания кабеля и катушки. Следовательно, энергия системы не изменяется:

$$\frac{P}{g} v^2 + PR = \frac{P - \rho x}{g} u^2 + (P - \rho x) R,$$

где u — искомая скорость. Отсюда $u = \sqrt{(Pv^2 + \rho Rgx)/(P - \rho x)}$ и оказывается равной бесконечности при $P = \rho x$ вследствие того, что мы не учитывали массу катушки. Количество движения уменьшается в результате действия силы трения, направленной в сторону, противоположную движению.

219. Так как сила трения постоянна, движение будет равнозамедленным. Развиваемая силой трения мощность равна fv , где $v = \omega r$ — мгновенная скорость той точки шкива, к которой приложена сила f . Работа за время t равна средней мощности, умноженной на время t :

$$A = f \frac{\omega_0 r + \omega r}{2} t.$$

Изменение кинетической энергии шкива равно этой работе:

$$\frac{mr^2}{2} (\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{f r t}{2} (\omega_0 + \omega).$$

Отсюда $\omega = \omega_0 - ft/mr$.

220. Сила трения f постоянна, поэтому изменение количества движения обруча за время t равно $mv = ft$. В случае качения без проскальзывания скорость точки обруча, к которой приложена сила трения, равна нулю. Приравнявая работу сил трения разности кинетических энергий, имеем

$$\frac{m\omega_0^2 r^2}{2} - mv^2 = f \frac{\omega_0 r + 0}{2} t$$

(см. задачу 215). Решая уравнение относительно v , найдем: $v = \omega_0 r/2$.

221. Уравнения, выражающие изменение количества движения и кинетической энергии обруча, имеют вид

$$m(v_0 - v) = ft, \quad \frac{mv_0^2}{2} - mv^2 = f \frac{v_0 + 0}{2} t,$$

где $v = \omega r$ — скорость центра обруча при качении без проскальзывания. Решая эти уравнения относительно v , имеем $v = v_0/2$. Следовательно, искомая величина $\omega = v_0/2r$.

222. Уравнения, выражающие изменение количества движения и кинетической энергии обруча, имеют вид

$$m(v_0 - v) = ft, \\ \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 r^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2 r^2}{2} = f \frac{(v_0 + \omega_0 r) + (v + \omega r)}{2} t,$$

где v — скорость центра обруча в любой последующий момент времени. Решая данную систему уравнений, найдем

$$v = v_0 - (f/m)t, \quad \omega = \omega_0 - (f/mr)t.$$

Если $v_0 < \omega_0 r$, то в момент времени $\tau = mv_0/f$ обруч останавливается, вращаясь при этом с угловой скоростью $\omega = \omega_0 - v_0/r$. Затем обруч начнет двигаться в обратную сторону с проскальзыванием. Спустя некоторое время проскальзывание прекратится и обруч будет катиться без проскальзывания влево с поступательной скоростью $v = (\omega_0 r - v_0)/2$ (см. задачу 221).

Если же $v_0 > \omega_0 r$, то через $\tau = mr\omega_0/f$ обруч перестанет вращаться, передвигаясь вправо с поступательной скоростью $v = v_0 - r\omega_0$. В дальнейшем вращение обруча будет происходить в обратную сторону, и спустя некоторое время обруч будет катиться без проскальзывания вправо; его угловая скорость $\omega = (v_0 - r\omega_0)/2r$. Заметим, что, как показывает опыт, обруч тормозится и при отсутствии проскальзывания. Мы не получили данного результата, так как не учитывали специфического трения качения.

223. Так как обручи не проскальзывают, то v_0 , скорость центра тяжести обручей, и v , скорость груза, связаны соотношением

$$v_0 = v \frac{R}{R-r}.$$

Пусть груз опустится на высоту h . Считая, что в начальный момент система покоилась, из закона сохранения энергии имеем

$$mgh = mv^2/2 + Mv_0^2$$

(см. задачу 215). Из последнего соотношения находим скорость груза:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}}.$$

Отсюда ускорение груза

$$a = \frac{mg}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}.$$

Груз движется вниз с ускорением a под действием двух сил: силы тяжести mg и натяжения нити T . Искомое натяжение нити T равно

$$T = m(g - a) = \frac{2mMg \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2}.$$

Так как центр тяжести обруча движется с ускорением, равным $a \frac{R}{R-r}$, под действием силы T и силы трения F , то на основании второго закона Ньютона для силы F получаем равенство

$$F = T - Ma \frac{R}{R-r}.$$

или

$$F = \frac{Mmg \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \left(2 - \frac{R-r}{R} \right)}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2} = \frac{Mmg \left(1 + \frac{r}{R} \right)}{m \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2 + 2M}.$$

Значение силы трения покоя не может превышать величину kMg . Поэтому проскальзывание наступит тогда, когда

$$\frac{Mmg \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \left(1 + \frac{r}{R} \right)}{m + 2M \left(\frac{R}{R-r} \right)^2} > kMg, \text{ или } k < \frac{1 + \frac{r}{R}}{2 \frac{M}{m} + \left(1 - \frac{r}{R} \right)^2}.$$

224. Центр тяжести катушки не будет перемещаться, если натяжение нити удовлетворяет равенству $T = Mg \sin \alpha$. Для определения натяжения нити T найдем ускорение груза массы m . Пусть груз опустился на h . Так как центр тяжести катушки по условию должен оставаться в покое, то изменение потенциальной энергии равно mgh . Если v — скорость движения груза массы m , то скорость точек катушки, отстоящих на расстояние R от оси вращения, равна vR/r . Следовательно, кинетическая энергия системы равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} \frac{R^2}{r^2}.$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$(m + MR^2/r^2) v^2/2 = mgh, \text{ или } v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + MR^2/r^2}}$$

Отсюда ускорение груза $a = \frac{mg}{m + MR^2/r^2}$. Зная ускорение груза, находим натяжение нити:

$$T = m(g - a) = mg \frac{MR^2/r^2}{MR^2/r^2 + m}.$$

Таким образом, для $\sin \alpha$ получаем выражение

$$\sin \alpha = \frac{1}{M/m + r^2/R^2}.$$

Центр тяжести катушки может покоиться только в том случае, если

$$M/m + r^2/R^2 \geq 1.$$

225. Если скорость доски равна v , то скорость центра тяжести каждого катка $v/2$ (см. задачу 57). Кинетическая энергия системы (доски и обоих катков) равна

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{4} = \frac{M+m}{2} v^2.$$

Приравнявая кинетическую энергию работе силы Q на пути S , получим

$$\frac{M+m}{2} v^2 = QS, \quad v = \sqrt{\frac{2QS}{M+m}}$$

(рис. 374). (Силы трения работы не совершают, так как проскальзывание отсутствует.)

Из выражения для скорости движения доски следует, что ускорение ее равно $a = Q/(M+m)$.

Для определения силы трения, действующей со стороны катка на доску, напишем уравнение движения доски: $Ma = Q - 2F$. Подставляя сюда значение ускорения a , получим $F = mQ/2(M+m)$.

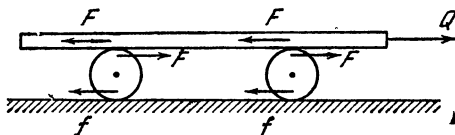


Рис. 374.

Так как скорость центра тяжести катка в два раза меньше скорости доски, то и ускорение центра тяжести катка будет в два раза меньше ускорения доски. Поэтому уравнение движения центра тяжести катка будет иметь вид $ma/2 = F - f$. Из этого уравнения вытекает, что $f = 0$.

226. Предположим для определенности, что $m_1 R > m_2 r$. В этом случае первый груз будет опускаться, а второй — подниматься. Пусть первый груз опустится на h . Тогда второй груз поднимется на hr/R . Убыль потенциальной энергии при этом будет равна

$$m_1 gh - m_2 gh r/R = gh(m_1 - m_2 r/R).$$

Если абсолютное значение скорости первого груза v , то скорость второго груза будет равна vr/R . Все точки первой ступени блока имеют скорость v , а все точки второй ступени блока имеют скорость vr/R . Кинетическая энергия системы будет равна

$$\frac{m_1 + M_1}{2} v^2 + \frac{m_2 + M_2}{2} \frac{r^2}{R^2} v^2.$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$\frac{m_1 + M_1}{2} v^2 + \frac{m_2 + M_2}{2} \frac{r^2}{R^2} v^2 = \left(m_1 - m_2 \frac{r}{R} \right) gh,$$

или

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2 r/R) gh}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2) r^2/R^2}}.$$

Отсюда ускорение первого груза

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2 r/R}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2) r^2/R^2} g.$$

Из соотношения $a_1/a_2 = R/r$, где a_2 — ускорение второго груза, найдем $a_2 = \frac{(m_1 - m_2 r/R) g r/R}{(m_1 + M_1) + (m_2 + M_2) r^2/R^2}$. Натяжения нитей T_1 и T_2 на основании второго закона Ньютона равны

$$T_1 = \frac{M_1 + m_2 \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} (m_2 + M_2)}{m_1 + M_1 + (m_2 + M_2) \frac{r^2}{R^2}} m_1 g,$$

$$T_2 = \frac{m_1 + M_1 + \frac{r}{R} \left(m_1 + M_2 \frac{r}{R} \right)}{m_1 + M_1 + (m_2 + M_2) \frac{r^2}{R^2}} m_2 g.$$

Сила F , с которой система действует на ось блока, равна

$$F = T_1 + T_2 + (M_1 + M_2) g.$$

227. Пусть путь, пройденный центром тяжести цилиндра за время t , равен S , а скорость центра тяжести к этому моменту времени равна v (рис. 375). Тогда на основании закона сохранения энергии имеем

$$Mv^2 = MgS \sin \alpha.$$

Отсюда скорость равна $v =$

$= \sqrt{gS \sin \alpha}$, и, следовательно, ускорение $a = g \sin \alpha/2$. Скорость

центра тяжести цилиндра и угловая скорость его вращения будут равны $v = (g \sin \alpha/2) t$, $\omega = (g \sin \alpha/2R) t$

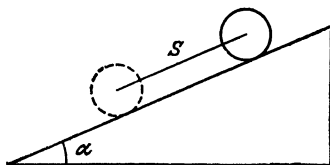


Рис. 375.

§ 9. Закон всемирного тяготения

228. По второму закону Ньютона $m_i g = F$, где m_i — инертная масса, т. е. величина, характеризующая способность тел приобретать то или иное ускорение под влиянием определенной силы. С другой стороны, по закону всемирного тяготения $F = \gamma m_g M_g / R^2$, где коэффициент пропорциональности γ — так называемая гравитационная постоянная, а m_g и M_g — гравитационные массы взаимодействующих тел. Гравитационная масса определяет силу гравитационного притяжения и в этом смысле может быть названа «гравитационным зарядом».

Заранее не очевидно, что $m_i = m_g$. Однако лишь при выполнении этого равенства (достаточно и пропорциональности) ускорение свободного падения одинаково для всех тел, так как при подстановке силы тяготения во второй закон Ньютона массы m_i и m_g можно сократить, и $g = \gamma M/R^2$. Только сила тяготения сообщает всем телам одинаковые ускорения, не зависящие от их масс.

229. Ускорение $g = \gamma M/R^2$ (см. задачу 228). Принимая $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, найдем $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$.

230. Тела внутри космического корабля перестанут оказывать давление на его стенки, если они будут иметь такое же ускорение как и корабль. Одинаковое ускорение в данном участке простран-

ства всем телам независимо от их массы может сообщить только сила тяготения. Следовательно, необходимо, чтобы двигатель корабля был выключен и сопротивление внешней среды отсутствовало. Движение же корабля может происходить в любом направлении по отношению к направлению сил тяготения.

231. Сила тяжести сообщает одинаковое ускорение маятнику и рамке. Никаких деформаций за счет тяготения при свободном падении в системе не возникает. Поэтому относительно рамки маятник будет двигаться так, как если бы тяготения не было (см. решение задачи 230). Он будет вращаться с постоянной угловой скоростью до тех пор, пока длится падение рамки.

232. На участке BCA (рис. 376) сила тяготения совершает положительную работу (угол θ_1 острый) и, следовательно, скорость планеты возрастает. В точке A скорость достигает своего максимального значения. На участке ADB сила тяготения совершает отрицательную работу (угол θ_2 тупой), и, следовательно, при движении по этому участку скорость планеты убывает, достигая минимального значения в точке B .

233. Чтобы спутник двигался по замкнутой орбите (окружности радиуса $R+h$), на него должна действовать сила, направленная к центру. Этой силой в данном случае является сила притяжения Земли. По второму закону Ньютона

$$mv^2/(R+h) = \gamma mM/(R+h)^2,$$

где M — масса Земли, $R = 6370$ км — радиус земного шара, γ — гравитационная постоянная. На поверхности Земли $\gamma mM/R^2 = mg$. Следовательно, $v = \sqrt{gR^2/(R+h)} \approx 7,5$ км/с.

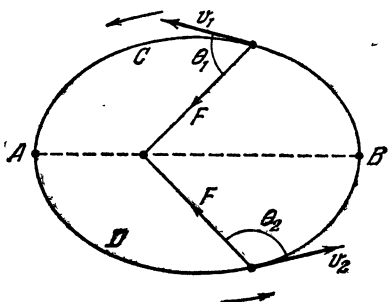


Рис. 376.

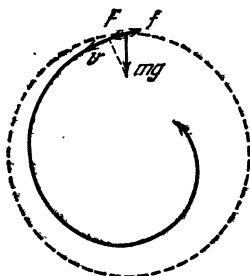


Рис. 377.

234. Под влиянием сопротивления атмосферы спутник постепенно с течением времени приближается к Земле. Радиус его орбиты уменьшается. Так как в верхних слоях сопротивление мало, то за один оборот это уменьшение радиуса незначительно. Считая орбиту приближенно круговой, можно записать

$$mv^2/R = \gamma mM/R^2,$$

где R — радиус орбиты. Отсюда $v = \sqrt{\gamma M/R}$, т. е. скорость спутника возрастает при уменьшении R . Наглядно этот результат можно пояснить следующим образом. Вследствие сопротивления атмосферы движение спутника, выведенного, например, на круговую орбиту

(пунктир на рис. 377), будет в действительности происходить по некоторой спирали (сплошная линия на рис. 377). Поэтому проекция F силы тяготения на направление скорости спутника v отлична от нуля. Работа силы F (сила F больше силы сопротивления атмосферы f) и приводит к увеличению скорости.

При движении в атмосфере полная механическая энергия спутника уменьшается, но потенциальная энергия при приближении к Земле убывает быстрее, чем полная. За счет этого кинетическая энергия растет. Следует подчеркнуть, что в плотных слоях атмосферы из-за большой величины силы сопротивления мы не можем даже приблизительно рассматривать движение спутника как вращение по окружности, и наш вывод несправедлив.

235. Если бросить контейнер против движения спутника A , то он начнет двигаться по некоторому эллипсу 2, расположенному внутри орбиты спутника (рис. 378). Период обращения контейнера будет немного меньше периода обращения спутника B . Поэтому они могут встретиться в точке соприкосновения орбит только после совершения большого числа оборотов.

Контейнер нужно бросить в направлении движения спутника A . Он начнет двигаться по эллипсу 3. Скорость u нужно подобрать так, чтобы за время одного оборота контейнера спутник B также сделал один оборот и дополнительно прошел путь AB . Это вполне возможно, так как период обращения по эллипсу 3 несколько больше периода обращения по круговой орбите 1. Контейнер встретится со спутником в точке соприкосновения орбит 3 и 1.

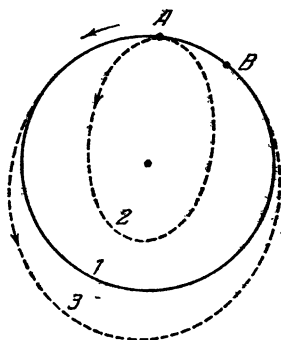


Рис. 378.

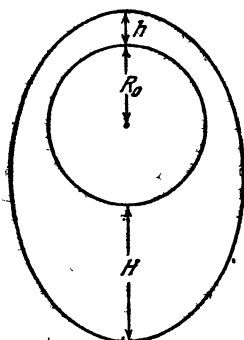


Рис. 379.

236. Считая приближенно орбиту Земли круговой, для силы тяготения можно записать выражение $F = m\omega^2 R$, где m — масса Земли, а $\omega = 2\pi/T$ — угловая скорость Земли ($T = 365$ дней). С другой стороны, согласно закону тяготения $F = \gamma m M / R^2$, где M — масса Солнца. Отсюда

$$\gamma m M / R^2 = m \omega^2 R, \text{ или } M = \omega^2 R^3 / \gamma \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

237. Поскольку как Луна, так и спутник движутся в поле тяжести Земли, применим третий закон Кеплера:

$$T_1^2 / T_2^2 = (h + H + 2R_0)^3 / 8R^3$$

(рис. 379). Отсюда $h = 2R (T_1/T_2)^{2/3} - H - 2R_0 = 220 \text{ км.}$

238. Так как масса шарика больше массы воды в том же объеме, то поле тяготения больше вблизи шарика, чем вдали от него. Соответственно вода возле шарика дополнительно сжата. Сила давления жидкости, действующая на пузырек слева, будет несколько меньше, чем сила, действующая справа. С другой стороны, сила тяготения между воздухом в пузырьке и шариком больше силы притяжения между воздухом и выделенным пунктиром объемом воды (объем a на рис. 380). Так как масса воздуха в пузырьке очень мала, то решающим оказывается действие первого фактора. Пузырек будет отталкиваться от шарика.

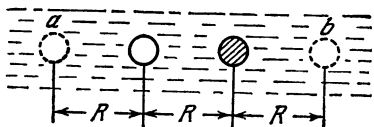


Рис. 380.

Движение железного шарика, напротив, будет определяться тем, что сила притяжения между воздухом в пузырьке и шариком много меньше силы притяжения между шариком и выделенным пунктиром объемом воды (рис. 380, объем b). Вычисление силы проводится путем следующих рассуждений. В однородной среде (вода) имеется сфера с почти полным отсутствием массы (пузырек) и сфера с избыточной массой (шарик). Формально это можно рассматривать как наличие отрицательной и положительной масс.

Сила взаимодействия между сферами в жидкости равна силе взаимодействия в пустоте отрицательной массы, равной массе воды в объеме пузырька, и положительной массы, равной избытку массы железного шарика над массой воды в том же объеме. Следовательно, $F = -\gamma m_1 (m_2 - m_1)/R^2$. Здесь m_1 — масса воды в сфере радиуса r , m_2 — масса железного шарика.

239. Вблизи пузырька поле тяготения меньше, чем в однородной жидкости. Жидкость соответственно сжата здесь меньше. Поэтому в участок жидкости возле одного пузырька устремляется другой, и наоборот. Пузырьки будут притягиваться. Два пузырька в однородной жидкости, массы которых пренебрежимо малы, можно рассматривать формально как отрицательные массы, наложенные на положительную массу m среды в объеме пузырька:

$$F = \gamma (-m)(-m)/R^2 = \gamma m^2/R^2.$$

240. Если бы шар был сплошным, то сила тяготения $F_1 = \gamma Mm/l^2$, где $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ — масса шара без полости. Наличие полости экви-

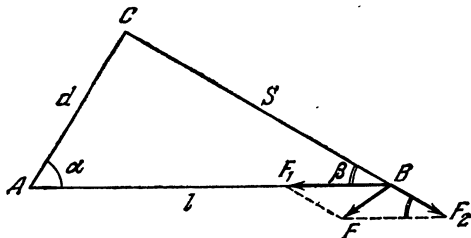


Рис. 381.

валентно появлению силы отталкивания $F_2 = \gamma m'm/S^2$, где $m' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, а S — расстояние между центром полости и материальной точкой.

Искомая сила F является геометрической суммой сил F_1 и F_2 (рис. 381). По теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta} = \\ = \frac{4}{3} \pi \gamma m \rho \sqrt{\frac{R^6}{l^4} + \frac{r^6}{(l^2 - d^2)^2} - \frac{2R^3 r^3 \cos \beta}{l^2(l^2 - d^2)}} \approx 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

241. Искомая сила притяжения будет являться геометрической суммой сил притяжения, создаваемых отдельными элементами сферы. Малые элементы σ_1 и σ_2 (рис. 382) вырезаются из сферы конусами с вершиной в точке A , которые получаются при вращении образующей BC вокруг оси S_1S_2 . Площади элементов равны соответственно $(AS_1)^2 \omega / \cos \alpha_1$ и $(AS_2)^2 \omega / \cos \alpha_2$, а их массы $(AS_1)^2 \omega \rho / \cos \alpha_1$ и

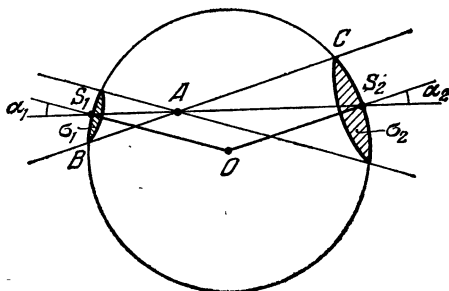


Рис. 382.

$(AS_2)^2 \omega \rho / \cos \alpha_2$, где ω — телесный угол, под которым видны оба элемента из точки A ; ρ — поверхностная плотность сферы (масса, приходящаяся на единицу площади); $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$, так как треугольник S_1OS_2 равнобедренный. Силы притяжения, создаваемые элементами, соответственно равны

$$\gamma \frac{m (AS_1)^2 \omega \rho}{(AS_1)^2 \cos \alpha_1} = \gamma \frac{m \omega \rho}{\cos \alpha_1}, \quad \gamma \frac{m (AS_2)^2 \omega \rho}{(AS_2)^2 \cos \alpha_2} = \gamma \frac{m \omega \rho}{\cos \alpha_2},$$

где m — масса тела, и направлены в противоположные стороны. Их равнодействующая равна нулю.

Проводя аналогичные рассуждения для других соответствующих элементов сферы, убеждаемся, что все они попарно компенсируют друг друга. Следовательно, сила притяжения, которая действует со стороны сферы на тело, помещенное внутри нее, равна нулю. Заметим, что данный результат справедлив и для сферы конечной толщины, так как ее можно разбить на сколь угодно тонкие сферические оболочки, для каждой из которых справедливо доказанное выше утверждение.

242. Сила притяжения равна силе, с которой тело массы m притягивается к шару радиуса r и плотности ρ . Внешние слои толщи Земли не оказывают, как доказано в задаче 241, на тело никакого

действия. Поэтому искомая сила

$$F = \gamma \frac{(4\pi/3) \rho r^3 m}{r^2} = \gamma \frac{4\pi}{3} \rho m r.$$

Эта сила убывает пропорционально r по мере приближения к центру Земли.

§ 10. Гидро- и аэростатика

243. Уровень воды не изменится, так как количество вытесненной воды остается тем же.

244. Равновесие не нарушится, так как согласно закону Паскаля давление на дно сосуда будет всюду одинаковым.

245. 1) Так как кусок льда плавает, вес воды, вытесненной им, равен весу самого льда или получившейся из него воды. Поэтому вода, образовавшаяся после таяния льда, займет объем, равный объему погруженной части куска, и, следовательно, уровень воды не изменится.

2) Объем погруженной части куска с камнем больше суммы объемов камня и воды, получившейся после таяния льда. Следовательно, уровень воды в стакане понизится.

3) Вес вытесненной воды равен весу льда (вес воздуха в пузырьке можно не принимать во внимание). Поэтому, как и в случае 1), уровень воды не изменится.

246. Вес тела, погруженного в жидкость, в первом случае равен $P_1 = (d - d_1)V$; во втором случае $P_2 = (d - d_2)V$, где V — объем тела. Отсюда

$$d = (P_2 d_1 - P_1 d_2) / (P_2 - P_1).$$

247. Только в небольших водоемах лед может удерживаться на весу с помощью береговой кромки. В центре большого озера он обязательно плавает. Отношение плотностей льда и воды равно 0,9. Следовательно, 0,9 всей толщины льда находится в воде. Расстояние от поверхности льда до воды равно 1 м.

248. После снятия камня коробка стала легче на вес камня, и, следовательно, объем вытесненной ею воды уменьшился на величину $V_1 = P/d_1$, где P — вес камня, d_1 — удельный вес воды. При погружении в воду камень вытеснит объем воды, равный своему объему $V_2 = P/d_2$, где d_2 — удельный вес вещества камня. Так как $d_2 > d_1$, то $V_1 > V_2$. Следовательно, уровень воды в чаше понизится.

249. В обоих случаях работа насосов одинакова, так как одно и то же количество перекачанной воды поднимается на одну и ту же высоту.

250. Г-образная фигура устойчиво стоит на дне пустого сосуда, так как перпендикуляр, опущенный из центра тяжести фигуры, не выходит за пределы площади опоры. По мере наливания воды в сосуд будет расти выталкивающая сила, действующая на прямоугольник (предполагается, что вода имеет возможность подтекать под фигуру). При глубине воды в сосуде, равной $0,5a$, сумма моментов сил, стремящихся повернуть тело по часовой стрелке, будет равна сумме моментов сил, стремящихся повернуть тело против часовой стрелки. При дальнейшем заполнении сосуда фигура упадет.

251. Длина трубы x найдется из условия $dx = d_0(x-h)$, выражающего равенство давлений на глубине нижнего конца трубы. Здесь d_0 — удельный вес воды. Отсюда $x = d_0 h / (d_0 - d) = 50$ см.

252. Давление на дно равно $p = \rho g(H+h)$ (рис. 383). С другой стороны, так как сосуд цилиндрический $p = (P + mg) / \pi R^2$. Высоту h можно определить, приравняв друг другу силы, действующие на поршень: $\rho g h \pi (R^2 - r^2) = P$. Отсюда

$$H = \frac{1}{\pi R^2 \rho} \left(m - \frac{P}{g} \frac{r^2}{R^2 - r^2} \right) \approx 10 \text{ см.}$$

253. Используя закон сохранения энергии и закон Архимеда, приходим к уравнению

$$mgx = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho - m \right) gh,$$

где ρ — плотность воды, а x — искомая высота. Отсюда $x = (\frac{4}{3} \pi R^3 \rho - m) h / m$.

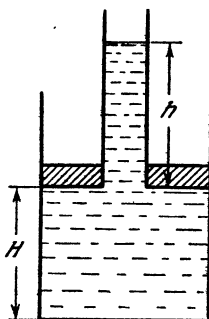


Рис. 383.

254. Из равенства моментов относительно точки A (рис. 384) действующих на доску сил имеем

$$P_1(l-a-x/2) \cos \alpha = P(l/2-a) \cos \alpha,$$

где $P_1 = Sxd_0$, а $P = Sld$, S — площадь поперечного сечения доски,

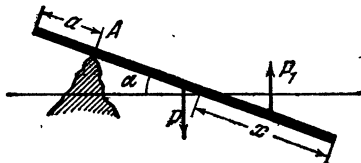


Рис. 384.

d_0 — удельный вес воды. Отсюда

$$x = (l-a) \pm \sqrt{(l-a)^2 - (d/d_0)l(l-2a)}.$$

Так как $x < l-a$, то имеет смысл только одно решение:

$$x = (l-a) - \sqrt{(l-a)^2 - (d/d_0)l(l-2a)}.$$

255. Человек не достиг своей цели, так как, увеличив выталкивающую силу, он вместе с тем более значительно увеличил вес своей ноши (плотность сжатого воздуха в камере больше плотности наружного воздуха).

256. Показания весов увеличатся, если средняя плотность взвешиваемого тела меньше плотности разновесок. Показания весов уменьшатся, если средняя плотность тела больше плотности разновесок. В случае, если разновески и тело имеют одинаковую среднюю плотность, равновесие весов не нарушится.

257. Истинная масса тела

$$M = M_1 + d_0(V - M_1/d_1) \approx 801,16 \text{ г.}$$

Допущенная относительная ошибка в процентах равна

$$\frac{M - M_1}{M} 100\% \approx 0,14\%.$$

258. Нормальное атмосферное давление равно приблизительно 10^5 Па. Значит, вес атмосферного столба воздуха площадью в 1 м^2 равен 10^5 Н . Зная поверхность земного шара, можно подсчитать массу всей атмосферы Земли. Поверхность Земли $S = 4\pi R^2$, где $R = 6370 \text{ км}$ — средний радиус Земли. Масса атмосферы $M \approx 4\pi R^2 \times \times 1 \text{ кг/см}^2 \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ тонн}$.

259. Представим себе, что внутренность бутылки заполнена стеклом. Если производить давление на наружную поверхность, то такое же давление возникнет во всех участках внутри стекла. При этом произойдет сжатие и объем внутренней части бутылки уменьшится. Не важно, что производит давление на внутреннюю поверхность бутылки — вода или стекло, заполняющее ее внутренность. Если бутылка подвергнется с наружной и внутренней стороны давлению p , то вместимость ее уменьшится.

260. Давление жидкости в точке D равно нулю, а в точке A равно ρgh . Так как давление на боковую стенку линейно возрастает, то среднее давление равно

$$p_{\text{сред}} = (0 + \rho gh)/2.$$

Сила, с которой действует жидкость на боковую наклонную стенку, равна

$$F = \frac{\rho gh}{2} \frac{h}{\sin \alpha} b = \rho g \frac{h^2 b}{2 \sin \alpha}.$$

Сила f , с которой боковые стенки действуют на дно, направлена вверх и равна

$$f = 2F \cos \alpha = \rho gh^2 b \operatorname{ctg} \alpha.$$

(Вертикальная составляющая полной силы, действующей на дно сосуда, будет равна, разумеется, силе тяжести налитой жидкости. В самом деле,

$$\rho g h a b - f = \rho g h b (a - h \operatorname{ctg} \alpha) = \rho g V,$$

где V — объем налитой жидкости.)

261. Сила, с которой жидкость поднимает вверх сосуд, равна

$$F = \pi (R^2 - r^2) \rho gh.$$

Следовательно,

$$\pi (R^2 - r^2) \rho gh = P, \quad \rho = \frac{P}{\pi (R^2 - r^2) gh}.$$

262. Давление на «дно» сосуда равно ρgh . Сила, с которой заштрихованная часть жидкости (рис. 385) давит на стол, равна $\rho gh \pi (2Rh \operatorname{tg} \alpha - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)$. По третьему закону Ньютона такая же сила действует на жидкость. Условие равновесия жидкости в момент, когда сосуд перестает давить на стол, имеет вид

$$P + P_1 = \rho gh \pi (2Rh \operatorname{tg} \alpha - h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

где P_1 — вес заштрихованной части жидкости (усеченный конус минус объем цилиндра): $P_1 = \frac{\rho g h}{3} \{ \pi R^2 + \pi (R - h \operatorname{tg} \alpha)^2 + \pi R (R - h \operatorname{tg} \alpha) \} - \rho g h \pi (R - h \operatorname{tg} \alpha)^2$. Отсюда

$$\rho = \frac{3P}{\pi g h^2 \operatorname{tg} \alpha (3R - h \operatorname{tg} \alpha)}.$$

263. В цилиндрическом сосуде дно отпадет во всех трех случаях, так как сила давления на дно сосуда сверху будет каждый раз одной и той же. В сосуде, суживающемся кверху, дно отпадет только при наливании масла, так как уровень масла здесь будет выше, чем в цилиндрическом сосуде. В сосуде, расширяющемся кверху, дно отпадет при наливании ртути, которая будет стоять выше, чем в цилиндрическом сосуде, а также при опускании гири, вес которой распределится в данном случае на меньшую площадь, чем в остальных двух случаях.

264. Если уровень воды в сосудах одинаков, то и уровень ртути до того, как положили кусочек дерева, будет одинаков. Внесение в сосуд кусочка дерева совершенно равносильно доливанию количества воды, которое вытесняется этим кусочком, т. е. количества воды, равного ему по весу. Следовательно, если сечение сосудов одинаковое, уровни воды и ртути в обоих сосудах будут совпадать. Если же сечения не одинаковы, то вода будет стоять выше, а ртуть ниже в том сосуде, сечение которого меньше. Это произойдет потому, что добавление одинаковых по весу (и по объему) количеств воды в сосуды с разным сечением приведет к различному увеличению давления на поверхность ртути.

265. После опускания кубика во второй сосуд уровень ртути в обоих сосудах повысится на величину x и займет положение AB

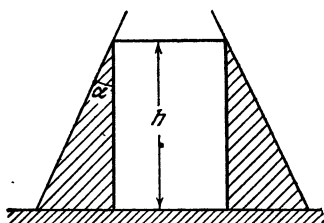


Рис. 385.

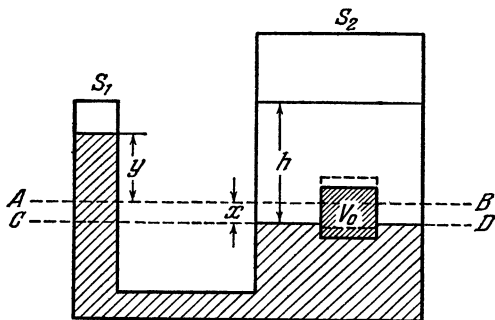


Рис. 386.

(рис. 386). Необходимая высота столба воды во втором сосуде определяется равенством давлений, например, на уровне CD : $(y+x) \rho_1 g = h \rho_2 g$, где ρ_1 — плотность ртути, ρ_2 — плотность воды. y можно найти из условия сохранения объема ртути: $(x+y) S_1 = V_2$, где V_2 — объем ртути, вытесняемый кубиком после вливания воды.

Если вода целиком покрывает кубик, то по закону Архимеда

$$V_0 \rho_0 g = V_2 \rho_1 g + (V_0 - V_2) \rho_2 g,$$

где ρ_0 — плотность железа. Решая написанные уравнения, получим

$$h = \rho_1 (\rho_0 - \rho_2) V_0 / \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) S_1.$$

Если же вода не покрывает кубик, то закон Архимеда запишется в виде

$$V_0 \rho_0 g = V_2 \rho_1 g + h S \rho_2 g,$$

где $S = V_0^{2/3}$ — площадь грани кубика. В этом случае искомая высота

$$h = \rho_0 V_0 / \rho_2 (S_1 + V_0^{2/3}).$$

Первое решение справедливо при $S_1 \leq \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_2)}{\rho_2 (\rho_1 - \rho_0)} V_0^{2/3}$, второе — при $S_1 \geq \frac{\rho_1 (\rho_0 - \rho_2)}{\rho_2 (\rho_1 - \rho_0)} V_0^{2/3}$.

266. При изменении атмосферного давления архимедова сила, действующая на барометры со стороны воздуха, меняется как из-за изменения плотности воздуха, так и из-за изменения объема барометров при изменении уровней ртути в их открытых частях.

При учете всех условий задачи барометры имеют не только одинаковый вес, но и одинаковый объем. Поэтому для каждого из них изменение выталкивающей силы из-за первой причины одинаково. Изменение же объемов будет различно. В U-образном барометре для изменения разности уровней на определенную величину уровень ртути в каждом колене должен измениться только на половину этой величины. В чашечном барометре уровень ртути в чаше меняется незначительно, а в трубке — практически на всю величину изменения разности уровней. При этом, на сколько изменится объем ртути в трубке, на столько же он должен измениться и в чаше. Следовательно, для чашечного барометра изменение объема будет вдвое больше, чем для U-образного (при одинаковых диаметрах трубок). При повышении давления объем чашечного барометра станет меньше объема U-образного, сила Архимеда, действующая на чашечный барометр, также станет меньше, и поэтому он перевесит.

267. В случае, когда человек станет на матрац, его вес распределится на меньшую площадь (площадь ступней), чем в случае, когда он ляжет. Поэтому состояние равновесия наступит в первом случае при большем давлении воздуха в матраце, чем во втором.

268. Рассмотрим первоначально накачанную воздухом камеру (рис. 387, а, изображающей камеру в разрезе). Для равновесия участков камеры AB и CD , очевидно, необходимо, чтобы натяжение растянутых стенок камеры T уравновешивало избыточное давление внутри камеры p . Теперь рассмотрим силы, действующие на участки камеры AB и CD в том случае, когда камера надета на нагруженное колесо (рис. 387, б). В верхней части камеры распределение сил, действующих на участок AB , существенным образом не меняется. Внизу положение будет теперь иным. На участок CD будет действовать упругая сила со стороны обода, равная нагрузке, приложенной к колесу (вес колеса и четверть веса автомобиля). Под влиянием этой дополнительной силы камера сплющивается и угол между силами натяжения резины T увеличивается. Суммарная сила натяжения, действующая на участок CD , уменьшается, и поэтому избыточное давление воздуха в камере уравновешивает как силу натяжения, так и вес колеса и части автомобиля.

Итак, обод не падает вниз, так как он поддерживается избыточным давлением воздуха в камере. В верхней части камеры это избыточное давление уравновешивается натяжением стенок камеры, в нижней же части оно уравновешивает как уменьшившееся натяжение стенок, так и силу, приложенную к колесу.

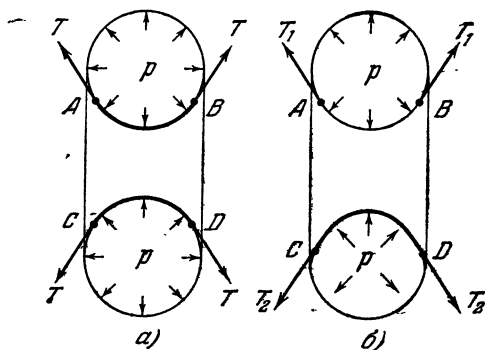


Рис. 387.

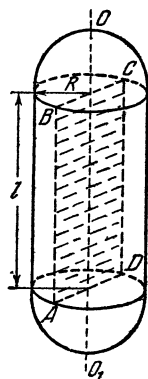


Рис. 388.

269. Сила на единицу длины, с которой растянута стенка цилиндрической части котла в направлении, перпендикулярном оси котла OO_1 , равна $f_1 = (2Rl/2l)p = pR$, где $2Rl$ — площадь сечения котла $ABCD$, а p — давление внутри котла (рис. 388); $2Rlp$ — сила, действующая на половину цилиндра (см. задачу 156). Максимальное значение силы, приходящейся на единицу длины сферических днищ, можно найти по формуле

$$f_2 = (\pi R^2 / 2\pi R) p = pR/2 = f_1/2.$$

Следовательно, сферические днища могут выдержать вдвое большее давление, чем цилиндрическая часть котла (при одинаковой толщине стенок). Чтобы прочность котла была одинаковой во всех частях, толщина днищ может быть в два раза меньше толщины цилиндрических стенок, т. е. 0,25 см.

270. Форма котла должна быть такой, чтобы сила, приходящаяся на единицу длины сечения котла, была наименьшей. Эта сила равна $f = pS/l$, где S — площадь сечения котла, l — периметр сечения, p — давление пара. Сила f будет минимальной, если отношение площади сечения к периметру сечения минимально. Как известно, это отношение имеет минимальное значение для круга. Известно также, что сечение сферы любой плоскостью дает круг. Поэтому наиболее выгодная форма котла в смысле прочности — это сфера.

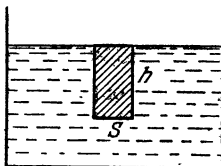


Рис. 389.

271. Выделим внутри жидкости столбик высотой h (рис. 389). Уравнение движения этого столбика имеет вид $ma = mg - pS$, где $m = \rho Sh$ — масса жидкости, а p — давление на глубине h . Следовательно, $p = \rho h(g - a)$.

272. В соответствии с решением задачи 271 выталкивающая сила может быть записана следующим образом: $F = \rho V(g - a)$, где V — объем погруженной части тела. Уравнение движения плавающего тела массы M имеет вид $Ma = Mg - \rho V(g - a)$. Отсюда $V = M/\rho$, как и в неподвижном сосуде. Тело не всплывает.

273. Давление жидкости на крышку цистерны на расстоянии x от передней стенки равно $p = \rho x a$. Так как это давление линейно возрастает по мере удаления от передней стенки, то искомая сила равна $F = \frac{\rho a l + 0}{2} l d = \rho \frac{l^2 d}{2} a$.

$$274. F = \rho h l d g + \rho (l^2 d / 2) a.$$

275. Если бы бак покоился или двигался равномерно, то давление на глубине h равнялось бы $p_1 = \rho g h$. С другой стороны, если бы бак двигался ускоренно, а сила тяжести отсутствовала, то давление в точке A было бы равно $p_2 = \rho a l$. Именно такое давление, в соответствии со вторым законом Ньютона, сообщило бы столбику жидкости длины l требуемое ускорение a . При ускоренном движении бака в поле тяжести возникает как давление p_1 , так и давление p_2 . Согласно закону Паскаля давление в жидкости одинаково по всем направлениям. Поэтому давления p_1 и p_2 складываются, и результирующее давление в точке A равно $p = \rho(g h + a l)$.

276. Имеем (рис. 390)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}, \quad \frac{H - h}{l/2} < \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}.$$

277. Чтобы жидкость не выливалась, сосуду должно быть сообщено такое ускорение, при котором поверхность жидкости займет

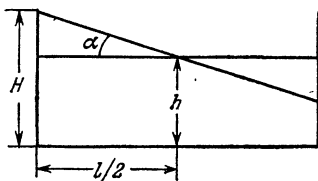


Рис. 390.

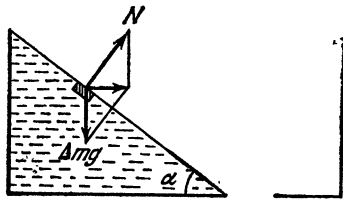


Рис. 391.

положение, изображенное на рис. 391. Максимальный объем жидкости равен $bcS/2l$. Масса всей системы равна $M + \frac{bcS}{2l} \rho$. Необходимое ускорение определяется из условия, что сумма сил, действующих на малый элемент жидкости массы Δm у поверхности, направлена горизонтально (рис. 391). По второму закону Ньютона $\Delta m a = \Delta m g \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, искомая сила

$$F = \left(M + \frac{bcS}{2l} \rho \right) g \frac{b}{c}.$$

278. Движение жидкости в сифоне обеспечивается силами сцепления между элементами жидкости. Жидкость в длинном колене перевешивает жидкость в коротком колене, что и приводит к ее пе-

рекачке. На основании этого можно было бы предположить, что с помощью сифона можно перекачивать воду через стенку любой высоты. Однако это не так. При высоте подъема в 10 м давление внутри жидкости становится равным нулю. При этом пузырьки воздуха, всегда имеющиеся в воде, начнут расширяться и водяной столб окажется разорванным. Как только это произойдет, сифон перестанет работать.

279. Сначала прибор будет действовать, как сифон. Вода будет выливаться через узкую трубку в водоем. Затем через A проскочит пузырек воздуха и разделит в верхнем колене жидкость на две части. Жидкость после этого перестанет выливаться.

280. Давление воды непосредственно под поршнем каждого насоса меньше атмосферного на величину $\rho g(H+h)$, где ρ — плотность воды. Поэтому, чтобы удержать поршень, нужно тянуть его вверх с силой $F = \rho g(H+h)S$, где S — площадь поршня. Следовательно, с большей силой необходимо тянуть те поршни, площадь которых больше.

281. В нижней половине камеры заполняются более плотным воздухом. В верхней половине он покидает камеры. Вследствие этого давление постепенно выравнивается, и машина будет работать лишь до тех пор, пока разности давлений между половинами сосуда будет достаточно для поднятия воды по трубке в верхнюю половину сосуда.

282. В данном случае колесо не симметрично и давление воздуха на правую часть колеса больше, чем на левую. Избыточная сила давления, действующая на правую часть колеса, равна $F = (p_1 - p_2)S$, где S — площадь поперечного сечения камеры. Вес же заполненных водой камер не может превышать $P = \rho gSh$. Так как $h \leq \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$, то $F \geq P$. Колесо начнет вращаться против

часовой стрелки. Поэтому камеры будут подниматься из нижней части сосуда в верхнюю наполненные воздухом. Колесо будет вращаться против часовой стрелки до тех пор, пока уменьшившаяся разность давлений не станет недостаточной для того, чтобы поднять воду на высоту h .

283. «Потолок» стратостата определяется не максимальной высотой, на которую может подняться стратостат, а той высотой, при спуске с которой обеспечивается «безопасная» скорость приземления. Как известно, оболочку стратостата заполняют легким газом (водородом или гелием) только частично, так как по мере подъема стратостата заполняющий его оболочку газ расширяется, вытесняя из оболочки воздух. Это позволяет поддерживать подъемную силу примерно постоянной. На некоторой высоте газ заполнит весь объем оболочки. Однако и после этого подъемная сила стратостата продолжает возрастать за счет вытекающего из нижнего отверстия оболочки газа. При этом вес стратостата уменьшается. Только после утечки некоторого количества газа из оболочки стратостат достигнет «потолка».

Для спуска стратостата необходимо дополнительно выпустить некоторое количество газа через верхний клапан оболочки. Для плавного спуска подъемная сила должна быть лишь немного меньше веса стратостата. На малой высоте скорость снижения окажется слишком большой, так как объем газа уменьшится, а количество его будет меньшим, чем при подъеме. Сбрасыванием балласта достигают уменьшения скорости снижения.

§ 11. Гидро- и аэродинамика

284. Обозначим через h расстояние от уровня воды до верхнего отверстия, через x — искомое расстояние от сосуда до точки пересечения струй по горизонтали и через y — расстояние от уровня воды в сосуде до той же точки (рис. 392). Точка пересечения струй будет оставаться на одном месте, если уровень воды в сосуде не изменится.

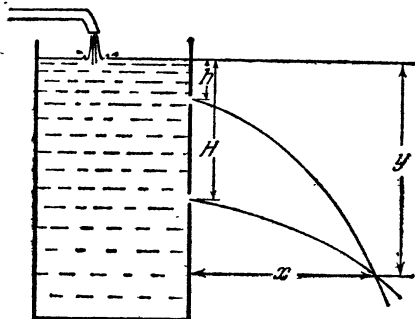


Рис. 392.

Для этого необходимо, чтобы $Q = Sv_1 + Sv_2$, где $v_1 = \sqrt{2gh}$ и $v_2 = \sqrt{2g(H+h)}$ — скорости истечения струй из отверстий.

На основании законов кинематики

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2, \quad y = h + gt_1^2/2 = h + H + gt_2^2/2,$$

где t_1 и t_2 — времена «падения» воды от отверстий до точки пересечения струй. Отсюда

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} - H^2 \frac{2gS^2}{Q^2} \right) = 120 \text{ см.}$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{2gS^2} + H^2 \frac{2gS^2}{Q^2} \right) = 130 \text{ см.}$$

285. Скорость истечения воды из отверстия $v = \sqrt{2gh}$. Импульс силы, действующей со стороны сосуда на вытекающую воду, $F\Delta t = \Delta m v$, где $\Delta m = \rho S v \Delta t$ — масса воды, вытекающая за время Δt . Следовательно, $F = \rho v^2 S = 2\rho ghS$. Давление у дна $p = \rho gh$, и поэтому $F = 2pS$. Такая же сила действует со стороны струи на сосуд. Таким образом, вода действует на стенку с отверстием с силой на $2pS$ меньшей, чем на противоположную, а не на pS , как могло бы показаться на первый взгляд. Это связано с уменьшением давления на стенку с отверстием вследствие большей скорости течения воды у этой стенки. Сосуд придет в движение, если $kQ < 2pS$, или $k < 2\rho ghS/Q$.

286. По второму закону Ньютона обязательно должно иметь место равенство $pS_0 = 2pS$. Следовательно, при истечении жидкости через трубку площадь поперечного сечения струи должна уменьшиться в два раза: $S = S_0/2$. Это сжатие струи объясняется следующим образом. Крайние струйки жидкости, подходящие к трубке

сверху, не могут вследствие инерции обогнуть край трубки, вплотную прилегая к стенкам, и стремятся к центру струи. Под давлением частиц, идущих ближе к центру струи, линии тока выпрямляются, и суженная струя жидкости течет вдоль трубки.

287. Пренебрегая разбрызгиванием воды, мы тем самым считаем удар струи о стенку абсолютно неупругим. По второму закону Ньютона изменение количества движения воды за время Δt равно $\Delta m v = F \Delta t$, где $\Delta m = \rho (\pi d^2/4) v \Delta t$ — масса воды, протекающая за время Δt через поперечное сечение трубки. Отсюда $F = (\rho \pi d^2/4) v^2 \approx 0,08 \text{ Н}$.

288. При движении газа по трубе (рис. 393) количество движения не меняется по величине, но меняется по направлению. За единицу времени через поперечное сечение I вертикального колена трубы проходит масса $\rho S v$, которая приносит с собой количество движения $p_1 = \rho S v v_1$, где v_1 — вектор скорости течения газа в вертикальном колене, численно равный заданной скорости v . За то же время через сечение II уносится количество движения $p_2 = \rho S v v_2$, где v_2 — вектор скорости в горизонтальном колене, также численно равный v .

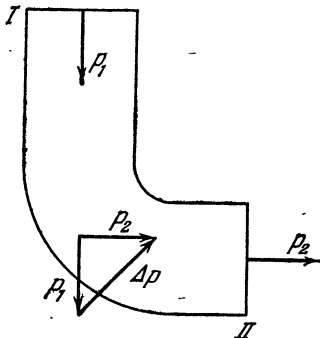


Рис. 393.

Изменение количества движения равно импульсу силы F , действующей со стороны трубы на газ: $F = \rho S v (v_2 - v_1)$. По величине сила $F = \rho S v^2 \sqrt{2}$. По третьему закону Ньютона с той же силой газ действует на трубу. Эта сила направлена в сторону, противоположную изгибу трубы.

289. Начальная скорость воды относительно лопасти $v = \sqrt{2gh} - \omega R$. Поэтому за единицу времени о лопасть ударяет масса воды $m = \rho S (\sqrt{2gh} - \omega R)$. Скорость воды относительно лопасти после удара равна 0, поэтому изменение количества движения воды за единицу времени равно mv . По второму закону Ньютона

$$F = \rho S (\sqrt{2gh} - \omega R)^2.$$

290. В первый момент судно начнет двигаться вправо, так как давление на правый борт уменьшается на величину $2pS$, где p — давление на глубине пробойны h , а S — ее площадь (см. задачу 285). После того, как струя воды достигнет противоположной стенки, на эту стенку начнет действовать сила $F = \rho S v^2$, где v — скорость струи относительно судна (см. задачу 287). F несколько больше $2pS$, так как $v > \sqrt{2gh}$ из-за того, что судно движется навстречу струе. В результате движение начнет замедляться.

291. Скорость течения жидкости в трубке постоянна по всему сечению в силу малой сжимаемости жидкости и неразрывности струи. Эта скорость равна $v = \sqrt{2gH}$. Скорость жидкости в сосуде очень мала и практически равна нулю, так как площадь сосуда во много раз больше площади сечения трубки. Следовательно, на границе сосуд — трубка должен быть скачок давления, который мы обозначим через $p_1 - p_2$. Работа сил давления вызывает изменение скорости от

нуля до $\sqrt{2gH}$. На основании закона сохранения энергии

$$\Delta m v^2/2 = (p_1 - p_2) S \Delta h,$$

где S — площадь сечения трубки, Δh — высота малого элемента жидкости и $\Delta m = \rho S \Delta h$ — масса этого элемента. Следовательно, $\rho v^2/2 = p_1 - p_2 = \rho g h$.

Из-за постоянства скорости течения давление в трубке меняется по закону $p = p_0 - \rho g (h - x)$, как и в неподвижной жидкости. p_0 — атмосферное давление, а x — расстояние, отсчитываемое от верхнего

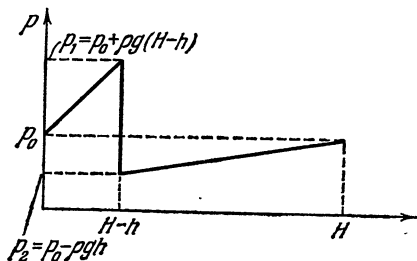


Рис. 394.

конца трубки. Изменение давления по высоте изображено на рис. 394. По оси ординат отложено давление, по оси абсцисс — расстояние от поверхности жидкости в сосуде.

292. Вытекающая из трубки вода за малый промежуток времени Δt унесет с собой количество движения $\Delta p = \rho S v^2 \Delta t$, где $v = \sqrt{2gH}$ — скорость вытекающей струи (см. задачу 291). По второму закону Ньютона $F \Delta t = 2\rho g H S \Delta t$. Такая же сила будет действовать со стороны вытекающей струи на сосуд с водой. Следовательно, в начальный момент показание весов уменьшается на $2\rho g H S$.

293. В первый момент, пока струя еще не достигла чашки, равновесие нарушится. Чашка качнется вверх, так как вытекающая из сосуда вода перестанет оказывать давление на дно сосуда. Однако после того, как струя достигнет чашки, равновесие восстановится. Рассмотрим элемент струи массы Δm . Падая на чашку, он сообщает ей в вертикальном направлении импульс $\Delta m \sqrt{2gh}$, где h — высота крана над чашкой. С другой стороны, этот элемент, покинув сосуд, перестанет оказывать давление на его дно и на чашку в течение времени падения $t = \sqrt{2h/g}$. Это эквивалентно появлению импульса силы, действующего на сосуд вертикально вверх во время падения элемента жидкости. Среднее за время падения значение этого импульса равно

$$\Delta m g \sqrt{2h/g} = \Delta m \sqrt{2gh}.$$

Таким образом, с каждым элементом жидкости Δm связано в среднем за время падения появление двух равных и противоположно направленных импульсов силы. Так как струя течет непрерывно, весы будут находиться в равновесии. В момент, когда струя прекращается, чашка качнется вниз, так как последние элементы жидкости, падая на чашку, действуют на нее с силой, превышающей их вес, а уменьшение давления на дно сосуда прекратится.

294. На основании закона сохранения энергии можно написать $Mv^2/2 = mgh$, где M — масса воды, останавливающейся в трубе при закрытии клапана K_2 , m — масса воды, поднявшейся при этом на высоту h . Отсюда $\frac{\rho l \pi d^2}{4} \frac{v^2}{2} = \rho V_0 gh$, где V_0 — объем массы m . За 2 с в среднем поднимается объем $V_0 = l \pi d^2 v^2 / 8gh = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. За час работы тарана поднимется $V = 1,7 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 60 \approx 3 \text{ м}^3$.

295. Давление в обтекающем крышу воздушном потоке меньше, чем в покоящемся воздухе. Это избыточное давление неподвижного воздуха под крышей и вызывает описанные явления.

296. За счет большой скорости течения газа в струе давление внутри струи меньше атмосферного. Снизу шарик будет поддерживаться напором струи, а с боков — статическим атмосферным давлением.

297. При течении воздуха между дисками скорость его убывает по мере приближения к краям дисков. У краев она минимальна. Давление в струе газа тем меньше, чем больше его скорость. Поэтому давление между дисками меньше атмосферного. Атмосферное давление прижимает нижнюю пластинку к верхней, и течение газа прекращается. После этого статическое давление газа снова отодвигает пластинку, и процесс повторяется.

298. В потоке текущей жидкости давление уменьшается с увеличением скорости течения. Скорость течения воды в сосуде значительно меньше скорости течения в трубе, и, следовательно, давление воды в сосуде больше, чем в трубе. На границе сосуд — труба скорость течения увеличивается, а давление уменьшается; вследствие этого шарик, помещенный на сетку, оказывается прижатым к ней и не всплывает.

299. За промежуток времени τ поршень переместится на расстояние $u\tau$ (рис. 395). При этом сила F совершит работу $A = F u \tau$.

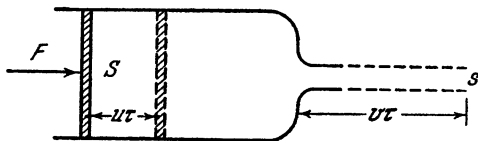


Рис. 395.

Масса жидкости, вытекающей за время τ , равна $\rho S u \tau$. Скорость истечения жидкости v определится из соотношения $S u = s v$. Изменение кинетической энергии жидкости за время τ равно

$$\rho S u \tau (v^2/2 - u^2/2).$$

Это изменение энергии должно равняться работе силы F :

$$F u \tau = \rho S u \tau (v^2/2 - u^2/2).$$

Исключая отсюда u , находим $v^2 = \frac{2F}{S\rho} \frac{1}{1 - s^2/S^2}$. Если $s \ll S$, то $v = \sqrt{2F/S\rho}$.

300. При решении задачи 299 мы считали, что скорость любого элемента жидкости, находящегося в насосе, постоянна. Изменение

скорости от u до v происходит при выходе жидкости из насоса. Однако это имеет место не сразу после того, как сила начнет действовать на поршень. Необходимо некоторое время, за которое процесс устанавливается, т. е. частицы жидкости в цилиндре приобретают постоянную скорость. При $s \rightarrow S$ это время стремится к бесконечности, и поэтому скорость, приобретаемая жидкостью под действием постоянной силы, оказывается бесконечно большой.

301. Введем систему координат, изображенную на рис. 396. Скорость истечения жидкости по формуле Торричелли $V = \sqrt{2gy}$, где y — толщина слоя воды в верхнем сосуде. Вследствие несжимаемости воды $sV = Sv$, где v — скорость опускания верхнего уровня воды, S — его площадь, а s — площадь отверстия. Если принять, что сосуд имеет осевую симметрию, то $S = \pi x^2$, где x — горизонтальная координата стенки сосуда. Следовательно, $\pi x^2 / \sqrt{2gy} = s/v = \text{const}$, так как по условию уровень воды должен опускаться с постоянной скоростью. Отсюда форма сосуда определяется уравнением $y = kx^4$, где $k = \pi^2 v^2 / 2gs^2$.

302. В горизонтальном сечении давление в зависимости от расстояния r до оси изменяется по закону $p = p_0 + (\rho\omega^2/2)r^2$, где p_0 — давление на оси сосуда, а ρ — плотность жидкости. Деформация сжатия жидкости будет наибольшей у стенок сосуда, в то время как деформация растяжения вращающегося стержня (задача 211) максимальна у оси.

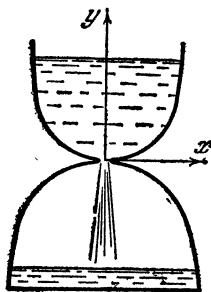


Рис. 396.

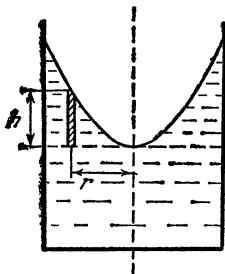


Рис. 397.

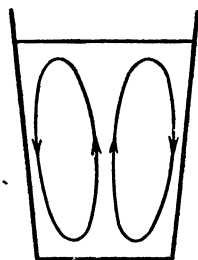


Рис. 398.

303. На расстоянии r от оси вращения избыточное давление $p = (\rho\omega^2/2)r^2$ (см. решение задачи 302). С другой стороны, это давление определяется превышением уровня жидкости в данном участке по сравнению с уровнем на оси: $p = \rho gh$ (рис. 397). Приравнявая эти выражения, имеем $h = (\omega^2/2g)r^2$. Это — уравнение параболы. Соответственно, поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения.

304. Размешивание придает частицам воды в стакане некоторую угловую скорость ω . Распределение давлений в жидкости будет примерно таким, какое получено в решении задачи 302. Избыточное давление внутри жидкости уравнивает давление, вызванное превышением уровня жидкости у краев стакана (см. задачу 303). После того, как размешивание прекращено, вследствие трения о дно скорость вращения жидкости у дна начнет уменьшаться, причем тем значительнее, чем дальше элемент жидкости находится от оси. Теперь

уже избыточное давление, вызванное вращением, не уравнивает вес столба жидкости у краев сосуда. Вследствие этого возникнет циркуляция жидкости, изображенная схематически на рис. 398. Поэтому чайники собираются в центре дна стакана.

Глава II. ТЕПЛОТА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

§ 12. Тепловое расширение твердых и жидких тел

305. $\Delta t \approx 420^\circ\text{C}$.

306. Большая прочность железобетонных конструкций возможна только благодаря тому, что коэффициент расширения бетона очень близок к коэффициенту расширения железа.

307. Количество тепла, переданного в единицу времени от одного тела к другому, пропорционально разности температур этих тел. При большой разности температур термометра и окружающих его предметов изменение объема ртути идет быстро. Если же показания термометра близки к температуре окружающих тел, изменение объема ртути идет медленно. Поэтому при измерении температуры приходится ждать довольно длительное время, пока термометр не примет точно температуру тела. Если же нагретый термометр соприкасается со сравнительно холодным воздухом комнаты, столбик ртути из-за большой разности температур «падает» настолько быстро, что термометр удастся «стряхнуть» почти тотчас же.

308. При охлаждении шкалы от t_1 до $t_0 = 0^\circ\text{C}$ цена каждого деления уменьшается. Поэтому высота столба ртути, отсчитанная по шкале, имеющей температуру $t_0 = 0^\circ\text{C}$, будет иметь иное значение, равное $H = H_1(1 + \alpha t_1)$. Высоты столбов ртути при различных температурах и одинаковых давлениях обратно пропорциональны плотностям:

$$H_0/H_1 = \rho_1/\rho_0 = 1/(1 + \beta t_1).$$

Отсюда

$$H_0 = H_1(1 + \alpha t_1)/(1 + \beta t_1) \approx H_1(1 + \alpha t_1 - \beta t_1).$$

309. Можно предварительно охладить термометр в холодильнике и стряхнуть. Если холодильника нет, то нужно поддержать термометр под мышкой долгое время, извлечь его и сразу же стряхнуть. Термометр покажет температуру тела.

310. Разность длин линеек при температуре t_1 равна $l'_0(1 + \alpha_1 t_1) - l''_0(1 + \alpha_2 t_1) = l$. При температуре t_2 эта разность

$$l'_0(1 + \alpha_1 t_2) - l''_0(1 + \alpha_2 t_2) = \pm l.$$

Знак плюс соответствует случаю, когда разность длин линеек остается неизменной (рис. 399, а). Знаку минус соответствует зависимость длин линеек от температуры, изображенная на рис. 399, б. В первом случае система уравнений приводит к следующим результатам:

$$l'_{0(1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} l = 6,8 \text{ см}, \quad l''_{0(1)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} l = 4,8 \text{ см}.$$

Во втором случае

$$l''_{0(2)} = \frac{2 + \alpha_2(t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} l = 2008,5 \text{ см}, \quad l''_{0(2)} = \frac{2 + \alpha_1(t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} l = 2006 \text{ см}.$$

При $t = 0^\circ\text{C}$ длина железной линейки должна быть больше медной.

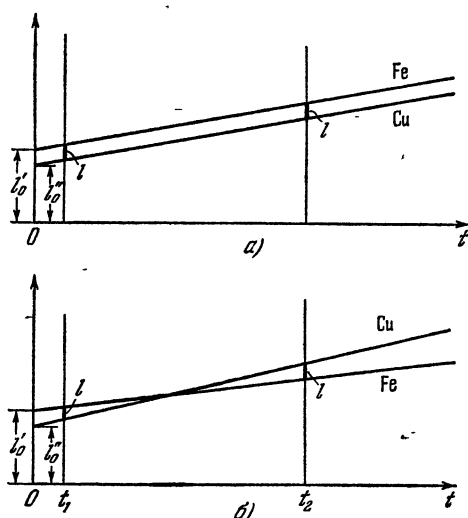


Рис. 399.

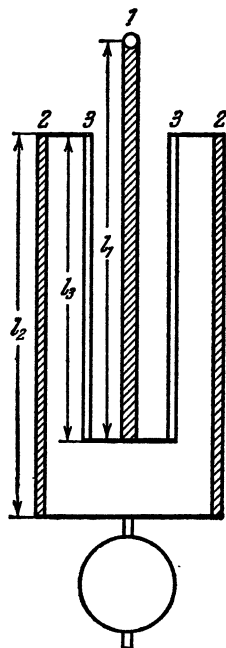


Рис. 400.

311. Возможная схема подвеса изображена на рис. 400. 1 и 2 — стержни с малым коэффициентом линейного расширения α_1 (например, стальные), а 3 — стержни с большим коэффициентом расширения α_2 (например, цинковые или латунные). Длины стержней можно подобрать так, что длина маятника не будет изменяться с температурой. Для этого необходимо, чтобы $\alpha_1(l_1 + l_2) = \alpha_2 l_3$.

312. При нагревании баллона объем его полости увеличивается по тому же закону, что и объем стекла: $v_1 = v_0(1 + \beta t_1)$, где β — коэффициент объемного расширения стекла. Если через ρ_0 и ρ_1 обозначить плотности ртути при температурах t_0 и t_1 , то можно записать: $m_0 = v_0 \rho_0$ и $m_1 = v_1 \rho_1$, причем $\rho_1 = \rho_0 / (1 + \beta t_1)$. Данная система уравнений дает для β следующее выражение:

$$\beta = \frac{m_1(1 + \beta_1 t_1) - m_0}{m_0 t_1} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$$

Линейный коэффициент расширения $\alpha = \beta/3 \approx 10^{-5} \text{ град}^{-1}$.

313. Пусть маятник часов, идущих точно, совершает N колебаний в сутки. Тогда при температуре t_1 маятник наших часов сделает N колебаний за $n-5$ секунд (где $n=86400$ — число секунд в сутках), а при температуре t_2 — за $n+10$ секунд. Периоды колебаний будут соответственно равны $T_1=(n-5)/N$ и $T_2=(n+10)/N$. Отсюда отношение периодов $T_1/T_2=(n-5)/(n+10) \approx 1-15/n$. С другой стороны, учитывая, что период колебаний маятника $T=2\pi\sqrt{l/g}$, получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2}} \approx \sqrt{1+\alpha(t_1-t_2)} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}(t_1-t_2).$$

Приравнявая выражения для отношения периодов, найдем

$$\alpha \approx 30/(t_2-t_1)n \approx 2,3 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}.$$

§ 13. Закон сохранения энергии. Теплопроводность

314. По закону сохранения энергии выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии:

$$Q = Mv_0^2/2 - (M+m)v^2/2,$$

где v — скорость тележки, после того как на нее опустили кирпич. Эта скорость находится из закона сохранения количества движения:

$$v = Mv_0/(M+m). \text{ Следовательно, } Q = Mmv_0^2/2(M+m).$$

315. На основании закона сохранения энергии

$$mgl = mv^2/2 + k(l-l_0)^2/2 + Q,$$

где l — длина шнура в момент, когда шайба покидает его. С другой стороны, изменение механической энергии шайбы равно работе сил трения:

$$mv^2/2 - mgl = A,$$

где $A = -fl$. Следовательно, $Q = -A - k(l-l_0)^2/2$. Используя закон Гука $f = k(l-l_0)$, найдем $Q = fl_0 + f^2/2k$.

316. Электрический ток совершает работу $A = \omega\tau$. За счет этой работы от холодильного шкафа будет отнято количество тепла $Q_2 = q\lambda + qct$, где c — теплоемкость воды, а λ — теплота плавления льда. Количество тепла, выделенное в комнате, по закону сохранения энергии будет равно

$$Q_1 = A + Q_2 = \omega\tau + qct + q\lambda,$$

так как энергия тока в конечном счете превращается в тепло.

317. Температура в комнате повысится. Количество выделенного в единицу времени тепла будет равно мощности, потребляемой холодильником, так как в конечном счете энергия электрического тока переходит в тепло, а тепло, отбираемое у холодильного шкафа, опять возвращается в комнату.

318. Более выгодно использовать холодильник, забирающий тепло от наружного воздуха и выделяющий его в комнате. В этом случае тепло, выделяемое в комнате в единицу времени, равно $\omega + Q_2$, где ω — мощность, потребляемая холодильником, а Q_2 — тепло, отнятое от наружного воздуха в единицу времени (см. задачу 316). Только

дороговизна и сложность оборудования препятствуют в настоящее время использованию подобного рода тепловых насосов для отопления.

319. При растворении кристаллическая решетка соли разрушается. Этот процесс требует затраты некоторого количества энергии, которое заимствуется из растворителя. Во втором случае часть межмолекулярных связей кристаллической решетки уже разрушена при измельчении кристалла. Поэтому для растворения порошка требуется меньше энергии, и вода после растворения во втором сосуде будет обладать более высокой температурой. Эффект будет, правда, крайне незначительным.

320. Количество тепла, отданное охлаждающейся водой, равно $m_2 c (t_2 - \theta)$, где θ — конечная температура. Холодная вода получает тепло $m_1 c (\theta - t_1)$. Тепло, полученное калориметром, равно $q (\theta - t_1)$. На основании закона сохранения энергии

$$m_1 c (\theta - t_1) + q (\theta - t_1) = m_2 c (t_2 - \theta).$$

Отсюда

$$\theta = \frac{(m_1 t_1 + m_2 t_2) c + q t_1}{(m_1 + m_2) c + q} \approx 4^\circ \text{C}.$$

321. Мощность, затрачиваемая на нагревание воды в калориметре, $N_1 = DVct/\tau$, где D — плотность воды, c — удельная теплоемкость воды. Искомое отношение

$$Q = \frac{N - N_1}{N} = 1 - \frac{DVct}{N\tau} \approx 5\%.$$

$$322. Q = \frac{k}{d} (T_1 - T_0) St \approx 4 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

323. Количество тепла Q , проходящего через первую пластину за одну секунду, равно $Q = k_1 \frac{T_2 - T_1}{d_1} S$, где S — площадь пластины. Поскольку процесс является стационарным, такое же количество тепла проходит через вторую пластину: $Q = k_2 \frac{T_0 - T_2}{d_2} S$. Из условия $k_1 \frac{T_2 - T_1}{d_1} S = k_2 \frac{T_0 - T_2}{d_2} S$ находим, что $T_2 = \frac{k_2 d_1 T_0 + k_1 d_2 T_1}{k_2 d_1 + k_1 d_2}$.

324. Подставляя в выражение для Q значение температуры T_2 (см. задачу 323), при $d_1 = d_2 = d$ найдем

$$Q = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} \frac{T_0 - T_1}{2d} S.$$

Следовательно, коэффициент теплопроводности стенки $k = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

325. Количество тепла, проходящего в одну секунду через поперечные сечения брусков с коэффициентами теплопроводности k_1 и k_2 , равно соответственно

$$Q_1 = \frac{k_1}{d} (T_1 - T_0) S \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{k_2}{d} (T_1 - T_0) S.$$

Количество тепла, проходящего через два бруска, полная площадь сечения которых $2S$, равно

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{k_1 + k_2}{2} \frac{T_1 - T_0}{d} \cdot 2S.$$

Отсюда вытекает, что коэффициент теплопроводности стенки $k = (k_1 + k_2)/2$.

326. Коэффициенты теплопроводности стенок A и B равны

$$k_A = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_B = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

(см. решения задач 324 и 325).

Из очевидного неравенства $(k_1 - k_2)^2 > 0$ вытекает, что $(k_1 + k_2)^2 > 4k_1 k_2$. Отсюда

$$\frac{k_1 + k_2}{2} > \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad \text{т. е.} \quad k_A > k_B.$$

327. Количество тепла, ежесекундно поступающего от нагревателя через дно кастрюли в воду, равно

$$Q = \frac{k}{d} (T - T_1) S = m\lambda,$$

где T_1 — температура кипения воды, λ — удельная теплота парообразования. Отсюда $T = T_1 + m\lambda d / kS$.

§ 14. Свойства газов

328. Снимаемый с ручки колпачок действует, как насос. Под ним возникает разреженное пространство, высасывающее чернила из резервуара. Отверстие служит для поддержания постоянного давления под колпачком.

329. Считая, что температура остается постоянной, применяем к объему воздуха над ртутью закон Бойля — Мариотта:

$$(p_{01} - p_1)(l - 748 \text{ мм}) = (p_{02} - p_2)(l - 736 \text{ мм}).$$

Отсюда $l = 764$ мм.

330. В положении равновесия $f - mg - F = 0$, где f — выталкивающая сила: $f = dh_1 S$, где d — удельный вес воды, h_1 — высота столба воздуха в пробирке после погружения. В данном случае выталкивающая сила создается разностью давлений на запаянный конец трубки снизу и сверху: $f = p_1 S - (p_0 + dh) S$, где p_1 — давление воздуха в трубке после погружения. По закону Бойля — Мариотта $p_0 l S = p_1 h_1 S$. Из данной системы уравнений имеем

$$F = \frac{S}{2} [(p_0 + dh)^2 + 4p_0 dl - (p_0 + dh)] - mg = 0,87 \text{ Н.}$$

331. Первоначально, за счет понижения уровня воды в сосуде, давление p воздуха будет уменьшаться приблизительно изотермически. Так будет происходить до тех пор, пока суммарное давление на уровне нижнего конца трубки не станет равным атмосферному

давлению p_0 ; $p + \rho gh = p_0$, где h — высота столба жидкости в сосуде над уровнем нижнего конца трубки. С этого момента в сосуд начнут проскакивать пузырьки воздуха. Давление на уровне нижнего конца трубки будет оставаться равным атмосферному, а давление воздуха $p = p_0 - \rho gh$ — линейно расти с понижением уровня воды. При этом скорость вытекания жидкости из сосуда будет постоянной.

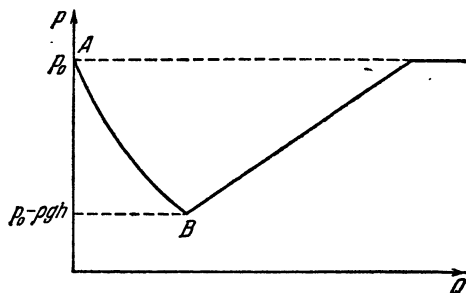


Рис. 401.

Зависимость p от Q изображена на рис. 401. Незначительные колебания давления при проскакивании отдельных пузырьков воздуха на рис. 401 не учтены.

332. При откачке воздуха из сосуда после одного качания давление в сосуде станет равным $p_1 = p_0 V / (V + v_0)$. После второго качания $p_1 V = p_2 (V + v_0)$ и, следовательно, $p_2 = p_0 \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^2$ и т. д. После n качаний давление в сосуде будет равно $p' = p_0 \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^n$.

При нагнетании воздуха в сосуд после n качаний установится давление

$$p = p' + \frac{p_0 n v_0}{V} = p_0 \left\{ \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^n + \frac{n v_0}{V} \right\}.$$

$p > p_0$ при любом n по той причине, что во время нагнетания при каждом качании насос захватывает воздух, имеющий давление p_0 , а при откачке удаляются объемы воздуха v_0 при давлениях, меньших p_0 .

333. Применяя закон Бойля — Мариотта к двум объемам газа в закрытой трубке, получим

$$p \frac{L-l}{2} S = p_1 \left(\frac{L-l}{2} - \Delta l \right) S,$$

$$p \frac{L-l}{2} S = p_2 \left(\frac{L-l}{2} + \Delta l \right) S,$$

$$p_1 = p_2 + dt.$$

Здесь p — давление при горизонтальном положении трубки, p_1 и p_2 — давления в нижней и верхней частях трубки при вертикальном ее

положении с закрытыми концами, d — удельный вес ртути, S — поперечное сечение трубки. Отсюда первоначальное давление в трубке

$$p = d \frac{l}{2} \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0} \right).$$

Здесь для краткости введено обозначение $l_0 = (L - l)/2$.

Если открыть один из концов трубки при ее горизонтальном положении, то давление газа в трубке станет равным атмосферному. По закону Бойля — Мариотта $p l_0 S = d H l_1 S$ (здесь H — атмосферное давление), откуда

$$l_1 = \frac{l l_0}{2H} \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0} \right).$$

Столбик ртути переместится на расстояние

$$\Delta l_1 = l_0 - l_1 = \frac{l l_0}{2H} \left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0} \right) \right].$$

Для того чтобы ртуть не выливалась из трубки, необходимо выполнение условия

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leq \sqrt{\left(\frac{H}{l} \right)^2 + 1} + \frac{H}{l}.$$

При открывании верхнего конца вертикально расположенной трубки

$$p l_0 S = d (H + l) l_2 S.$$

Отсюда

$$\Delta l_2 = l_0 - l_2 = \frac{l l_0}{2(H + l)} \left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0} \right) + 2 \right].$$

Ртуть не выливается из трубки, если

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leq \sqrt{\left\{ \frac{2(H + l)}{l} \right\}^2 + 1} + \frac{2(H + l)}{l}.$$

При открывании нижнего конца

$$p l_0 S = d (H - l) l_3 S.$$

Отсюда

$$\Delta l_3 = l_0 - l_3 = \frac{l l_0}{2(H - l)} \left[\frac{2H}{l} - \left(\frac{l_0}{\Delta l} - \frac{\Delta l}{l_0} \right) - 2 \right].$$

При этом, чтобы столбик ртути не был выдавлен из трубки, должно выполняться условие

$$\frac{l_0}{\Delta l} \leq \sqrt{\frac{4(H - l)^2}{l^2} + 1} + \frac{2(H - l)}{l}.$$

334. Так как для любого газа при $p = 1$ атм и $T = 273$ К $V_\mu = 22,4$ л/моль, то для всех газов, взятых в количестве одного моля, $C = p V_\mu / T = 0,082 \frac{\text{л} \cdot \text{атм}}{(\text{моль} \cdot \text{К})}$. Эта постоянная обычно обозначается R и называется универсальной газовой постоянной. Значение R в единицах СИ: $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

335. При фиксированном давлении и температуре объем, занимаемый газом, пропорционален его массе. Одному молю соответствует объем V_μ , произвольной массе m — объем V . Очевидно, что $V_\mu = V\mu/m$, где μ — молярная масса. Подставляя это выражение в уравнение состояния для одного моля, будем иметь $pV = (m/\mu)RT$.

336. При исчезновении притяжения между молекулами давление должно увеличиться. Для доказательства этого выделим мысленно внутри газа или жидкости два слоя I и II (рис. 402). Молекулы, проникая из слоя I в слой II вследствие теплового движения, сталкиваются с молекулами слоя II, и в результате на этот слой действуют силы давления p_T , зависящие от температуры. Силы притяжения действуют на слой II со стороны молекул слоя I в противоположном направлении. Результирующее давление слоя I на слой II

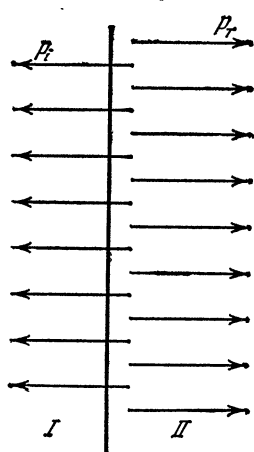


Рис. 402.

$p = p_T - p_i$, где p_i — давление, обусловленное внутренними силами притяжения. Исчезновение p_i увеличивает давление.

337. При исчезновении сил взаимодействия между молекулами вода превратилась бы в идеальный газ. Давление можно найти по уравнению состояния идеального газа: $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} \approx 1370$ атм.

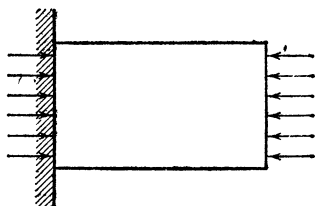


Рис. 403.

338. Выделим цилиндрический объем газа, прилегающий непосредственно к стенке (рис. 403). Силы, действующие на боковую поверхность цилиндра, взаимно уравниваются. Так как объем находится в равновесии, то давление на газ со стороны стенки должно быть обязательно равно давлению на другое основание цилиндра со стороны газа. На основании третьего закона Ньютона отсюда мы можем заключить, что давление газа на стенку равно давлению внутри сосуда.

339. Давление в газе зависит от сил взаимодействия между молекулами (см. задачу 336). Силы же взаимодействия молекул газа друг с другом и молекул газа и стенки различны. Равенство давлений внутри газа и у стенки сосуда (см. задачу 338) может осуществиться поэтому только за счет различия в концентрациях.

340. Вследствие постоянства объема

$$p_2/p_1 = T_2/T_1, \text{ или } (p_2 - p_1)/p_1 = (T_2 - T_1)/T_1 = 0,004.$$

Отсюда $T_1 = (T_2 - T_1)/0,004 = 250$ К.

341. На основании закона Архимеда $mg + P = dV$, где d — удельный вес воды, а V — объем шара. Уравнение состояния дает

$$(p_0 + dh)V = (m/\mu)RT.$$

Исключая из этих уравнений V , найдем

$$m = \frac{P\mu(p_0 + dh)}{dRT - \mu g(p_0 + dh)} \approx 0,666 \text{ г.}$$

Равновесие будет неустойчивым.

342. При горизонтальном расположении трубки устройство служить термометром не может, так как при любой температуре давления справа и слева на капельку будут уравновешены. Если же трубка вертикальна, то давление газа в нижнем шарике будет больше давления в верхнем шарике на постоянную величину. При неизменном объеме давление с ростом температуры растет тем быстрее, чем больше начальное давление. Для поддержания постоянства разностей давлений в шариках капелька начнет перемещаться вверх. Устройство может служить термометром.

343. Так как массы газа в обеих половинах цилиндра одинаковы и поршень находится в равновесии, то $V_2/V_1 = T_2/T_1$. Отсюда $T_2 = (V_2/V_1)T_1 = 330 \text{ К}$. Применяя закон Бойля — Мариотта к объему газа, температура которого не меняется, имеем $p = p_0V_0/V_1 = 1,05 \text{ атм}$.

344. В равных объемах различных газов при одинаковых внешних условиях содержится одинаковое число молекул (закон Авогадро). Поэтому $V_1:V_2:V_3:V_4 = N_1:N_2:N_3:N_4$, где V_i — объем соответствующего газа, N_i — число молекул этого газа. Масса некоторого количества газа пропорциональна числу его молекул и молярной массе газа:

$$m_1:m_2:m_3:m_4 = N_1\mu_1:N_2\mu_2:N_3\mu_3:N_4\mu_4.$$

С другой стороны, обозначая через $n_i = (V_i/V) 100\%$ относительный объем данного газа в процентах, имеем

$$n_1:n_2:n_3:n_4 = \frac{V_1}{V}:\frac{V_2}{V}:\frac{V_3}{V}:\frac{V_4}{V} = \frac{N_1}{N}:\frac{N_2}{N}:\frac{N_3}{N}:\frac{N_4}{N}.$$

Если характеризовать процентный состав воздуха величинами $n'_i = (m_i/m) 100\%$ (состав по массе), то на основании предыдущих соотношений

$$n'_1:n'_2:n'_3:n'_4 = \frac{m_1}{m}:\frac{m_2}{m}:\frac{m_3}{m}:\frac{m_4}{m} = \frac{N_1\mu_1}{N}:\frac{N_2\mu_2}{N}:\frac{N_3\mu_3}{N}:\frac{N_4\mu_4}{N} = n_1\mu_1:n_2\mu_2:n_3\mu_3:n_4\mu_4.$$

Отсюда

$$n'_i = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4}{n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + n_3\mu_3 + n_4\mu_4} n_i\mu_i.$$

Учитывая, что $n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4 = 100\%$, получим

$$n'_i = \frac{n_i\mu_i \cdot 100\%}{n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + n_3\mu_3 + n_4\mu_4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} n'_1 &= 75,52\%, & n'_2 &= 23,15\%, \\ n'_3 &= 1,28\%, & n'_4 &= 0,05\%. \end{aligned}$$

345. Для каждого газа можно написать уравнение состояния:

$$\begin{aligned} p_1 V &= (m_1/\mu_1) RT, \\ p_2 V &= (m_2/\mu_2) RT, \\ p_3 V &= (m_3/\mu_3) RT, \\ p_4 V &= (m_4/\mu_4) RT. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} + \frac{m_4}{\mu_4} \right) RT.$$

С другой стороны, для смеси газов $pV = (m/\mu) RT$, где $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$, а μ — искомая молярная масса. По закону Дальтона $p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$. Следовательно,

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{\mu_3} + \frac{m_4}{\mu_4}} = \frac{n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4}{\frac{n'_1}{\mu_1} + \frac{n'_2}{\mu_2} + \frac{n'_3}{\mu_3} + \frac{n'_4}{\mu_4}} = 28,966,$$

где $n'_i = (m_i/m) 100\%$ — процентный состав воздуха по массе. Результат, полученный в предыдущей задаче, позволяет найти μ по известному составу воздуха по объему:

$$\mu = \frac{\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 + \mu_3 n_3 + \mu_4 n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} = 28,966.$$

346. На основании уравнения Клапейрона

$$\mu = mRT/pV = \rho RT/p = 72 \text{ г/моль}.$$

Искомая формула: C_5H_{12} (один из изомеров пентана).

347. При сжатии газа в теплонепроницаемой оболочке работа, совершаемая внешними силами, идет на увеличение внутренней энергии газа. При этом его температура растет. Давление в газе будет возрастать как за счет уменьшения объема, так и за счет увеличения его температуры. При изотермическом сжатии давление растет только за счет уменьшения объема. Следовательно, в первом случае давление увеличится на большую величину, чем во втором.

348. Зависимость p от V изображена на рис. 404. Наибольшая работа, равная заштрихованной на рис. 404 площади, совершена при изотермическом процессе (1—2). На участке 1—2 температура не меняется. На участке 2—3 температура уменьшается в два раза. В дальнейшем температура растет, и при $V_4 = 4 \text{ л}$ $T_4 = T_1$.

349. 1—2 — изобара (рис. 405). Газ нагревается при постоянном давлении, поглощая тепло.

2—3 — изохора. Газ охлаждается при постоянном объеме; давление падает, тепло выделяется.

3—1—изотерма. Газ уменьшает объем при постоянной температуре. Давление растет. Газ не нагревается, хотя внешние силы совершают над ним работу. Следовательно, на этом участке газ отдает тепло.

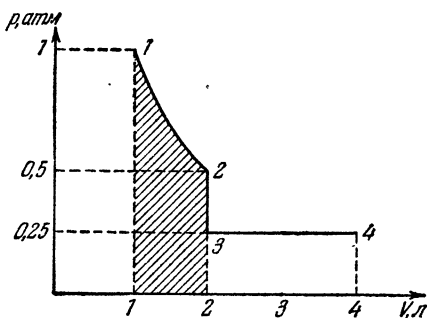


Рис. 404.

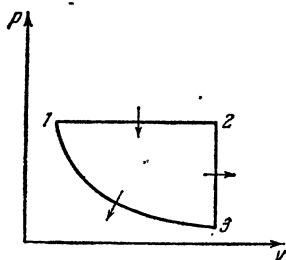


Рис. 405.

350. Количество тепла, выделяющееся при сгорании метана в час, $Q_1 = r\rho V_0 \mu / RT$, где $\mu = 16$ г/моль — молярная масса газа, $T = 284$ К — его температура. Количество тепла, полученное водой в час,

$$Q_2 = \frac{\pi D^2}{4} v \rho c (t_2 - t_1) 3600,$$

где ρ — плотность воды, c — удельная теплоемкость. По условию задачи $Q_2/Q_1 = \eta = 0,6$. Решая полученную систему уравнений, найдем

$$t_2 = t_1 + \frac{r\rho V_0 \mu \eta}{900\pi D^2 v \rho c RT} \approx 93^\circ \text{C}.$$

351. В начальном состоянии $p_1 V = (m/\mu_1) RT_1$, где μ_1 — молярная масса озона. В конечном состоянии $p_2 V = (m/\mu_2) RT_2$, где μ_2 — молярная масса кислорода. Уравнение теплового баланса дает

$$\frac{m}{\mu_1} q = \frac{C_V}{\mu_2} m (T_2 - T_1).$$

Решая данную систему уравнений, найдем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q}{C_V T_1} + \frac{\mu_1}{\mu_2} = 10.$$

352. Ввиду линейной зависимости давления от объема можно записать: $p = aV + b$. Постоянные a и b находятся из условия задачи: $a = (p_1 - p_2)/(V_1 - V_2) \approx -0,5$ атм/л, $b = (p_2 V_1 - p_1 V_2)/(V_1 - V_2) \approx 20$ атм. Подставляя выражение для p в уравнение состояния идеального газа $pV = (m/\mu) RT = \text{const} \cdot T$, найдем

$$aV^2 + bV = \text{const} \cdot T. \quad (1)$$

График зависимости T от V (рис. 406) представляет собой параболу. Кривая достигает максимума при $V_{\max} = -b/2a \approx 20$ л, когда корни

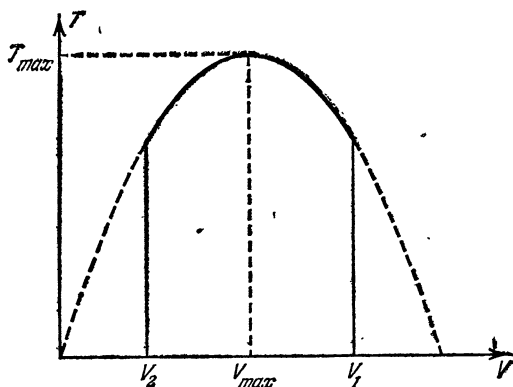


Рис. 406.

квадратного уравнения (1) совпадают. При этом

$$p_{\max} = aV_{\max} + b = b/2 \approx 10 \text{ атм.}$$

Следовательно,

$$T_{\max} = p_{\max} V_{\max} \mu / mR \approx 490 \text{ К.}$$

353. Энергия единицы объема газа $u_1 = CT\rho$, где ρ — плотность воздуха. Согласно уравнению состояния идеального газа $pV/T = mB$ (B — постоянная). Так как $\rho = m/V$, то отсюда $pT = p/B$. Следовательно, $u_1 = (C/B)p$ определяется только давлением. Энергия всего воздуха в комнате также определяется только давлением. Давление же в комнате равно атмосферному и не меняется при нагревании воздуха. Поэтому не меняется и энергия воздуха в комнате. Нагреваясь, воздух частично вытекает через щели наружу, что и обеспечивает постоянство энергии, несмотря на нагревание. Только в герметически закрытой комнате энергия возрастала бы с нагреванием.

354. На основании уравнения состояния искомая масса газа

$$\Delta m = \frac{\mu p V}{R} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \approx 1,3 \text{ кг.}$$

355. Пусть первоначально пробирка находится у дна в состоянии устойчивого равновесия. По мере нагревания давление воздуха в ней и, соответственно, выталкивающая сила возрастают. При некоторой температуре T_1 пробирка начнет всплывать. Так как давление в пробирке и, следовательно, выталкивающая сила продолжают возрастать. Пробирка быстро достигнет поверхности воды. При дальнейшем увеличении температуры пробирка будет находиться у поверхности. Если температуру уменьшать, то пробирка не начнет тонуть при температуре T_1 . Дело в том, что у нее имеется большой запас плавучести, вызванной значительным увеличением выталкивающей силы при всплывании пробирки. Только при некоторой

температуре $T_2 < T_1$ пробирка начнет тонуть. При этом выталкивающая сила будет падать из-за того, что воздух в пробирке по мере погружения в воду будет занимать меньший объем. Пробирка достигает дна очень быстро.

Зависимость положения h пробирки (по отношению к дну сосуда) от температуры T изображена на рис. 407. При $T < T_2$ пробирка обязательно будет находиться на дне, при $T > T_1$ — у поверхности. Если $T_2 < T < T_1$, то пробирка будет либо у дна, либо у поверхности в зависимости от того, каковы были предшествующие значения температуры.

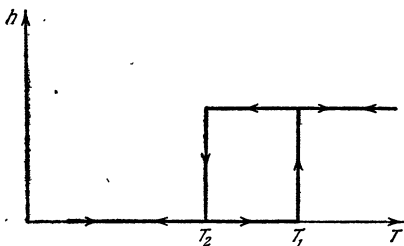


Рис. 407.

356. Газ расширяется при некотором постоянном давлении p , которое создается поршнем. В этом случае работа $A = p(V_2 - V_1)$, где V_1 и V_2 — начальный и конечный объемы газа. Используя уравнение состояния, выразим произведение pV через температуру T . Тогда $A = (m/\mu) R (T_2 - T_1) \approx 330$ Дж.

357. Сообщаемое газу тепло идет на нагревание газа и на совершение механической работы. Согласно закону сохранения энергии

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) (C_V + R) \approx 1480 \text{ Дж.}$$

§ 15. Свойства жидкостей

358. «Труднее» сжать литр воздуха в том смысле, что для этого нужно совершить большую работу. Вода мало сжимаема, и для повышения давления внутри нее до трех атмосфер нужно небольшое уменьшение объема.

359. Максимальный термометр можно осуществить следующим образом. Над столбиком жидкости горизонтально расположенного

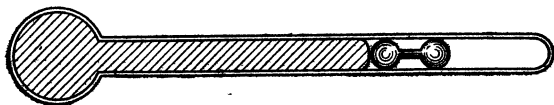


Рис. 408.

термометра (рис. 408) поместить небольшое не смачиваемое жидкостью тело, которое может свободно перемещаться вдоль трубки термометра. Положение тела укажет максимальную температуру, так как при расширении жидкости тело будет перемещаться вдоль трубки, а при сжатии останется на месте. Аналогично можно

осуществить и минимальный термометр. Для этого смачиваемое жидкостью термометра тело нужно поместить внутрь жидкости.

360. При растяжении упругой резиновой пленки сила натяжения зависит от величины деформации пленки. Сила же поверхностного натяжения определяется только свойствами жидкости и не меняется с увеличением ее поверхности.

361. Поверхностное натяжение чистого бензина меньше, чем поверхностное натяжение бензина, в котором растворен жир. Поэтому при смачивании бензином краев пятна оно стягивается к центру. При смачивании же самого пятна оно будет растекаться по ткани.

362. В уплотненном поверхностном слое почвы образуются капилляры типа изображенных на рис. 409. Они сужаются кверху, и вода в них поднимается вверх.

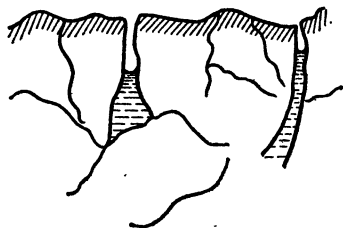


Рис. 409.

С поверхности вода интенсивно испаряется. Разрыхление почвы при бороновании разрушает указанную структуру капилляров, и влага лучше сохраняется в земле.

363. Внутри кожи имеется большое количество капилляров. Внутри капилляра постоянного сечения капелька смачивающей жидкости будет находиться в равновесии. Нагревание жидкости уменьшает поверхностное натяжение. Поэтому жидкость вытягивается

в сторону холодной части капилляра. Мазь будет вытягиваться внутрь кожи при нагревании ее снаружи.

364. Жир расплавляется, и капиллярные силы перемещают его на поверхность холодной ткани, подложенной под костюм (см. задачу 363).

365. Часть поленца в тени холоднее. Поэтому капиллярные силы перемещают воду в этом направлении.

366. Гидростатическое давление должно уравновешиваться капиллярным давлением: $\rho gh = 4\alpha/d$. Отсюда $h = 30$ см.

367. На участок пленки $abcd$ действуют следующие силы: сила тяжести, поверхностное натяжение F_{ab} , приложенное к линии ab , и поверхностное натяжение F_{cd} , приложенное к линии cd . Равновесие возможно только в том случае, если F_{ab} больше F_{cd} на величину, равную силе тяжести рассматриваемого участка пленки. Различие сил поверхностного натяжения объясняется разницей концентрации мыла в поверхностных слоях пленки.

368. Выталкивающая сила уравновешивает силу тяжести кубика mg и силу поверхностного натяжения $4\alpha x$, т. е. $a^2 x \rho g = mg + 4\alpha x$, где x — искомое расстояние. Отсюда $x = (mg + 4\alpha a)/a^2 \rho g \approx 2,3$ см. Силы поверхностного натяжения вносят поправку около 0,1 см.

369. Жидкость поднимается на высоту $h = 2\alpha/\rho g r$. Потенциальная энергия столбика жидкости $W = mgh/2 = 2\pi a^2/\rho g$. Силы поверхностного натяжения совершают работу $A = 2\pi r a h = 4\pi a^2/\rho g$. Половина этой работы идет на увеличение потенциальной энергии, а другая половина — на выделение тепла. Следовательно, $Q = 2\pi a^2/\rho g$.

370. Давление внутри жидкости в точке, находящейся выше некоторого уровня на расстояние h , меньше давления на этом уровне на величину ρgh . На уровне жидкости в сосуде давление равно

нулю. Следовательно, давление на высоте h отрицательно (жидкость растянута) и равно $p = -\rho gh$.

371. Силы притяжения, действующие на молекулу у поверхностного слоя со стороны всех остальных молекул, дают равнодействующую, направленную вниз. Однако со стороны ближайших соседей на молекулу действуют силы отталкивания. Благодаря этому молекула находится в равновесии.

В результате действия как сил притяжения, так и сил отталкивания плотность жидкости в поверхностном слое меньше, чем внутри. В самом деле, на молекулу 1 (рис. 410) действует сила отталкивания со стороны молекулы 2 и силы притяжения всех остальных молекул (3, 4, ...). На молекулу 2 действуют силы отталкивания со стороны 3 и 1 и силы притяжения со стороны лежащих в глубине молекул. В результате расстояние 1—2 должно быть больше расстояния 2—3 и т. д.

Указанная схема рассуждений является весьма грубой (например, не учитывается тепловое движение и т. д.), но дает качественно правильный результат. Увеличение поверхности жидкости сопровождается возникновением новых участков разреженного поверхностного слоя. При этом должна быть совершена работа против сил притяжения между молекулами. Эта работа представляет собой поверхностную энергию.

372. Необходимое давление должно превышать атмосферное на величину, способную уравновесить гидростатическое давление столба жидкости и капиллярное давление в пузырьке воздуха радиуса r . Превышение давления $p = \rho gh + 2\alpha/r = 484 \text{ Н/м}^2$.

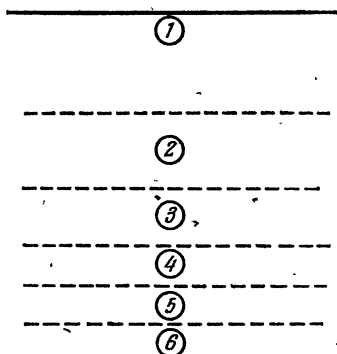


Рис. 410.

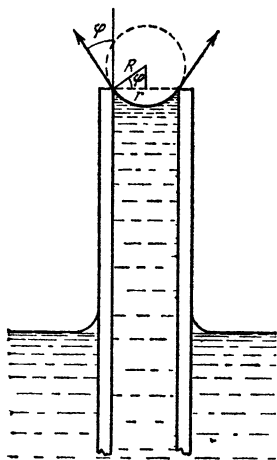


Рис. 411.

373. Так как в этом случае $\rho gh < 2\alpha/r$, то жидкость поднимается до верхнего конца трубки. Мениск будет представлять собой часть сферического сегмента (рис. 411). Радиус кривизны сегмента определяется из условия, что силы поверхностного натяжения уравнивают вес столба жидкости: $2\pi r \alpha \cos \varphi = \pi r^2 h \rho g$. Отсюда

$\cos \varphi = rh\gamma g / 2\alpha$. Как видно из рис. 411, радиус кривизны сегмента $R = r / \cos \varphi = 2\alpha / h\gamma g = 0,74$ мм.

374. После открывания трубки на нижнем ее конце образуется выпуклый мениск такой же формы, как и верхний. Поэтому длина столбика воды, оставшегося в трубке, будет равна $2h$, если $l \geq h$, и будет равна $l + h$, если $l \leq h$.

375. 1) Силы поверхностного натяжения могут удержать в данном капилляре столбик воды высотой не более h . Поэтому вода будет выливаться из капилляра.

2) Вода не выливается. Мениск выпуклый. Для абсолютно смачивающей жидкости он будет иметь форму полусферы.

3) Вода выливаться не будет. Мениск выпуклый. Кривизна его меньше, чем во втором случае.

4) Вода не выливается. Мениск плоский.

5) Вода не выливается. Мениск вогнутый.

376. Внутри мыльного пузыря радиуса R давление p превышает атмосферное на величину удвоенного капиллярного давления, так как пленка пузыря двойная: $p = p_0 + 4\alpha / R$. Давление внутри пузыря радиуса R вместе с давлением участка пленки между пузырями должно уравновесить давление внутри меньшего пузыря. Следовательно, $4\alpha / R + 4\alpha / R_x = 4\alpha / r$, где R_x — радиус кривизны участка пленки AB . Отсюда $R_x = Rr / (R - r)$. Силы поверхностного натяжения в любой точке поверхности соприкосновения пузырей уравнивают друг друга и равны между собой. Это возможно только в том случае, когда углы между ними равны 120° .

377. По закону сохранения энергии крест не может прийти во вращение. Составляющие сил поверхностного натяжения уравниваются силами гидростатического давления, так как гидростатическое давление воды, находящейся выше горизонтального уровня жидкости, отрицательно (см. задачу 370).

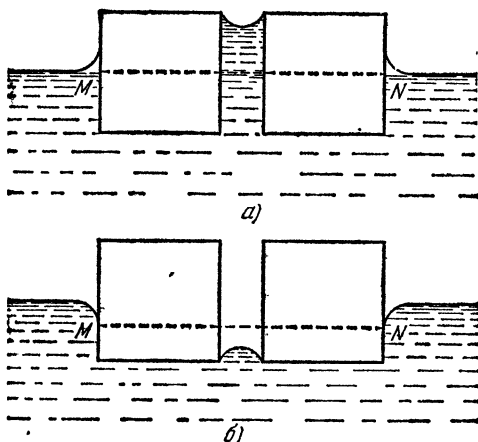


Рис. 412.

378. Если тела смачиваются водой, то форма поверхности воды примет вид, изображенный на рис. 412, а. Между спичками выше

уровня MN вода растянута капиллярными силами, и давление внутри нее меньше атмосферного. Спички сближаются, так как давление на них с боков равно атмосферному. Для не смачиваемых водой спичек форма поверхности изображена на рис. 412,б. Давление между спичками равно атмосферному, а с боков ниже уровня MN больше атмосферного.

При сближении спичек в последнем случае заданным краевым углам соответствуют две различные формы поверхности (рис. 413) жидкости. Однако одна из них (рис. 413,а) не может реализоваться.

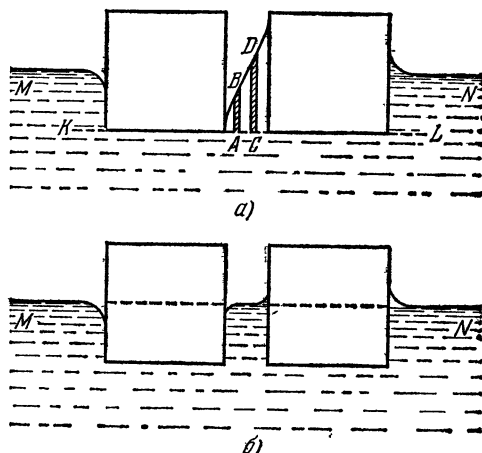


Рис. 413.

Давление на уровне KL должно быть, везде одним и тем же. В частности, давление столбиков AB и CD разной высоты должно быть одинаковым. Но это невозможно, так как положение столбиков можно выбрать с таким расчетом, чтобы их поверхности имели одинаковую форму. Тогда дополнительное давление поверхностных сил одинаково, а гидростатическое давление различно. Следовательно, при сближении спичек поверхность воды между ними будет стремиться к горизонтальной форме (рис. 413,б). В этом случае, как видно из рисунка, давление между спичками на уровне MN равно атмосферному. Давление же слева на первую спичку равно атмосферному и ниже уровня MN . На вторую спичку давление справа меньше атмосферного выше уровня MN . В результате спички будут отталкиваться.

§ 16. Взаимные превращения жидких и твердых тел

379. Замерзание при нуле произойдет только при наличии центров кристаллизации. Ими могут служить любые нерастворимые частицы. Когда масса воды велика, то в ней всегда найдется хотя бы один такой центр, а этого уже достаточно, чтобы замерзла вся вода. Если же масса воды раздроблена на мельчайшие капли, то лишь в сравнительно небольшом числе капель будут иметься центры кристаллизации и замерзнут только эти капли.

380. Количество тепла, получаемое в единицу времени водой и льдом, примерно одинаково, так как разность температур воды и комнатного воздуха примерно такая же, как и льда и воздуха. За 15 минут вода получила 840 Дж тепла. Следовательно, лед за 10 часов получил 33 600 Дж. Отсюда $\lambda = 336$ Дж/г.

381. $v = 2464$ м/с.

382. Уравнения теплового баланса имеют вид

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t + C \Delta t,$$

$$Q_2 = m_1 c_1 \Delta t / 2 + m_1 \lambda + m_1 c_2 \Delta t / 2 + C \Delta t,$$

где m_1 и c_1 — масса и теплоемкость льда, C — теплоемкость калориметра, c_2 — теплоемкость воды, $\Delta t = 2^\circ\text{C}$. Отсюда

$$C = \frac{Q_1 \left(\frac{c_2}{2c_1} + \frac{\lambda}{c_1 \Delta t} + \frac{1}{2} \right) - Q_2}{\frac{c_2 \Delta t}{c_1} - \frac{\Delta t}{2} + \frac{\lambda}{c_1}} = 630 \text{ Дж/град.}$$

383. Количество тепла, которое может быть выделено водой при охлаждении ее до 0°C , равно 16 800 Дж. Для нагревания льда до 0°C требуется 50 400 Дж. Следовательно, лед может нагреваться только за счет тепла, выделяющегося при замерзании воды. Для выделения недостающих 33 600 Дж должно замерзнуть 100 г воды. В результате в калориметре образуется смесь из 500 г воды и 500 г льда, находящихся при температуре 0°C .

384. Конечная температура содержимого сосуда $\theta = 0^\circ\text{C}$. Уравнение теплового баланса имеет вид

$$m_1 c_1 (t_1 - \theta) = m_2 c_2 (\theta - t_2) + (m_2 - m_3) \lambda,$$

где m_1 — искомая масса сосуда, c_2 — теплоемкость льда. Отсюда

$$m_1 = \frac{m_2 c_2 (\theta - t_2) + (m_2 - m_3) \lambda}{c_1 (t_1 - \theta)} = 200 \text{ г.}$$

385. 1) Искомую массу льда m можно найти из уравнения $m\lambda = Mc(-t)$. Отсюда $m = 100$ г.

2) Уравнение теплового баланса запишется в данном случае следующим образом: $M\lambda = Mc(-t)$. Отсюда $t = -80^\circ\text{C}$.

386. Температура плавления льда при сжатии до давления 1200 атм понизится на $\Delta t = 8,8^\circ\text{C}$. Лед будет плавиться до тех пор, пока не произойдет охлаждения до $-8,8^\circ\text{C}$. При этом поглощается количество тепла $Q = m_1 \lambda$, где m_1 — масса растаявшего льда, а λ — удельная теплота плавления. На основании уравнения теплового баланса $m_1 \lambda = mc \Delta t$, где c — теплоемкость льда. Отсюда $m_1 = cm \Delta t / \lambda \approx 5,6$ г.

§ 17. Упругость и прочность

387. $F = SE(R - r)/r = 600$ Н.

388. При нагревании стержня с закрепленными концами на Δt в нем возникает упругая сила F , равная по закону Гука $F = SE \Delta l / l = SE \alpha \Delta t$, где E — модуль Юнга стали, а α — ее коэффициент расширения. Если постепенно освобождать один из концов

стержня, то длина его увеличится на $\Delta l = l\alpha\Delta t$. При этом сила будет линейно уменьшаться от F до нуля, так что ее среднее значение будет равно $F/2$. Искомая работа $A = (F/2)\Delta l = \frac{1}{2}SEl\alpha^2(\Delta t)^2$.

389. Натяжение проволоки $T = Mg/2 \sin \alpha$. Из закона Гука следует, что $T = (\Delta l/2l)ES$. Так как $\Delta l = 2(l/\cos \alpha - l)$, то

$$T = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} SE = \frac{Mg}{2 \sin \alpha}.$$

При малых углах $\sin \alpha \approx \alpha$, а $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2) \approx 1 - \alpha^2/2$. Учитывая это, получим $\alpha = \sqrt[3]{Mg/SE}$.

390. Нагретый на Δt стержень в свободном состоянии удлинился бы на $\Delta l = l_0\alpha\Delta t$, где l_0 — первоначальная длина стержня. Чтобы вставить нагретый стержень между стенками, его придется сжать на Δl . По закону Гука $\Delta l = lF/ES$. Отсюда $F = ES\alpha\Delta t = 1100$ Н.

391. При нагревании стержней в свободном состоянии их общая длина увеличится на $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\Delta t$. Сжатие их на ту же величину Δl приведет к сокращению длин стержней на $\Delta l'_1$ и $\Delta l'_2$, причем $\Delta l'_1 + \Delta l'_2 = \Delta l$. Для этого необходима сила

$$F = E_1 S \Delta l'_1 / l_1 = E_2 S \Delta l'_2 / l_2.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$F = \frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{l_1/E_1 + l_2/E_2} S \Delta t.$$

С этой силой стержни действуют друг на друга.

392. Из соображений симметрии очевидно, что удлинение проволок будет одинаковым. Обозначим это удлинение через Δl . На основании закона Гука натяжение стальной проволоки $F_c = (\Delta l/l)SE_c$, а медной $F_m = (\Delta l/l)SE_m$. Отсюда вытекает, что отношение натяжений равно отношению соответствующих модулей Юнга: $F_m/F_c = E_m/E_c = 1/2$. При равновесии $2F_m + F_c = mg$. Следовательно, $F_m = mg/4 = 250$ Н и $F_c = 2F_m = 500$ Н.

393. На основании закона Гука имеем

$$F_6 = (\Delta l/l) S_6 E_6 \quad \text{и} \quad F_{ж} = (\Delta l/l) S_{ж} E_{ж}.$$

Отсюда следует, что $F_6/F_{ж} = 2$. Таким образом $2/3$ нагрузки приходится на бетон, а $1/3$ — на железо.

394. Под действием сжимающей силы F трубка укорачивается на Fl/S_mE_m , а под действием растягивающей силы F болт удлиняется на величину Fl/S_cE_c . Сумма $Fl/S_cE_c + Fl/S_mE_m$ равна перемещению гайки вдоль болта:

$$Fl/S_cE_c + Fl/S_mE_m = h.$$

$$\text{Отсюда } F = \frac{h}{l} \frac{S_c E_c S_m E_m}{S_c E_c + S_m E_m}.$$

395. Так как коэффициент теплового расширения меди α_m больше, чем у стали α_c , то увеличение температуры вызовет сжатие медной пластинки и растяжение стальных. Вследствие симметрии относительные удлинения всех трех пластинок одинаковы. Обозначив через F силу сжатия, действующую на медную пластинку со стороны

обеих стальных, для относительного удлинения медной пластинки имеем $\Delta l/l = \alpha_m t - F/SE_m$. На стальную пластинку со стороны медной действует растягивающая сила $F/2$. Приравнявая относительные удлинения пластинок, получим

$$\alpha_m t - \frac{F}{SE_m} = \alpha_c t + \frac{F}{2SE_c}.$$

$$\text{Отсюда } F = \frac{2SE_m E_c (\alpha_m - \alpha_c) t}{2E_c + E_m}.$$

396. При вращении кольца в нем возникает натяжение $T = mv^2/2\pi r$ (см. задачу 209). Для тонкого кольца $m = 2\pi r S \rho$, где S — поперечное сечение кольца. Следовательно, $T/S = \rho v^2$. Отсюда максимальное значение скорости $v = \sqrt{P/\rho} \approx 41$ м/с.

397. Первоначально со стороны растянутого болта на каждую гайку действует упругая сила F_0 . Груз $P \leq F_0$ не в состоянии увеличить длину той части болта, которая находится между гайками, и, следовательно, изменить его натяжение. Поэтому и сила, действующая на верхнюю гайку со стороны бруска, не будет меняться до тех пор, пока $P \leq F_0$. На нижнюю гайку со стороны верхней части болта действует сила F_0 , а со стороны нижней части — сила P . Так как гайка находится в равновесии, то сила, действующая на нее со стороны бруска, $F = F_0 - P$. Таким образом, действие груза $P \leq F_0$ сводится только к уменьшению давления нижней гайки на брусок. При $P > F_0$ длина болта увеличится и сила, действующая на нижнюю гайку со стороны бруска, исчезнет. На верхнюю гайку будет действовать сила P . Зависимость действующих на гайки сил от величин груза изображена на рис. 414.

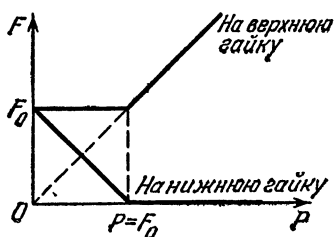


Рис. 414.

§ 18. Свойства паров

398. В калориметре будут вода и пар при температуре 100 °С.

399. Сам водяной пар невидим. Мы можем наблюдать только облако мельчайших капель, возникающих после конденсации. При выключении газа исчезают струи нагретого воздуха, ранее обтекавшие чайник. При этом выходящий из чайника водяной пар охлаждается и конденсируется.

400. На основании уравнения состояния идеального газа $\rho = m/V = p\mu/RT$. Если давление выражать в мм рт. ст., а объем в м³, то $R = \frac{760 \cdot 0,0224}{273}$ мм рт. ст. · м³/(К · моль). Отсюда $\rho = 1,06p/273/T$. При температурах, близких к комнатным, т. е. при $T \approx 290$ К, будет $\rho \approx p$.

401. На первый взгляд кажется, что уравнение состояния идеального газа не может дать близких к действительным значений плотности или удельного объема насыщенных паров. Однако это не так.

Если подсчитать плотность пара по формуле $\rho = m/V = \mu p/RT$ и сравнить полученные значения с приведенными в табл. I, то обнаружится хорошее совпадение.

Объясняется это следующим образом. Давление идеального газа растет прямо пропорционально температуре при постоянном объеме газа и, следовательно, при постоянной плотности. Изображенная же на рис. 155 зависимость давления насыщенных паров от температуры соответствует постоянному объему насыщенного пара и жидкости, с которой он находится в равновесии. При возрастании температуры плотность пара увеличивается, так как жидкость частично переходит в пар. При этом малому изменению объема, который занимает пар, соответствует значительное увеличение его массы. Отношение давления к плотности оказывается, приближенно, пропорциональным температуре, как и в случае идеального газа.

Уравнение Клапейрона—Менделеева дает в основном правильную зависимость между p , V и T для водяного пара вплоть до значений этих параметров, которые соответствуют началу конденсации. Но оно не способно описать процесс перехода пара в жидкость и, в частности, указать, при каких значениях p , V и T начнется этот переход.

402. При 30°C давление насыщенных паров $p = 31,82$ мм рт. ст. Согласно уравнению состояния идеального газа

$$V = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p} \approx 296 \text{ л.}$$

403. При медленном увеличении температуры давление водяных паров в комнате можно считать неизменным. Влажности $A_0 = 10\%$ соответствует давление паров $p = A_0 p_0 / (100\%)$, где $p_0 = 12,79$ мм рт. ст.—давление насыщенных паров при 15°C . При температуре 25°C давление насыщенных паров $p_1 = 23,76$ мм рт. ст. Следовательно, искомая относительная влажность

$$A = \frac{p}{p_1} 100\% = \frac{A_0 p_0}{p_1} = 5,4\%.$$

404. По условиям задачи относительная влажность и на улице, и в комнате близка к 100% . Однако давление насыщенных паров воды на улице гораздо меньше, чем в комнате, так как температура воздуха в комнате выше, а для выравнивания давлений за счет проникновения паров сквозь щели наружу требуется значительное время. Поэтому при открывании форточки пары начнут быстро проникать из комнаты наружу, и белье высохнет быстрее.

405. 1) Уровни воды сравниются, как у сообщающихся сосудов. Водяные пары в левом сосуде будут частично конденсироваться, а в правом сосуде часть воды испарится.

2) Уровни сравниваются в результате перетекания паров из одного сосуда в другой. При данной температуре давление насыщенных паров одинаково в обоих сосудах у поверхности жидкости и убывает одинаковым образом с высотой. Поэтому давление паров на одном и том же уровне в сосудах неодинаково, что и приводит к перетеканию пара и последующей конденсации его в сосуде с низким уровнем воды.

406. При $t_2 = 30^\circ\text{C}$ давление паров оказалось равным давлению p_{20} насыщенных паров ($p_{20} = 31,8$ мм рт. ст.) только при давлении воздуха в 10 атм. При изотермическом уменьшении давления

воздуха в 10 раз объем его увеличится также в 10 раз. Следовательно, при атмосферном давлении и температуре 30°C давление водяного пара было равно $p=3,18$ мм рт. ст. Из уравнения Клапейрона вытекает, что при температуре $t_1=10^\circ\text{C}$ давление пара $p_1=pT_1/T_2$, где $T_1=283$ К, а $T_2=303$ К. Искомая относительная влажность равна

$$A = \frac{p_1}{p_0} 100\% = \frac{p}{p_0} \frac{T_1}{T_2} 100\% \approx 32,6\%,$$

где $p_0=9,2$ мм рт. ст. — давление насыщенных паров при $t_1=10^\circ\text{C}$.

407. Давление $p=6,5$ мм рт. ст. — это давление насыщенных водяных паров при $t=5^\circ\text{C}$. Резкое падение давления свидетельствует о том, что вся вода перешла в пар. Объем пара, откачанный насосом до полного испарения воды, $V=3600$ л. На основании уравнения состояния Клапейрона — Менделеева искомая масса воды $m=pV\mu/RT \approx 23,4$ г.

408. На нагревание воды до 100°C необходимо количество тепла $Q_1=mc\Delta t=12\,600$ Дж. Следовательно, на парообразование будет затрачено $Q_2=Q-Q_1=11\,600$ Дж. Количество воды, перешедшей в пар, равно $m_2=Q_2/\lambda=5,1$ г. По уравнению состояния идеального газа это количество пара займет объем $V=(m_1/\mu)RT/p$. Пренебрегая уменьшением объема, занятого водой, найдем высоту поднятия поршня: $h=V/S=17$ см.

Глава III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

§ 19. Электростатика

409. $F=q^2/4\pi\epsilon_0 r^2=9000$ Н. Сила очень велика. Сообщить телу небольших размеров заряд в один кулон невозможно, так как электростатические силы отталкивания настолько велики, что заряд не сможет удержаться на теле.

$$410. F_{\text{Гр}} = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2}, \quad F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad F_{\text{Гр}}/F_{\text{эл}} = 4,5 \cdot 10^{-39}.$$

411. Если заряды одного знака, то при $\alpha > 2$ точечный заряд будет двигаться к точке O ; при $\alpha < 2$ — по направлению к точке B (рис. 415). Если заряды разных знаков, то направление движения будет обратным.

412. Условия равновесия подвешенного шарика дают для обоих рассматриваемых случаев уравнения

$$\begin{aligned} T_1 \sin \alpha_1 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0, \\ T_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} - mg &= 0, \\ T_2 \sin \alpha_2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0, \\ T_2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - mg &= 0, \end{aligned}$$

где T_1, T_2 — натяжения нити, α_1, α_2 — углы отклонения нити, $+Q, -Q$ — заряды закрепленных шариков, $+q$ — заряд подвешенного шарика, m — масса подвешенного шарика (рис. 416). Исключая

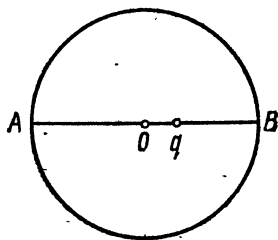


Рис. 415.

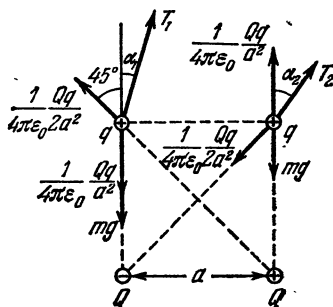


Рис. 416.

неизвестные из данной системы уравнений, получим

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} 2\alpha_1 = 2(2\sqrt{2} - 1).$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \alpha_1 = 2(2\sqrt{2} - 1) \pm \sqrt{35 - 16\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\alpha_1 = 7^\circ 56', \quad \alpha_2 = 15^\circ 52' \quad \text{при} \quad mg > \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right);$$

$$\alpha_1 = 82^\circ 04', \quad \alpha_2 = 164^\circ 08' \quad \text{при} \quad mg < \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

413. Индуцированные отрицательные заряды на поверхности проводника распределяются таким образом, что результирующая напряженность поля внутри проводника от положительного точечного заряда и индуцированных отрицательных зарядов равна нулю. (Индуцированные положительные заряды уйдут на удаленные края пластинки, и их полем можно будет пренебречь.) Это распределение индуцированных зарядов не зависит от толщины пластинки.

Поместим слева от пластинки на том же расстоянии d заряд $-q$. Ясно, что на левой стороне пластинки индуцированные положительные заряды распределяются таким же образом, как и отрицательные на правой стороне пластинки. От того, что мы поместили слева от пластинки заряд $-q$, электрическое поле справа от пластинки не изменится. Таким образом, справа от пластинки электрическое поле от заряда $+q$ и отрицательных индуцированных зарядов совпадает с полем, создаваемым зарядами $+q$ и $-q$ и зарядами, индуцированными на поверхностях пластинки (рис. 417). Если толщина пластинки очень мала по сравнению с d , то мы можем пластинку считать бесконечно тонкой, а в таком случае поле, создаваемое индуцированными зарядами, вне пластинки отсутствует.

Итак, мы показали, что поле справа от пластинки, создаваемое зарядом $+q$ и индуцированными отрицательными зарядами, совпадает с полем, создаваемым точечными зарядами $+q$ и $-q$. Поскольку

в точке нахождения заряда $+q$ напряженность поля от индуцированных отрицательных зарядов равна напряженности поля от точечного заряда $-q$, находящегося на расстоянии $2d$ от $+q$, то иско-
мая сила притяжения равна $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2}$.

414. $T = \pi a \sqrt{\pi\epsilon_0 m a / Q q}$.

415. Так как $Q \gg q$, то взаимодействием между отдельными элементами кольца можно пренебречь. Выделим малый элемент

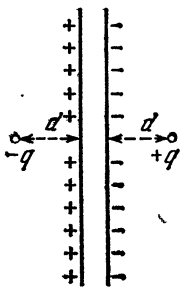


Рис. 417.

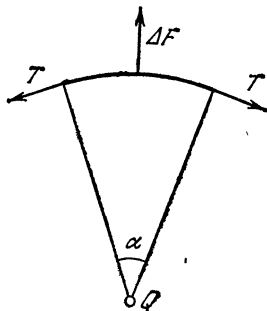


Рис. 418.

кольца длины $R \Delta\alpha$ (рис. 418). Со стороны заряда Q на него действует сила $\Delta F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \Delta q}{R^2}$, где $\Delta q = q \Delta\alpha / 2\pi$. Силы натяжения кольца T уравнивают ΔF . Из условия равновесия, учитывая, что $\Delta\alpha$ мало, имеем

$$\Delta F = 2T \sin(\Delta\alpha/2) \approx T \Delta\alpha.$$

Искомая сила является натяжением $T = Qq/8\pi^2\epsilon_0 R^2$.

416. При отклонении нити на угол φ на заряд q действует сила F , перпендикулярная пластине и равная

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4[l(1 - \cos \varphi) + h]^2}$$

(см. решение задачи 413). При малых углах отклонения $l(1 - \cos \varphi) \ll h$ и, следовательно, $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4h^2}$. При этом период колебаний будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{l \frac{16\pi\epsilon_0 m h^2}{q^2}} = \frac{8\pi h}{q} \sqrt{\pi\epsilon_0 l m}.$$

417. Задача формально сводится к определению периода малых колебаний математического маятника. длины $\lambda/2$ около положения равновесия в поле силы qE :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{2} \frac{m}{qE}} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ с.}$$

418. Каждый заряд создает в точке D напряженность поля $E_1 = q/4\pi\epsilon_0 a^2$. Полная напряженность будет суммой трех векторов (рис. 419). Горизонтальные составляющие этих векторов в сумме дадут нуль, так как они равны по величине и составляют друг с другом углы по 120° . Сами векторы образуют с вертикалью углы $90^\circ - \alpha$, где α — угол между ребром тетраэдра и высотой h треугольника ABC . Вертикальные составляющие одинаковы и равны каждой

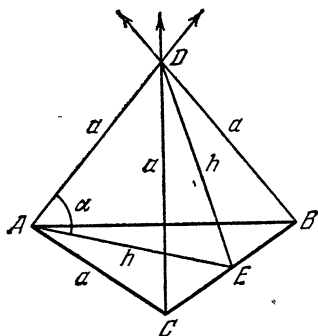


Рис. 419.

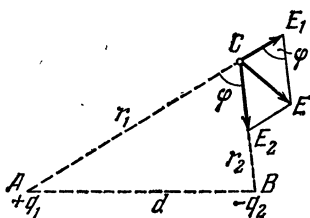


Рис. 420.

$q \sin \alpha / 4\pi\epsilon_0 a^2$. Из $\triangle ADE$ очевидно, что $\sin \alpha = \sqrt{2/3}$. Отсюда иско-
мая напряженность поля

$$E = \frac{\sqrt{6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}.$$

419. Рассмотрим случай разноименных зарядов $q_1 > 0, q_2 < 0$. Напряженности, созданные зарядами q_1 и q_2 , равны соответственно $E_1 = q_1/4\pi\epsilon_0 r_1^2$ и $E_2 = q_2/4\pi\epsilon_0 r_2^2$. Как видно из рис. 420, $E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos \varphi$. Из $\triangle ABC \cos \varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$. Следовательно,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - \frac{q_1q_2}{r_1^3r_2^3} (r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

Если заряды одноименны, то

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + \frac{q_1q_2}{r_1^3r_2^3} (r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

$$420. 1) E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3};$$

$$2) E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{l}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}.$$

(См. рис. 421.)

421. Напряженность поля E в произвольной точке A на оси кольца может быть найдена как геометрическая сумма напряжен-

ностей, создаваемых отдельными малыми элементами заряженного кольца (рис. 422). Суммируя векторы напряженности в точке A , следует учитывать только составляющие, направленные вдоль оси

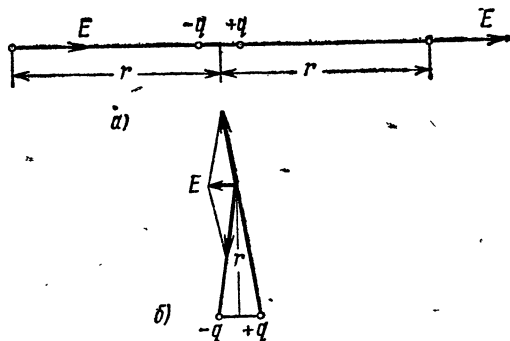


Рис. 421.

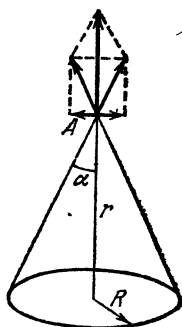


Рис. 422.

кольца. Составляющие векторов напряженности, направленные перпендикулярно оси, при сложении дадут нуль вследствие симметрии. Следовательно, напряженность поля в точке A равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2 + r^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{(R^2 + r^2)^{3/2}}.$$

422. Сила, действующая на заряд $-q$, равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

и направлена всегда к центру кольца; так как $x \ll R$, то, пренебрегая в знаменателе x по сравнению с R , получим

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} x.$$

Таким образом, сила пропорциональна x и направлена к центру кольца. Под влиянием этой силы заряд совершает колебательное движение, период которого равен $T = 4\pi \sqrt{\pi\epsilon_0 m R^3 / qQ}$.

423. В обоих случаях напряженность электрического поля в точке, отстоящей на расстояние r от пластины или нити, может зависеть только от σ или τ и r . Зависимость от σ и τ должна быть линейной (принцип суперпозиции), т. е. $E = \sigma f(r)$ или $E = \tau \phi(r)$. Здесь $f(r)$ и $\phi(r)$ — некоторые, пока неизвестные функции r .

Примечание. Принцип суперпозиции в данном случае заключается в том, что напряженность от суммы зарядов равна сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

Как известно, $[E] = \frac{1}{[\epsilon_0]} \frac{Q}{L^2}$. Размерности σ и τ : $[\sigma] = Q/L^2$, $[\tau] = Q/L$. Очевидно, в случае пластины $E = k_1 \sigma / \epsilon_0$, а в случае нити $E = k_2 \tau / \epsilon_0 r$, где k_1 и k_2 — некоторые безразмерные коэффици-

енты. На основании соображений симметрии легко определить направление напряженности. Напряженность E направлена перпендикулярно к пластине или нити. Теория дает для коэффициентов k_1 и k_2 значения $k_1 = 1/2$, $k_2 = 1/2\pi$.

424. Ввиду очень малой толщины пластинки мы можем считать, что заряд распределен равномерно на двух поверхностях, площадь каждой из которых равна ab . Таким образом, поверхностная плотность заряда $\sigma = q/2ab$. Поле внутри металла будет равно нулю, вне металла напряженность равна

$$E = 2 \frac{q}{2\epsilon_0 2ab} = \frac{q}{2\epsilon_0 ab}.$$

$$425. E_B = \frac{(Q_1 - Q_2)}{2\epsilon_0 S}, \quad E_C = \frac{(Q_1 + Q_2)}{2\epsilon_0 S}, \quad E_A = -\frac{(Q_1 + Q_2)}{2\epsilon_0 S}.$$

Напряженность считается положительной, если она направлена слева направо.

426. Выделим на проводнике столь малый участок AB , чтобы его можно было считать плоским (рис. 423). Поле вблизи этого участка можно представить как суперпозицию двух полей: того, что создается зарядами этого участка (векторы E_1 , E_1'), и того, что создается остальными зарядами проводника (векторы E_2 , E_2'). Так как участок AB можно считать плоским, то $E_1 = E_1' = \sigma/2\epsilon_0$. Кроме того, так как поле, создаваемое зарядами, находящимися вне участка

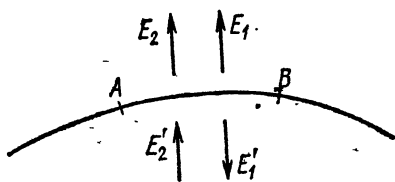


Рис. 423.

AB , является непрерывным, то $E_2 = E_2'$. Наконец, так как внутри проводника поле отсутствует, то $E_1' = E_2$, откуда, учитывая предыдущие равенства, получаем $E_1 = E_2 = \sigma/2\epsilon_0$. Следовательно, искомая напряженность

$$E = E_1 + E_2 = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0.$$

427. Если $|x| \leq a/2$, то $E = \rho x/\epsilon_0$. Если $|x| > a/2$, то $E = \rho a/2\epsilon_0$.

428. Найдем напряженность поля на расстоянии $r < R$ от центра шара. С этой целью проведем из центра шара сферу радиуса r . Все заряды, которые находятся внутри сферы, дают в интересующей нас точке такую напряженность, как если бы они находились в центре, а от зарядов, находящихся вне сферы, напряженность поля равна нулю. Таким образом,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{1}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$$

Вне шара ($r > R$) напряженность равна

$$E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2,$$

где Q — заряд шара. (График $E = f(r)$ см. на рис. 424.)

429. Найдем напряженность поля на расстоянии $r < R$ от оси цилиндра. Заряды, которые находятся внутри цилиндра радиуса r ,

создают на расстоянии r от оси цилиндра такую же напряженность, как если бы они находились на оси. Заряды же, находящиеся вне цилиндра, поля не создают. Следовательно, если $r < R$, то

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

Если же $r > R$, то

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\pi R^2 \rho}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0 r}.$$

430. $E_A = \rho R_A / 3\epsilon_0 - \rho r / 3\epsilon_0 = \rho a / 3\epsilon_0$. (См. рис. 425 и решение задачи 428.)

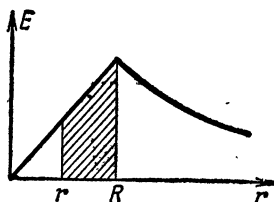


Рис. 424.

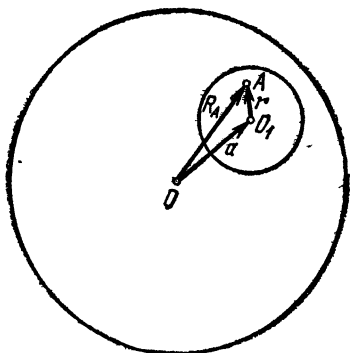


Рис. 425.

431. См. решения задач 430 и 429.

432. Молекула будет притягиваться к заряженному цилиндру. Сила притяжения равна

$$F = \frac{\tau q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\lambda} \right) = \frac{\tau q \lambda}{2\pi\epsilon_0 r (r+\lambda)}.$$

В этом выражении мы можем пренебречь величиной λ ($\lambda \sim 10^{-8}$ см) по сравнению с r (r не может быть меньше радиуса цилиндра). Окончательно для F получаем выражение $F = \tau q \lambda / 2\pi\epsilon_0 r^2$.

433. В начальный момент силы, действующие на обе молекулы, одинаковы. При приближении к цилиндру сила F_1 , действующая на молекулу с постоянным электрическим моментом, растет пропорционально $1/r^2$: $F_1 = 2\pi q \lambda / r^2$ (см. задачу 432). Сила F_2 , действующая на «упругую» молекулу, растет быстрее, пропорционально $1/r^3$ (за счет непрерывного увеличения электрического момента этой молекулы). Массы молекул одинаковы, поэтому ускорение второй молекулы при приближении к цилиндру нарастает быстрее, чем у первой, и она быстрее достигнет поверхности цилиндра.

434. Ввиду того, что a и b много больше c и d , мы можем считать пластинку бесконечно большой. Учитывая, что напряженность поля от нескольких зарядов равна сумме напряженностей, создаваемых каждым из этих зарядов, и воспользовавшись результатами

решения задач 413 и 424, получаем значение искомой силы:

$$F = \frac{qQ}{2\epsilon_0 ab} - \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}.$$

Первое слагаемое соответствует силе отталкивания, второе — силе притяжения. Положительно заряженная пластинка будет притягивать точечный положительный заряд, если $Q^2/16\pi\epsilon_0 d^2 > qQ/2\epsilon_0 ab$, т. е. если $Q/d^2 > 8\pi q/ab$.

435. Вне шара потенциал $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 r = R^3\rho/3\epsilon_0 r$.

Для того чтобы определить потенциал внутри шара (при $r < R$), надо к потенциалу $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ добавить величину, численно равную работе, производимой полем над единичным положительным зарядом при его перемещении по радиусу от r до R . Эта работа равна заштрихованной площади на рис. 424 (см. задачу 428). Вычисляя, получим $\varphi = (3R^2 - r^2)\rho/6\epsilon_0$.

436. Потенциал всех точек шара одинаков. Для решения задачи достаточно найти потенциал одной точки. Проще всего найти потенциал центра шара. Он равен потенциалу, созданному в центре шара точечным зарядом $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 d$, плюс потенциал, созданный зарядами, возникающими на поверхности шара вследствие электростатической индукции. Но этот последний потенциал равен нулю, так как суммарный заряд на сфере равен нулю и все элементы заряда находятся на равном расстоянии от центра. Следовательно, потенциал шара $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 d$.

437. Потенциал шара φ равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R+r} - \frac{Q}{r} \right).$$

Поскольку шар заземлен, его потенциал равен нулю, т. е. $q/(R+r) - Q/r = 0$. Следовательно, $Q = \frac{r}{R+r} q$.

438. На суживающейся части трубы возникнут положительные индуцированные заряды. Под их влиянием электрон начнет ускоряться. Кинетическая энергия электрона будет увеличиваться за счет уменьшения потенциальной энергии системы электрон — труба.

$$439. q = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \frac{R_1}{R_2}.$$

440. Для равновесия заряда q необходимо, чтобы заряды $(-Q)$ находились на равных расстояниях a от него (рис. 426). Сумма сил, действующих на заряд $(-Q)$, также равна нулю:

$$Q^2/4a^2 - Qq/a^2 = 0.$$

Отсюда $q = Q/4$. Расстояние a может быть любым. Равновесие неустойчиво, так как при смещении заряда $-Q$ вдоль OO_1 на отрезок x от заряда q сила притяжения $F_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4(a+x)^2}$, действующая со стороны заряда q , меньше силы отталкивания

$$F_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(2a+x)^2}$$

и заряд $-Q$ уходит еще дальше от положения равновесия. При смещении заряда $-Q$ вдоль OO_1 на x к заряду q $E_q > F_Q$ для $x \leq a$, и система не возвращается к положению равновесия. Также нарушает равновесие, как нетрудно видеть, произвольное перемещение заряда q .

Потенциальная энергия заряда $-Q$ в поле двух других зарядов равна

$$W_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{y} - \frac{Q}{a+y} \right) = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{3y-a}{y(a+y)},$$

где y — расстояние между зарядом q и одним из зарядов $-Q$. Зависимость W_1 от y при $0 \leq y \leq \infty$ изображена кривой ABC для одного заряда и кривой DEF для другого (рис. 426).

Энергия заряда q при неподвижных зарядах $-Q$ равна

$$W_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-Q}{a-z} - \frac{Q}{a+z} \right) = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a}{a^2 - z^2},$$

где z — смещение заряда q от положения равновесия. При изменении z от 0 до a энергия меняется в соответствии с кривой MNP (рис. 426).

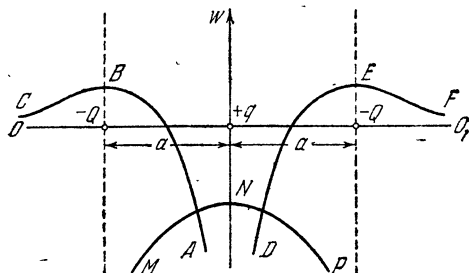


Рис. 426.

Характерно, что максимумы всех трех потенциальных кривых соответствуют положению зарядов при равновесии. Именно с этим связана неустойчивость равновесия.

441. Нет, не может. Для того чтобы, к примеру, положительный заряд находился в состоянии устойчивого равновесия, необходимо, чтобы при смещении заряда в любом направлении на него действовала сила, возвращающая в положение равновесия. Следовательно, силовые линии электрического поля должны сходиться в точке, в которой расположен заряд. Но силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. В точке же, где расположен рассматриваемый заряд, отрицательных зарядов нет, и, следовательно, силовые линии внешнего по отношению к заряду поля не могут сходиться в точке, где он расположен.

442. Энергия заряженного шара равна работе, которую могут совершить заряды, находящиеся на шаре, если они покинут его и удалятся на бесконечно большое расстояние. Пусть с шара каждый раз удаляется на бесконечность порция заряда в q единиц ($q \ll Q$).

При удалении n -й порции, когда заряд шара станет равным $Q - nq$, электрическое поле совершит работу, равную

$$\Delta A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q - nq)}{R} q.$$

Работа, затраченная на удаление N порций заряда, где $N = Q/q$, равна

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q-q}{R} q + \frac{Q-2q}{R} q + \frac{Q-3q}{R} q + \dots + \frac{Q-Nq}{R} q \right] = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q^2}{2R} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right].$$

При $N \rightarrow \infty$ ($q \rightarrow 0$) $A = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$. Следовательно, энергия заряженного шара равна $W = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$. (Эта энергия называется собственной.) Тот же результат можно получить, используя график изменения потенциала шара при уменьшении заряда. График будет представлять собой прямую линию, проходящую под некоторым углом к оси абсцисс, а работа будет численно равна площади, ограниченной графиком и осями координат.

443. Энергия всей системы зарядов равна сумме собственных энергий зарядов, находящихся на первой сфере ($W_1 = Q_1^2/8\pi\epsilon_0 R_1$) и на второй сфере ($W_2 = Q_2^2/8\pi\epsilon_0 R_2$), а также энергии взаимодействия зарядов первой сферы с зарядами второй сферы. Эта энергия взаимодействия равна произведению заряда Q_2 на потенциал, создаваемый на поверхности сферы радиуса R_2 зарядом Q_1 . Таким образом, искомая энергия W всей системы равна

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q_1^2}{2R_1} + \frac{Q_2^2}{2R_2} + Q_2 \left(\frac{Q_1}{R_2} \right) \right].$$

В случае, когда $Q_1 = -Q_2 = Q$ (сферический конденсатор),

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$$444. W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{2r_1} + \frac{q_2^2}{2r_2} + \dots + \frac{q_n^2}{2r_n} + \right. \\ \left. + q_2 \left(\frac{q_1}{r_2} \right) + q_3 \left(\frac{q_1 + q_2}{r_3} \right) + \dots + q_n \left(\frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}}{r_n} \right) \right].$$

445. Как всегда, считаем потенциал на бесконечности равным нулю. Тогда потенциалы пластин равны соответственно $+U/2$ и $-U/2$, причем $U = Q/C$. Потенциалы в точках первоначального положения электрона соответственно равны 0 , $+U/4$, $-U/4$. Начальные значения полной энергии электрона равны:

$$1) \frac{mv_0^2}{2}, \quad 2) \frac{mv_0^2}{2} - \frac{eU}{4}, \quad 3) \frac{mv_0^2}{2} + \frac{eU}{4}.$$

Конечные скорости v_1 , v_2 , v_3 определяются на основании закона сохранения энергии:

$$1) \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}, \quad v_1 = v_0;$$

$$2) \frac{mv_0^2}{2} - \frac{eU}{4} = \frac{mv_2^2}{2}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{mv_0^2 - eQ/2C}{m}};$$

$$3) \frac{mv_0^2}{2} + \frac{eU}{4} = \frac{mv_3^2}{2}, \quad v_3 = \sqrt{\frac{mv_0^2 + eQ/2C}{m}}.$$

В первом случае конечная скорость равна начальной, во втором случае меньше ее, а в последнем больше. Во всех случаях скорость первоначально растет (во время движения внутри конденсатора), а затем начинает убывать.

446. Расстояние между зарядами станет минимальным в момент, когда их скорости сравняются, т. е. когда относительная скорость зарядов станет равной нулю. Очевидно, что скорость зарядов при минимальном расстоянии между ними, согласно закону сохранения импульса, равна $v = (m_1 v_1 - m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$. Используя также закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

определим минимальное расстояние r_2 между зарядами:

$$r_2 = \frac{r_1}{1 + \frac{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{(v_1 + v_2)^2}{q_1 q_2}}.$$

447. Энергия взаимодействия равна половине энергии взаимодействия двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии $2d$, т. е.

$$W = -\frac{1}{2} q^2 / 8\pi\epsilon_0 d = -q^2 / 16\pi\epsilon_0 d.$$

Скорость найдем из закона сохранения энергии. Когда заряд находится на бесконечно большом расстоянии от пластины, его скорость равна нулю и энергия взаимодействия W тоже равна нулю. Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}\right) = \frac{mv_0^2}{2} + \left(-\frac{q^2}{\infty}\right), \quad v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 md}}.$$

448. Работа по перемещению заряда $-q$ пропорциональна разности потенциалов между точкой O и весьма удаленной от кольца точкой A , лежащей на оси (рис. 160). Потенциал на бесконечности принимаем равным нулю. Потенциал точки A , если расстояние $OA \gg R$, мы можем считать равным нулю. Потенциал в точке O найдем суммированием потенциалов, созданных отдельными малыми элементами кольца:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Используя закон сохранения энергии $mv^2/2 = q^2/4\pi\epsilon_0 R$, найдем $v = \sqrt{q^2/2\pi\epsilon_0 mR}$.

449. Полная энергия заряда равна $W = mv^2/2 - qQ/4\pi\epsilon_0 R$. Если $W \geq 0$, то заряд уйдет в бесконечность. При $W = 0$ скорость заряда на бесконечно большом расстоянии от центра кольца будет равна нулю, а при $W > 0$ — отлична от нуля. Если же $W < 0$, то заряд будет совершать периодическое движение вдоль оси кольца. Наибольшее расстояние r , на которое при этом удалится заряд от центра кольца, можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r^2}},$$

$$r = R \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\pi\epsilon_0 mv^2 R}{qQ} - 1\right)^2} - 1}.$$

450. Энергия заряженного шара $W = Q^2/8\pi\epsilon_0 R = 2\pi\epsilon_0 R\varphi^2$, где R — радиус шара, а φ — его потенциал. При разряде эта энергия выделится в форме тепла. Вычислив, найдем $W = 0,55$ Дж.

451. Пусть первоначально заряды шариков были q_1 и q_2 . Тогда работа $A_1 = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 l$, где l — расстояние между шариками. Заряды шариков после соединения стали одинаковыми: $q = (q_1 + q_2)/2$, а работа $A_2 = (q_1 + q_2)^2 / 16\pi\epsilon_0 l$. Нетрудно видеть, что $A_2 > A_1$. Кроме того, в проводнике при соединении шариков выделяется тепло Q . Однако полный запас энергии шариков по закону сохранения энергии должен быть одинаков в обоих случаях. Так как работа A_1 и, соответственно, A_2 представляет собой потенциальную энергию второго шарика в поле первого (в первом и во втором случаях), то

$A_1 + W_1 = A_2 + Q + W_2$, где $W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2r} + \frac{q_2^2}{2r} \right)$ — собственная энергия шариков до соединения, $W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{2r} + \frac{q^2}{2r} \right)$ — собственная энергия шариков после перераспределения зарядов (см. задачу 442). Энергия, выделившаяся в форме тепла, равна

$$Q = W_1 - W_2 + A_1 - A_2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right).$$

452. Предположим, что радиус оболочки увеличился на δ , где δ — сколь угодно малая величина. Тогда растягивающая сила совершит работу $A = 4\pi R^2 f \delta$, где f — сила, приходящаяся на единицу площади. Эта работа совершается за счет уменьшения электростатической энергии. Вначале электростатическая энергия равна $Q^2/8\pi\epsilon_0 R$, после растяжения $Q^2/8\pi\epsilon_0 (R + \delta)$. Изменение энергии

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 (R + \delta)} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{R(R + \delta)}$$

равно работе A , т. е. $4\pi R^2 f \delta = Q^2 \delta / 8\pi\epsilon_0 R(R + \delta)$. Учитывая, что величина δ сколь угодно мала, получаем для силы следующее выражение: $f = Q^2 / 32\pi^2 \epsilon_0 R^4 = \sigma^2 / 2\epsilon_0$. Здесь через $\sigma = Q / 4\pi R^2$ обозначена плотность электричества, т. е. заряд, приходящийся на единицу площади.

Можно определить искомую силу и непосредственно. Рассмотрим на сфере малую площадку S (рис. 427). Найдем напряженность E_1 электрического поля на рассматриваемой площадке, создаваемую всеми зарядами, за исключением зарядов, находящихся на самой площадке. Для определенности рассмотрим случай, когда сфера несет положительный заряд. Обозначим через E_2 напряженность электрического поля, создаваемого зарядами, находящимися на рассматриваемой площадке. Так как внутри сферы результирующая напряженность равна нулю, то $E_1 = E_2$.

Результирующая напряженность на сфере $E_1 + E_2 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$. Следовательно, $2E_1 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$. Отсюда $E_1 = \sigma/2\epsilon_0$. Для того чтобы определить силу, действующую со стороны всех зарядов, не находящихся на площадке, на заряды, находящиеся на площадке, надо напряженность E_1 умножить на величину электрического заряда площадки σS : $F = E_1 \sigma S = \sigma^2 S/2\epsilon_0$. Сила, приходящаяся на единицу площади, будет равна $f = \sigma^2/2\epsilon_0$.

$$453. Q < 8\pi R \sqrt{\epsilon_0 R \sigma}.$$

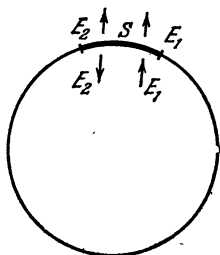


Рис. 427.

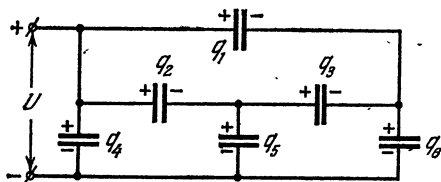


Рис. 428.

454. Пусть разность потенциалов на клеммах батарей равна U , а заряд батарей равен Q . Найти емкость батарей — значит найти емкость такого конденсатора, который имел бы при напряжении U тот же заряд Q на пластинах, что и батарея. Следовательно, $C_0 = Q/U$, причем $Q = q_1 + q_2 + q_4 = q_4 + q_5 + q_6$ (рис. 428), а $U = U_4 = q_4/C$. Работа сил электростатического поля при обходе по замкнутому контуру равна нулю. Отсюда

$$q_1/C - q_2/C - q_3/C = 0, \quad q_2/C - q_4/C + q_5/C = 0, \\ q_3/C - q_6/C + q_6/C = 0.$$

Кроме того, проводник, соединяющий второй, третий и пятый конденсаторы, электронеутрален. Следовательно, $q_3 + q_5 - q_2 = 0$. Решая эти уравнения, получим $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = q_4/2$, $q_3 = 0$. Следовательно, $C_0 = 2C$.

455. Пусть батарея конденсаторов заряжена. Тогда точки 1, 2, 3 будут иметь одинаковый потенциал и их можно будет соединить между собой. Так же можно соединить точки 4, 5, 6 (рис. 162). В результате получим эквивалентную схему, изображенную на рис. 429. Емкость отдельных участков $3C$, $6C$, $3C$. Общая емкость найдется из формулы $1/C_0 = 2/3C + 1/6C$. Отсюда $C_0 = 1,2C$.

456. При пробое искровых промежутков происходит автоматическое переключение параллельного соединения конденсаторов на по-

следовательное. При этом напряжение между соответствующими обкладками конденсаторов растет, так как емкость системы падает. Действительно, из-за большого сопротивления проводников AB и CD можно пренебречь токами, протекающими по ним за время разряда, и рассматривать их как изоляторы, через которые конденсаторы не разряжаются.

Эквивалентная схема после пробоя первого искрового промежутка изображена на рис. 430. В результате пробоя первого промежутка разность потенциалов на втором промежутке будет равна

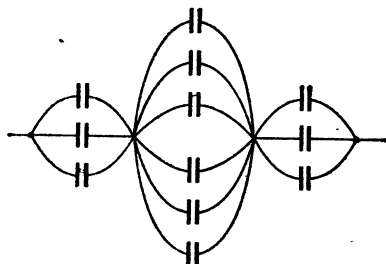


Рис. 429.

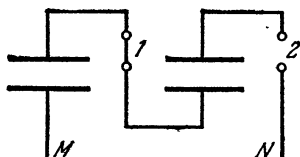


Рис. 430.

сумме напряжений на первом и втором конденсаторах, т. е. увеличится вдвое. Вследствие этого начнется пробой второго промежутка. В момент пробоя n -го промежутка напряжение на нем достигнет величины $V = nV_0$. Сопротивления проводников AB и CD должны быть большими, чтобы за время последовательного соединения пластин конденсаторов при пробое промежутков конденсаторы не успевали разряжаться через эти проводники.

457. Да, будет. Каждая из пластин обладает определенной, обычно небольшой емкостью относительно земли (вблизи краев пластин силовые линии искривляются и достигают земли). Эквивалентная схема изображена на рис. 431. Емкость пластин конденсатора относительно земли изображена в виде малых емкостей C_1 и C_2 . При замыкании левой пластины нейтрализуется часть заряда, находящегося на ней. Это же произойдет при замыкании правой пластины. Конденсатор будет разряжаться тем медленнее, чем больше емкость конденсатора по сравнению с емкостью пластин относительно земли.

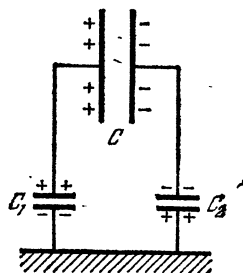


Рис. 431.

458. Полная энергия двух конденсаторов до соединения равна

$$W_0 = \frac{1}{2} (C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2).$$

После соединения

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{C_1 + C_2}.$$

Легко показать, что $W_0 > W$. Разность энергий

$$W_0 - W = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1^2 + U_2^2 - 2U_1 U_2) > 0;$$

при $U_1 = U_2$ $W_0 - W = 0$, а при $C_1 = C_2$ и $U_2 = 0$ $W_0 = 2W$. Электростатическая энергия уменьшилась вследствие того, что при соединении этих конденсаторов проводниками заряды перетекали с одного конденсатора на другой. В проводниках, соединяющих конденсаторы, выделялось при этом тепло. Количество выделенного тепла не зависит от сопротивления соединительных проводов. При малом сопротивлении проводов в них протекают большие токи, и наоборот.

459. Рассмотрим для простоты диэлектрик в форме однородного сильно вытянутого параллелепипеда (рис. 432). Разложим поле E_0 , в которое помещен диэлектрик, на составляющие, направленные вдоль стержня и перпендикулярно ему. Эти составляющие вызовут появление связанных зарядов на поверхностях AB , CD , BC и AD . Поле

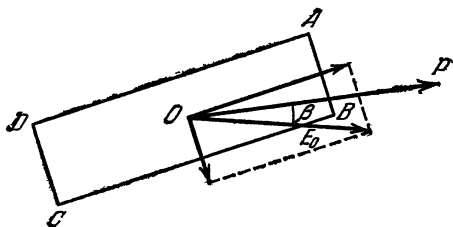


Рис. 432.

связанных зарядов между поверхностями AD , BC и AB , DC ослабляет составляющие поля E_0 внутри диэлектрика, причем составляющая, перпендикулярная стержню, ослабляется сильнее, так как связанные заряды на поверхностях AD и BC расположены близко друг к другу и их поле подобно однородному полю плоского конденсатора, в то время как заряды на поверхностях малой площади раздвинуты далеко друг от друга. Поэтому полное поле внутри диэлектрика не будет совпадать по направлению с полем E_0 . Следовательно, возникающие диполи будут ориентированы не вдоль E_0 , а вдоль некоторого направления OP , составляющего угол β с E_0 . (Это относится как к обычным, так и к дипольным молекулам.) В электрическом отношении поляризованный диэлектрик можно рассматривать как большой диполь, составляющий угол β с полем E_0 . В этом поле он будет поворачиваться до тех пор, пока не установится вдоль поля. Поле связанных зарядов является внутренней силой и не может вызвать поворота диэлектрика.

460. Вследствие поляризации заряды раздвинулись. Внутри шара с центром O' содержатся отрицательные заряды, а с центром O — положительные заряды. Объемная плотность зарядов $\rho = Nq$. Расстояние между центрами O' и O равно l . Напряженность в произвольной точке, находящейся в области перекрытия двух шаров, можно найти путем простого геометрического построения, приведенного на рис. 433. Из этого построения следует, что напряженность $E = \rho l / 3\epsilon_0$. Она постоянна и направлена против вектора p . Это

однородное поле создается, в сущности, отрицательными и положительными зарядами, находящимися вне области перекрытия. Так как $l \approx 10^{-8}$ см ($l \ll R$), то можно считать, что это поле

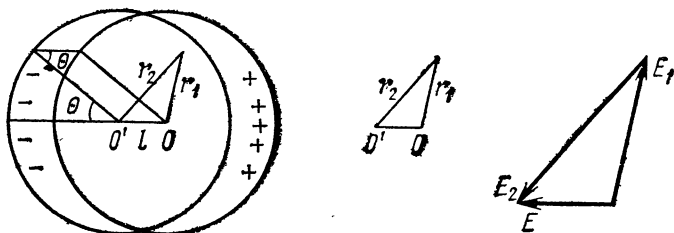


Рис. 433.

создается поверхностными зарядами, плотность которых равна $\sigma = Nql \cos \theta = Np \cos \theta$.

461. Нетрудно заметить, что диэлектрик будет поляризован однородно и дипольный момент p любой молекулы направлен вдоль внешнего поля. Результирующее поле внутри диэлектрика имеет напряженность $E' = E - Np/3\epsilon_0$. Так как $p = \alpha\epsilon_0 E'$, где α — коэффициент поляризуемости молекулы, то $p = \alpha\epsilon_0 E/(1 + N\alpha/3)$, $E' = E/(1 + \alpha N/3)$. Если учесть, что $\epsilon = 1 + N\alpha$, то окончательно для E' получаем выражение следующего вида: $E' = \frac{3}{2 + \epsilon} E$.

Поле вне шара, создаваемое поляризованным диэлектриком, эквивалентно полю двух точечных зарядов $-Q$ и $+Q$ ($Q = \frac{4}{3}\pi R^3 Nq$), помещенных в точках O' и O . Так как расстояние $O'O = l \ll R$ ($l \approx 10^{-8}$ см), то для вычисления полной напряженности в точках A , B , C и D можно воспользоваться ответом к задаче 420:

$$E_A = E_C = E + \frac{2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{4}{3} \pi R^3 Nql = \frac{3\epsilon}{\epsilon + 2} E,$$

$$E_B = E_D = E - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{4}{3} \pi R^3 Nql = \frac{3}{\epsilon + 2} E.$$

462. Поверхностная плотность зарядов изменяется на сфере по закону $\sigma = 3\epsilon_0 \cos \theta$, где θ — угол между радиусом-вектором и вектором $(-E)$.

$$463. \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\epsilon_0 E \cos \theta, \quad \sigma_0 = Np = 3\epsilon_0 E,$$

$$E_A = E_C = E + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{4}{3} \pi R^3 Np = 3E + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

$$E_B = E_D = E + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \frac{3\epsilon_0 E}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

$$464. E = -Np/2\epsilon_0.$$

$$465. \mathbf{E}' = \frac{2}{\varepsilon + 1} \mathbf{E},$$

$$E_A = E_C = E + \frac{R^2 N q}{2 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + \lambda} \right) = E + R^2 \frac{N q \lambda}{2 \varepsilon_0} \frac{1}{R(R + \lambda)} = E + \frac{N p}{2 \varepsilon_0},$$

$$N p = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E' = 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E,$$

$$E_A = E_C = E + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} E = \frac{2 \varepsilon}{\varepsilon + 1} E,$$

$$E_B = E_D = E - \frac{2 \pi R^2 N q \lambda}{4 \pi \varepsilon_0 R^2} = E - \frac{N p}{2 \varepsilon_0} = E - (\varepsilon - 1) \frac{E}{\varepsilon + 1} = \frac{2}{\varepsilon + 1} E.$$

$$466. \sigma = 2 \varepsilon_0 E \cos \theta + \kappa / 2 \pi R,$$

$$E_A = E_C = \kappa / 2 \pi \varepsilon_0 R + 2 E, \quad E_B = E_D = \kappa / 2 \pi \varepsilon_0 R.$$

467. Поле в диэлектрике создается зарядом q и поляризационным зарядом q' . Напряженность поля в произвольной точке A , находящейся вне шара на расстоянии r от его центра, равна

$$E = \left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{r^2} \right) \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}.$$

Напряженность E связана с напряженностью E_0 поля в вакууме, создаваемого зарядом q , соотношением

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} - \frac{q'}{r^2} \right) = \frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}.$$

Отсюда имеем $q' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q$.

468. Обозначим через q величину поляризационных зарядов. Применяя принцип суперпозиции, получаем при $r > r_2$:

$$E = \left[\left(\frac{Q}{r^2} \right) + \left(\frac{-q}{r^2} \right) + \frac{q}{r^2} \right] \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2},$$

$$\varphi = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} + \frac{q}{r} \right) \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r}.$$

При $r_1 < r < r_2$

$$E = \left(\frac{Q}{r^2} - \frac{q}{r^2} \right) \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}, \quad (1)$$

$$\varphi = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} + \frac{q}{r_2} \right) \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}.$$

Из (1) следует, что $q = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} Q$. Следовательно, в области $r_1 < r < r_2$

$$\varphi = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{\varepsilon r_2} \right].$$

При $r < r_1$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

$$\varphi = \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{Q(\epsilon-1)}{\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \right].$$

469. Напряженность поля в пространстве между сферами равна

$$E = \frac{Q}{\epsilon r^2 4\pi\epsilon_0} = \left(\frac{Q}{r^2} - \frac{q}{r^2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

откуда $q = Q(\epsilon-1)/\epsilon$. Следовательно, плотность

$$\sigma_1 = -\frac{Q(\epsilon-1)}{4\pi r_1^2 \epsilon}, \quad \sigma_2 = \frac{Q(\epsilon-1)}{4\pi r_2^2 \epsilon}.$$

Поле вне сфер отсутствует: $E=0$; $\varphi=0$.

Потенциал φ в области $r_1 < r < r_2$ равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} - \frac{q}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}.$$

Из последнего выражения легко найти разность потенциалов сфер:

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\epsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Следовательно, емкость, являющаяся коэффициентом пропорциональности между зарядом и разностью потенциалов обкладок конденсатора, равна

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

470. а) Емкость конденсатора будет равна емкости параллельно соединенных конденсаторов, из которых один заполнен диэлектриком, а другой нет, т. е.

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S l_1}{d l} + \frac{S(l-l_1)\epsilon_0}{d l} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \left\{ 1 + (\epsilon-1) \frac{l_1}{l} \right\}.$$

б) Электрическое поле между обкладками конденсатора не изменится, а следовательно, не изменится и емкость, если верхнюю поверхность диэлектрика покрыть бесконечно тонким слоем проводника. Поэтому искомая емкость будет равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов:

$$C = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1}, \quad \text{где } C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d_1} \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_1}.$$

Следовательно,

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_1 + \epsilon(d - d_1)}.$$

471. Плотность поляризационных зарядов σ равна

$$\sigma = 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{q}{S}.$$

472. Обозначим искомую полную напряженность поля в диэлектрике через E . Расстояние λ , на которое раздвинулись заряды в каждой молекуле, определяется из соотношения $k\lambda = qE$. Следовательно,

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{q\lambda n}{\varepsilon_0} = \frac{q^2 n}{\varepsilon_0 k} E, \quad E = E_0 - E_1 = E_0 - \frac{q^2 n}{\varepsilon_0 k} E.$$

Диэлектрическая проницаемость ε определяется из соотношения $E = E_0/\varepsilon$. Отсюда $\varepsilon = 1 + \frac{q^2}{\varepsilon_0 k} n$.

473. При раздвижении в молекуле зарядов $+q$, $-q$ на расстояние λ совершается работа $k\lambda^2/2$. Энергия, запасенная в диэлектрике, $W_1 = (k\lambda^2/2) N$, где $N = Sln = Vn$ — число молекул в объеме V диэлектрика, находящегося между пластинами конденсатора. Таким образом, $W_1 = n(k\lambda^2/2)V$. Так как $\lambda = qE/k$, то $W_1 = n(q^2 E^2/2k)V$. Выражая nq^2/k через ε ($\varepsilon - 1 = q^2 n/\varepsilon_0 k$), получаем для W_1 значение

$$W_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{2} E^2 V.$$

Полная энергия конденсатора равна

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2 V.$$

Эту полную энергию W можно представить в виде суммы чисто электростатической энергии $W_0 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V$ и энергии, запасенной в диэлектрике, $W_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{2} E^2 V$.

474. Сила, действующая на единицу площади диэлектрика, равна

$$p = - \frac{\varepsilon^2 - 1}{8\varepsilon_0 \varepsilon^2 S^2} (q_1 - q_2)^2.$$

475. Предположим для простоты рассуждений, что две параллельные металлические пластины, несущие заряды $+Q$ и $-Q$, помещены в жидкий диэлектрик. Напряженность электрического поля между пластинами $E = Q/\varepsilon_0 S$. Напряженность поля, создаваемая каждой пластиной, будет равна $E_1 = E_2 = Q/2\varepsilon_0 S$.

Определим силу, действующую со стороны, например, первой пластины на вторую. Для этого надо напряженность поля, создаваемого первой пластиной, умножить на величину заряда, находящегося на второй пластине. Таким образом, $F = Q^2/2\varepsilon_0 S$.

Предположим, что первая пластина закреплена, а вторая может очень медленно перемещаться (изменением механической энергии диэлектрика пренебрежем). Работа, которую может совершить электрическое поле при перемещении пластин до непосредственного соприкосновения, будет равна произведению силы F (сила F постоянна)

на величину перемещения d , т. е. $A = Fd = Q^2 d / 2\epsilon_0 \epsilon S$. Эта работа совершается за счет убыли электрической энергии конденсатора. Таким образом, электростатическая энергия будет равна

$$W = Q^2 d / 2\epsilon_0 \epsilon S = Q^2 / 2C, \text{ или } W = QU/2,$$

где U — разность потенциалов. Полученная формула справедлива для любых диэлектриков.

476. Энергия конденсатора в случае, когда диэлектрик втянут на расстояние x внутрь конденсатора, будет равна

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{1}{1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l}},$$

так как $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}$, а $Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U$ (см. задачу 470).

Если x увеличится на δ , то энергия уменьшится и будет равна

$$W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{1}{1 + (\epsilon - 1) \frac{x + \delta}{l}}.$$

Разность энергий

$$W_1 - W_2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} \frac{(\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}}{\left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x + \delta}{l} \right\} \left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}}$$

будет равна работе искомой силы F на пути δ . На этом пути значение силы, вообще говоря, изменяется, но если δ взять достаточно малым, то можно написать

$$W_1 - W_2 = F\delta.$$

Отсюда следует, что

$$F = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2dl} \frac{\epsilon - 1}{\left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}^2},$$

если пренебречь δ в знаменателе. Надо оговориться, что, в то время как при подсчете энергии мы считали, что поле внутри конденсатора однородно, и пренебрегли краевыми эффектами, для физического объяснения силы, действующей на диэлектрик, обязательно надо принять во внимание неоднородность поля у краев.

477. Энергия конденсатора в случае, когда диэлектрик втянулся на расстояние x внутрь конденсатора, будет равна

$$W_1 = \frac{1}{2} U^2 C = \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 S}{d} \left\{ 1 + (\epsilon - 1) \frac{x}{l} \right\}.$$

Если x увеличится на δ , то энергия конденсатора увеличится на

$$W_2 - W_1 = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}.$$

Заряд на обкладках конденсатора при перемещении диэлектрика на расстояние δ увеличится при этом на

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\epsilon_0 U S}{d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}.$$

Работа, совершаемая батареей при перемещении такого количества электричества, будет равна

$$A = (Q_2 - Q_1) U = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l}.$$

Эта работа частично идет на приращение электростатической энергии конденсатора, а частично — на втягивание диэлектрика. Обозначим, как и в предыдущей задаче, через F силу, с которой втягивается диэлектрик в конденсатор. Тогда на основании закона сохранения энергии имеем $A = W_2 - W_1 + F\delta$, т. е.

$$\frac{\epsilon_0 U^2 S}{d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l} = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2d} (\epsilon - 1) \frac{\delta}{l} + F\delta.$$

Отсюда

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{U^2 S}{dl} (\epsilon - 1).$$

В этом случае, как мы видим, сила постоянна и не зависит от x .

478. Жидкость между обкладками конденсатора (рис. 434) поднимается под действием силы

$$F = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2dl} (\epsilon - 1).$$

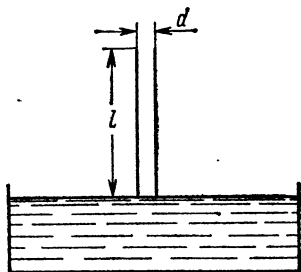


Рис. 434.

Когда жидкость достигнет максимальной высоты H , ее кинетическая энергия будет равна нулю, а потенциальная энергия увеличится на величину FH . Из соотношения

$$FH = Sd \frac{H}{l} \rho g \frac{H}{2}$$

находим H :

$$H = \epsilon_0 U^2 (\epsilon - 1) / d^2 \rho g.$$

В этом положении сила тяжести больше силы F , и вследствие этого жидкость начнет опускаться.

При высоте столба жидкости

$$h = H/2 = \epsilon_0 U^2 (\epsilon - 1) / 2d^2 \rho g$$

кинетическая энергия максимальна, а сила F равна силе тяжести. Жидкость между пластинами конденсатора, продолжая опускаться, достигнет уровня жидкости в сосуде. Уровень жидкости в сосуде вследствие больших размеров сосуда практически не перемещается. Таким образом, высота столба изменяется периодически в пределах от 0 до H .

Вследствие трения амплитуда колебаний жидкости будет уменьшаться, и уровень столба в конце концов установится на высоте

$$h = \epsilon_0 U^2 (\epsilon - 1) / 2d^2 \rho g.$$

Измерив высоту подъема h , можно определить диэлектрическую проницаемость жидкости ϵ .

479. Свободный заряд $+Q$ создает в диэлектрике однородное электрическое поле, напряженность которого $E_0 = Q/2\epsilon_0 S$. Вследствие этого слой диэлектрика толщины d поляризуется. На двух плоскостях, ограничивающих этот слой снизу и сверху, появляются поляризационные заряды. Плотность поляризационных зарядов σ_1 равна

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{Q}{2S}.$$

Заряды Q и отрицательный заряд $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{Q}{2}$ действуют на положительный поляризационный заряд, находящийся на поверхности жидкости, с силой F , направленной вверх:

$$F = \frac{Q^2}{8S\epsilon_0} \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2}.$$

Вследствие этого уровень жидкости над пластиной поднимается на высоту h :

$$h = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 \rho g S^2} \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2}.$$

§ 20. Постоянный электрический ток

480. Докажем сначала, что напряженность электрического поля во всех точках, лежащих в плоскости сечения OO' , направлена перпендикулярно этой плоскости.

Для доказательства возьмем произвольную точку в плоскости сечения и две малые площадки, произвольно, но симметрично расположенные на цилиндре относительно сечения OO' . Легко видеть, что результирующая напряженность поля, создаваемая зарядами на этих площадках, будет направлена вдоль оси цилиндра (рис. 435). Так как для каждого элемента найдется симметрично расположенный относительно плоскости сечения другой элемент, то из этого следует, что напряженность, создаваемая всеми элементами, будет параллельна оси цилиндра.

Покажем теперь, что напряженность будет одинакова во всех точках, которые отстоят от оси цилиндра на одно и то же расстояние. Пусть A и B — две такие точки (рис. 436). Напряженность поля внутри цилиндра не изменится, если, помимо имеющегося заряда, каждой единице площади поверхности цилиндра сообщить один и тот же дополнительный отрицательный заряд, чтобы плотность зарядов в точке C была равна нулю. Это очевидно из того факта, что поле внутри бесконечного, равномерно заряженного цилиндра равно нулю. В этом случае распределение плотности зарядов на

поверхности цилиндра (рис. 436) будет иметь тот же самый вид, что и на рис. 167. Следовательно, напряженность в точках A и B одинакова.

Остается показать, что напряженность поля в точках, отстоящих на разные расстояния от оси цилиндра, одинакова. Для доказательства рассмотрим контур $BKLD$ (рис. 437). Как известно, работа по замкнутому контуру в случае электростатического поля равна нулю.

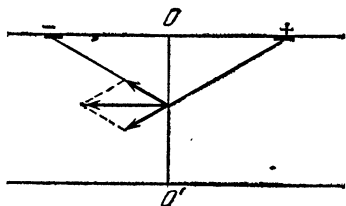


Рис. 435.

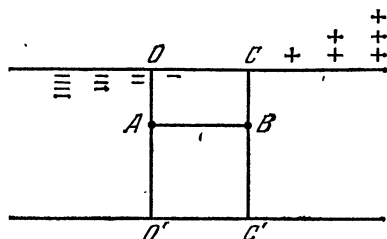


Рис. 436.

Работа на участках KL и DB равна нулю, поскольку напряженность поля перпендикулярна пути, работа на участке BK равняется $-E_B l$, а на участке LD равна $E_D l$ (по доказанному выше $E_B = E_K$, $E_D = E_L$). Следовательно, $-E_B l + E_D l = 0$, т. е. $E_B = E_D$.

Таким образом, доказано, что напряженность электрического поля внутри цилиндра будет одинакова во всех точках и эта напряженность направлена вдоль оси цилиндра. Заметим, что подобное распределение заряда на поверхности проводника возникает при прохождении по нему постоянного тока.

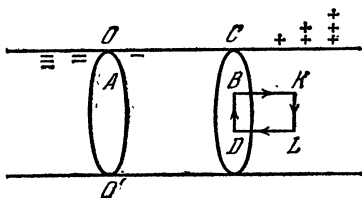


Рис. 437.

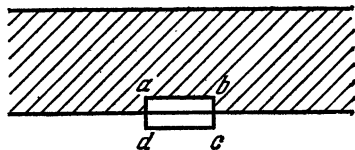


Рис. 438.

481. При прохождении по проводнику постоянного тока электрическое поле внутри проводника постоянно и направлено вдоль него. Работа электрического поля при перемещении заряда вдоль замкнутого контура $abcd$ (рис. 438) равна нулю. Участки ad и bc будем считать столь малыми, что работой на них можно пренебречь. Значит, работа вдоль ab равна работе вдоль dc . Поэтому тангенциальная составляющая напряженности поля вблизи поверхности проводника должна равняться напряженности поля внутри него.

482. Распределение силовых линий изображено на рис. 439. Увеличение наклона линий вблизи закругления объясняется тем, что тангенциальная составляющая напряженности поля у поверхности проводника постоянного сечения постоянна, а нормальная со-

ставляющая убывает по мере приближения к закруглению, так как разность потенциалов между соответствующими участками, лежащими на противоположных сторонах дуги, уменьшается.

483. При последовательном соединении сопротивление цепи

$$R = R_{01} + R_{02} + \alpha_1 R_{01} t + \alpha_2 R_{02} t.$$

С другой стороны, можно написать $R = R_0 (1 + \alpha' t)$, где $R_0 = R_{01} + R_{02}$, а α' — искомый температурный коэффициент. Отсюда

$$\alpha' = \frac{R_{01}\alpha_1 + R_{02}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

При параллельном соединении

$$R = \frac{R_{01}R_{02}(1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t)}{R_{01}(1 + \alpha_1 t) + R_{02}(1 + \alpha_2 t)} = R_0(1 + \alpha'' t),$$

где $R_0 = R_{01}R_{02}/(R_{01} + R_{02})$. Опуская члены, пропорциональные произведениям температурных коэффициентов, как малые, получим

$$\alpha'' = \frac{R_{02}\alpha_1 + R_{01}\alpha_2}{R_{01} + R_{02}}.$$

484. Точки A и C имеют одинаковые потенциалы, так как соединены проводом, сопротивлением которого можно пренебречь.

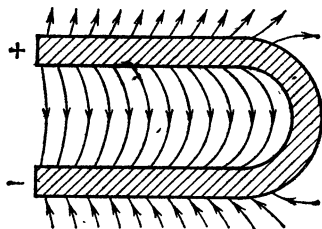


Рис. 439.

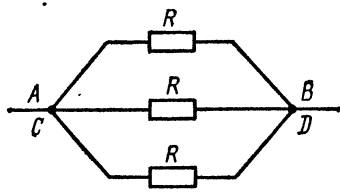


Рис. 440.

Точно так же одинаковы потенциалы точек B и D . Поэтому концы сопротивлений A, C и, соответственно, B, D можно считать соединенными вместе. Таким образом, сопротивления AB, CB и CD соединены параллельно. Соответствующая эквивалентная схема представлена на рис. 440. Полное сопротивление равно $R/3$.

485. По закону Джоуля — Ленца количество тепла при заданном U будет тем больше, чем меньше сопротивление. Минимальное сопротивление куска проволоки, который может быть включен в сеть с напряжением U , равно $r = U/I_0$. Длина этого куска $l = (L/R)r = LU/I_0R$. Если разрезать теперь проволоку на такие куски и включить их параллельно, то к каждому из участков будет приложено наибольшее возможное в схеме напряжение U и по каждому будет протекать наибольший возможный ток I_0 . Поэтому на каждом из участков будет выделяться максимальная тепловая мощность $q_0 = U^2/r = I_0^2 r = I_0 U$, а на всех участках — мощность $q = nq_0$, где n — наибольшее целое число кусков длиной l , которое можно получить из проволоки.

Остаток проволоки с длиной, меньшей l , если он имеется, должен быть отброшен, так как при параллельном включении через него пойдет ток больший, чем I_0 , и он перегорит, а при последовательном включении с каким-либо из других кусков получится кусок с сопротивлением, большим r , на котором выделится тепла меньше q_0 .

486. В силу симметрии точки D и C имеют одинаковый потенциал. По проводнику DC ток не течет; поэтому его можно удалить из схемы, не изменяя общего сопротивления цепи, которое после этого легко подсчитывается: $r = R/2$.

487. Вследствие симметрии очевидно, что ток в проводнике 1—7 равен току в проводнике 7—4, ток 2—7 равен току 7—3, ток 6—7 равен току 7—5 (рис. 170). Поэтому распределение токов и, следовательно, сопротивление шестиугольника не изменится, если отсоединить проводники 2—7, 7—3, 6—7 и 7—5 от центра (рис. 441). Сопротивление же этой схемы, которая эквивалентна исходной, легко вычислить. Сопротивление верхней части схемы равно $\frac{8}{3}R$. Таково же сопротивление нижней части.

Полное сопротивление R_x найдется из соотношения

$$1/R_x = 1/2R + 6/8R.$$

Отсюда $R_x = \frac{4}{5}R$.

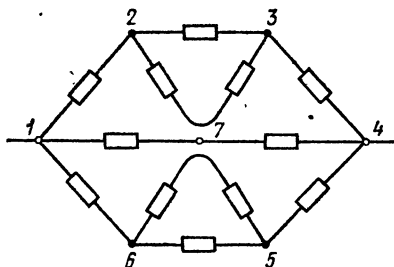


Рис. 441.

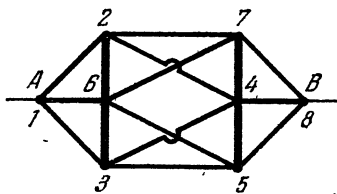


Рис. 442.

488. В силу симметрии очевидно, что потенциалы вершин куба 2, 3 и 6 равны. Точно так же равны потенциалы вершин 4, 5 и 7 (рис. 171). Поэтому вершины 2, 3, 6 и 4, 5, 7 мы можем соединить проводниками, лишенными сопротивления, — «шинами». Сопротивление куба от этого не изменится. Таким образом, шины соединены друг с другом шестью проводниками: 2—7, 2—4, 3—5, 3—4, 6—7 и 6—5. Сопротивление схемы (рис. 442) равно искомому сопротивлению куба:

$$R_x = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$

489. Сопротивление между точками A и B

$$R_{AB} = \frac{1}{2(r_a + r_b) + 1/r_c} = \frac{(r_a + r_b)r_c}{r_a + r_b + 2r_c},$$

где $r_a = \rho a/S$, $r_b = \rho b/S$, $r_c = \rho \sqrt{a^2 + b^2}/S$.

Сопротивление между точками C и D найдем, рассмотрев токи, текущие в ветвях цепи (рис. 443). Из соображений симметрии очевидно, что токи в проводниках DB и AC , а также AD и BC равны, соответственно, друг другу, причем ток в проводнике AD равен $i_1 + i_2$, так как сумма токов в узле A равна нулю. На участке DAC

$$(i_1 + i_2)r_a + i_1r_b = U_{DC},$$

и на участке $DABC$

$$2(i_1 + i_2)r_a + i_2r_c = U_{DC}.$$

Отсюда

$$i_1 = \frac{r_a + r_c}{2r_ar_b + r_ar_c + r_br_c} U_{DC}, \quad i_2 = \frac{r_b - r_a}{2r_ar_b + r_ar_c + r_br_c} U_{DC}.$$

Искомое сопротивление

$$R_{CD} = \frac{U_{CD}}{I} = \frac{U_{CD}}{2i_1 + i_2} = \frac{2r_ar_b + r_c(r_a + r_b)}{r_a + r_b + 2r_c}.$$

490. Если ток через гальванометр не идет, то потенциалы точек C и D одинаковы и ток I_1 через сопротивление R_x равен току через сопротивление R_0 , а ток I_2 вдоль реохорда AB одинаков во всех сечениях. По закону Ома

$$I_1 R_x = I_2 l_1 \rho / S, \quad I_1 R_0 = I_2 l_2 \rho / S,$$

где ρ — удельное сопротивление, а S — поперечное сечение реохорда. Отсюда $R_x/R_0 = l_1/l_2$.

491. Между точками C и D необходимо включить такое сопротивление r , чтобы сопротивление последней ячейки (рис. 444) было равно r . В этом случае последнюю ячейку можно будет заменить сопротивлением r , затем то же сделать с предпоследней ячейкой и т. д. Тогда общее сопротивление цепочки не будет зависеть от числа ячеек и будет равно r . Для r можно составить уравнение $(2R + r)R/(3R + r) = r$. Отсюда $r = R(\sqrt{3} - 1) \approx 0,73R$.

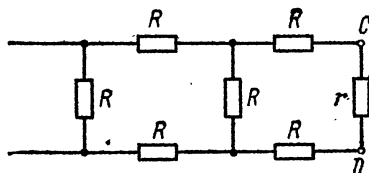


Рис. 444.

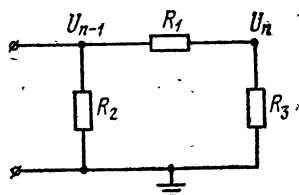


Рис. 445.

492. Последняя ячейка представляет собой делитель напряжения, уменьшающий потенциал n -й точки по сравнению с $(n-1)$ -й в k раз.

Следовательно, $U_n = \frac{U_{n-1}}{R_1 + R_3} R_3 = \frac{U_{n-1}}{k}$ или $R_1/R_3 = k - 1$ (рис. 445).

Соотношение $U_i = U_{i-1}/k$ должно выполняться для любой ячейки. Поэтому сопротивление всей последней ячейки, двух последних, трех последних и т. д. также должно равняться R_3 (см. задачу 491). Отсюда

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}, \quad R_2 = \frac{R_3(R_1 + R_3)}{R_1} = R_3 \frac{k}{k-1}.$$

Окончательно

$$R_1 : R_2 : R_3 = (k-1)^2 : k : (k-1).$$

493. Использовать только приборы, действие которых основано, например, на отклонении проводника с током в магнитном поле, нельзя. Угол, на который отклоняется стрелка в таком приборе, пропорционален силе тока, протекающего через прибор. Определение же разности потенциалов с помощью такого рода приборов, так же как и любых токовых приборов, основано на законе Ома: ток, протекающий через вольтметр, пропорционален приложенной разности потенциалов. Для проверки закона Ома, следовательно, необходим электростатический вольтметр, наряду с амперметром обычного типа.

494. Обозначим через q_1 и q_2 заряды на первом и втором конденсаторах к моменту времени t . q_1 и q_2 связаны соотношениями

$$q_1 + q_2 = Q, \quad q_1/C_1 = q_2/C_2.$$

Так как

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 + vt}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 - vt},$$

то

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{d_0 - vt}{d_0 + vt}.$$

Отсюда вытекает, что

$$q_1 = Q \frac{d_0 - vt}{2d_0}, \quad q_2 = Q \frac{d_0 + vt}{2d_0}.$$

Убыль заряда на первом конденсаторе равна увеличению заряда на втором конденсаторе. Сила тока $I = -\Delta q_1/\Delta t = \Delta q_2/\Delta t = Qv/2d_0$. Ток будет течь в направлении от положительно заряженной пластины первого конденсатора к положительно заряженной пластине второго конденсатора.

495. Силы притяжения, действующие между пластинами конденсаторов, равны соответственно

$$F_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} q_1 = \frac{Q^2 (d_0 - vt)^2}{8\varepsilon_0 S d_0^2}$$

для первого конденсатора и

$$F_2 = \frac{Q^2 (d_0 + vt)^2}{8\varepsilon_0 S d_0^2}$$

для второго конденсатора (см. задачу 494). Так как пластины первого конденсатора раздвигаются, силы электростатического поля

совершают отрицательную работу A_1 . Во втором конденсаторе эти силы совершают положительную работу A_2 . Работа ΔA , совершаемая полем при перемещении каждой из пластин на малое расстояние Δx , равна

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = (F_2 - F_1) \Delta x = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \frac{x}{d_0} \Delta x,$$

где $x = vt$. Таким образом, работа на малом участке пропорциональна перемещению x , как и в случае растяжения пружины. Следовательно, полная работа равна $A = Q^2 a^2 / 4\epsilon_0 S d_0$.

Работу A можно подсчитать и другим способом. Так как соприкосновение соединительных проводов равно нулю, количество выделившегося тепла также равно нулю. Поэтому изменение электростатической энергии двух конденсаторов будет равно работе электростатического поля.

К моменту времени t энергии первого и второго конденсаторов будут иметь соответственно значения

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S d_0^2} (d_0 - vt)^2 (d_0 + vt),$$

$$W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S d_0^2} (d_0 + vt)^2 (d_0 - vt).$$

Полная энергия

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 S d_0} (d_0^2 - a^2),$$

Следовательно, энергия за время t уменьшится на величину $Q^2 a^2 / 4\epsilon_0 S d_0$. Это изменение будет равно работе A электростатического поля.

496. При трении одежды о сиденье стула происходит электризация. Тело экспериментатора и сиденье образуют своеобразный конденсатор. Когда экспериментатор встает, емкость этого конденсатора резко уменьшается, и вследствие этого резко возрастает разность потенциалов между стулом (т. е. «землей») и телом экспериментатора. Очевидно, для этого необходимо, чтобы тело было хорошо изолировано от земли (резиновая подошва).

В момент касания стола разность потенциалов между рукой и землей выравнивается. Образуется электрический ток, ничтожная часть которого отвечает в гальванометр. Для отброса зайчика необходимо, чтобы сопротивление между одним из концов катушки гальванометра и землей было меньше, чем сопротивление между другим концом и землей.

Схематически цепь тока изображена на рис. 446. O — обмотка гальванометра, K — ключ, R условно изображает очень большое, но конечное сопротивление между одним из концов обмотки и землей.

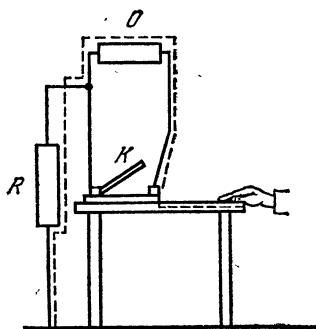


Рис. 446.

Отброс гальванометра наблюдается, несмотря на колоссальное сопротивление цепи, ввиду большой разности потенциалов, возникшей при уменьшении емкости.

497. Очевидно, имеется определенная асимметрия между проводниками, к которым подключены концы обмотки гальванометра. Это может быть, если сопротивление изоляции между одним из концов катушки и землей меньше, чем между землей и другим концом. Кроме того, нужно учесть, что сопротивление между проводниками, идущими от катушки гальванометра, несмотря на хорошую изоляцию, отлично от бесконечности.

Схема, поясняющая цепь тока, приведена на рис. 447. O — обмотка гальванометра, Π_1 и Π_2 — проводники, отходящие от концов обмотки, $З$ — земля, R_1 , R_2 и R_3 схематически изображают очень большие, но все же конечные сопротивления, возникающие из-за неидеальности изоляции; $R_3 \gg R_1 + R_2$. Пунктир изображает цепь тока в случае, если заряженное отрицательно тело поднесено к проводнику Π_2 . Если тело поднесено к проводнику Π_1 , то цепь изображается точками. Видно, что в обоих случаях ток через обмотку гальванометра течет в одну сторону.

Эта задача иллюстрирует наличие проводимости у всех тел. При работе с чувствительными приборами это обстоятельство становится существенным.

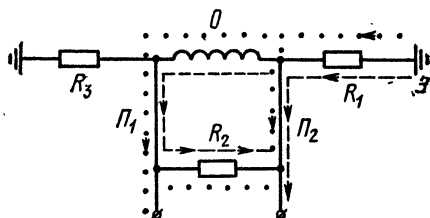


Рис. 447.

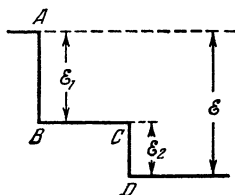


Рис. 448.

498. На рис. 448 точка A изображает потенциал положительного (медного) электрода, а точка D — отрицательного (цинкового). В растворе $ZnSO_4$ цинковый электрод заряжается отрицательно в результате выделения положительных ионов Zn , а медный в растворе $CuSO_4$ заряжается положительно за счет поступающих на него положительных ионов Cu . Потенциал электролита изображен линией BC . $AB = \mathcal{E}_1$ и $CD = \mathcal{E}_2$ изображают скачки потенциала на границах электрод — электролит.

Э. д. с., равная разности потенциалов на концах разомкнутого элемента, равна $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

499. Соответствующие распределения потенциала изображены на рис. 449, а, б, в, г.

$$a) I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2},$$

$$V_{BA} = V_B - V_A = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = -(\mathcal{E}_2 - Ir_2) = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} > 0.$$

б) $I = \mathcal{E}_1/r_1$, $V_{BA}=0$. Потенциалы проводников, соединяющих элементы, одинаковы, но ток не равен нулю.

$$в) I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}, \quad V_{BA} = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 + Ir_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

г) $I=0$, $V_{BA} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Разность потенциалов между проводниками существует, но ток не идет.

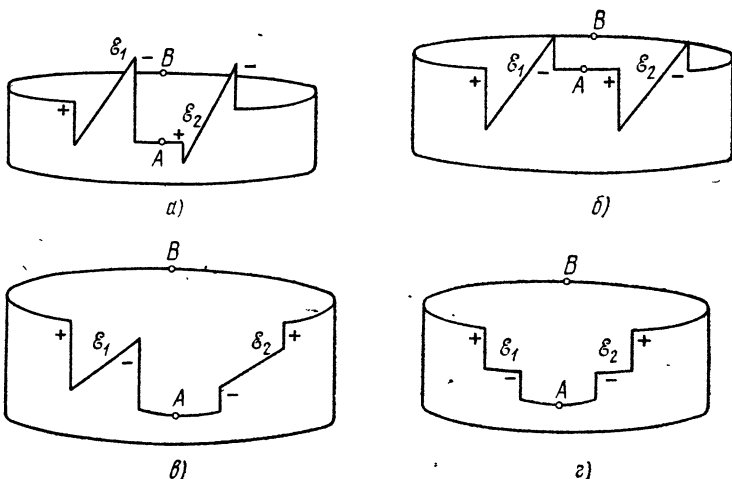


Рис. 449.

500. На каждый моль прореагировавших в элементе веществ выделяется энергия $W = 445 \cdot 10^3 - 235 \cdot 10^3 = 21 \cdot 10^4$ Дж. За счет этой энергии электрический ток совершает работу $A = Q\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — э.д.с. элемента, а Q — количество перенесенного электричества. Так как медь и цинк двухвалентны, заряды их ионов по величине равны удвоенному заряду электрона. Один моль вещества содержит $6,02 \cdot 10^{23}$ атомов. Следовательно, $Q = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}$ Кл. Отсюда $\mathcal{E} = W/Q \approx 1,05$ В.

501. Отношение сил токов, текущих через элементы, $I_1/I_2 = r_2/r_1$, так как э.д.с. элементов одинаковы. По закону Фарадея массы растворившегося цинка пропорциональны токам:

$$m_1/m_2 = I_1/I_2 = r_2/r_1 \approx 1,625.$$

502. Каждый атом цинка, переходя в раствор в виде иона Zn^{++} , отдает во внешнюю цепь два электрона, несущие заряд $q = 2e = -3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл. В то же время ионы меди Cu^{++} осаждаются на медной пластине в виде нейтральных атомов, вследствие чего концентрация раствора $CuSO_4$ падает. Для поддержания постоянной концентрации необходимо непрерывно растворять кристаллы $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ в количестве, компенсирующем уход ионов Cu^{++} и SO_4^{--} из раствора.

По условиям задачи через элемент прошел заряд $Q = 2880$ Кл. Это соответствует переходу в раствор $n = Q/q = 9 \cdot 10^{21}$ атомов цинка, что составляет около 0,98 г цинка. Соответственно из раствора выделится столько же атомов меди (около 0,95 г), и для восстановления концентрации раствора CuSO_4 придется растворить 3,73 г кристаллов медного купороса.

503. При растворении цинка положительные ионы Zn^{++} переходят в раствор, а освободившиеся электроны по проволоке переходят на графитовый слой и нейтрализуют положительные ионы меди в растворе CuSO_4 . Поэтому графит покрывается слоем меди. Явление может быть использовано для гальванопластики.

504. Изменение э.д.с. батареи зависит от соотношения между размерами электродов и размерами сосуда. Если два средних электрода почти равны по размерам сечению сосуда, э.д.с. батареи изменится незначительно. Если электроды невелики, э.д.с. уменьшится приблизительно в два раза.

505. С каждой из половин угольного стержня цинковый стержень образует замкнутый гальванический элемент. Внешним сопротивлением элемента служит сопротивление

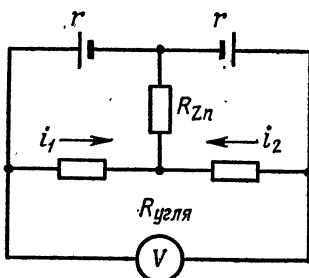


Рис. 450.

половины угольного стержня, сопротивление цинкового стержня и контакта цинк—уголь (см. эквивалентную схему на рис. 450).

Когда цинковый стержень стоит вертикально, токи i_1 и i_2 в обеих половинах угольного стержня равны и вольтметр покажет нуль. Если стержень наклонить, то внутреннее сопротивление одного из элементов уменьшится, а другого — увеличится. Токи i_1 и i_2 не будут равны друг другу, и между концами угольного стержня возникнет разность потенциалов, которую и покажет вольтметр.

506. Так как $r \ll R$, то поле внутри сферы практически отсутствует и тока на внутреннюю поверхность сферы нет. Следовательно, масса выделившейся меди

$$m = \frac{A}{n} \frac{4\pi R^2 j t}{F} \approx 1,86 \text{ г},$$

где A/n — электрохимический эквивалент меди, а F — число Фарадея.

507. Дело в том, что при электролизе происходит поляризация электродов и каждая ванна приобретает э.д.с., направленную против тока, идущего от конденсатора. Вследствие этого конденсатор не может разрядиться целиком. Чем больше мы возьмем ванн, тем больше суммарная э.д.с. поляризации и, следовательно, тем больший заряд останется на конденсаторе. Энергия гремучего газа будет всегда меньше энергии заряженного конденсатора.

508. При электролизе воды электроды поляризуются и возникает э.д.с. поляризации $\mathcal{E}_p$, направленная против э.д.с. батареи. Поэтому электролиз идет лишь в том случае, когда э.д.с. батареи больше $\mathcal{E}_p$. При прохождении через электролит заряда Q батарея совершает работу против э.д.с. поляризации: $A = \mathcal{E}_p Q$. За счет этой работы

происходит разложение воды с образованием гремучего газа. На основании закона сохранения энергии химическая энергия гремучего газа W , выделившегося при прохождении заряда Q , равна $\mathcal{E}_p Q$.

Согласно закону Фарадея выделение одного грамма водорода на катоде сопровождается прохождением количества электричества

$$Q = m \frac{n}{A} F = 96\,500 \text{ Кл.}$$

Следовательно, $\mathcal{E}_p = W/Q \approx 1,5 \text{ В.}$ Э.д.с. батареи должна превышать 1,5 В.

509. Определенная концентрация ионов есть результат динамического равновесия: количество ионов, возникающих вследствие электролитической диссоциации, равно убыли числа ионов вследствие обратного процесса — рекомбинации (ионы противоположных знаков, столкнувшись, могут образовать нейтральную молекулу). Вблизи электродов концентрация ионов падает, и это равновесие нарушается. Число ионов, возникших вследствие диссоциации, больше числа рекомбинировавших ионов. Именно этот процесс поставляет ионы в электролит. Процесс происходит вблизи электродов. Внутри электролита динамическое равновесие не нарушается.

510. За секунду к катоду прибывает и на нем выделяется $n_+ v_+ S$ положительных ионов (S — площадь катода). Одновременно удаляется $n_- v_- S$ отрицательных ионов. В процессе ухода отрицательных ионов динамическое равновесие между нейтральными молекулами электролита и ионами, на которые они распадаются, нарушается (см. задачу 509). Вновь возникает $n_- v_- S$ отрицательных и столько же положительных ионов. Положительные ионы выделяются также на катоде, и в результате количество положительных ионов, выделившихся на катоде в секунду, будет равно полному току.

511. Наибольший теоретически возможный коэффициент полезного действия термобатарей

$$\eta = \frac{\mathcal{E} q}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где Q — количество тепла, поглощаемое в единицу времени горячими спаями, q — протекающий в единицу времени по цепи заряд, T_1 и T_2 — абсолютные температуры спаев. По закону Фарадея масса выделившейся за секунду на катоде меди $m = \frac{A}{n} \frac{q}{F}$. Подставляя значение q

из первого уравнения, имеем

$$m = \frac{A Q}{n F \mathcal{E}} \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ г.}$$

512. Разность потенциалов между шариками должна равняться $\mathcal{E}$. Следовательно, $q_1/r_1 - q_2/r_2 = \mathcal{E}$, где q_1 и q_2 — заряды шариков. Согласно закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = 0$. Отсюда $q_1 = -q_2 = \mathcal{E} r_1 r_2 / (r_1 + r_2)$. По закону Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{E}^2 r_1^2 r_2^2}{R^2 (r_1 + r_2)^2} \approx 44 \cdot 10^{-9} \text{ Н.}$$

513. В результате перемещения пластин величина заряда на конденсаторе увеличится на

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \epsilon^2 \epsilon_0 S (1/d_2 - 1/d_1).$$

При этом батарея совершит работу

$$A = \epsilon \Delta Q = \epsilon^2 \epsilon_0 S (1/d_2 - 1/d_1).$$

Электростатическая энергия конденсатора увеличится на

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\epsilon Q_2^2}{2} - \frac{\epsilon Q_1^2}{2} = \frac{\epsilon^2 \epsilon_0 S}{2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right).$$

При сближении пластин была совершена механическая работа A_1 . На основании закона сохранения энергии $A = A_1 + \Delta W$. Следовательно,

$$A_1 = A - \Delta W = \frac{\epsilon^2 \epsilon_0 S}{2} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right).$$

За счет работы батареи произошло увеличение электростатической энергии конденсатора и была совершена механическая работа A_1 .

514. Работа сил электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю. Поэтому

$$\epsilon_1 - U_1 + \epsilon_2 - U_2 = 0.$$

Заряды на конденсаторах одинаковы, ибо сумма зарядов, находящихся как на верхнем, так и на нижнем проводниках, равна нулю. Следовательно, $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$. Отсюда

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 17,5 \cdot 10^3 \text{ В},$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 7,5 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

515. Не изменятся. При попеременном заземлении пластин будут происходить те же процессы, что и при отсутствии батарей. Единственное различие в том, что разность потенциалов между пластинами все время поддерживается постоянной.

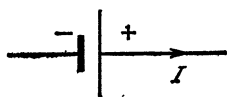


Рис. 451.

516. Если ток течет в направлении, указанном на рис. 451 (аккумулятор разряжается), то $V = \epsilon - IR$. Если же ток течет в противоположном направлении (аккумулятор заряжается), то $V = \epsilon + IR$ (см. ответ к задаче 499, в).

517. Внутреннее сопротивление гальванического элемента невелико, а электростатической машины — громадно. Это — сопротивление изоляторов (десятки и сотни миллионов ом).

518. Для двух элементов

$$I = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{r_1 + r_2 + R},$$

где ϵ и r — э.д.с. и внутреннее сопротивление элементов, R — внешнее сопротивление.

Для одного элемента (например, первого)

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

По условию задачи $I < I_1$, т. е.

$$\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} < \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Отсюда необходимо, чтобы

$$\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} < \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}.$$

519. На основании закона Ома

$$\begin{aligned} I_1 \left(2r \frac{l}{L} + \rho + R \right) &= \mathcal{E}, \\ I_2 \left(2r \frac{l}{L} + \rho + \frac{2r \left(1 - \frac{l}{L} \right) R}{2r \left(1 - \frac{l}{L} \right) + R} \right) &= \mathcal{E}, \\ I_3 \rho &= \mathcal{E}, \end{aligned}$$

где l — расстояние от батареи до места повреждения, а ρ — внутреннее сопротивление батарей. Из данной системы уравнений находим

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I_1} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{I_1} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} \right) \left(\frac{\mathcal{E}}{I_3} - \frac{\mathcal{E}}{I_2} + 2r \right)} = 4 \pm 3 \text{ Ом}.$$

Значение $R = 1 \text{ Ом}$ должно быть отброшено, так как при этом получается, что место повреждения удалено от батареи на 5,9 км. Действительно, при $R = 1 \text{ Ом}$

$$l = \frac{L\mathcal{E} - I_1 L \rho - I_1 L R}{2r I_1} = 5,9 \text{ км}.$$

Искомое сопротивление $R = 7 \text{ Ом}$.

520. На участке $A\mathcal{E}_2B$

$$V_A - V_B = \mathcal{E}_2 - I_1 r_2,$$

где $I_1 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2 + R)$, r_1 и r_2 — внутренние сопротивления элементов. Согласно условию задачи потенциал точки A ниже потенциала точки B . Поэтому $U_1 = V_B - V_A > 0$. Для другой схемы

$$U_2 = V'_B - V'_A = (\mathcal{E}_2 + I_2 r_2),$$

где $I_2 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2 + R)$. Решая данную систему уравнений, находим

$$U_2 = \frac{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 + U_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} = +1,86 \text{ В}.$$

521. В данном случае потенциал точки A при замкнутом ключе выше потенциала точки B , так как при разомкнутом ключе $V_B > V_A$.

Поэтому $\mathcal{E}_2 - I_1 r_2 = U_1$. Остальные уравнения имеют тот же вид, что и при решении задачи 520. Следовательно,

$$U_2 = \frac{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 - U_1(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \approx +1,57 \text{ В.}$$

522. Предполагая (произвольно), что токи направлены так, как указано на рис. 452, можно на основе закона Ома записать равенства:

$$U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1, \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2, \\ U_{AB} = I_3 R.$$

Так как ни в одной точке цепи не происходит накопления заряда,

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Решая эту систему уравнений, находим токи I_1 , I_2 и I_3 :

$$I_1 = 5/4 \text{ А}, \quad I_2 = 1/4 \text{ А}, \quad I_3 = 3/2 \text{ А}.$$

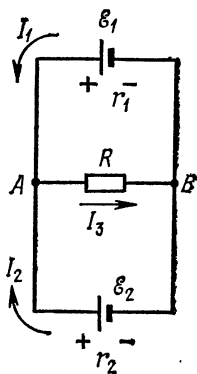


Рис. 452.

Получившиеся положительные значения токов говорят о правильности первоначально выбранных направлений токов.

523. Если $I_2 = 0$, то $I_1 = I_3$, $U_{AB} = \mathcal{E}_2$ и по-прежнему $U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1$. Отсюда $R = \mathcal{E}_2 r_1 / (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 1 \text{ Ом}$. Если ток I_2 направлен против $\mathcal{E}_2$, то система уравнений примет вид

$$U_{AB} = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1, \quad U_{AB} = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2, \\ U_{AB} = I_3 R, \quad I_1 = I_2 + I_3.$$

Отсюда

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 r_1 / R}{r_1 + r_2 + r_1 r_2 / R}.$$

Наше условие выполняется, если $I_2 > 0$. Следовательно, должно иметь место неравенство

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 \frac{r_1}{R} > 0, \quad \text{или} \quad R > \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 1 \text{ Ом}.$$

524. Возможны два способа соединения аккумуляторов. Можно внутри отдельных групп соединить аккумуляторы последовательно, а сами группы — параллельно или же, наоборот, внутри группы — параллельно, а сами группы — последовательно. Обозначая через N полное число аккумуляторов, а через n — число аккумуляторов внутри отдельной группы, в первом случае имеем:

$$I_1 = \frac{n\mathcal{E}_0}{R + rn^2/N} = \frac{\mathcal{E}_0}{R/n + rn/N},$$

так как э.д.с. одной группы равна $n\mathcal{E}_0$, сопротивление группы rn , а число параллельно соединенных групп N/n . I_1 достигает максимума, если $R/n + rn/N$ минимально.

Минимум выражения типа $ax + b/x$ может быть найден так.
Зависимость

$$y = ax + b/x \quad (1)$$

графически изображается кривой рис. 453, имеющей минимум в точке x_0 , в которой корни квадратного уравнения (1) совпадают. Поэтому $x_0 = \sqrt{b/a}$. Следовательно, $n = \sqrt{RN/r} = 4$ и

$$I_{1 \max} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \sqrt{\frac{N}{Rr}} = 20 \text{ A.}$$

Во втором случае

$$I_2 = \frac{(N/n) \mathcal{E}_0}{R + rN/n^2} = \frac{N \mathcal{E}_0}{nR + rN/n}.$$

Ток достигает максимума при $n = \sqrt{rN/R} = 6$. Следовательно,

$$I_{2 \max} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \sqrt{\frac{N}{Rr}} = I_{1 \max}.$$

Таким образом, получить ток, превышающий 20 А, невозможно.

525. Способ переделки ясен из рис. 454.

526. Мощность, потребляемая прибором в первый момент, во много раз больше номинальной, так как сопротивление холодной

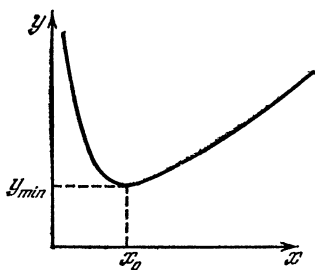


Рис. 453.

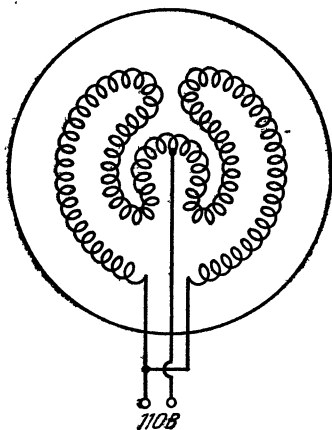


Рис. 454.

спирали мало. Соответственно велико падение напряжения на проводах, идущих от магистрали в квартиру. По мере нагревания спирали потребляемая мощность падает, приближаясь к номинальной.

527. Так как чайник во всех случаях включается в одну и ту же электрическую сеть, удобнее применять формулу для количества выделенного тепла в форме $Q = \frac{U^2}{R} t$. Отсюда $R = \frac{U^2}{Q} t$. Так как U и Q одни и те же для всех случаев, последнее равенство можно переписать в виде $R = \alpha t$, где $\alpha = U^2/Q$.

Обозначая через R_1 и R_2 сопротивления обмоток, имеем $R_1 = \alpha t_1$ и $R_2 = \alpha t_2$. При параллельном соединении обмоток

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\alpha^2 t_1 t_2}{\alpha (t_1 + t_2)} = \alpha t_a.$$

При последовательном соединении

$$R_b = R_1 + R_2 = \alpha (t_1 + t_2) = \alpha t_b.$$

Отсюда $t_a = t_1 t_2 / (t_1 + t_2)$, $t_b = t_1 + t_2$.

528. 1) $t_a \approx 57$ мин; 2) $t_b = 3$ мин 30 с (см. решение задачи 527).

529. При вычислении потерь тепла в проводах линии высокого напряжения по формуле $Q = \frac{U^2}{R} t$ величина U есть разность потенциалов на концах линии (падение напряжения на проводах), но не напряжение на вторичной обмотке повышающего трансформатора. Эта разность потенциалов невелика (в отличие от напряжения на обмотке трансформатора) и уменьшается с уменьшением текущего по линии тока.

530. Выделяющаяся на внешнем сопротивлении R мощность $W = IU$. В данном случае $U = \mathcal{E} - Ir$ и, следовательно, $I = (\mathcal{E} - U)/r$. Таким образом, $W = (\mathcal{E}U - U^2)/r$. Отсюда

$$U = \frac{\mathcal{E}}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{4} - Wr}.$$

$U_1 = 9$ В или $U_2 = 1$ В.

Неоднозначность результата связана с тем, что одна и та же мощность может быть выделена на различных внешних сопротивлениях R , причем каждому R соответствует свой ток:

при $U_1 = 9$ В, $I_1 = 1$ А

$$R_1 = W/I_1^2 = 9 \text{ Ом};$$

при $U_2 = 1$ В, $I_2 = 9$ А

$$R_2 = W/I_2^2 = 1/9 \text{ Ом}.$$

531. При параллельном соединении

$$N = N_1 + N_2.$$

При последовательном

$$N' = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{N_1 (N - N_1)}{N}.$$

В числителе последнего выражения стоит произведение двух величин, сумма которых постоянна (равна N). Это произведение максимально, когда рассматриваемые величины равны. Отсюда $N_1 = N - N_1$, т. е. $N_1 = N_2 = N/2$.

532. Полезная мощность (см. задачу 530) равна $W = (\mathcal{E}U - U^2)/r$. Обозначим $\mathcal{E}U - U^2 = x$. Нужно определить, при каком U величина x достигнет максимума.

Графически зависимость x от U изображена на рис. 455. Кривая имеет форму параболы, причем каждому x соответствуют два значе-

ния U . При данном x мы имеем квадратное уравнение относительно U . x достигает максимума, когда оба корня уравнения совпадают. Следовательно, при максимальном x дискриминант уравнения должен быть равен нулю:

$x_{\max} = \mathcal{E}^2/4$. Отсюда

$$U = \mathcal{E}/2, \quad W_{\max} = \mathcal{E}^2/4r = 25 \text{ Вт.}$$

При этом

$$I = \mathcal{E}/2r,$$

$$R = W_{\max}/I^2 = \mathcal{E}^2 4r^2/4r \mathcal{E}^2 = r,$$

т. е. внешнее сопротивление равно внутреннему.

533. По определению коэффициент полезного действия η есть отношение полезной мощности ко всей мощности, выделяемой аккумулятором: $\eta = IU/I\mathcal{E} = U/\mathcal{E}$, где $U = \mathcal{E}R/(R+r)$ — разность потенциалов на внешнем сопротивлении R . Следовательно, $\eta = R/(r+R)$.

В задаче 530 $\eta_1 = 90\%$; $\eta_2 = 10\%$. В задаче 532 $\eta = 50\%$; $\eta \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$, но при этом выделяемая полезная мощность $W = \mathcal{E}^2 R/(R+r)^2$ (как и полная) стремится к нулю (рис. 456).

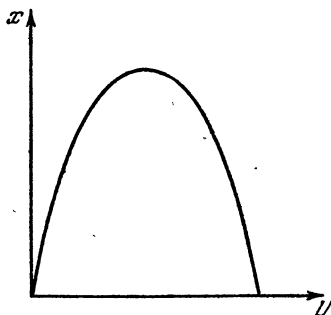
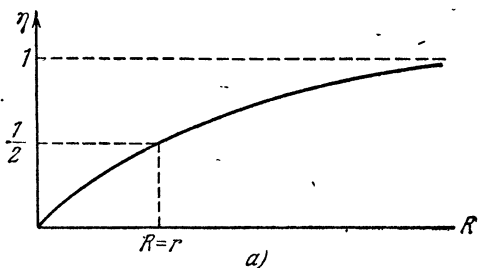
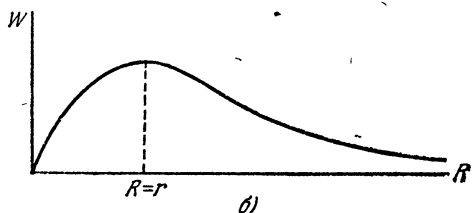


Рис. 455.



а)



б)

Рис. 456.

534. По закону Ома $U = \mathcal{E} + Ir$. Следовательно, $I = (U - \mathcal{E})/r$. Полезная мощность, расходуемая на зарядку аккумулятора, равна

$$W_1 = \mathcal{E}I = (U\mathcal{E} - \mathcal{E}^2)/r.$$

Количество тепла, выделенного в единицу времени,

$$W_2 = I^2 r = (U - \mathcal{E})^2 / r.$$

Полный расход мощности

$$W = IU = W_1 + W_2.$$

535. Полезная мощность

$$W_1 = \mathcal{E}(U - \mathcal{E})/r.$$

(см. задачу 534). Выделяемое в единицу времени тепло

$$W_2 = (U - \mathcal{E})^2/r.$$

Обычно при зарядке $U - \mathcal{E} \ll \mathcal{E}$. Следовательно, $W_1 \gg W_2$. На выделение тепла расходуется небольшая часть мощности зарядной станции.

536. За время t через поперечное сечение A проводника пройдут все те электроны, которые содержатся в объеме $S \cdot v \cdot t$ (рис. 457). Следовательно, сила тока $I = S \cdot v \cdot n \cdot e$ (e — заряд электрона). Отсюда $v = I/Sne \approx 10^{-3}$ мм/с.

537. Электроны в металле можно считать свободными. Перераспределение электронов внутри бруска закончится тогда, когда возникшее вследствие перераспределения электрическое поле будет в состоянии сообщать электронам ускорение a . Таким образом, искомая напряженность поля может быть найдена из соотношения $ma = eE$ (m и e — масса и заряд электрона). Отсюда $E = (m/e)a$.

Боковые поверхности бруска, перпендикулярные движению, будут заряжены: передняя поверхность положительно, а задняя — отрицательно. Плотность зарядов равна $\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 (m/e)a$.

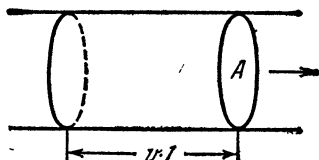


Рис. 457.

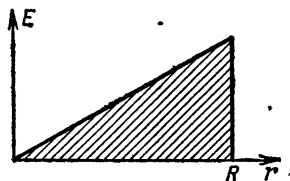


Рис. 458.

538. Свободные электроны вращаются вместе с цилиндром. Следовательно, электрон, находящийся на расстоянии r от оси, имеет ускорение $a = \omega^2 r$. Это ускорение может возникнуть только под действием электрического поля, направленного вдоль радиуса от центра цилиндра и равного $E = m\omega^2 r/e$. Здесь e и m — заряд и масса электрона.

Разность потенциалов $U = \frac{1}{2} \frac{m}{e} \omega^2 R^2$, так как средняя сила, действующая на единичный заряд при перемещении его от оси к поверхности цилиндра, равна $\frac{1}{2} \frac{m}{e} \omega^2 R$.

539. Во вращающемся диске происходит перераспределение зарядов и возникает электрическое поле, напряженность которого равна $E = m\omega^2 r/e$, где r — расстояние от центра диска, e — заряд электрона, m — его масса. График зависимости $E = f(r)$ изображен на рис. 458. Разность потенциалов ϕ между центром и краем диска численно равна площади заштрихованного на рис. 458 треугольника, т. е. $\phi = m\omega^2 R^2/2e$. Количество тепла Q , выделяющееся на сопротивлении

R_0 в единицу времени, равно

$$Q = I\varphi = \frac{I}{e} \frac{m\omega^2 R^2}{2}, \quad (1)$$

где I — ток, текущий в цепи (находится по закону Ома).

Вращение диска тормозят движущиеся от центра к периферии электроны. Пусть на расстоянии R имеется N ионов, расположенных на равных расстояниях друг от друга. При каждом соударении с ионом электрон приобретает количество движения p под действием импульса силы $F\tau$, действующей на электрон со стороны иона:

$$p = m\omega R/N = F\tau.$$

Момент количества движения, приобретаемый электроном при каждом соударении, равен

$$m\omega \frac{R}{N} \frac{R}{N} = F\tau \frac{R}{N}.$$

Если ток в цепи равен I , то момент количества движения, сообщаемый электронами всеми N ионами за единицу времени, равен

$$\frac{I}{e} \sum_{n=1}^N m\omega \frac{R^2}{N^2} n = M.$$

Сумму слева можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{I}{e} \frac{R^2}{2} m\omega \frac{N(N+1)}{N^2} = M.$$

При $N \rightarrow \infty$ получается

$$\frac{I}{e} m\omega \frac{R^2}{2} = M.$$

Работа, совершаемая всеми N ионами за единицу времени, есть

$$W = \frac{I}{e} m\omega^2 \frac{R^2}{2} = M\omega. \quad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) получаем $Q = W$.

§ 21. Электрический ток в газах и вакууме

540. Законы сохранения энергии и импульса в данном случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} + \mathcal{E}_0, \\ m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где v_1 — скорость первой частицы до соударения, u_1, u_2 — скорости первой и второй частиц соответственно после соударения. Решив

систему уравнений (1), получим

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2 \sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = v_1 \frac{m_1 \left[\sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} + 1 \right]}{m_1 + m_2}.$$

Нетрудно видеть, что после соударения u_1 не может быть больше u_2 ; $u_{1 \max} = u_2$ при выполнении следующего соотношения:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathcal{E}_{1 \min}.$$

Это соотношение определяет наибольшую долю энергии, которая может быть превращена в энергию ионизации. Другими словами, если для осуществления ионизации требуется энергия $\mathcal{E}_0$, то для этого требуется минимальная энергия первой частицы большая, чем $\mathcal{E}_0$.

Если первая частица много легче второй (например, электрон и атом), то

$$u_1 \approx -v_1 \sqrt{1 - \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1}, \quad u_2 \approx \frac{m_1}{m_2} v_1 [\sqrt{1 - \mathcal{E}_0/\mathcal{E}_1} + 1].$$

При этом $\mathcal{E}_{1 \min} \approx \mathcal{E}_0$, и если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{1 \min}$, то

$$u_1 \approx 0, \quad u_2 \approx \frac{m_1}{m_2} v_1 \ll v_1,$$

т. е. практически вся энергия первой частицы затрачивается на ионизацию, и обе частицы после сбударения почти покоятся.

В случае $m_1 \approx m_2$ (например, ион и атом) $\mathcal{E}_{1 \min} \approx 2\mathcal{E}_0$.

541. До начала разряда напряжение на счетчике равно э.д.с. источника $\mathcal{E}$. В момент разряда по цепи идет ток и напряжение между корпусом и нитью становится равным $U = \mathcal{E} - IR$. Сопротивление R очень велико, и падение напряжения IR настолько значительно, что разряд прекращается.

542. По закону Ома искомое падение напряжения $U = IR$, где I — сила тока в цепи. Ток одинаков во всех сечениях внутри конденсатора. На положительную пластину этот ток обусловлен только отрицательными ионами, а на отрицательную — только положительными. Через произвольное сечение внутри конденсатора проходит некоторая доля как положительных, так и отрицательных ионов.

$I = enSd$, где e — заряд электрона, а S — площадь пластин. Для плоского конденсатора $Sd = \frac{Cd^2}{\epsilon_0}$. Следовательно,

$$U = \frac{enCd^2}{\epsilon_0} R \approx 15,75 \cdot 10^{-12} \text{ В.}$$

543. Электроны, созданные внешним ионизатором, будут исчезать в результате рекомбинации. В единице объема за единицу вре-

мени рекомбинирует ионов $\Delta n_0' = \gamma n_0^2$. Кроме того, если между электродами ток I , то из единицы объема газа в единицу времени на электродах нейтрализуется число ионов, равное $\Delta n_0 = I/qSl$. Следовательно, чтобы число ионов в объеме не изменялось, внешний ионизатор должен создавать в единицу времени в каждой единице объема число ионов, равное

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^2 + I/qSl.$$

544. Условие $I/qSl \ll \gamma n_0^2$ означает, что числом ионов, исчезающих вследствие наличия тока, можно пренебречь по сравнению с числом ионов, исчезающих в результате рекомбинации.

Условие равновесия (см. задачу 543) запишется в виде $\Delta n_0 = \gamma n_0^2$. Из этого условия вытекает равенство $n_0 = \sqrt{\Delta n_0/\gamma}$, которое означает, что число ионов n_0 в единице объема газа постоянно.

В единицу времени к катоду подойдет $n_0 u_+ S$ положительных ионов. Одновременно с катода отойдет $n_0 u_- S$ отрицательных ионов. Следовательно, общее число положительных ионов, выделившихся на катоде в единицу времени, равно $n_0 (u_+ + u_-) S$, и столько же отрицательных ионов выделится в единицу времени на аноде.

Таким образом, плотность тока равна $j = (u_+ + u_-) n_0 q$, и так как $u_+ = b_+ E$, $u_- = b_- E$, то $j = n_0 (b_+ + b_-) q E$. Это равенство выражает закон Ома $j = \sigma E$, поскольку $\sigma = n_0 (b_+ + b_-) q = \text{const}$.

545. Условие $\gamma n_0^2 \ll I/qSl$ означает, что плотность тока $j = I/S$ настолько велика, что вся убыль ионов фактически определяется их нейтрализацией на электродах, а убыль в результате рекомбинации можно пренебречь. Условие равновесия принимает вид (см. задачу 543) $\Delta n_0 = I/qSl = j/qL$. Отсюда $j = j_n = \Delta n_0 q L$, и j_n не зависит от напряженности поля E , а следовательно, и от разности потенциалов между электродами. Эта плотность тока является максимально возможной при данных условиях (при данных Δn_0 , q и L) и называется плотностью тока насыщения. j_n тем больше, чем больше L . Этот вывод справедлив при условии, что ионизация производится во всем объеме между электродами и, следовательно, на участке тем большем, чем больше L .

546. График распределения напряжения U приведен на рис. 459. Электроны пробегают темное катодное пространство значительно

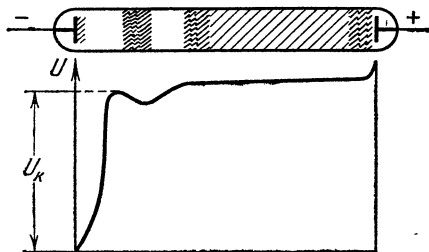


Рис. 459.

быстрее, чем положительные ионы. Вследствие этого в любой момент времени положительных ионов в темном катодном пространстве гораздо больше, чем электронов. Наибольшая концентрация поло-

жительных ионов приходится на начало тлеющего свечения. Наименьшая их концентрация имеет место около катода, где скорость их движения наибольшая. Около самого катода имеется слой отрицательного пространственного заряда, образуемый электронами, начинающими свое движение с катода с очень малыми скоростями.

547. 1) Если в трубке, в которой происходит тлеющий разряд, постепенно передвигать анод в направлении катода, то катодные части разряда остаются почти неизменными по своей длине и расположению. При передвижении анода лишь уменьшается длина положительного столба, пока этот столб не исчезнет совершенно. Затем при дальнейшем приближении анода к катоду укорачивается темное фарадеево пространство, а потом тлеющее свечение, причем положение резкой границы этого свечения со стороны катода остается неизменным. Наконец, когда расстояние от этой границы до анода становится очень малым, тлеющий разряд прекращается.

2) Если анод остается неподвижным, а передвигается катод по направлению к аноду, то все катодные части разряда, включая границу положительного столба, передвигаются вместе с катодом, оставаясь неизменными по своим размерам и взаимному расположению. Положительный столб и фарадеево темное пространство, а затем тлеющее свечение постепенно исчезают. Когда головка тлеющего свечения доходит до анода, разряд прекращается.

548. При охлаждении отрицательного уголя дуга погаснет, так как горение дуги обеспечивается сильной термозлектронной эмиссией с катода, которая прекращается при охлаждении. Охлаждение положительного уголя не будет влиять на работу дуги.

549. Заряд, накопленный лейденской банкой за 30 секунд работы электростатической машины, равен $q = It$. Следовательно, напряжение зажигания искрового разряда равно $U_3 = q/C = It/C = 3 \cdot 10^4$ В. Ток в разряде $I_p = q/\tau = It/\tau = 300$ А. Такой большой ток обуславливает сильное нагревание воздуха, в результате которого возникает звуковая волна (треск).

550. Обозначим заряд, сообщаемый лейденской банке электростатической машиной в единицу времени, через Q . Искра между шариками проскакивает тогда, когда напряжение между шариками разрядника достигает величины напряжения зажигания искрового разряда U_3 . Величина U_3 зависит от расстояния между шариками, от их радиусов и от свойств воздуха. Когда параллельно разряднику подключена одна лейденская банка, то $U_3 = Q\tau_0/C$. При двух параллельно соединенных банках $U_3 = Q\tau_1/2C$. При двух последовательно соединенных банках $U_3 = 2Q\tau_2/C$. Следовательно, $\tau_1 = 2\tau_0$, $\tau_2 = \tau_0/2$.

551. Один электрон-вольт равен $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

552. Не совпадает. Касательные к траектории дают направление скорости частицы, а касательные к силовой линии дают направление силы, действующей на частицу, и, следовательно, направление ускорения. Только в поле, силовые линии которого — прямые, траектория частицы совпадает с силовой линией, если начальная скорость этой частицы направлена по силовой линии.

553. Полная энергия электрона равна сумме кинетической и потенциальной энергий. При приближении к кольцу потенциальная энергия электрона в поле кольца уменьшается, и за счет этого растет кинетическая энергия. Пройдя сквозь кольцо, электрон удаляется от него. При этом потенциальная энергия электрона увеличивается, а скорость постепенно уменьшается до нуля.

554. Анода достигают электроны с энергиями от 80 электрон-вольт до 74 электрон-вольт, так как вдоль нити накала существует падение напряжения в 6 В. Энергия электронов у анода определяется только пройденной разностью потенциалов и не зависит от потенциала сетки. Потенциал сетки изменяет распределение скоростей электронов в промежуточных точках пути и влияет на число электронов, достигающих анода.

555. На основании закона Ома $\mathcal{E} = I_a R_a + U_a$ (рис. 460). Сила тока $I_a = AU_a + BU_a^2$.

Отсюда

$$I_a = \frac{\mathcal{E}}{R_a} + \frac{(AR_a + 1) - \sqrt{(AR_a + 1)^2 + 4\mathcal{E}BR_a}}{2BR_a} = 5 \text{ мА.}$$

Второй корень квадратного уравнения не имеет физического смысла, так как соответствует $U_a < 0$.

556. Система уравнений, определяющих токи i_1 и i_2 , имеет вид

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2, & i_1 &= A_1 U_a + B_1 U_a^2, \\ i_2 &= A_2 U_a + B_2 U_a^2, & U_a &= \mathcal{E} - iR. \end{aligned}$$

Отсюда

$$U_a = \frac{-(A_1 + A_2)R - 1 + \sqrt{(A_1 R + A_2 R + 1)^2 + 4\mathcal{E}(B_1 + B_2)R}}{2(B_1 + B_2)R} = 60 \text{ В.}$$

Отрицательное значение U_a отбрасываем, как не соответствующее смыслу задачи. Искомые токи равны

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{(B_1 + B_2)R} [B_1 \mathcal{E} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)RU_a - B_1 U_a] = 22,2 \text{ мА,} \\ i_2 &= \frac{1}{(B_1 + B_2)R} [B_2 \mathcal{E} + (A_2 B_1 - A_1 B_2)RU_a - B_2 U_a] = 37,8 \text{ мА.} \end{aligned}$$

557. При потенциале сетки $\mathcal{E}_2 = -6 \text{ В}$ ток, протекающий через лампу, $I_2 = U_2/R$, а при потенциале сетки $\mathcal{E}_1 = -3 \text{ В}$ $I_1 = U_1/R$. Следовательно, увеличение потенциала сетки на $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 3 \text{ В}$ вызывает увеличение анодного тока лампы на

$$I_1 - I_2 = (U_1 - U_2)/R = 3,5 \text{ мА.}$$

Так как сеточная характеристика лампы в рассматриваемой области предполагается линейной, то увеличение потенциала сетки относительно катода еще на 3 В (от -3 В до нуля при замкнутых коротко сетке и катоде) вызовет увеличение анодного тока еще на 3,5 мА. Тогда падение напряжения на сопротивлении R увеличится еще на $U_1 - U_2 = 35 \text{ В}$, т. е. достигнет $U_0' = U_1 + (U_1 - U_2) = 130 \text{ В}$, а разность потенциалов между анодом и катодом лампы будет равна

$$\mathcal{E} - U_0 = 120 \text{ В.}$$

558. Первый диод начинает проводить ток только при $U_a > 0$, т. е. при $V > \mathcal{E}_1$, второй — при $V > \mathcal{E}_2$ и третий — при $V > \mathcal{E}_3$.

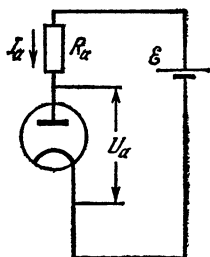


Рис. 460.

Поэтому график зависимости полного тока от напряжения представляет собой ломаную линию (рис. 461):

$$\begin{aligned}
 I &= 0 && \text{при } V \leq \mathcal{E}_1, \\
 I &= k(V - \mathcal{E}_1) && \text{при } \mathcal{E}_1 \leq V \leq \mathcal{E}_2, \\
 I &= k(V - \mathcal{E}_1) + k(V - \mathcal{E}_2) && \text{при } \mathcal{E}_2 \leq V \leq \mathcal{E}_3, \\
 I &= k(V - \mathcal{E}_1) + k(V - \mathcal{E}_2) + k(V - \mathcal{E}_3) && \text{при } \mathcal{E}_3 \leq V.
 \end{aligned}$$

Подобные схемы иногда используются в радиоустройствах для получения заданной функциональной зависимости тока от напряжения.

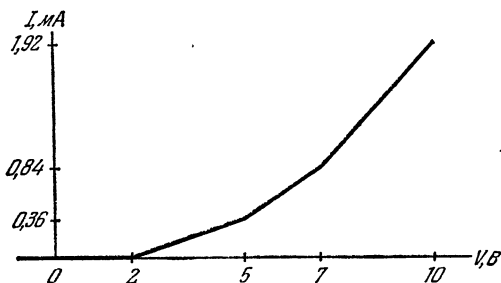
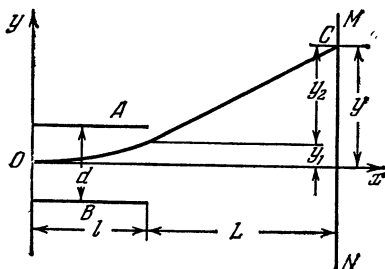


Рис. 461.

559. На рис. 462 A и B — управляющие пластины, MN — экран, OC — траектория электрона. Начало системы координат находится в точке O .

При движении между пластинами в направлении оси y электрон перемещается равноускоренно с ускорением $a = eU/md$, где U — разность потенциалов между A и B . Расстояние l вдоль оси x он проходит за время $t_1 = l/v_x$; v_x — горизонтальная составляющая скорости электрона, определяемая из условия $mv_x^2/2 = eU_0$. За время t_1 электрон отклоняется в направлении оси y на величину



$$y_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{eUl^2}{2dmv_x^2}.$$

Рис. 462.

Движение электрона вне пластин происходит с постоянной скоростью и длится в течение времени $t_2 = L/v_x$. Скорость вдоль y равна $v_y = at_1$. Отклонение в области вне пластин

$$y_2 = v_y t_2 = \frac{eUL}{dmv_x^2}.$$

Полное отклонение

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eUl}{dmv_x^2} \left(\frac{l}{2} + L \right) \approx \frac{eUlL}{dmv_x^2} = \frac{UlL}{2U_0d}.$$

Чувствительность

$$q = y/U = lL/2U_0d.$$

§ 22. Магнитное поле тока. Действие магнитного поля на ток и движущиеся заряды

560. В системе СИ имеем

$$[H] = I/L, \quad [I] = I, \quad [r] = L, \quad [j] = I/L,$$

где I и L — символы размерностей тока и длины. Отсюда следует: в случае (1) $H = C_1 I/r$; в случае (2) $H = C_2 j$, где C_1 и C_2 — некоторые константы. Теоретический расчет дает следующие точные формулы:

в случае (1) $H = I/2\pi r$; в случае (2) $H = j/2$.

561. Ток, протекающий по трубе, можно рассматривать как сумму множества одинаковых прямолинейных токов, равномерно распределенных по поверхности трубы. Напряженность магнитного поля в любой точке пространства можно представить как сумму напряженностей полей, создаваемых этими токами.

На рис. 463 изображено поперечное сечение трубы, вдоль которой проходит ток. Сравним напряженности магнитных полей H_1 и H_2 , создаваемых в точке A линейными токами I_1 и I_2 , проходящими через малые дуги S_1 и S_2 . Длины дуг равны $S_1 = \alpha R_1 / \cos \varphi_1$ и $S_2 = \alpha R_2 / \cos \varphi_2$, где R_1 и R_2 — расстояния до точки A . Но, как видно из чертежа, $\varphi_1 = \varphi_2$. Следовательно, $S_1/S_2 = R_1/R_2$. Ток по трубе распределен равномерно, поэтому $I_1/I_2 = S_1/S_2$, откуда $I_1/R_1 = I_2/R_2$.

Напряженности магнитных полей, создаваемых в точке A токами I_1 и I_2 , пропорциональны этим токам и обратно пропорциональны соответствующим расстояниям. Следовательно,

$$H_1 = k I_1 / R_1 = k I_2 / R_2 = H_2,$$

причем H_1 и H_2 направлены в противоположные стороны. Так как для каждого элемента поперечного сечения трубы можно подобрать соответствующий элемент, полностью компенсирующий магнитное поле первого элемента в точке A , то результирующее магнитное поле

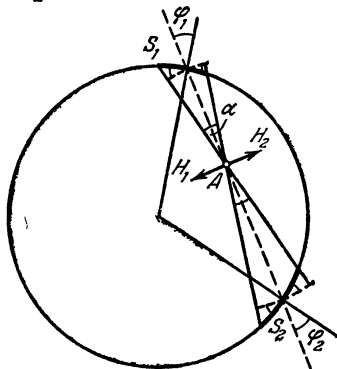


Рис. 463.

тока, протекающего по трубе, в любой точке внутри трубы будет иметь напряженность, равную нулю.

562. Проводник с полостью эквивалентен сплошному проводнику, по которому течет ток плотности j , а по объему, соответствующему полости, кроме того, течет ток той же плотности в обратном направлении. Суммарный ток в указанном объеме будет равен нулю, а это соответствует наличию полости в сплошном проводнике.

Поле, созданное током плотности j в произвольной точке A полости, равно $B_1 = k \cdot 2\pi j R$ (рис. 464). Здесь R — расстояние от оси проводника до точки A . (Предполагается, что ток течет к нам.) В той же точке ток, текущий по объему, соответствующему полости, в обратном направлении, создает поле $B_2 = k \cdot 2\pi j r$. Как видно из рис. 464, полная индукция

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \alpha}.$$

Очевидно,

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}.$$

Отсюда индукция $B = k \cdot 2\pi j d$ одинакова для всех точек полости.

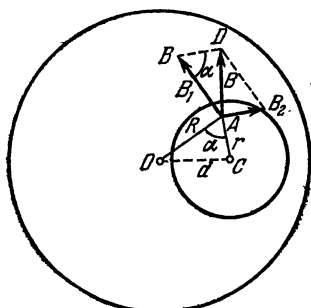


Рис. 464.

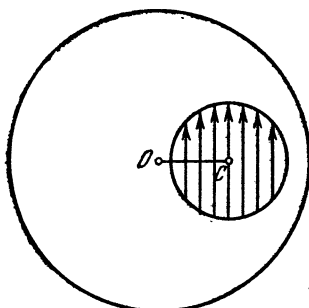


Рис. 465.

563. $\triangle AOC \sim \triangle BAD$ (рис. 464), так как эти треугольники имеют по одному равному углу, а стороны, заключающие эти углы, пропорциональны. Значит, $\angle AOC = \angle BAD$. Но $R \perp B_1$, и, следовательно, $B \perp d$. Индукция магнитного поля в любой точке полости перпендикулярна линии, соединяющей центры проводника и полости. Соответствующее распределение линий изображено на рис. 465.

564. Любой элемент кругового контура Δl находится на одном и том же расстоянии R от центра. Кроме того, для любого элемента Δl радиус-вектор R перпендикулярен к Δl , т. е. $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$. Таким образом, индукция магнитного поля ΔB , создаваемого в центре круга элементом Δl , равна $\Delta B = k l \Delta l / R^2$.

Индукция ΔB направлена перпендикулярно к плоскости круга, и так как все элементы Δl создают в центре одинаково направленные ΔB , то суммарная индукция магнитного поля выразится суммой

$$B = \sum \Delta B = \sum k \frac{l \Delta l}{R^2} = k \frac{l}{R^2} \sum \Delta l.$$

Учтя, что $\sum \Delta l = 2\pi R$, получаем $B = k 2\pi l / R$.

565. Определим индукцию магнитного поля в точке A , отстоящей на расстояние d от плоскости контура (рис. 466). Расстояние элементов Δl от точки A обозначим через r . Рассмотрим индукции ΔB_1 и ΔB_2 , создаваемые двумя элементами контура Δl_1 и Δl_2 , находящимися на противоположных концах диаметра. Так как угол α

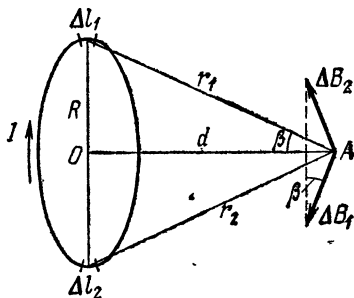


Рис. 466.

между r и Δl равен $\pi/2$ (как угол между образующей конуса и элементом окружности его основания), то (см. задачу 564)

$$\Delta B_1 = kI \Delta l_1 / r_1^2, \quad \Delta B_2 = kI \Delta l_2 / r_2^2.$$

Выбрав $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l$ и замечая, что $r_1 = r_2$, получим

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = kI \Delta l / r^2.$$

Геометрическая сумма ΔB векторов ΔB_1 и ΔB_2 будет направлена вдоль оси кругового тока и численно равна сумме проекций ΔB_1 и ΔB_2 на ось OA :

$$\Delta B = \Delta B_1 \sin \beta + \Delta B_2 \sin \beta = 2k \frac{I \Delta l}{r^2} \sin \beta.$$

Поскольку $\sin \beta = R/r$, то

$$\Delta B = k \frac{2I \Delta l}{r^3} R.$$

Разбивая весь круговой контур на соответствующие пары элементов Δl , получим, что результирующая индукция магнитного поля направлена вдоль оси кругового тока и численно равна сумме

$$B = \sum \Delta B = \sum k \frac{2I \Delta l R}{r^3} = k \frac{IR}{r^3} 2 \sum \Delta l.$$

Поскольку $2 \sum \Delta l = 2\pi R$, то

$$B = k \frac{IR}{r^3} 2\pi R = k \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}.$$

566. Проводник BC не создает поля в точке M . Согласно данному в примечании к задаче 564 правилу магнитное поле от любых элементов проводника BC должно быть перпендикулярно линии BM . Поэтому наличие отличного от нуля поля в M противоречило бы симметрии задачи, ибо все направления, перпендикулярные BM ,

равноправны. Так как напряженность поля пропорциональна силе тока, то до присоединения провода $H_1 = kI$. Поля от проводников AB и BD складываются. Следовательно, после присоединения проводника BD

$$H_2 = kI + kI/2.$$

Отсюда $H_2/H_1 = 3/2$.

567. В произвольной точке линии AB любой малый элемент тока проводника ACB создает магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа (см. задачу 566). Симметричный ему элемент проводника ADB создает такое же поле, но направленное в противоположную сторону. Поле от двух любых симметрично расположенных элементов поэтому будет равно нулю. Следовательно, поле в произвольной точке AB , созданное всем проводником, равно нулю, так как прямолинейные участки проводника также не создают поля на AB .

568. 1) Токи I и i текут в одну сторону. Сила взаимного притяжения между шиной и проводом при расстоянии x между ними равна

$$F = \frac{\mu_0 I i}{2\pi x} l.$$

Равнодействующая силы тяжести и сил упругости пружин направлена вниз и равна $f = 2k(h - x)$. В положении равновесия $F = f$. Отсюда получаем квадратное уравнение относительно x . Решение уравнения дает

$$x_1 = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}} \quad (\text{устойчивое равновесие});$$

$$x_2 = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}} \quad (\text{неустойчивое равновесие}).$$

Если $h^2/4 < \mu_0 I i l / 4\pi k$, т. е. $k < \mu_0 I i l / \pi h^2$, провод притянется к шине.

2) Токи I и i текут в противоположных направлениях. Провод отталкивается и будет в устойчивом равновесии на расстоянии

$$x = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\mu_0 I i l}{4\pi k}}.$$

569. Силы, действующие на стороны AB и DC , равны по величине и противоположны по направлению, их сумма равна нулю. Сила F_1 , действующая со стороны тока I на AD , равна

$$F_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi x} a.$$

Сила F_2 , действующая на BC , равна

$$F_2 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi (x + h)} a.$$

Силы F_1 и F_2 направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, причем $F_1 > F_2$. Следовательно, контур будет притягиваться к проводу с силой

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 I I_1 a h}{2\pi x (x + h)}.$$

570. Обозначим длину стороны квадрата через l . Момент сил магнитного поля, выводящий рамку из вертикального положения, равен

$$M = BIl^2 \cos \alpha.$$

На рамку, отклоненную от вертикали на угол α , действует, кроме того, момент сил тяжести, стремящийся вернуть рамку в вертикальное положение. Этот момент равен

$$M' = 2\rho gSl^2 \sin \alpha.$$

Условие равновесия рамки:

$$M = M', \quad BIl^2 \cos \alpha = 2\rho gSl^2 \sin \alpha.$$

Отсюда находим индукцию магнитного поля: $B = \frac{2\rho gS}{I} \tan \alpha$.

• 571. Магнитный момент M , действующий на короткую катушку со стороны поля соленоида, равен $M = INSB$, где $B = \mu_0 n I$. Из условия равновесия весов $M = PL$ находим $I = \sqrt{\frac{PL}{\mu_0 n NS}}$.

572. Под влиянием магнитного поля кольцо повернется таким образом, что силовые линии поля станут перпендикулярными плоскости кольца и будут образовывать с направлением тока правый винт. При этом натяжение кольца станет максимальным. Применяя метод, использованный при решении задачи 415, получим $F = BIR$.

573. На элемент кольца Δl действует сила $\Delta F = BI \Delta l$ (рис. 467). Разложим ее на составляющие ΔF_1 и Δf ; ΔF_1 лежит в плоскости кольца, а $\Delta f = \Delta F \sin \alpha$ нормальна к плоскости кольца. Равнодействующая сил ΔF_1 , действующих на отдельные элементы кольца, равна

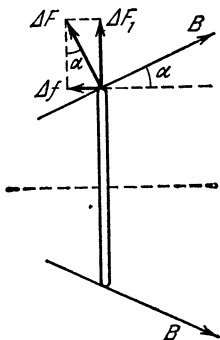


Рис. 467.

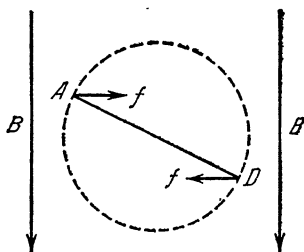


Рис. 468.

нулю. Эти силы только растягивают кольцо. Полная сила f , действующая на кольцо, равна сумме сил Δf :

$$f = \sum_i BI \sin \alpha \cdot \Delta l_i = BI 2\pi R \sin \alpha.$$

574. Силы, действующие на стороны BC и AD , перпендикулярны перемещению этих сторон, поэтому эти силы не совершают работы. Силы, действующие на стороны AB и CD , постоянны, составляют

прямой угол с направлением поля и численно равны $f = B/a$ (рис. 468). Искомая работа будет равна удвоенному произведению силы на перемещение стороны AB или CD в направлении силы. Это перемещение при повороте контура на 180° равно b . Следовательно, $A = 2BIab$.

575. Разложим скорость электрона на составляющие: $v_{\parallel}$ — параллельную B и $v_{\perp}$ — перпендикулярную B (рис. 469). $v_{\parallel}$ не меняется ни по величине, ни по направлению, так как сила Лоренца не действует на частицу, имеющую скорость вдоль поля. $v_{\perp}$ меняется по направлению, так как за счет этой составляющей на электрон действует сила Лоренца, постоянная по величине и перпендикулярная скорости $v_{\perp}$. Поэтому ускорение электрона тоже постоянно по величине и перпендикулярно скорости $v_{\perp}$. Но движение с постоянной скоростью и постоянным ускорением, перпендикулярным этой скорости, есть равномерное движение по окружности.

Таким образом, на равномерное поступательное движение вдоль B накладывается вращение по окружности в плоскости, перпендикулярной B . В результате возникает движение по винтовой линии с шагом $h = v_{\parallel}\tau$, где τ — время одного оборота электрона по окружности, радиус которой, как легко найти, равен $R = mv \sin \alpha / Be$. Так как $\tau = 2\pi R / v_{\perp} = 2\pi m / Be$, то $h = (2\pi m / Be) v \cos \alpha$.

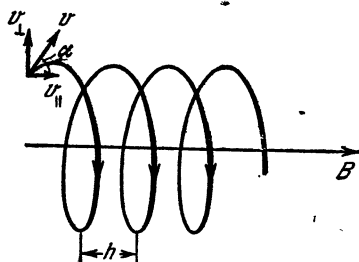


Рис. 469.

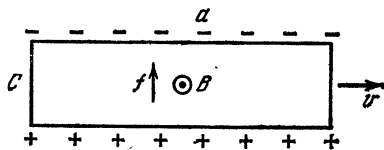


Рис. 470.

576. Вследствие действия силы Лоренца электроны будут перемещаться к краю ленты. Поэтому один край ленты приобретет отрицательный заряд, а другой — положительный; внутри ленты возникнет дополнительное электрическое поле, напряженность E которого направлена перпендикулярно току. Перемещение электронов продолжится до тех пор, пока сила Лоренца не будет уравновешена силой, действующей на электрон со стороны электрического поля: $eE = Bev$. Отсюда $E = Bv$. Разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = Ea = Bva$, или, так как $I = nevS$, $\varphi_A - \varphi_B = B a I / neS$.

577. Сила Лоренца действует как на свободные электроны, так и на положительные ионы, находящиеся в узлах кристаллической решетки, поскольку и те и другие движутся в магнитном поле. Сила f , действующая на свободные электроны, согласно правилу левой руки будет направлена так, как это показано на рис. 470. Электроны относительно решетки смещаются, и одна боковая сторона параллелепипеда заряжается отрицательным электричеством, другая — положительным. В бруске возникает электрическое поле, и, когда напря-

женность этого поля будет удовлетворять соотношению $eE = Bev$, перемещение электронов относительно решетки прекратится. Искомая напряженность $E = Bv$. Плотность зарядов σ находим из соотношения $\sigma/e_0 = E$. Следовательно, $\sigma = Bve_0$.

578. Для того чтобы электростатическое поле не возникало, электроны при вращении цилиндра не должны перемещаться относительно кристаллической решетки. Это перемещение будет отсутствовать, если действующая на электроны сила Лоренца равна $m\omega^2 r$, т. е. $m\omega^2 r = Bev$. Так как $v = \omega r$, то $B = m\omega/e$. Поле должно быть направлено в сторону поступательного перемещения буравчика, рукоятка которого вращается в том же направлении, что и цилиндр.

579. $E = \frac{m\omega^2 r}{e} \mp \omega r B$. Здесь заряд электрона равен $(-e)$. E положительно, если направлено от оси цилиндра. Если направление B и направление вращения цилиндра составляют правый винт, то надо брать знак минус, в противном случае — знак плюс.

580. Так как ионы проходят скрещенные поля без отклонения, то $Ee - Bev = 0$, откуда $v = E/B = 5000$ м/с. В дальнейшем каждый ион будет двигаться по окружности диаметра $2R = 2mv/B'e$, где m — масса иона. Следовательно, искомое расстояние равно $\Delta(2R) = \frac{2\Delta m}{e} \frac{v}{B'}$. Так как $\Delta m = 2$ атомные единицы массы $= 2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $v = 5000$ м/с, $B' = 0,09$ Н/(А·м), то

$$\Delta(2R) = \frac{2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 5000}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,09} = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,15 \text{ мм.}$$

§ 23. Электромагнитная индукция. Переменный ток

581. 1,07 милливольт; более высокий потенциал — на западном крыле. На все элементарные заряды самолета действует сила Лоренца. Эта сила вызовет движение электронов проводимости с запада на восток. Движение электронов прекратится, когда работа силы Лоренца станет равна работе сил электрического поля, создаваемого перемещенными электронами, т. е. когда будет выполнено условие

$$U = -vBl \quad (1)$$

(знак минус означает, что в направлении движения электронов потенциал понижается), где l — длина крыльев, B — индукция магнитного поля, v — скорость движения самолета, U — разность потенциалов между концами крыльев. Заметим, что равенство (1) эквивалентно соотношению $U = -\Delta\Phi/\Delta t$, ибо $vl = \Delta S/\Delta t$ — площадь, очерченная крыльями самолета за единицу времени, и при $B = \text{const}$

$$Bvl = B \Delta S/\Delta t = \Delta\Phi/\Delta t$$

есть величина потока магнитной индукции, пересеченного крыльями самолета за единицу времени.

582. Электроны проводимости проводника AB движутся со скоростью v , находясь в магнитном поле, следовательно, на них действует сила Лоренца, направленная вдоль проводника от точки B к точке A . Сила Лоренца, приходящаяся на единицу заряда, в данном случае, поскольку $v \perp B$, равна $F = Bv$. Электродвижущая сила $\mathcal{E}$, по определению, численно равна работе, совершаемой над

единичным положительным зарядом при движении его по замкнутому контуру. Так как сила Лоренца действует только на участке AB , то $\mathcal{E} = Bvl$. В цепи возникает ток

$$I = \mathcal{E}/(r + R) = vBl/(R + r).$$

Легко убедиться в том, что механическая работа, совершаемая внешними силами, превращается полностью в джоулево тепло. Электрическое поле в цепи имеет электростатическую природу, т. е. источником этого поля являются поверхностные заряды. Для того чтобы определить разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, применим закон Ома к участку цепи AB :

$$\mathcal{E} + \varphi_A - \varphi_B = Ir, \quad \varphi_A - \varphi_B = -vBl R/(R + r).$$

Следовательно, $\varphi_A < \varphi_B$. Напряженность E электростатического поля в подвижном проводнике равна

$$E = (\varphi_B - \varphi_A)/l = BvR/(R + r)$$

и направлена от B к A .

583. Пусть скорость движения проводника в какой-то момент времени равна v . Тогда э. д. с. в этот же момент времени будет равна $\mathcal{E} = Blv$, а сила тока $I = Blv/R$. Вследствие действия магнитного поля на проводник с током появится сила f , препятствующая свободному падению проводника: $f = B^2 l^2 v/R$. Следовательно, в рассматриваемый момент времени ускорение определится из соотношения

$$ma = mg - f = mg - B^2 l^2 v/R.$$

Легко видеть, что ускорение a по мере увеличения скорости будет уменьшаться, и в момент, когда наступит равенство сил $f = mg$, ускорение станет равным нулю. Проводник, начиная с этого момента, будет двигаться с постоянной скоростью v_k , равной $v_k = mgR/B^2 l^2$.

584. Э. д. с. индукции, возникающая в проводнике, $\mathcal{E} = Blv$. Заряд на обкладках конденсатора находится из соотношения $Q = \mathcal{E}C = BlvC$. Текущий в цепи ток $I = \Delta Q/\Delta t = B l C \Delta v/\Delta t = B l C a$, где a — искомое ускорение. Вследствие взаимодействия этого тока с магнитным полем появится сила F_1 , действующая на подвижный проводник. На основании правила Ленца эта сила будет направлена в сторону, противоположную силе F . По величине $F_1 = B l I = B^2 l^2 C a$. Искомое ускорение может быть найдено из соотношения $ma = F - F_1$. Отсюда $a = F/(m + B^2 l^2 C)$ есть величина постоянная. Работа силы F на пути S пойдет на приращение кинетической энергии проводника и на увеличение электростатической энергии конденсатора.

585. При изменении магнитного потока, пронизывающего рамку, на малую величину $\Delta\Phi$ за малое время Δt в рамке индуцируется э. д. с. $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$ и протекает ток, который можно считать постоянным благодаря малости Δt . Следовательно, заряд, протекший через прибор за время Δt , равен

$$\Delta q = \mathcal{E} \Delta t / R = -\Delta\Phi / R,$$

где R — сопротивление рамки; он зависит только от изменения потока за время Δt . Полный заряд, протекший через прибор, равен сумме элементарных зарядов Δq :

$$Q = \sum \Delta q = -\sum (\Delta\Phi / R) = -(\sum \Delta\Phi) / R.$$

Изменение магнитного потока в обоих случаях имеет один и тот же знак (поток уменьшается), но в первом случае поток изменяется от некоторого положительного значения до другого, меньшего положительного значения. Во втором случае изменение потока происходит от того же начального значения до нуля и далее до некоторого отрицательного значения: Таким образом, во втором случае полное изменение потока больше, чем в первом, а следовательно, во втором случае больше и заряд, протекший через прибор.

586. На основании закона электромагнитной индукции и закона Ома имеем

$$\Delta Q = I \Delta t = \Delta \Phi / R, \text{ или } Q = (\Phi - \Phi_0) / R.$$

Так как начальный магнитный поток $\Phi_0 = BSn$, а конечный $\Phi = 0$, то количество протекшего электричества будет равно $Q = BSn/R$.

587. Так как э. д. с. индукции $\mathcal{E} = -\Delta \Phi / \Delta t$, то

$$I_{\text{инд}} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (1)$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий контур $ABCD$. Если пренебречь индуктивностью этого контура, то

$$\Delta \Phi = -\frac{\mu_0 I a b \Delta x}{2\pi x(x+b)},$$

где Δx — расстояние, на которое перемещается контур за время Δt . Положив в этом равенстве $\Delta x = v \Delta t$ и подставив полученное выражение в (1), найдем

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mu_0 a b}{2\pi x(x+b)} \frac{I v}{R}.$$

Ток $I_{\text{инд}}$ направлен по часовой стрелке.

588. Согласно закону Фарадея $\mathcal{E}_i = \Delta \Phi / \Delta t = kS$. Э. д. с. индукции численно равна работе, совершаемой электрическим полем при перемещении единичного положительного заряда вдоль витка, т. е. $\mathcal{E}_i = 2\pi r \cdot E$. Отсюда $E = \mathcal{E}_i / 2\pi r$. Таким образом, окончательно получаем

$$E = k\pi r^2 / 2\pi r = kr/2.$$

Надо отметить, что данное электрическое поле создается не электрическими зарядами, а меняющимся во времени магнитным полем. Напомним, что работа при перемещении электрического заряда по замкнутому контуру в случае электростатического поля всегда равна нулю. Под электростатическим полем мы понимаем электрическое поле, создаваемое электростатическими зарядами.

589. Разобьем кольцо на $n = (b-a)/\delta$ колечек шириной δ каждое. Рассмотрим колечко высоты h , внутренний радиус которого x , а внешний $x+\delta$. Если δ мало по сравнению с x , то сопротивление такого кольца можно выразить формулой

$$R = \rho 2\pi x / \delta h.$$

Величина э. д. с. индукции, действующей в этом кольце (при условии, что $\delta \ll x$), равна $\mathcal{E} = \Delta \Phi / \Delta t = \pi x^2 k$. Сила тока, текущего

по такому кольцу,

$$\Delta I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi x^2 k \delta h}{\rho \cdot 2\pi x} = \frac{k \delta h x}{2\rho}.$$

Для того чтобы найти силу тока, текущего по всему кольцу, надо найти, чему равняется сумма следующего вида:

$$I = \frac{k h \delta}{2\rho} \{a + (a + \delta) + (a + 2\delta) + \dots + [a + (n-1)\delta]\}.$$

Выражение в скобках представляет собой арифметическую прогрессию. Поэтому

$$I = \frac{k h}{2\rho} (b-a) \frac{2a+b-a-\delta}{2}.$$

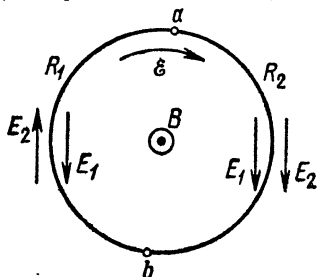
Этот результат будет тем точнее, чем меньше величина δ . Полагая δ стремящимся к нулю, получим

$$I = \frac{k h}{4\rho} (b^2 - a^2).$$

590. На рис. 471 указано направление магнитного поля и э. д. с. индукции $\mathcal{E}$ (для $k > 0$). Правая половина кольца имеет сопротивление R_2 , а левая R_1 . Э. д. с. индукции была определена в задаче 588: $\mathcal{E} = k\pi r^2$. Сила тока согласно закону Ома равна

$$I = \mathcal{E} / (R_1 + R_2) = k\pi r^2 / (R_1 + R_2).$$

Как известно, электрическое поле создается электрическими зарядами (электростатическое поле), а также меняющимся во времени магнитным полем (вихревое поле). Обозначим через φ_a и φ_b потенциалы электростатического поля в точках a и b соответственно. На основании закона Ома для правого полукольца можно написать



$$\varphi_a - \varphi_b + \frac{1}{2} \mathcal{E} = I R_2,$$

а для левого полукольца

$$\varphi_b - \varphi_a + \frac{1}{2} \mathcal{E} = I R_1.$$

Отсюда находим

$$\varphi_a - \varphi_b = k\pi r^2 \frac{R_2 - R_1}{2(R_2 + R_1)}. \quad (1)$$

Таким образом, если $R_2 > R_1$, то $\varphi_a > \varphi_b$. Из (1) легко найти напряженность электростатического поля E_1 :

$$E_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\pi r} = k r \frac{R_2 - R_1}{2(R_2 + R_1)}.$$

Напряженность электрического поля E_2 , созданного изменением во времени магнитного поля, вычислена в задаче 588. Она равна $E_2 = k r / 2$. (На рисунке указано направление напряженностей в левом и правом полукольце для случая, когда $R_2 > R_1$.)

591. В контуре $ABCD$ действует э. д. с. индукции $\mathcal{E}_1 = ka^2$, а в контуре $BEFC$ $\mathcal{E}_2 = ka^2/2$. Простейшая эквивалентная схема с гальваническими элементами, заменяющими э. д. с. индукции, для

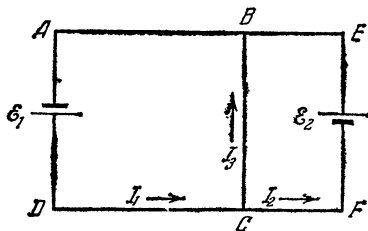


Рис. 472.

нашей цепи имеет вид, изображенный на рис. 472. На основании закона Ома

$$I_3 ar = \mathcal{E}_1 - I_1 3ar = I_2 2ar - \mathcal{E}_2.$$

Вследствие сохранения заряда и постоянства потенциала $I_1 = I_2 + I_3$. Из данной системы уравнений легко найти все три тока:

$$I_1 = \frac{6\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2}{22ar}, \quad I_2 = \frac{2\mathcal{E}_1 + 8\mathcal{E}_2}{22ar}, \quad I_3 = \frac{2\mathcal{E}_1 - 3\mathcal{E}_2}{11ar}.$$

Учитывая выражения для $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, будем иметь

$$I_1 = \frac{7}{22} \frac{ka}{r}, \quad I_2 = \frac{3}{11} \frac{ka}{r}, \quad I_3 = \frac{1}{22} \frac{ka}{r}.$$

592. Разность потенциалов между любыми точками кольца должна быть равной нулю. В противном случае мы приходим к противоречию, применяя закон Ома к короткому и длинному участкам кольца. Кроме того, это очевидно и из соображений симметрии. Отсутствие разности потенциалов означает, что электростатическое поле внутри кольца равно нулю. Ток возникает вследствие наличия э. д. с. индукции, распределенной равномерно вдоль кольца: $I = e_i/r = \mathcal{E}_i/R$, где e_i и $\mathcal{E}_i$ — э. д. с. индукции на коротком и длинном участках кольца, а r и R — соответственно сопротивления участков.

Несмотря на отсутствие разности потенциалов между точками A и B , электромметр обнаружит разность потенциалов между стержнем и корпусом. Дело в том, что в проводниках AC и BD ток равен нулю. Следовательно, в каждой точке этих проводников стороннее электрическое поле индукционного происхождения уравновешивается напряженностью электростатического поля, возникающего вследствие перераспределения зарядов в проводниках под влиянием э. д. с. индукции. Работа электростатических сил при перемещении по замкнутому контуру $ACDBA$ равна нулю. На участке AB электростатическое поле отсутствует. При перемещении заряда по проводникам AC и BD работа электростатических сил равна э. д. с. индукции в этих проводниках и имеет противоположный знак. Следовательно, для равенства нулю работы электростатических сил вдоль замкнутого контура необходимо, чтобы разность потенциалов между точками C и D равнялась э. д. с. индукции в проводниках AC и DB и совпа-

дала с ней по знаку. Так как э. д. с. индукции в замкнутом контуре $ACDBA$ равна нулю (магнитное поле не пронизывает этот контур), то на участке AB э. д. с. индукции равна по величине и противоположна по знаку э. д. с. в проводниках AC и BD , если пренебречь работой сторонних сил индукции на участке между стержнем и корпусом электрометра по сравнению с работой в проводниках AC и BD . Поэтому электрометр покажет разность потенциалов, приблизительно равную э. д. с. на участке AB .

593. В отличие от задачи 592 разность потенциалов $U_A - U_B$ не равна нулю. Запишем закон Ома для всех трех участков проводника, обозначив токи на участках ADB , AQB и ACB через I_1 , I_2 , I_3 , а соответствующие э. д. с. индукции — через $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + U_A - U_B}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + U_B - U_A}{R_2}, \quad I_3 = \frac{\mathcal{E}_3 + U_A - U_B}{R_3}.$$

В силу сохранения заряда и условия стационарности $I_2 = I_1 + I_3$. Складывая два первых уравнения, будем иметь

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}.$$

Вычитая первое уравнение из третьего, получим

$$I_3 R_3 - I_1 R_1 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1.$$

Но э. д. с. индукции в контуре $ACBDA$ равна нулю, так как он не пронизывается магнитным полем. Следовательно,

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3, \quad I_3 R_3 - I_1 R_1 = 0.$$

Система уравнений дает следующее значение искомого тока:

$$I_3 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

594. При отличном от нуля сопротивлении R_3 из уравнений задачи 593 можно найти

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E} (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3},$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}.$$

Если $R_3 = 0$, то $I_1 = 0$, $I_2 = \mathcal{E}/R_2 = I_3$. В общем случае

$$U_A - U_B = - \frac{\mathcal{E} R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}.$$

При $R_3 = 0$

$$U_A - U_B = - \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_2},$$

причем $U_A - U_B = - \mathcal{E}_1$ (так как на участке ADB $I_1 = 0$), где $\mathcal{E}_1$ — э. д. с. индукции на участке ADB .

595. В проводниках, составляющих цепь, вследствие изменения во времени магнитного поля возникает электрическое поле (вихре-

вое, т. е. не электростатическое). Работа этого электрического поля по перемещению единичного положительного заряда вдоль всей цепи численно равна э.д.с. индукции, которую мы обозначим через $\mathcal{E}_1$. Ее можно вычислить на основании закона Фарадея, учитывая изменение магнитного потока, связанное с изменением во времени магнитной индукции. Тогда получим

$$\mathcal{E}_1 = k(S_0 + lvt).$$

Кроме того, при движении проводника в магнитном поле возникает э.д.с. в результате действия силы Лоренца на заряды проводника. Эта э.д.с. $\mathcal{E}_2$ равна

$$\mathcal{E}_2 = vBl = vl(B_0 + kt).$$

Полная э.д.с. $\mathcal{E}$, действующая в цепи, равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = k(S_0 + lvt) + vl(B_0 + kt).$$

$\mathcal{E}$ можно получить из закона Фарадея, учитывая одновременно обе причины ее возникновения. Тогда следует написать, что $\mathcal{E} = \Delta\Phi/\Delta t$, где $\Phi = (B_0 + kt)(S + vlt)$. Так как

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= [B_0 + k(t + \Delta t)][S_0 + vl(t + \Delta t)] - (B_0 + kt)(S_0 + vlt) = \\ &= B_0 vl \Delta t + kS_0 \Delta t + 2kvl t \Delta t + kvl (\Delta t)^2, \end{aligned}$$

то

$$\Delta\Phi/\Delta t = B_0 vl + kS_0 + 2kvl t + \Delta t kvl.$$

При Δt , стремящемся к нулю,

$$\Delta\Phi/\Delta t = B_0 vl + kS_0 + 2kvl t.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E} = k(S_0 + lvt) + vl(B_0 + kt) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Силу тока найдем на основании закона Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{kS_0 + 2kvl t + vl B_0}{R}.$$

Ток в цепи направлен от a к b .

596. В обоих случаях равновесие установится, если момент сил, действующих со стороны магнитного поля на индукционный ток в кольце, равен нулю или отсутствует индукционный ток. Это будет в том случае, когда плоскость кольца располагается вдоль силовых линий поля (индукционный ток равен нулю), либо же тогда, когда плоскость кольца строго перпендикулярна силовым линиям (момент сил равен нулю). В соответствии с правилом Ленца в нарастающем магнитном поле устойчиво будет первое положение кольца, а второе будет неустойчивым. В убывающем магнитном поле, напротив, равновесие будет устойчивым при наличии прямого угла между плоскостью кольца и силовыми линиями и неустойчивым, когда плоскость кольца параллельна силовым линиям.

597. Так как согласно условию напряженность магнитного поля прямо пропорциональна времени: $H = (N/l)kt$, то э.д.с. самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_i = \mu_0 (N^2/l) kS \quad (S = \pi r^2)$$

и направлена против тока. Напряжение на зажимах соленоида должно быть равно

$$U = \mu_0 (N^2/l) kS + kRt.$$

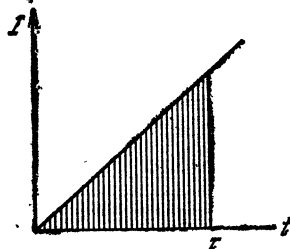
В этом случае $I = (U - \mathcal{E}_i)/R = kt$.

598. При $R \neq 0$ э.д.с. самоиндукции $\mathcal{E}_i$ остается постоянной, так как напряжение на зажимах соленоида $U = \mathcal{E}_i = \mathcal{E}$. Из решения задачи 597 следует, что при постоянной $\mathcal{E}_i$ ток изменяется пропорционально времени: $I = kt$, причем $k = \mathcal{E}l/\mu_0 SN^2$. Следовательно,

$I = \frac{\mathcal{E}l}{\mu_0 SN^2} t$. Если сопротивление конечно, а не равно нулю, ток будет возрастать по такому же закону до тех пор, пока падение напряжения IR на сопротивлении R будет пренебрежимо мало по сравнению с $\mathcal{E}_i$.

599. Работа батареи за время τ будет равна $A = \mathcal{E}Q$, где Q — количество электричества, прошедшего за время τ по соленоиду. Ток в соленоиде возрастает прямо пропорционально времени: $I = \frac{\mathcal{E}lt}{\mu_0 SN^2}$

(см. решение задачи 598). Поэтому Q будет равно произведению средней силы тока $(I_n + I_k)/2$ ($I_n = 0$) на время τ , или же численно равно площади заштрихованного треугольника (см. рис. 473):



$$Q = \frac{\mathcal{E}l\tau^2}{2\mu_0 SN^2}.$$

Отсюда работа будет равна

$$A = \frac{\mathcal{E}^2 l \tau^2}{2\mu_0 SN^2}.$$

Рис. 473.

Эта работа идет на увеличение энергии магнитного поля. Мы можем записать, что $A = W$, где W — энергия магнитного поля. Учитывая, что $H = (N/l)I$, и подставляя выражение для тока, эту энергию мы можем представить в виде $W = \frac{\mu_0 H^2}{2} Sl$.

600. Так как сопротивление кольца равно нулю, то и суммарная электродвижущая сила в нем всегда должна быть равна нулю. Это может быть только в том случае, если изменение полного магнитного потока, пронизывающего кольцо, равно нулю. Следовательно, изменение внешнего магнитного потока Φ_0 равно по величине и противоположно по знаку изменению магнитного потока, созданного индукционным током: $\Delta\Phi_0 = L \Delta I$. Учитывая, что поток Φ_0 нарастает от 0 до $\pi r^2 B_0$, а индукционный ток меняется при этом от 0 до I , получим $\pi r^2 B_0 = LI$. Отсюда $I = \pi r^2 B_0 / L$.

601. Магнитный поток через кольцо не может изменяться (см. задачу 600). Следовательно, $\Phi = \pi r^2 B$. Вначале этот поток создавался внешним магнитным полем, а после его выключения — индуцированным в кольце током.

602. Если омическим сопротивлением кольца можно пренебречь, то полный поток магнитной индукции через кольцо не будет меняться (см. задачу 600). А это значит, что поле индукционных токов в

кольце направлено всегда против поля электромагнита. Следовательно, кольцо будет отталкиваться.

603. Если по обмотке соленоида течет ток I , то, по определению коэффициента самоиндукции L , поток магнитной индукции Φ сквозь соленоид равен

$$\Phi = LI. \quad (1)$$

Поток магнитной индукции есть

$$\Phi = BSN,$$

где B — индукция магнитного поля соленоида, S — сечение каждого витка, N — полное число витков соленоида. Как известно, индукция магнитного поля длинного ($d \ll l_0$) соленоида равна

$$B = \mu_0 n I,$$

где n — число витков на единицу длины соленоида. В условиях нашей задачи

$$N = \frac{l}{\pi d}, \quad n = \frac{l}{\pi d} \cdot \frac{1}{l_0}.$$

Поток магнитной индукции Φ , следовательно, равен

$$\Phi = \mu_0 \frac{l}{\pi d l_0} \frac{l}{\pi d} \frac{\pi d^2}{4} I = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l^2}{l_0} I. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l^2}{l_0}.$$

604. По определению магнитный поток через соленоид равен $\Phi = BSN$, где B — индукция магнитного поля соленоида, S — сечение каждого витка, N — число витков соленоида. Как известно (см. задачу 603), индукция B соленоида, по которому течет ток I , равна $B = \mu_0 (N/l) I$, где l — длина соленоида. Итак, $\Phi = \mu_0 (N^2/l) SI$. Поскольку в условиях данной задачи $I = \text{const}$, изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ происходит только из-за изменения длины соленоида (его геометрии). Другими словами, поток через соленоид ($\Phi = LI$) изменяется из-за изменения коэффициента самоиндукции L :

$$\Delta\Phi/\Delta t = \Delta(LI)/\Delta t = I \Delta L/\Delta t.$$

Сохранить ток постоянным при растяжении соленоида можно, если изменять разность потенциалов на его концах на величину, в любой момент равную и противоположную э.д.с. самоиндукции $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$.

Вычислим $\Delta\Phi/\Delta t$. Для этого достаточно вычислить $\Delta L/\Delta t$:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \mu_0 N^2 S \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{l_0 + vt} - \frac{1}{l_0 + v(t + \Delta t)} \right].$$

При Δt , стремящемся к нулю,

$$\Delta L/\Delta t = \mu_0 N^2 S v / (l_0 + vt)^2.$$

Соленоид растянется вдвое за время t_1 , которое легко определить из равенства $l_0 + vt_1 = 2l_0$, откуда $t_1 = l_0/v$, и в момент t_1

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I \frac{\Delta L}{\Delta t} = I \frac{\mu_0 N^2 (\pi d^2/4) v}{4l_0^2} \approx 0,004 \text{ В.}$$

На такую величину надо изменить разность потенциалов на концах соленоида.

605. $U = B_0 \pi r^2 N \omega \sin \omega t$.

606. $U_{AB} = B_0 \pi r^2 N \omega \sin \omega t$, $I = U_{AB}/R = (B_0 \pi r^2 N \omega / R) \sin \omega t$.

607. $I = B_0 \pi r^2 N \omega \sin(\omega t - \varphi)$, где $\operatorname{tg} \varphi = 1/\omega CR$;

$$U_{AB} = [B_0 \pi r^2 N \omega \cos(\omega t - \varphi)]/\omega C = [B_0 \pi r^2 N \cos(\omega t - \varphi)]/C;$$

$$U_{BC} = B_0 \pi r^2 N \omega R \sin(\omega t - \varphi).$$

608. 1) Так как концы A и B разомкнуты, по участку AC ток не течет. Следовательно, падение напряжения на участке AC равно нулю. Поэтому напряжение $U_2 = U_1$.

2) В случае, когда между точками B и C приложена переменная разность потенциалов, ток, текущий по участку BC , создает переменный магнитный поток, который наводит на участке AC э.д.с. индукции. Так как $L\omega \gg R$, то амплитуда наведенной э.д.с. также будет равна U_1 . Поэтому амплитуда напряжения U_2 между точками A и B будет равна $2U_1$ (повышающий автотрансформатор).

609. Наиболее неудовлетворителен 3-й способ, так как токи Фуко циркулируют в плоскостях витков обмотки, не встречая в этом случае изолирующего слоя. 1-й способ позволяет избавиться от большей части вихревых токов, однако не от всех, так как в одном слое обмотки автотрансформатора фактически имеется много витков вокруг сердечника и один виток вдоль него. Наилучшим является 2-й способ, который и применяется на практике.

610. Так как $R=0$, то ток I отстает по фазе от напряжения U на $\pi/2$. Графики $U = U_0 \sin \omega t$, $I = I_0 \sin(\omega t - \pi/2)$ и мгновенной мощности $W = IU$ изображены на рис. 474. Знак W меняется каждую четверть периода. Положительному значению W соответствует

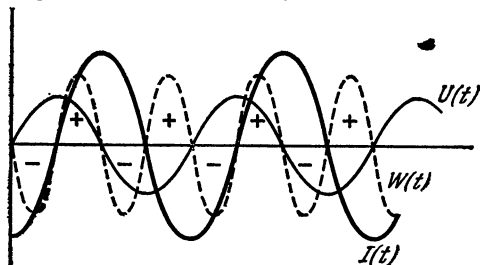


Рис. 474.

поступление энергии от источника в катушку. При отрицательном W энергия из катушки поступает обратно в источник. В среднем за период катушка не потребляет мощности; средняя мощность равна нулю.

611. Эффективной величиной переменного тока называется величина постоянного тока, который выделяет в проводнике такое же

количество тепла, что и переменный, за равное с ним время. Подсчитаем количество тепла, выделившегося за период:

$$Q = I_0^2 RT/8 + I_0^2 RT/8 = I_0^2 RT/4.$$

С другой стороны, $Q = I_{\text{эфф}}^2 RT$. Отсюда $I_{\text{эфф}} = I_0/2$.

612. При прохождении по проводнику переменного тока количество выделенного тепла равно $W = I_{\text{эфф}}^2 R t$. Выражение же для количества выделенного тепла $W = (U_{\text{эфф}}^2/R) t$ справедливо только тогда, когда имеет место закон Ома в обычной форме: $I = U/R$. У обмотки трансформатора велико индуктивное сопротивление. Поэтому закон Ома в обычной форме и, следовательно, выражение $W = (U_{\text{эфф}}^2/R) t$ не имеют места. Количество выделенного тепла мало, так как мала сила тока и мало омическое сопротивление обмотки.

613. Если $L\omega \gg R$, то сдвиг фаз между током и напряжением велик и потребляемая сетью мощность не может быть большой. Включение конденсаторов уменьшает этот сдвиг фаз, так как ток через конденсатор опережает напряжение, компенсируя тем самым отставание тока по фазе в приборах с большой индуктивностью. В результате потребляемая сетью мощность увеличивается.

$$614. W = (U^2 - U_1^2 - U_2^2)/2R.$$

615. Соленоид с числом витков N_1 обозначим индексом 1, а соленоид с числом витков N_2 — индексом 2. Индукция магнитного поля соленоид 1 равна

$$B_1 = \mu_0 (N_1/l) I.$$

Это поле создает сквозь соленоид 2 магнитный поток Φ_{12} , равный

$$\Phi_{12} = B_1 S N_2 = \mu_0 (N_1 N_2 / l) S I,$$

откуда для коэффициента взаимной индукции L_{12} получается выражение

$$L_{12} = \mu_0 (N_1 N_2 / l) S. \quad (1)$$

Аналогично получаем выражение для потока магнитной индукции Φ_{21} , созданного соленоидом 2 и пронизывающего соленоид 1:

$$\Phi_{21} = \mu_0 (N_2 N_1 / l) S I,$$

откуда для коэффициента взаимной индукции L_{21} получается выражение

$$L_{21} = \mu_0 (N_2 N_1 / l) S. \quad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) находим, что $L_{12} = L_{21}$.

616. Скорость изменения магнитного потока постоянна, и, следовательно, постоянна э. д. с. индукции в катушке. Если катушка включена в замкнутую цепь, то по ней будет течь постоянный ток. Как и любой постоянный ток, он устанавливается не сразу. Время его установления определяется коэффициентом самоиндукции катушки и ее сопротивлением.

617. Полный поток магнитной индукции Φ , пронизывающий сверхпроводящее кольцо, как показывает решение задачи 600, не может измениться. Вследствие этого при сближении колец увеличение потока за счет взаимной индукции компенсируется его уменьшением в результате уменьшения тока, текущего по кольцу. При

большом расстоянии между кольцами их взаимной индукцией можно пренебречь, и тогда $\Phi = LI_0$, где L — индуктивность кольца. Когда проводники сблизятся вплотную, то магнитный поток через каждое кольцо будет равен $\Phi = 2LI$, где I — искомый ток. Следовательно, $I = I_0/2$, т. е. токи в кольцах уменьшатся в два раза.

618. Допустим, что в начальный момент ток I_{01} в первом кольце больше тока I_{02} во втором кольце. При сближении колец токи в них будут уменьшаться (см. задачу 617). В некоторый момент времени ток I_2 станет равным нулю и, следовательно, станет равной нулю сила взаимодействия колец. Однако по инерции кольца будут продолжать сближаться. Во втором кольце возникнет ток в направлении, противоположном первоначальному, а ток в первом кольце начнет увеличиваться. При этом потоки магнитной индукции через каждое кольцо останутся неизменными. Между кольцами возникнет отталкивание, их движение вследствие этого начнет тормозиться. Сблизиться вплотную кольца не смогут, так как при этом одновременно должны были бы выполняться равенства

$$LI_{01} = LI_1 - LI_2, \quad LI_{02} = LI_1 - LI_2,$$

что возможно лишь при условии $I_{01} = I_{02}$. Кольца на мгновение остановятся на некотором расстоянии друг от друга и затем начнут расходиться. При этом будет уменьшаться ток I_2 во втором кольце до тех пор, пока не станет равным нулю. При $I_2 = 0$ ток I_1 приобретет то же значение, что и при сближении колец в момент прекращения тока I_2 . Далее начнется притяжение колец и т. д. Процесс будет повторяться периодически.

619. Напряжение на зажимах первичной обмотки U_1 при пренебрежении ее омическим сопротивлением может быть представлено как алгебраическая сумма э.д.с. самоиндукции этой обмотки и э.д.с. индукции, возбуждаемой в ней током, текущим во вторичной обмотке:

$$U_1 = L_1 \Delta I_1 / \Delta t - M \Delta I_2 / \Delta t.$$

Знак минус возникает вследствие того, что токи I_1 и I_2 имеют противоположные фазы. Если токи меняются по законам $I_1 = I_{01} \sin \omega t$, $I_2 = I_{02} \sin \omega t$, то

$$\Delta I_1 / \Delta t = \omega I_{01} \cos \omega t, \quad \Delta I_2 / \Delta t = \omega I_{02} \cos \omega t.$$

Так как напряжение U_1 смещено по фазе относительно тока I_1 на $\pi/2$, то можно записать $U_1 = U_{10} \cos \omega t$.

Разделив выражение для U_1 на $L_1 \omega \cos \omega t$, будем иметь

$$\frac{U_{01}}{L_1 \omega} = I_{01} - \frac{M}{L_1} I_{02}.$$

$U_{01}/L_1 \omega$ есть ток холостого хода, если омическое сопротивление обмотки не учитывать. Пренебрегая током холостого хода, найдем $I_{01}/I_{02} = M/L_1$. Используя выражения для коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции, получим $I_1/I_2 = I_{01}/I_{02} = N_2/N_1$.

620. Индукция суммарного поля внутри соленоидов равна

$$B = B_1 \pm B_2 = \frac{\mu_0}{l} (N_1 I_1 \pm N_2 I_2),$$

где выбор знака плюс или минус зависит от того, одинаковы или противоположны направления токов в соленоидах. Энергия W суммарного поля во всем объеме внутри соленоидов равна

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl = \frac{\mu_0 S}{2l} [(N_1 I_1)^2 \pm 2(N_1 I_1)(N_2 I_2) + (N_2 I_2)^2].$$

Воспользовавшись выражениями для индуктивностей L_1 и L_2 соленоидов: $L_1 = \mu_0 (N_1^2/l) S$, $L_2 = \mu_0 (N_2^2/l) S$ и выражением для коэффициента взаимной индукции: $L_{12} = \mu_0 (N_1 N_2/l) S$, можно магнитную энергию соленоидов представить в виде

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2.$$

Первый член этой формулы дает собственную энергию тока I_1 , второй — определяет собственную энергию тока I_2 . Наличие третьего слагаемого показывает, что энергия двух токов в контурах, обладающих магнитной связью, отличается от суммы собственных энергий токов на величину $W_{12} = \pm L_{12} I_1 I_2$. Она называется взаимной энергией двух токов.

621. Положительные, полуволны тока зарядят конденсатор до амплитудного напряжения городской сети, равного $127\sqrt{2} \text{ В} = 180 \text{ В}$. Когда диод заперт (не проводит ток), к нему приложено напряжение сети (с амплитудой 180 В) плюс такое же напряжение заряженного конденсатора. Изменение потенциала вдоль цепи в этот момент времени изображено на рис. 475. Если выпрямитель работает без нагрузки, то конденсатор должен рассчитываться на пробивное напряжение, не меньшее 180 В , а диод — на напряжение, не меньшее 360 В .

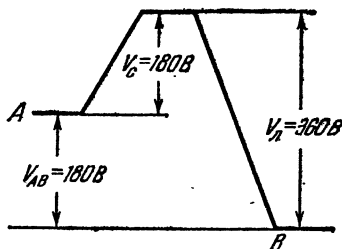


Рис. 475.

§ 24. Электрические машины

622. Если частота переменного тока остается прежней, то это означает, что осталось прежним число оборотов двигателя и генератора. Поэтому не изменяется и э.д.с. генератора. При большем внешнем сопротивлении в цепи потечет меньший ток и, значит, будет выделяться меньшая мощность. Следовательно, мощность двигателя, вращающего генератор, должна быть уменьшена.

623. При включении конденсатора C в цепь переменного тока будет происходить периодическая перезарядка конденсатора. Заряд, притекающий по проводам к обкладкам конденсатора, будет тем больше, чем больше емкость конденсатора C . Так как за половину периода этот заряд должен смениться противоположным по знаку, то ток, протекающий по цепи, должен быть пропорционален частоте. Итак, при одной и той же амплитуде переменного напряжения на конденсаторе ток в цепи с конденсатором пропорционален частоте и емкости конденсатора ($I \sim \omega C$). Можно сказать поэтому, что конденсатор обладает «емкостным сопротивлением», обратно пропорциональ-

ным частоте и емкости. При параллельном соединении

$$I = k\omega_1 C_{\text{парал}} = k\omega_1 (C_1 + C_2).$$

При последовательном соединении

$$I = k\omega_2 C_{\text{послед}} = k\omega_2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(C_1 + C_2)^2}{C_1 C_2} = \frac{C_1}{C_2} + 2 + \frac{C_2}{C_1}.$$

624. Работа, совершаемая полем по перемещению проводников с током (обмотки якоря), не равна полной работе поля. Кроме работы по перемещению проводников, магнитное поле совершает работу по торможению электронов в проводнике, что приводит к появлению в обмотке якоря э.д.с. индукции. Первая часть работы положительна, а вторая — отрицательна. Полная работа магнитного поля равна нулю. Электродвижущая сила источника, создающего в якоре мотора ток, совершает положительную работу, компенсирующую отрицательную работу магнитного поля по торможению электронов. Двигатель совершает работу, по существу, за счет энергии источника, питающего мотор.

625. Мощность, потребляемая мотором, $W = IU$; $U = \mathcal{E}_i + IR$, где $\mathcal{E}_i$ — э.д.с. индукции, возникающая в якоре. Следовательно,

$$W = I\mathcal{E}_i + I^2 R.$$

Здесь $I^2 R$ — джоулево тепло, выделяемое в обмотках, а $I\mathcal{E}_i$ — мощность против э.д.с. индукции. Она равна механической мощности W_1 , развиваемой мотором. Эта мощность $W_1 = (U\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2)/R$, так как $I = (U - \mathcal{E}_i)/R$. Данное выражение имеет максимум при $\mathcal{E}_i = U/2$. Следовательно, максимальное значение $W_1 = U^2/4R = 180$ В. Мощность в 200 Вт мотор развить не может.

626. Согласно решению задачи 625 $W_1 = U^2/4R$. Если якорь мотора неподвижен, то протекающий по обмотке ток $I = U/R$. Количество тепла, выделяемое в обмотке в единицу времени, $W = I^2 R = U^2/R$. Следовательно, $W = 4W_1$.

627. Сила тока, текущего по обмотке двигателя, будет определяться э.д.с. сети $\mathcal{E}$, ее сопротивлением r и э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$, возникающей в якоре мотора: $I = (\mathcal{E} - \mathcal{E}_i)/r$. Разность потенциалов U на клеммах двигателя равна в любой момент $\mathcal{E}_i$, так как сопротивление обмотки равно нулю. Следовательно, мощность $W = IU = (\mathcal{E}\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2)/r$ определяется э.д.с. сети, ее сопротивлением и $\mathcal{E}_i$.

628. Для серийного мотора развиваемая максимальная мощность (см. задачу 625)

$$W_{\text{max}} = \frac{U^2}{4(R_1 + R_2)}.$$

Потребляемая мотором мощность

$$W = UI = U \frac{U - \mathcal{E}_i}{R_1 + R_2} = \frac{U^2}{2(R_1 + R_2)},$$

так как $\mathcal{E}_i = U/2$. Следовательно, коэффициент полезного действия

$\eta = 1/2$. Для шунтового мотора $W_{\max} = U^2/4R_1$. Потребляемая мощность

$$W = UI = U \left(\frac{U - \mathcal{E}_i}{R_1} + \frac{U}{R_2} \right) = \frac{U^2 (2R_1 + R_2)}{2R_1 R_2}.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 2R_1/R_2},$$

т. е. меньше 50%.

629. При заданной скорости вращения момент внешних сил M , действующих на якорь, равен моменту сил, действующих на якорь со стороны магнитного поля. Так как этот последний пропорционален произведению силы тока I в якоре на индукцию магнитного поля B , то

$$M = \alpha IB \quad (\alpha = \text{const}). \quad (1)$$

Э.д.с. в обмотке якоря пропорциональна индукции магнитного поля и числу оборотов в секунду:

$$\mathcal{E}_i = \beta nB \quad (\beta = \text{const}). \quad (2)$$

Напряжение U на клеммах мотора равно

$$U = IR + \mathcal{E}_i = IR + \beta nB, \quad (3)$$

где R — сопротивление обмоток.

При включении мотора на холостом ходу момент внешних сил определяется только трением, которое при хороших подшипниках очень мало. Поэтому I и B согласно уравнению (1) также малы (B пропорционально I и уменьшается вместе с током). Из уравнения (3) следует, что при малом значении I и B возможны только большие n . Поэтому двигатель набирает очень большое число оборотов.

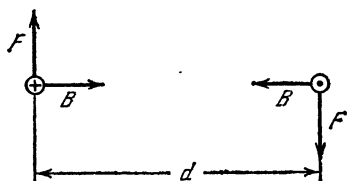


Рис. 476.

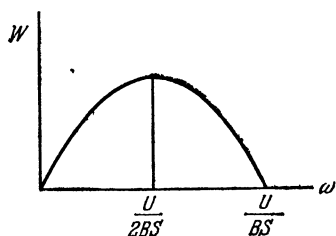


Рис. 477.

630. Обозначим через l длину, а через d ширину витка (рис. 476). Сила F , действующая на проводник длины l , равна $F = IBl$. При этом мощность

$$W = 2IBlv = IBS\omega.$$

Сила тока I определяется из выражения $I = (U - \mathcal{E}_i)/R$, где $\mathcal{E}_i = BS\omega$. Окончательно W запишется в следующей форме:

$$W = \frac{BSU}{R} \omega - \frac{B^2 S^2}{R} \omega^2.$$

W достигает максимального значения $W_{\max} = U^2/4R$ при $\omega = U/2BS$. При этом $\mathcal{E}_i = U/2$ и $I = U/2R$. В единицу времени батарея совершает работу $U^2/2R$. Из этого количества половина превращается в механическую мощность, другая же половина выделяется в виде тепла. На рис. 477 изображена графически зависимость W от ω .

631. $M = \frac{BSU}{R} - \frac{B^2 S^2}{R} \omega$. Момент будет равен нулю тогда, когда $\omega = U/BS$ (см. рис. 478). При этом $I = 0$, так как $\mathcal{E}_i = U$.

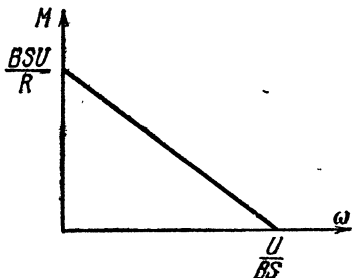


Рис. 478.

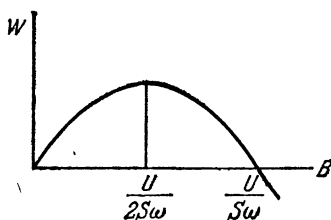


Рис. 479.

632. Характер зависимости W от B изображен на рис. 479. Мощность достигает максимального значения при $B = U/2S\omega$. При этом $\mathcal{E}_i = U/2$ и $W_{\max} = U^2/4R$.

633. Вращающий момент M достигает своего максимального значения $M_{\max} = U^2/4R\omega$ при $B = U/2S\omega$.

634. Мощность шунтового мотора, так же как и серийного, равна $W = (U\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2)/R$, где R — сопротивление якоря (см. задачу 625). Мощности $W = 160$ Вт соответствуют два значения $\mathcal{E}_i$: $\mathcal{E}_1 = 80$ В, $\mathcal{E}_2 = 40$ В. То или иное значение определяется конструктивными особенностями мотора.

По закону Фарадея $\mathcal{E}_i$ прямо пропорционально числу оборотов n якоря в секунду и индукции магнитного поля, созданного статором. Для шунтового мотора эта индукция не зависит от нагрузки. Поэтому можно записать: $\mathcal{E}_i = an$, где a — постоянная величина, определяемая конструкцией двигателя и приложенным напряжением. По данным задачи получаем $a_1 = 8$ и $a_2 = 4$. $\mathcal{E}_i$ не может превышать 120 В. Следовательно, максимальное число оборотов n равно либо $n_1 = 15$ об/с, либо $n_2 = 30$ об/с.

635. Если напряжение на статоре поддерживается постоянным, то при заданной скорости вращения якоря э.д.с. индукции в якорь совершенно не зависит от того, вращается ли якорь мотора за счет действия на якорь магнитного поля статора или же якорь приводится во вращение с помощью механического привода.

Развиваемая мотором мощность $W = M\omega$. В нашем случае $W = 160$ Вт. Э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i$ определится из уравнения $W = (U\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2)/R$ (см. задачу 625). Отсюда

$$\mathcal{E}_i = \frac{U}{2} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4} - WR}$$

имеет два значения: $\mathcal{E}_1 = 80$ В, $\mathcal{E}_2 = 40$ В. Э.д.с. генератора также будет иметь эти значения.

Неоднозначность результата связана с тем, что одна и та же мощность получается при одинаковом значении произведения $I\mathcal{E}_i$, а данному значению этого произведения соответствуют две пары возможных значений I и $\mathcal{E}_i$. То или иное значение $\mathcal{E}_i$, а следовательно, и тока определяется конструктивными особенностями мотора: числом витков, их конфигурацией и т. д.

636. Механическая мощность, развиваемая мотором, равна

$$M \cdot 2\pi n = \frac{U\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_i^2}{R}$$

(см. решение задачи 625). Э.д.с. индукции в якоре $\mathcal{E}_i = kBn$, где k — коэффициент пропорциональности, определяемый числом витков обмотки якоря и их площадью, а B — индукция магнитного поля статора, прямо пропорциональная току. Исключая $\mathcal{E}_i$ из этих уравнений, найдем

$$n = \frac{U}{kB} - \frac{2\pi MR}{k^2 B^2}.$$

Зависимость n от B изображена на рис. 480.

Если $B \leq B_0 = 2\pi MR/kU$, то $n \leq 0$. Физически это означает, что якорь мотора не будет вращаться. При $B = B_m = 4\pi MR/kU$ число оборотов достигает максимума. Следовательно, если $B_m > B > B_0$, то при увеличении тока в обмотках статора число оборотов растет, а при $B > B_m$ число оборотов падает.

В случае, когда мотор работает без нагрузки ($M=0$), число оборотов $n = \frac{U}{kB}$, т. е. обязательно уменьшается с увеличением B .

637. Магнитные поля B_1 , B_2 и B_3 можно записать в следующем виде:

$$B_1 = B_0 \sin \omega t, \quad B_2 = B_0 \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right), \quad B_3 = B_0 \sin \left(\omega t + \frac{4}{3} \pi \right).$$

Выберем оси координат x и y , как показано на рис. 220, и найдем сумму проекций напряженностей полей на эти оси:

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 \sin \omega t + B_0 \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \cos \frac{2}{3} \pi + \\ &\quad + B_0 \sin \left(\omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \cos \frac{4}{3} \pi, \\ B_y &= B_0 \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \sin \frac{2}{3} \pi + B_0 \sin \left(\omega t + \frac{4}{3} \pi \right) \sin \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

Проведя несложные преобразования, будем иметь

$$B_x = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t, \quad B_y = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t.$$

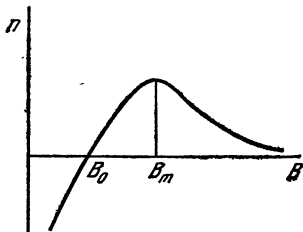


Рис. 480.

Эти значения проекций будут иметь место только в том случае, если вектор, изображающий магнитное поле, вращается с постоянной угловой скоростью ω в направлении часовой стрелки.

638. Поток вектора магнитной индукции через рамку равен

$$\Phi = Bab \cos(\omega - \Omega) t.$$

Согласно закону электромагнитной индукции э.д.с., наводимая в рамке, равна

$$\mathcal{E} = - \Delta \Phi / \Delta t = Bab(\omega - \Omega) \sin(\omega - \Omega) t.$$

Следовательно, ток в рамке со временем изменяется по закону

$$I = \frac{Bab(\omega - \Omega) \sin(\omega - \Omega) t}{R}.$$

Отсюда амплитудное значение тока I_0 равно

$$I_0 = \frac{Bab(\omega - \Omega)}{R}.$$

Зависимость I_0 от Ω является линейной.

639. Момент M сил, приложенных к рамке, равен

$$M = IBab \sin(\omega - \Omega) t.$$

Согласно решению задачи 638

$$I = \frac{Bab(\omega - \Omega) \sin(\omega - \Omega) t}{R}.$$

Следовательно,

$$M = \frac{B^2 a^2 b^2 (\omega - \Omega) \sin^2(\omega - \Omega) t}{R}.$$

Амплитудное значение момента

$$M_0 = \frac{B^2 a^2 b^2 (\omega - \Omega)}{R}.$$

Подобная зависимость имеет место в асинхронных двигателях.

Глава IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 25. Механические колебания

640. Центр тяжести доски в исходном положении равновесия находится на высоте y_C над горизонтальным уровнем, на котором расположена ось цилиндра, причем $y_C = R + h/2$. При повороте доски без проскальзывания на малый угол φ центр тяжести доски займет положение на высоте $y_{C'}$, которую легко определить:

$$y_{C'} = \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \varphi + R \varphi \sin \varphi.$$

Заметим, что при малых углах φ с точностью до членов второго порядка малости $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Действительно, так как

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \approx \sqrt{1 - \varphi^2},$$

то, обозначив $\cos \varphi = 1 - x$, получим $1 - \varphi^2 \approx 1 - 2x + x^2$, откуда, пренебрегая x^2 , находим $x \approx \varphi^2/2$, и, следовательно, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Таким образом,

$$y_{C'} = \left(R + \frac{h}{2}\right) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + R\varphi^2.$$

Колебания доски около положения равновесия возникнут при условии $y_{C'} - y_C > 0$, т. е. при

$$\left(R - \frac{h}{2}\right) \frac{\varphi^2}{2} > 0, \quad \left(R - \frac{h}{2}\right) > 0.$$

Если $R - h/2 < 0$, то доска упадет.

641. Уравнение движения груза массы m имеет вид

$$ma = -kx,$$

где x — абсолютное удлинение пружины. Из уравнения следует, что период колебаний τ может зависеть только от m и k . Размерность коэффициента жесткости $[k] = M/T^2$. Следовательно, $\tau = C \sqrt{m/k}$, где C — безразмерный коэффициент. Точный расчет приводит к выражению $\tau = 2\pi \sqrt{m/k}$.

642. Период малых колебаний математического маятника не зависит от амплитуды (т. е. от наибольшего угла отклонения) и равен $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. Независимость периода от величины максимального угла отклонения является следствием того, что сила, направленная к положению равновесия, в каждый момент пропорциональна углу α отклонения маятника. Если бы эта пропорциональность углу отклонения α сохранялась и при больших амплитудах, период колебаний такого воображаемого маятника в любом случае был бы равен $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. Однако при больших углах отклонения сила, возвращающая маятник, пропорциональна не углу α , а синусу этого угла. Так как $\sin \alpha < \alpha$ ($\alpha \neq 0$), то при тех же амплитудах возвращающая сила, а значит, и ускорение реального маятника меньше, чем у того, у которого сохраняется пропорциональность между силой и углом. Поэтому период T_1 колебаний реального маятника больше, чем воображаемого, т. е. $T_1 > 2\pi \sqrt{l/g}$. Следовательно, с увеличением максимального угла отклонения период колебаний математического маятника увеличивается.

643. Пусть $\tau = g^\alpha l^\beta$, где τ — период колебаний математического маятника, l — его длина:

$$[\tau] = T, \quad [g^\alpha] [l^\beta] = L^\alpha L^\beta T^{2\alpha}.$$

Из последнего соотношения следует, что $\alpha + \beta = 0$, $2\alpha = -1$. Таким образом, $\tau = f(\varphi) \sqrt{l/g}$. Здесь $f(\varphi)$ — функция максимального угла φ ($f(\varphi_2) > f(\varphi_1)$, если $\varphi_2 > \varphi_1$, см. задачу 642). Расчет показывает, что при $\varphi \rightarrow 0$ $f(\varphi)$ имеет предельное значение 2π . Итак, период малых колебаний математического маятника равен $\tau = 2\pi \sqrt{l/g}$.

644. Обозначим через l длину недеформированной пружины. Тогда расстояния первого и второго брусков до центра масс определяются из соотношений

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \quad l_1 + l_2 = l.$$

Обозначим через x и y перемещения первого и второго брусков в случае, когда пружина сжата. Тогда расстояния брусков до центра масс удовлетворяют соотношению

$$m_1 (l_1 - x) = m_2 (l_2 - y), \quad \text{или} \quad m_1 x = m_2 y.$$

Пружина сжата на величину

$$x + y = x \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right).$$

Сила, с которой пружина действует на первый брусок, равна

$$F = k_1 x, \quad \text{где} \quad k_1 = k \frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

Таким образом, период колебаний первого бруска равен (см. задачу 641)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k (m_1 + m_2)}}.$$

Период колебаний второго бруска, очевидно, будет таким же.

645. Пружина, распрямляясь, действует на оба груза. Груз, стоящий у стенки, сначала неподвижен, а второй груз начинает двигаться. Когда пружина полностью распрямится (т. е. придет в недеформированное состояние), второй груз будет иметь скорость

$$v = \sqrt{\frac{k}{m_2}} x \quad \left(\frac{kx^2}{2} = \frac{m_2 v^2}{2} \right).$$

Следовательно, система приобретёт количество движения, равное

$$m_2 v = \sqrt{k m_2} x.$$

Это количество движения будет сохраняться, так как внешние силы в горизонтальном направлении не действуют.

Центр масс системы будет двигаться со скоростью

$$v_C = \frac{\sqrt{k m_2} x}{m_1 + m_2}.$$

При этом грузы будут колебаться относительно центра масс с периодом колебаний

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k (m_1 + m_2)}}$$

(см. задачу 644).

646. Период колебаний груза на пружине $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, где k — коэффициент упругости пружины, равный отношению силы, вызвавшей удлинение пружины, к этому удлинению: $k = F/x$. При

последовательном соединении двух одинаковых пружин, растягиваемых силой F , $k_1 = F/x_1 = F/2x = k/2$, так как каждая из пружин увеличивает свою длину на x . При параллельном соединении двух одинаковых пружин сила F_1 , необходимая для увеличения длины каждой из пружин на x , должна быть в 2 раза больше F . Следовательно, $k_2 = F_1/x = 2F/x = 2k$. При последовательном соединении $T_1 = 2\pi \sqrt{m/k_1} = 2\pi \sqrt{2m/k}$, а при параллельном $T_2 = 2\pi \sqrt{m/2k}$. Отсюда $T_1/T_2 = 2$. Период уменьшится в 2 раза.

647. Отклоним оба маятника от вертикали в одну и ту же сторону на одинаковый угол. Пружина при таком отклонении не будет деформирована. Легко сообразить, что, отпущенные из этого положения, маятники будут колебаться в фазе с частотой $\omega = \sqrt{g/k}$. При отклонении в разные стороны на одинаковые углы колебания маятников будут происходить в противофазе и пружина будет деформироваться. Для того чтобы подсчитать частоту этих колебаний, найдем силу, возвращающую маятники в положение равновесия. При отклонении на угол φ сила, действующая со стороны пружины на тело m , равна $2kl \sin \varphi$. Сумма проекций силы тяжести и силы упругости на касательную к окружности, так называемая «восстанавливающая» сила P_1 , будет равна

$$P_1 = mg \sin \varphi + 2kl \sin \varphi \cos \varphi$$

(рис. 481). Так как при малых углах $\cos \varphi \approx 1$, то

$$P_1 = (mg + 2kl) \sin \varphi, \text{ или } P_1 = m(g + 2kl/m) \sin \varphi.$$

Для математического маятника «восстанавливающая» сила равна $mg \sin \varphi$. При этом частота колебаний при малых углах φ определяется формулой $\omega = \sqrt{g/l}$. В нашем случае роль g играет величина

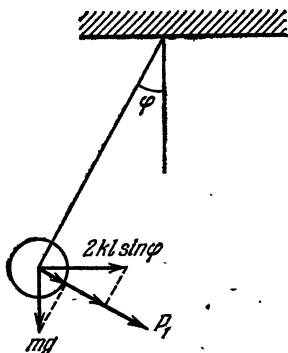


Рис. 481.

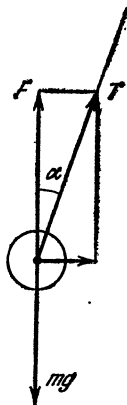


Рис. 482.

$g + 2kl/m$. Следовательно, $\omega = \sqrt{(g + 2kl/m)/l}$. Период колебаний $T_2 = 2\pi \sqrt{l/(g + 2kl/m)}$.

648. Вертикальная составляющая силы натяжения T равна $F = T \cos \alpha$ (рис. 482). Для конического маятника $F = mg$, так как

груз не обладает ускорением в вертикальной плоскости. В случае математического маятника при максимальном отклонении его от положения равновесия (на угол α) результирующая сила направлена по касательной к траектории груза. Следовательно, $T = mg \cos \alpha$. При отклонении на угол α натяжение нити конического маятника будет больше.

649. На поверхности земли период колебаний маятника $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$. На высоте h над землей период колебаний маятника $T_1 = 2\pi \sqrt{l/g_1}$. Число колебаний за сутки $N_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 1/T_1 = k/T_1$. Следовательно, на высоте h над землей часы отстают за сутки на время

$$\Delta t_1 = N_1 (T_1 - T_0) = k (1 - T_0/T_1).$$

Отношение периодов $T_0/T_1 = \sqrt{g_1/g} = R/(R+h)$, как вытекает из закона всемирного тяготения. Отсюда

$$\Delta t_1 = kh/(R+h) \approx kh/R \approx 2,7 \text{ с.}$$

Если часы опущены в шахту, то отношение ускорений $g_2/g = (R-h)/R$, так как

$$g = \gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{R^2}, \quad g_2 = \gamma \frac{4\pi}{3} (R-h)^3 \rho \frac{1}{(R-h)^2}.$$

Следовательно, $T_0/T_2 = \sqrt{g_2/g} = \sqrt{(R-h)/R} \approx 1 - h/2R$. Часы в этом случае отстают на время $\Delta t_2 = k(1 - T_0/T_2) = kh/2R \approx 1,35 \text{ с.}$

650. Каждая половина стержня с шариком на конце представляет собой математический маятник длины $d/2$, совершающий колебания в поле тяготения большого шара. Математический маятник в поле тяготения Земли имеет период малых колебаний $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$.

По закону всемирного тяготения $mg = \gamma m M_3 / R^2$, следовательно, $T_0 = 2\pi \sqrt{l R^2 / \gamma M_3}$, где γ — гравитационная постоянная, M_3 — масса Земли, R — расстояние маятника от центра Земли. Соответственно в поле тяготения большого шара период малых колебаний математического маятника длины $l = d/2$ будет равен $T = 2\pi \sqrt{d L^2 / 2 \gamma M} \approx 5,4 \text{ часа.}$

651. Период колебаний математического маятника равен $T = 2\pi \sqrt{l/g'}$, где g' — ускорение свободного падения в соответствующей системе координат. В нашем случае $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$, где g — ускорение свободного падения относительно Земли. Таким образом, $T = 2\pi \sqrt{l / \sqrt{g^2 + a^2}}$.

$$652. T = 2\pi \sqrt{l/(g+a)}.$$

653. Заменить в предыдущем ответе $g+a$ на $|g-a|$.

654. Колебания кубика в чаше вполне аналогичны колебаниям математического маятника, только вместо натяжения нити на кубик действует реакция опоры. Следовательно, искомый период колебаний $T = 2\pi \sqrt{R/g}$.

655. При $M \gg m$ ускорение чаши $a = F/M - g$. Следовательно (см. задачу 654),

$$T = 2\pi \sqrt{R/(g+a)} = 2\pi \sqrt{RM/F}.$$

При $F=0$, т. е. при свободном падении чаши, $T=\infty$ — колебания отсутствуют. Если $F=Mg$, то $T=2\pi\sqrt{R/g}$.

656. Колебания кубика вызовут периодическое смещение чаши в горизонтальной плоскости. Следовательно, период колебаний кубика уменьшится, так как в системе координат, связанной с чашей, появится дополнительное переменное ускорение, направленное горизонтально (см. задачу 651).

657. Сравним движение центра обруча с движением конца математического маятника длины $R-r$. Обе эти точки описывают дугу окружности радиуса $R-r$. Предположим, что при угле φ_0 обруч и маятник покоятся. На основании закона сохранения энергии для скорости v_0 центра обруча и скорости v_m конца маятника в зависимости от угла φ имеем следующие выражения:

$$v_0 = \sqrt{g(R-r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}, \quad v_m = \sqrt{2g(R-r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

(Выражение кинетической энергии обруча, катящегося без проскальзывания, см. в задаче 215.) Из этих выражений следует, что $v_0 = v_m/\sqrt{2}$. Так как центр обруча движется в $\sqrt{2}$ раз медленнее маятника, то период движения центра обруча будет в $\sqrt{2}$ раз больше, чем период движения математического маятника длины $R-r$.

Таким образом, для искомого периода имеем выражение $T = 2\pi\sqrt{2(R-r)/g}$. Заметим, что при $r \rightarrow 0$ $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$, хотя на первый взгляд может показаться, что при $r=0$ должно иметь место равенство $T = 2\pi\sqrt{R/g}$. Это связано с тем, что при $r \rightarrow 0$ энергия вращательного движения обруча не исчезает.

658. Пусть стержень первоначально отклонен от положения равновесия на угол α . В тот момент, когда стержень будет составлять с вертикалью угол β , угловая скорость ω_1 стержня на основании закона сохранения энергии будет равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} (\cos \beta - \cos \alpha)}.$$

Рассмотрим теперь математический маятник длины l . В этом случае при тех же углах α и β

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \beta - \cos \alpha)}.$$

Подберем l так, чтобы $\omega_1 = \omega_2$. Для этого надо потребовать, чтобы

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}.$$

Угловая скорость характеризует изменения угла β с течением времени. Так как $\omega_1 = \omega_2$, то периоды колебаний двух маятников равны. Для математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Следовательно, искомый период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2} \frac{1}{g}}.$$

659. Данная задача решается тем же методом, что и задача 658. Пусть полукольцо первоначально отклонено от положения равновесия на угол α . При движении все точки полукольца имеют одну и ту же линейную скорость. Кинетическая энергия равна $mr^2\omega^2/2$. Изменение потенциальной энергии при повороте полукольца на угол $\alpha - \varphi$ равно

$$mg(2/\pi)r(\cos \varphi - \cos \alpha),$$

так как центр тяжести находится на расстоянии $(2/\pi)r$ от точки O (см. задачу 150).

Приравняв изменение кинетической энергии изменению потенциальной, имеем для ω выражение следующего вида:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{(\pi r/2)}(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Отсюда вытекает, что математический маятник, имеющий длину $\pi r/2$, будет иметь тот же период колебаний, что и полукольцо. Таким образом, искомый период равен $T = 2\pi \sqrt{\pi r/2g}$.

660. В положении равновесия пружина будет растянута на величину l , которая определяется из соотношения $kl = mg$. Положим, что в начальный момент времени груз покоится, а длина пружины по сравнению с равновесным положением изменилась на x_0 . Если теперь систему предоставить самой себе, то груз будет колебаться около положения равновесия с амплитудой, равной $|x_0|$. В случае невесомого блока ($M = 0$) период колебаний $T_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$. Обозначим через x смещение груза, отсчитываемое от положения равновесия. Скорость груза в зависимости от x может быть найдена из закона сохранения энергии

$$\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mgx_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{k(x + l)^2}{2} - mgx.$$

Учитывая, что $mg = kl$, находим $v = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)/m}$.

Если $M \neq 0$, то закон сохранения энергии запишется в форме

$$\frac{k(x_0 + l)^2}{2} - mgx_0 = \frac{(m + M)v^2}{2} + \frac{k(x + l)^2}{2} - mgx.$$

Отсюда следует, что $v = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)/(M + m)}$. Таким образом, во втором случае ($M \neq 0$) груз движется так, как если бы его масса по сравнению с первым случаем увеличилась на M . Следовательно, искомый период $T = 2\pi \sqrt{(m + M)/k}$.

661. При смещении палки относительно положения равновесия на величину x действующая на палку сила окажется равной $F = -\rho g S x$, где ρ — плотность воды. Знак минус означает, что сила направлена против смещения x . Согласно второму закону Ньютона колебания палки определяются уравнением $ma = -\rho g S x$. Это уравнение совершенно аналогично уравнению для колебания груза на пружине: $ma = -kx$. Так как для груза $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m}$, то частота колебаний палки

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \approx 0,25 \text{ Гц.}$$

662. Уравнение движения ртути имеет вид

$$ma = -\rho g S \cdot 2x,$$

где x — смещение уровня ртути от положения равновесия. Уравнение движения имеет ту же форму, что и в случае колебаний груза на пружине. Поэтому $T = 2\pi \sqrt{m/2\rho g S} \approx 1,54$ с.

663. Действующая на тело сила $F = \frac{4}{3}\gamma \rho r m r$, где r — расстояние от центра Земли. Учитывая, что $g = \frac{4}{3}\gamma \rho R$, можно придать этому выражению следующую форму:

$$F = mg \frac{r}{R}.$$

Здесь R — радиус Земли. Уравнение движения тела имеет вид

$$ma = -\frac{mg}{R} r = -kr.$$

Сила пропорциональна смещению от положения равновесия и направлена к центру Земли. Следовательно, тело будет совершать гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/R}.$$

Отсюда период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{R/g}.$$

Тело достигнет центра Земли за время

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21 \text{ мин.}$$

Интересно, что время τ совершенно не зависит от того, на каком расстоянии от центра Земли тело начнет свое движение. (Важно только, чтобы это расстояние было много больше размеров тела.)

664. Сила F , действующая на отклоненный от положения равновесия груз, равна $F = 2f \sin \varphi$ (рис. 483). Так как угол φ мал, то

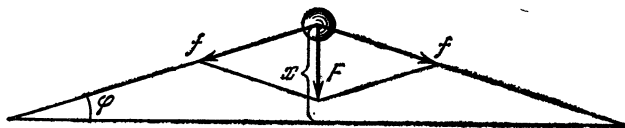


Рис. 483.

можно считать, что $F = 4fx/l$, или $F = kx$, где $k = 4f/l$. Воспользовавшись формулой $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, получаем для искомой величины следующее выражение: $T = 2\pi \sqrt{ml/4f}$.

665. Рассмотрим синфазные колебания двух грузов. При малом отклонении x сила F не изменяется, поскольку изменение длины пружины второго порядка малости и им можно пренебречь. Учитывая только первые степени x , уравнение движения каждого груза

можно записать в виде

$$ma = -Fx/l.$$

Отсюда легко определить период колебаний: $T = 2\pi \sqrt{ml/F}$.

666. Если грузы совершают колебания в противофазе, уравнение движения каждого груза, с точностью до первых степеней x , принимает вид

$$ma = -F \frac{x}{l} - F \frac{2x}{l_1} = -F \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l_1} \right) x.$$

Отсюда $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml l_1}{F(l_1 + 2l)}}$.

667. Можно, постепенно раскачивая дверь с частотой, равной собственной частоте колебаний двери. При резонансе амплитуда колебаний может достигать больших значений.

668. На основании закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\omega^2}{2} (ml^2 + Mr^2) = Mgr\alpha - mgl(1 - \cos \alpha),$$

где ω — угловая скорость вращения блока. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{2(Mgr\alpha - 2mgl \sin^2(\alpha/2))}{ml^2 + Mr^2}}.$$

Необходимым условием возникновения колебательного режима является равенство нулю угловой скорости при некотором значении

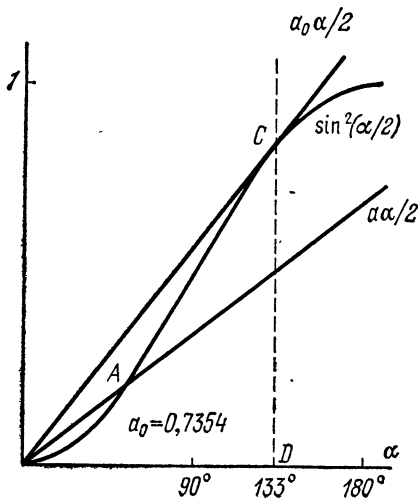


Рис. 484.

угла α . При этом $Mgr\alpha = 2mgl \sin^2(\alpha/2)$, или, введя обозначение $a = Mr/ml$, получим $a\alpha/2 = \sin^2(\alpha/2)$. Каждому значению a соответствует определенное максимальное отклонение от положения равновесия α , которое определяется данным трансцендентным уравнением.

Решение этого уравнения проще всего осуществляется графически. Для этого нужно построить кривую $y = \sin^2(\alpha/2)$ (рис. 484). Тогда пересечение этой кривой с прямой $y = a\alpha/2$ даст точку A , определяющую значение α при данном a . (Значение α , соответствующее пересечению этой прямой с другой ветвью кривой $y = \sin^2(\alpha/2)$, недостижимо при заданных в задаче начальных условиях.)

Очевидно, что наше уравнение имеет решение, отличное от нуля, только при a , меньшем некоторого предельного значения a_0 , которое определяется из условия, что прямая $y = a_0\alpha/2$ касается кривой $y = \sin^2(\alpha/2)$ в точке C . Как видно из рис. 484, $\alpha_0 \approx 133^\circ$. Следовательно, $a_0 = 2CD/\alpha_0 \approx 0,73$. Колебания возможны при $Mr/ml \leq a_0 \approx 0,73$.

669. Ядро водорода состоит из одного протона, масса которого равна m . Ядро дейтерия—дейтрон—состоит из одного протона и одного нейтрона. Масса дейтрона $2m$. Ядро трития состоит из одного протона и двух нейтронов. Масса трития $3m$. Так как силы, действующие во всех трех случаях между ядрами, одинаковые, т. е. одинаков коэффициент жесткости k , то

$$\omega_{H_2} : \omega_{D_2} : \omega_{T_2} = \frac{1}{\sqrt{m}} : \frac{1}{\sqrt{2m}} : \frac{1}{\sqrt{3m}} = \sqrt{6} : \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

670. Обозначим смещение произвольно выбранного i -го атома от положения равновесия через

$$x_i = A \cos(\omega t + i\kappa a),$$

где κ —произвольная величина. Тогда сила, действующая на n -й атом со стороны ближайших соседей, равна

$$F = kA \{ \cos[\omega t + (n+1)\kappa a] + \cos[\omega t + (n-1)\kappa a] - 2 \cos(\omega t + n\kappa a) \}.$$

Из последнего выражения с помощью простых тригонометрических преобразований получаем

$$F = -kA \cos(\omega t + n\kappa a) \cdot 4 \sin^2(\kappa a/2).$$

Запишем уравнение движения n -го атома:

$$ma_n = -kA \cos(\omega t + n\kappa a) \cdot 4 \sin^2(\kappa a/2),$$

где a_n —ускорение n -го атома, равное

$$a_n = -\omega^2 A \cos(\omega t + n\kappa a).$$

Обозначим $\omega_0^2 = k/m$. Из написанных выше выражений получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 \cdot 4 \sin^2(\kappa a/2), \quad \omega = 2\omega_0 \cdot \sin(\kappa a/2).$$

Если рассмотреть цепочку из N атомов, то крайние атомы будут иметь по одному соседу. Чтобы не усложнять расчеты, в данном случае не будем учитывать краевые эффекты и воспользуемся условием периодичности для бесконечной цепочки, т. е. будем считать, что условия колебания атомов, имеющих номера n , $N+n$,

$2N+n$, $3N+n$ и т. д., одинаковы. В этом случае $\cos(\omega t + n\kappa a) = \cos[\omega t + (n+N)\kappa a] = \cos[\omega t + (n+2N)\kappa a]$ и т. д. Отсюда для κ получаем N различных значений:

$$N\kappa a = 2\pi\nu, \quad \kappa = \frac{2\pi}{Na}\nu, \quad \text{где } \nu = 0, 1, \dots, N-1.$$

§ 26. Электрические колебания

671. Без постоянного магнита было бы удвоение частоты колебаний. В этом случае при прохождении через катушку телефона синусоидального тока мембрана совершала бы два колебания за один период колебаний тока, так как график напряженности магнитного поля H , создаваемого этим током, имел бы вид, указанный на рис. 485, а, а сила притяжения мембраны не зависит от знака H .

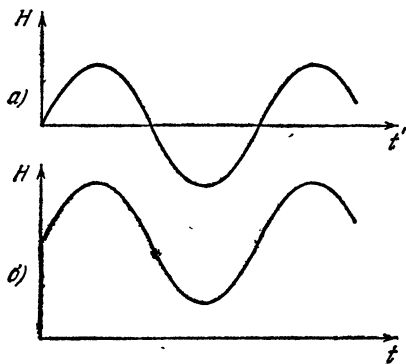


Рис. 485.

При наличии постоянного магнита, создающего напряженность магнитного поля, превышающую максимальную напряженность поля тока, график результирующей напряженности имеет вид, изображенный на рис. 485, б. Поэтому одно колебание тока будет соответствовать одному колебанию мембраны, и звук будет значительно меньше искажаться.

672. Частота собственных колебаний $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$. Так как

$$L = \mu_0 N^2 S_1 / l, \quad C = \epsilon_0 S_2 / d,$$

то

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ld}{\epsilon_0 \mu_0 N^2 S_1 S_2}} \approx 24 \cdot 10^5 \text{ Гц.}$$

673. Частота собственных колебаний контура определяется формулой Томсона $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

1) Если в катушке находится медный сердечник, то при периодических изменениях магнитного поля катушки в нем возникнут индукционные токи (токи Фуко); магнитное поле которых будет ослаблять магнитное поле катушки. Это приведет к уменьшению индуктивности катушки и, следовательно, к увеличению частоты ω .

2) Если внести в катушку сердечник из феррита, то магнитное поле катушки увеличится. Соответственно увеличится индуктивность L катушки, а частота ω уменьшится.

674. В системе возникнут незатухающие (если пренебречь незначительными потерями энергии на излучение электромагнитных волн)

колебания. В момент, когда заряд распределен поровну между конденсаторами, энергия электростатического поля минимальна, но сила тока и энергия магнитного поля максимальны. Полная энергия не изменяется, но происходит переход энергии из одной формы в другую.

675. Смещение электронного луча под влиянием поданного напряжения вдоль вертикали запишется следующим образом:

$$x = \frac{lL}{2dV} V_{10} \cos \omega t = a \cos \omega t$$

(см. задачу 559). Вдоль горизонтали (ось y) смещение луча равно

$$y = \frac{lL}{2dV} V_{20} \cos (\omega t - \varphi) = b \cos (\omega t - \varphi).$$

Для получения траектории нужно исключить из данных уравнений время. После несложных преобразований будем иметь

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Если $\varphi_1 = \pi/2$, то $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Это — уравнение эллипса. Если $\varphi_2 = \pi$, то $x = -(a/b)y$, т. е. колебания луча происходят вдоль прямой, составляющей с осью x угол α , определяемый равенством $\operatorname{tg} \alpha = b/a$ (рис. 486).

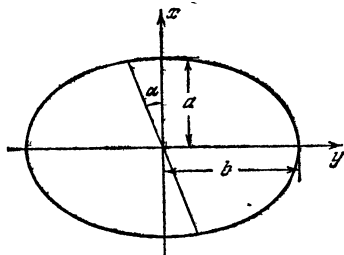


Рис. 486.

676. Зависимость напряжения от времени изображена на рис. 487.

Напряжение на конденсаторе (кривая Oa) возрастает до тех пор, пока не достигнет V_3 . В этот момент лампа зажигается, и конденсатор разряжается через лампу (кривая ab), пока напряжение не

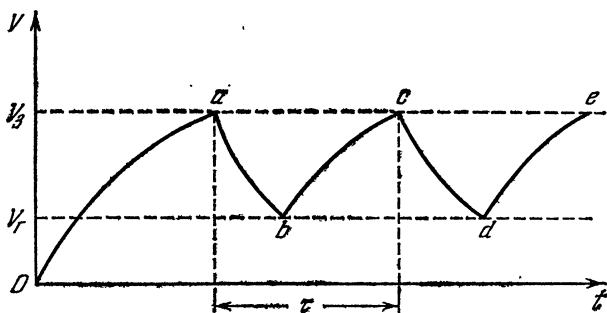


Рис. 487.

падает до V_r . После этого процесс повторяется. Возникают так называемые релаксационные колебания, период которых равен τ .

Ток зарядки и разрядки конденсатора не является постоянным, так как зависит от напряжения на конденсаторе (напри-

мер, при зарядке уменьшается с ростом напряжения). Поэтому Oa , ab , bc и т. д. не являются отрезками прямых.

677. При увеличении емкости время зарядки конденсатора до потенциала V_a и разрядки до V_r увеличится. Следовательно, возрастает и период. Увеличение R вызовет уменьшение тока зарядки конденсатора и, следовательно, также приведет к увеличению периода.

678. Когда заряд на пластинах конденсатора достигнет своего максимального значения, пластины следует раздвинуть. Чтобы преодолеть силы притяжения между пластинами, при этом нужно совершить работу. Эта работа идет на увеличение энергии контура. Когда заряд равен нулю, пластины следует сдвинуть до прежнего положения. При этом энергия в контуре не изменится.

§ 27. Волны

679. Скорость распространения волн определяется силой тяжести. Сила тяжести характеризуется величиной g , которая имеет размерность $[g] = L/T^2$. Чтобы получить величину, имеющую размерность скорости, нам надо ввести характерную величину, имеющую размерность длины. Такой величиной является только длина волны, поскольку глубина сосуда бесконечно велика, а амплитуда колебаний частиц в волне бесконечно мала.

Из g и λ можно сконструировать величину, имеющую размерность скорости, единственным образом, а именно: $c = k \sqrt{g\lambda}$, где k — безразмерный коэффициент. Теоретические расчеты показывают, что $k = 1/\sqrt{2\pi}$.

680. Рассуждая подобно тому, как в задаче 679, можно заключить, что в данном случае скорость распространения волн может определяться только плотностью среды ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ и длиной волны λ . Эти величины имеют следующие размерности:

$$[\rho] = M/L^3, \quad [\sigma] = MT^{-2}, \quad [\lambda] = L.$$

Следовательно, $c = k \sqrt{\sigma/\lambda\rho}$, где k — безразмерный коэффициент. (Его числовое значение $k = \sqrt{2\pi}$.)

$$681. \sin \varphi_1 / \sin \varphi_2 = c_1 / c_2 = \sqrt{h_1 / h_2}.$$

682. Из закона Гука $F/S = E \Delta l / l$ следует, что размерность модуля Юнга есть

$$[E] = M/T^2L.$$

Размерность плотности $[\rho] = M/L^3$. Следовательно, выражение для скорости можно сконструировать в виде $c = k \sqrt{E/\rho}$, где k — безразмерный коэффициент.

683. Натяжение струны нужно увеличить в четыре раза.

684. $v = v_0 n$, где $n = 1, 2, 3, 4, \dots$,

$$v_0 = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \approx 4 \text{ Гц}.$$

685. В трубе должно укладываться целое число полуволин:
 $\frac{\lambda}{2} k = l \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$.

Собственные частоты $\nu_k = c/\lambda = kc/2l = k \cdot 50$ Гц ($c = 340$ м/с — скорость звука в воздухе).

686. Звучание камертона усиливается в момент, когда частота собственных колебаний воздушного столба в сосуде совпадает с частотой камертона. Собственные частоты колебаний воздушного столба в трубе, закрытой с одного конца,

$$\nu_k = \frac{2k + 1}{4} \frac{c}{l},$$

где l — длина трубы, а $c = 340$ м/с — скорость звука в воздухе; k принимает значения 0, 1, 2, 3, ... Следовательно, возможные положения уровня воды в сосуде, определяемые расстоянием от поверхности жидкости до верхнего края сосуда, равны

$$l_k = \frac{2k + 1}{4} \frac{c}{\nu} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

При $l = 1$ м возможны два положения уровня воды: $l_0 = 25$ см и $l_1 = 75$ см.

687. Рассмотрим ряд последовательных положений пули, летящей вдоль KA : K, F, E, D, B, A (рис. 488). В каждой точке пуля создает перед собой сжатие, распространяющееся во все стороны в виде сферического импульса, причем, так как скорость пули v больше скорости звука c , эти импульсы появляются только позади

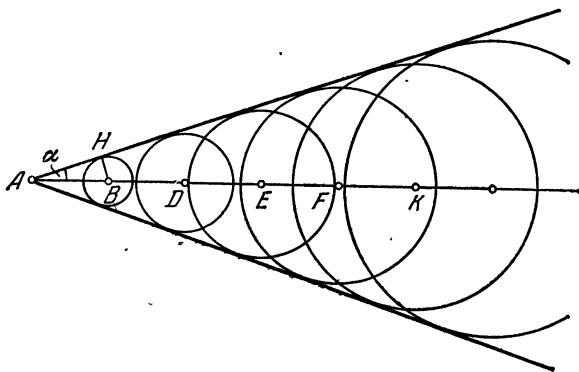


Рис. 488.

пули. В момент, когда пуля находится в точке A , отдельные импульсы изображены на рис. 488 кругами разных радиусов. Огибающая этих сфер — волновой фронт — представляет собой коническую поверхность. Конус движется вперед со скоростью пули. Угол раствора конуса определяется соотношением

$$\sin \alpha = BH/AB = ct/vt = c/v.$$

688. Находящегося в точке B человека (рис. 489) достигает звуковая волна, испущенная в тот момент, когда самолет находился в некоторой точке D (см. решение задачи 687). Расстояние $CB = 6$ км. Искомое расстояние

$$AB = BC / \sin \alpha = BCv/c,$$

где v — скорость самолета, а c — скорость звука. Отсюда $AB = 9$ км.

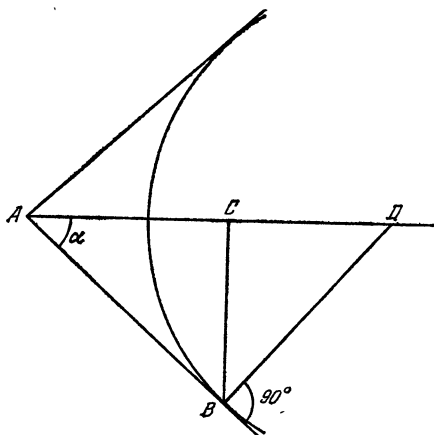


Рис. 489.

689. Обычно скорость ветра на высоте больше, чем у земли. Поэтому волновые поверхности, которые в неподвижном воздухе имеют вид сфер с центром в точке расположения источника звука

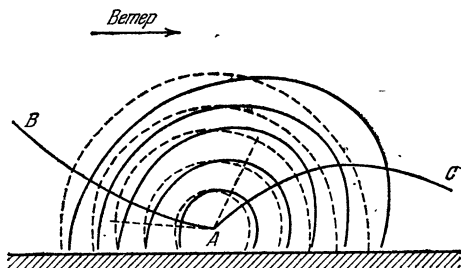


Рис. 490.

(пунктирные линии на рис. 490), изменяют свою форму. В направлении ветра скорость волн больше, чем против ветра. Примерные формы волновых поверхностей изображены на рис. 490 сплошными линиями.

Распространение звука происходит в направлении, перпендикулярном в каждой точке волновым поверхностям. Поэтому звук, распространяющийся против ветра, отклоняется вверх (кривая AB) и не

достигает наблюдателя у поверхности земли. При распространении по ветру звук отклоняется к земле (кривая AC) и достигает наблюдателя.

690. Телевидение осуществляется на длинах волн, меньших 10 м. Ионосфера для этих волн «прозрачна», и отражение волн от нее не происходит. Распространяются же короткие волны практически по прямой, так как на наземных препятствиях (дома и пр.) они почти не испытывают дифракции.

691. Для того чтобы по положению отраженного импульса на экране электронно-лучевой трубки можно было судить о расстоянии до цели, необходимо, чтобы отраженный импульс пришел не ранее, чем через время τ , и не позднее, чем через время $T = 1/f$, после начала посылки прямого импульса. Следовательно, минимальное расстояние до цели $l = c\tau/2 = 120$ м, максимальное расстояние $L = cT/2 \approx 90$ км.

692. Отраженная от крыши волна достигает приемной антенны с запаздыванием $\tau = AB/c = 10^{-5}$ с. Скорость электронного луча вдоль экрана $v = l/\Delta t$, где $\Delta t = \frac{1}{25 \cdot 625}$ с — время, в течение которого луч прочерчивает одну строку. (Временем обратного хода луча пренебрегаем.) Смещение изображений $\Delta l = v\tau \approx 7,8$ см.

693. Емкость C вибратора при его погружении в керосин увеличивается в ϵ раз. Частота собственных колебаний контура пропорциональна $1/\sqrt{C}$. Следовательно, частота колебаний уменьшится в $\sqrt{\epsilon}$ раз. В пустоте частота собственных колебаний вибратора равна $\nu_0 = c/2l$, а в диэлектрике $\nu = c/2l\sqrt{\epsilon}$. Этой частоте в вакууме соответствует длина волны $\lambda = c/\nu = 2l\sqrt{\epsilon} \approx 1,4$ м. Короче этот результат можно получить так. Длина волны в керосине $\lambda = 2l$. В пустоте она увеличивается в $\sqrt{\epsilon}$ раз. Следовательно, $\lambda_0 = 2l\sqrt{\epsilon}$.

Глава V. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 28. Фотометрия

694. Наименьшая освещенность стены зала (рис. 491) $E_1 = (I \cos \alpha)/r^2$. Наименьшая освещенность пола $E_2 = (I \cos \beta)/r^2$. По условию

$$E_1/E_2 = \cos \alpha / \cos \beta = D/2h = 2.$$

Отсюда $h = D/4 = 7,5$ м.

695. Освещенность середины стола $E = I_1/H_1^2 = I_2/H_2^2$, где H_2 — высота второй лампы над столом. Освещенность края стола в первом и во втором случаях равна

$$E_1 = \frac{I_1 H_1}{(H_1^2 + D^2/4)^{3/2}}, \quad E_2 = \frac{I_2 H_2}{(H_2^2 + D^2/4)^{3/2}}.$$

Отсюда

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\left[H_1^2 + \left(\frac{I_1}{I_2} \right) D^2/4 \right]^{3/2}}{(H_1^2 + D^2/4)^{3/2}} = 3.$$

Освещенность края стола уменьшится в 3 раза.

696. Если нормаль к пластинке составляет угол α с направлением AS_1 , то освещенность пластинки

$$E = \frac{I}{a^2} [\cos \alpha + \cos (90^\circ - \alpha)] = \frac{I}{a^2} 2 \cos 45^\circ \cos (\alpha - 45^\circ).$$

Следовательно, освещенность пластинки будет максимальна, если она параллельна стороне треугольника S_1S_2 .

$$E_{\max} = \sqrt{2} I/a^2.$$

697. При использовании вспомогательного источника вместе с эталонным равенство освещенностей имело место при соотношении $I_0/I_1 = r_1^2/r_2^2$, где I_0 — сила света эталонного источника, а I_1 — вспомогательного. Во втором случае равенство освещенностей было достигнуто при $I_x/I_1 = r_3^2/r_4^2$, где I_x — искомая сила света. Отсюда $I_x = r_2^2 r_3^2 / r_1^2 r_4^2 = 400 I_0$.

698. Полный световой поток от лампы $\Phi_0 = 4\pi I$. Если лампа закреплена на потолке, то на стены и пол приходится половина этого потока. Следовательно, искомый поток $\Phi = 2\pi I = 628$ лм.

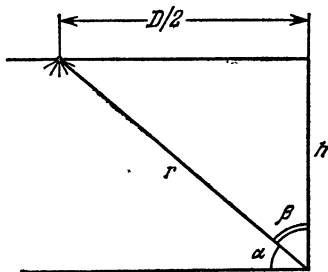


Рис. 491.

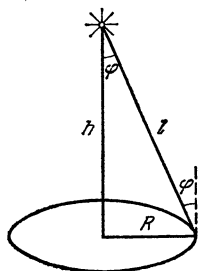


Рис. 492.

699. Количество световой энергии, поглощаемое внутренними стенками цилиндра за единицу времени (световой поток), в обоих случаях одно и то же. Однако площадь внутренней поверхности цилиндра изменится в R_1/R_2 раз. Поэтому освещенность изменится (увеличится) в R_1/R_2 раз, т. е. $E_1/E_2 = R_2/R_1$.

700. Освещенность на краю стола

$$E = \frac{I \cos \varphi}{l^2} = \frac{1}{R^2} \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

где I — сила света лампы, R — радиус стола, φ — угол падения лучей (рис. 492). Максимальное значение E достигается при угле φ , удовлетворяющем уравнению $1 - \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$, т. е. при $\varphi = \arcsin \sqrt{2/3}$. Лампа должна быть повешена над столом на высоте $h = (\sqrt{2/2}) R \approx 0,71 R$.

701. Папиросная бумага рассеивает во все стороны падающие на нее световые лучи. Если бумага находится на некотором рас-

стоянии от текста книги, то расходящиеся пучки света, отраженного от белых участков страницы (между буквами), перекрываются на стороне папиросной бумаги, обращенной к тексту (рис. 493). В результате бумага окажется освещенной приблизительно равномерно, и вследствие рассеяния ею света прочитать текст нельзя.

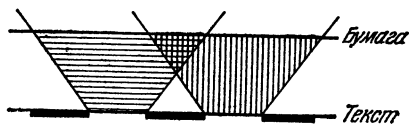


Рис. 493.

Если бумага непосредственно наложена на текст, то освещенность прилегающей к тексту стороны бумаги не будет равномерной. Соответственно интенсивность рассеянного света будет различной в различных участках листа бумаги. Это и позволяет прочесть текст.

§ 29. Основные законы оптики

702. Тень будет всюду одинаково отчетливой только от точечного источника. Отдельные участки протяженного источника создают тени, накладывающиеся друг на друга. При этом тень будет иметь тем более резко очерченную границу, чем меньше расстояние от предмета до поверхности, на которой образуется тень, так как при этом расстояния между границами теней от различных участков источника будут наименьшими. Именно поэтому ноги дают более резкую тень, чем голова.

703. Карандаш нужно расположить параллельно лампе и возможно ближе к столу. При этом тени, создаваемые отдельными участками лампы, будут почти точно накладываться друг на друга. Если карандаш перпендикулярен лампе, то тени от отдельных участков лампы настолько сдвинуты друг относительно друга, что заметной тени не возникнет.

704. Явление можно наблюдать в том случае, если угловое расстояние между ветвями меньше углового диаметра солнечного диска. Предположим для определенности, что нижняя ветвь толще, чем верхняя. Чтобы понять, почему освещенность внутри тени меняется так, как сказано в условии, представим себе, что мы смотрим на Солнце попеременно из различных участков тени.

В стороне от тени солнечный диск виден целиком. При положении глаза в участке тени *A* (рис. 240) глаз находится в полутени от нижней ветки. Перед солнечным диском видна только эта ветка (рис. 494, *a*). Так как она заслоняет часть солнечного диска, освещенность этой точки будет меньше. Перемещая глаз дальше в положение *B* (рис. 240), мы увидим, что и вторая ветка частично загроживает солнечный диск (рис. 494, *b*). Поэтому освещенность будет еще меньше. При дальнейшем перемещении глаз займет положение *C* (рис. 240), при котором обе ветки накладываются друг на друга (рис. 494, *в*). Теперь перекрывая ветками часть солнечного диска стала меньше и, соответственно, освещенность больше. Как виден

солнечный диск из участков D и E , изображено на рис. 494, ε и δ . Этим и объясняется большая яркость центральной полосы тени по сравнению с соседними участками.

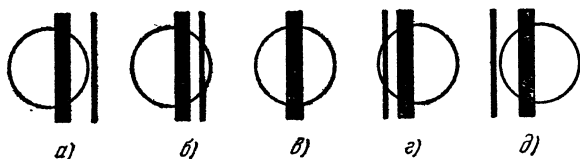


Рис. 494.

705. Как видно из рис. 495, $H = L \sin \alpha$, а $\sin \alpha = b/a$, где $b = DE$ — диаметр поперечного сечения светового конуса у поверхности земли. При угловом размере солнечного диска β получим $L = b/\beta$. Следовательно, $H = \frac{1}{\beta} \frac{b^2}{a} = 9$ м.

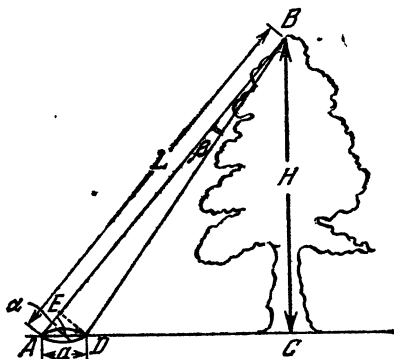


Рис. 495.

706. Высота зеркала должна быть равна половине роста человека. Расстояние нижнего края зеркала от пола должно быть равно половине расстояния от глаз человека до его ступней (рис. 496).

707. Пусть h — высота предмета, а α — угол падения лучей на зеркало (рис. 497). Если экран находится на расстоянии $l \geq h \operatorname{tg} \alpha$ от предмета, то на экране будут видны две тени, прямая и перевернутая, сложенные основаниями. Общая длина тени будет равна $2h$. Тень освещена Солнцем и выделяется по контрасту с остальными участками экрана, освещенными и прямыми, и отраженными лучами. Если экран расположен ближе, то длина тени меньше $2h$, причем на ней будут участки, не освещенные ни прямыми, ни отраженными лучами.

708. Точечный источник света всегда дает «зайчик», форма которого определяется формой зеркала. Солнце имеет конечные размеры. Каждый малый участок светящейся поверхности дает светлое пятно, передающее форму зеркала. Эти пятна от разных участков Солнца накладываются друг на друга и дают более или менее размытую картину. Если поверхность, на которой наблюдается «зайчик», находится далеко

от зеркала, то форма светлого пятна не будет зависеть от формы зеркала. Только на небольшом расстоянии от зеркала пятно будет все же передавать форму зеркала, так как углы, под которыми падают на зеркало лучи от различных участков Солнца, мало отличаются друг от друга.

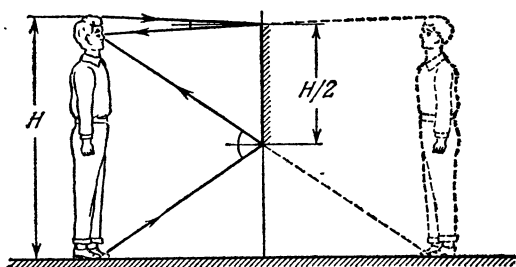


Рис. 496.

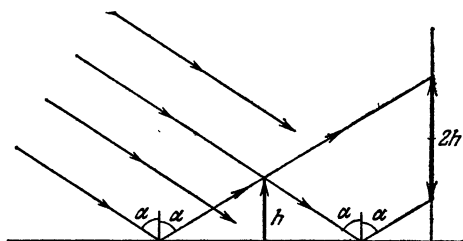


Рис. 497.

709. Отраженный пейзаж мы видим так, как если бы мы смотрели на него из точки, расположенной под поверхностью воды на расстоянии, равном расстоянию объектива фотоаппарата от воды..

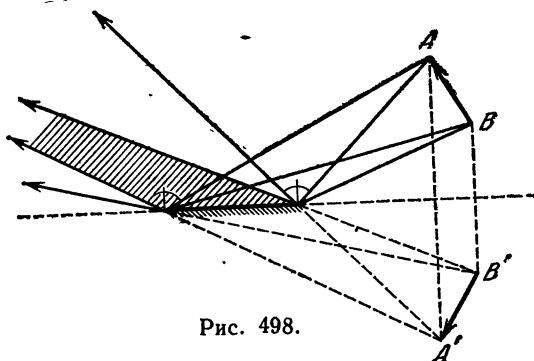


Рис. 498.

710. Изображение отрезка AB будет видно целиком только при расположении глаза внутри заштрихованной области на рис. 498.

711. При движении зеркала MN по направлению к стене положение «зайчика» AB на стене, как непосредственно видно из рис. 499, будет неизменно (S_1 и S_2 — изображения источника S при двух положениях зеркала: MN и $M'N'$). Размеры «зайчика» также не будут

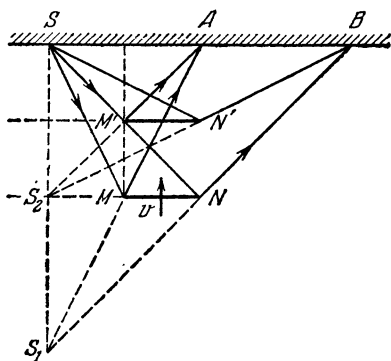


Рис. 499.

меняться, оставаясь все время равными удвоенным размерам зеркала.

712. Если пренебречь потерями при отражении, то освещенность «зайчика» будет всегда в 4 раза меньше, чем освещенность зеркала. В то же время освещенность зеркала меняется ввиду изменения расстояния от лампы до зеркала и изменения угла падения лучей. Для маленького зеркала наибольшая освещенность будет при расстоянии зеркала от стены $l = (\sqrt{2}/2)d$, где d — расстояние от источника света до той точки стены, к которой приближается зеркало.

713. При повороте зеркала на угол α отраженный луч окажется повернутым на 2α , так как угол падения возрастает на α и на столько же возрастает угол отражения. Следовательно, угловая скорость вращения отраженного луча $\omega = 2\pi n \cdot 2$. Линейная скорость движения «зайчика» по экрану $v = 4\pi n R \approx 62,8$ м/с.

714. 1) Луч, отраженный от первого зеркала, составляет с лучом падающим угол 2α , где α — угол падения. За время t зеркало повернется на угол ωt , и новый угол падения станет равным $\alpha + \omega t$. Таким же будет и угол отражения. Следовательно, угол между лучом падающим и лучом отраженным увеличится на $2\omega t$, т. е. отраженный луч повернется на угол $2\omega t$. Ввиду этого угол падения на второе зеркало, если бы оно не вращалось, составлял бы $\beta + 2\omega t$, где β — угол падения при неподвижных дисках. Но за время t зеркало также поворачивается на угол ωt , поэтому угол падения становится равным $\beta + 3\omega t$. Таков же и угол отражения. Следовательно, после двух отражений луч повернется на угол $3\omega t$ от своего направления при неподвижных зеркалах. После трех отражений луч повернется на $5\omega t$, после n отражений — на $(2n - 1) \cdot 2\omega t$. Таким образом, его угловая скорость будет $\Omega = (2n - 1) \cdot 2\omega$.

2) Изображение в зеркале, удаляющемся от источника со скоростью v , будет удаляться от источника со скоростью $2v$, а от второго зеркала — со скоростью $3v$. Поэтому второе изображение движется со скоростью $3v$ относительно второго зеркала и со скоростью $4v$ относительно источника. Скорость третьего изображения относительно источника будет $6v$, а скорость n -го равна $2nv$.

715. 1) При повороте первого зеркала на угол ωt отраженный луч повернется на угол $2\omega t$ (см. решение задачи 714). Следовательно, увеличится на $2\omega t$ угол падения на второе зеркало, и, если бы оно не вращалось, угол отражения также увеличился бы на $2\omega t$. После двух отражений луч повернулся бы по сравнению со случаем неподвижных зеркал на угол $2\omega t$. Однако вследствие вращения

второго зеркала угол падения луча на него за время t уменьшается на ωt . На столько же уменьшается угол отражения, поэтому отраженный луч пойдет по тому же направлению, как и в случае неподвижных дисков. Поскольку такое рассуждение можно провести для любых двух последовательных отражений, угловая скорость вращения луча, испытавшего n отражений, будет

$$\Omega = 0, \text{ если } n \text{ четное; } \Omega = 2\omega, \text{ если } n \text{ нечетное.}$$

2) Первое изображение удаляется от источника со скоростью $2v$, а от второго зеркала — со скоростью v . Следовательно, второе изображение движется относительно второго зеркала со скоростью $-v$, т. е. является неподвижным по отношению к источнику. Продолжая рассуждение далее, найдем, что искомая линейная скорость n -го изображения будет равна нулю, если n четное, и равна $2v$, если n нечетное.

716. Отраженный от зеркала ON луч образует с падающим лучом угол φ (см. рис. 244), не зависящий от угла падения i . Действительно, как видно из треугольника ABC , $\varphi = 180^\circ - 2(i + r)$. В то же время в треугольнике OAB $\alpha + (90^\circ - i) + (90^\circ - r) = 180^\circ$. Отсюда $\varphi = 180^\circ - 2\alpha = 60^\circ$. При вращении зеркала направление отраженного луча не меняется.

Следовательно, если попавший на зеркало OM луч отразится от зеркала ON , то он обязательно попадет в приемник. Как нетрудно видеть из рис. 500, на котором изображены два крайних положения зеркала, при которых луч попадает в приемник (OM , ON и OM' , ON'), это происходит на протяжении $1/6$ оборота. Поэтому $1/6$ часть всей энергии луча попадет в приемник за время одного оборота, а также и за достаточно большой промежуток времени.

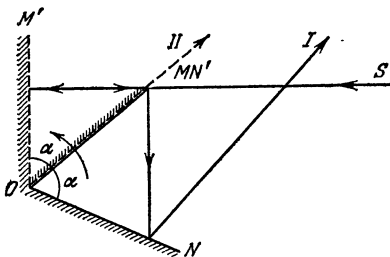


Рис. 500.

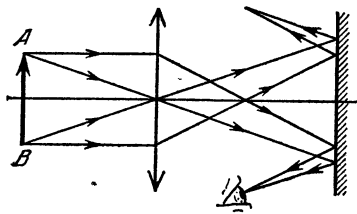


Рис. 501.

717. Нет, так как в глаз будут попадать лучи, дающие изображение только малых участков кадра (см. рис. 501, на котором изображен ход лучей от крайних участков кадра A и B).

718. Из равенства треугольников SOA , SOB , $S_1'OA$, $S_1'OB$ следует (рис. 502), что источник света S , его изображение S_1' в зеркале OB и изображение S_1'' в зеркале OA лежат на окружности с центром в точке O . $\angle S_1'OS = \angle SOS_1' = \varphi$. Мнимый источник S_1' отражается в зеркале AO , давая изображение S_2' , лежащее на той же окружности на расстоянии 2φ дуговых градусов от источника S . Точно так же образуется изображение S_2'' мнимого источника S_1' в зеркале OB .

Продолжая построение дальше, получаем третьи изображения S_3' и S_3'' , отстоящие от источника на 3φ градусов, четвертые S_4' и S_4'' (отстоящие на 4φ градусов) и т. д. Если число n четное ($n=2k$), то изображение S_k' совпадает с S_k'' и будет находиться на одном диаметре с источником. Всего, таким образом, будет $2k-1=n-1$ изображений. Если же n нечетное ($n=2i+1$), то, как легко убедиться, i -е изображения лежат на продолжениях зеркал и, следовательно, совпадают с $(i+1)$ -ми и всеми последующими. Поэтому всего изображений будет $2i$, т. е. по-прежнему $n-1$.

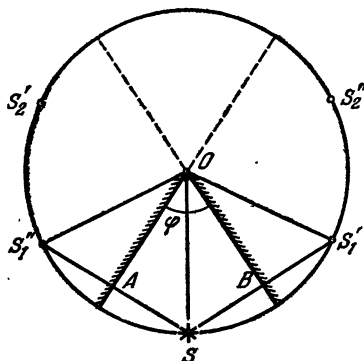


Рис. 502.

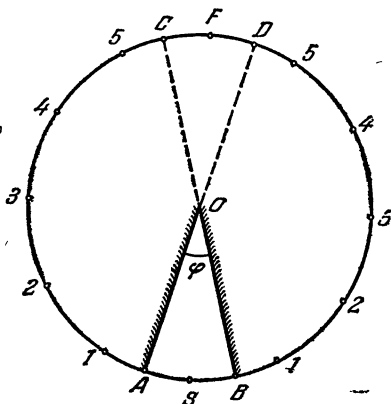


Рис. 503.

719. Используя решение задачи 718, построим последовательно первые, вторые, третьи и т. д. изображения источника S в зеркалах (рис. 503). Все они будут лежать на окружности с радиусом OS и центром в точке O . Если a — целое число, то последние i -е изображения либо попадут в точки C и D пересечения окружности с продолжениями зеркал, либо совпадут с точкой F , диаметрально противоположной источнику. В том и в другом случае число изображений будет $a-1$. Если же a не целое, например $a=2i \pm \xi$, где $\xi < 1$, а i — целое число, то последние i -е изображения будут лежать на дуге CFD , находящейся позади как первого, так и второго зеркала, и, следовательно, дальнейших отражений не будет. Поэтому общее число изображений будет равно $2i$.

720. Построим изображение точки B в зеркале bd (рис. 504). Далее строим изображение B_1 в зеркале cd , B_2 — изображение B_1 в зеркале ac , B_3 — изображение B_2 в зеркале ab . Соединим точки A и B_1 . C — точка пересечения ab с линией AB_1 . Из B_2 проводим линию B_2C . Точку D пересечения этой линии с ac соединим с B_3 . E соединим с B_1 , а F — с B . Можно утверждать, что ломаная линия $ACDEFB$ есть искомая траектория луча. Действительно, так как $\triangle B_2CB_3$ равнобедренный, CD есть отражение луча AC . Аналогично можно убедиться, что DE есть отражение CD и т. д.

Данное решение задачи не является единственным, так как первоначально луч не обязательно направлять на зеркало ab .

721. Коэффициент отражения света от поверхности воды убывает с уменьшением угла падения. Если наблюдатель смотрит вниз, то в его глаз попадают лучи, отраженные под малыми углами. Лучи, отраженные от участков моря у горизонта, попадают в глаз под большими углами.

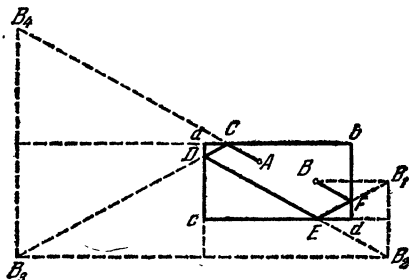


Рис. 504.

722. Согласно закону преломления $\sin i / \sin r = n$ (рис. 505). По выходе из пластинки $\sin r / \sin i_1 = \frac{1}{n}$. Перемножая эти выражения,

получим $\sin i = \sin i_1$, т. е. выходящий из пластинки луч CD параллелен падающему AB . Как видно из чертежа, $\alpha = i - r$. Искомое смещение луча $x = EC = BC \sin(i - r)$. Так как $BC = d / \cos r$, то

$$x = \frac{d \sin(i - r)}{\cos r} = d \sin i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right).$$

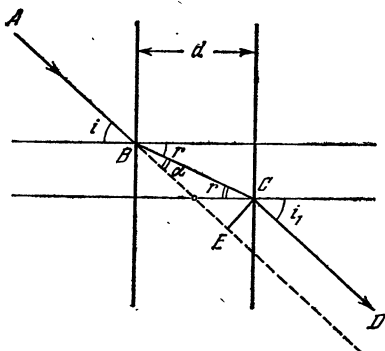


Рис. 505.

Максимальное смещение, равное d , будет при $i \rightarrow 90^\circ$.

723. Угол падения луча на грани AC и BC равен 45° .

Для полного отражения необходимо, чтобы $\sin i > 1/n$. Отсюда $n > \sqrt{2} \approx 1,4$.

724. Угол падения луча на грань BC равен искомому углу α . Для того чтобы луч полностью отразился от грани BC , необходимо, чтобы угол α был больше предельного. Следовательно, $\sin \alpha > n_2/n_1$, где n_2 — показатель преломления воды. Отсюда $\alpha > 62^\circ 30'$.

725. Это явление — не что иное, как мираж, который часто наблюдается в пустынях. Нагретый слой воздуха, непосредственно прилегающий к асфальту, имеет показатель преломления меньший, чем у вышележащих слоев. Вследствие этого происходит полное отражение и асфальт кажется столь же хорошо отражающим свет, как и поверхность воды.

726. Разобьем пластину на множество тонких пластинок столь малой толщины, чтобы в пределах каждой пластинки можно было считать показатель преломления постоянной величиной (рис. 506). Предположим, что луч входит в пластину из среды с показателем

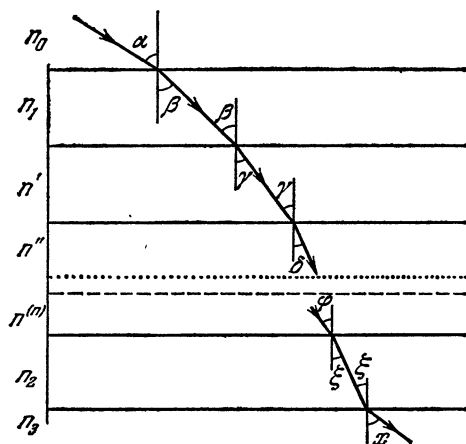


Рис. 506.

преломления n_0 , а выходит из пластины в среду с показателем преломления n_3 . Тогда согласно закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n'}{n_1}, \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{n''}{n'}, \quad \text{и т. д.}$$

$$\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{n^{(n)}}{n''}, \quad \frac{\sin \epsilon}{\sin x} = \frac{n_2}{n^{(n)}}.$$

Перемножив эти равенства, получим $\sin \alpha / \sin x = n_3 / n_0$. Следовательно, угол, под которым луч выйдет из пластины,

$$x = \arcsin \left(\frac{n_0}{n_3} \sin \alpha \right)$$

зависит только от угла падения луча на пластину и от показателей преломления сред по обеим сторонам пластины. В частности, если $n_3 = n_0$, то $x = \alpha$.

Вообще угол θ наклона луча к вертикали связан с показателем преломления n в любой точке пластины соотношением $n \sin \theta = \text{const} = n_0 \sin \alpha$. Если где-либо внутри пластины показатель преломления достигнет значения $n = n_0 \sin \alpha$, то произойдет полное отражение. В этом случае луч выйдет из пластины в среду под тем же углом α , под которым он вошел в пластину (рис. 507).

727. Минимальное количество воды, определяемое уровнем x (рис. 508), можно найти из треугольника MNF . $NF = x - b = x \operatorname{tg} r$.

Из закона преломления $\sin r = \sin i/n$. Следовательно,

$$x = \frac{b}{1 - \operatorname{tg} r} = \frac{b \sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i} \approx 27 \text{ см},$$

так как $i = 45^\circ$, а $n = 4/3$. Необходимый объем воды $V = x a^2 \approx 43,2 \text{ л}$.

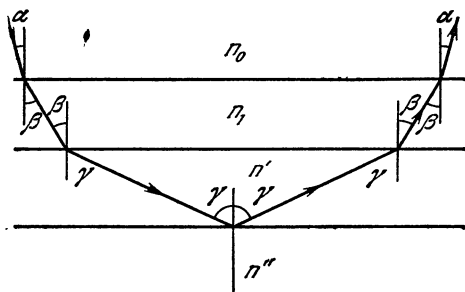


Рис. 507.

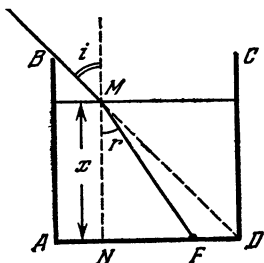


Рис. 508.

728. $\varphi = 120^\circ$.

729. Ход луча в призме изображен на рис. 509. Между углами α и β существует очевидная связь: $2\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 2\beta$. Отсюда $\alpha = 72^\circ$; $\beta = 36^\circ$.

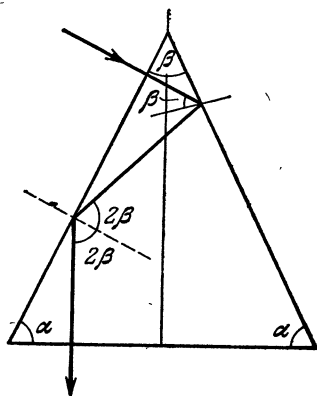


Рис. 509.

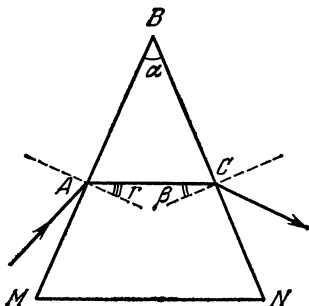


Рис. 510.

730. Ход луча в призме изображен на рис. 510. Чтобы не произошло полного отражения на грани BN , необходимо, чтобы $\sin \beta \leq 1/n$. Как видно из чертежа, $\beta = \alpha - r$. Следовательно, чем больше r , тем больше допустимое значение α . Максимальное r определяется условием $\sin r = 1/n$ (угол падения 90°). Отсюда $\alpha_{\max} = 2 \arcsin(2/3) \approx 83^\circ 40'$.

731. Рассматривая треугольники ABC , AMC и ADC (рис. 511), нетрудно убедиться, что $r + r_1 = \varphi$; $\gamma = \alpha + \beta - \varphi$. По закону преломления

$$\sin \alpha / \sin r = n, \quad \sin r_1 / \sin \beta = \frac{1}{n}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем, что

$$\varphi = \alpha + \beta - \gamma$$

и

$$n = \sin \beta \sqrt{\left\{ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin (\alpha + \beta - \gamma)} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta - \gamma)} \right\}^2 + 1}.$$

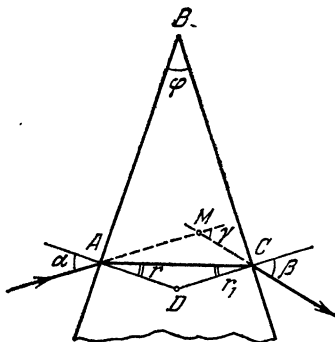


Рис. 511.

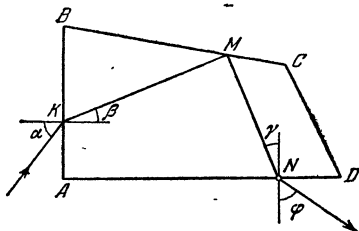


Рис. 512.

732. По условию задачи луч падающий и луч, прошедший через призму, взаимно перпендикулярны. Следовательно, $\angle \varphi = \angle \alpha$, а также $\angle \gamma = \angle \beta$ (рис. 512). Сумма углов четырехугольника $AKMN$ равна 360° . Поэтому $\angle KMN = 90^\circ$ и луч KM падает на грань BC под углом 45° . Зная углы треугольника KBM , нетрудно найти, что $\beta = 30^\circ$. По закону преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Следовательно,

$$\sin \alpha = 0,5n, \quad \alpha = \arcsin 0,5n.$$

Так как полное отражение под углом 45° наблюдается только при $n \geq \sqrt{2}$, то угол α лежит в пределах $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

733. Бумага частично пропускает свет. Однако вследствие ее волокнистого строения и большого числа пор рассеяние света во все стороны очень велико. Поэтому прочесть текст невозможно. Клей или вода, заполняя поры, уменьшают рассеяние света, так как их показатель преломления близок к показателю преломления бумаги. Свет начинает проходить сквозь бумагу, не испытывая значительных отклонений. Вследствие этого текст легко прочесть.

734. На первой границе раздела пучок, несущий энергию E , разделится на два пучка (рис. 513). В первую среду возвратится пучок с энергией pE , внутрь пластины пройдет свет, обладающий энергией $(1-p)E$. На второй границе раздела пучок с энергией $(1-p)E$ снова разделится. Выйдет из пластины во вторую среду

$(1-p)^2 E$. Рассуждая далее аналогично, придем к выводу, что через пластину пройдут и выйдут во вторую среду световые пучки с энергиями $(1-p)^3 E$, $p^2(1-p)^2 E$, $p^4(1-p)^2 E$ и т. д. (рис. 513).

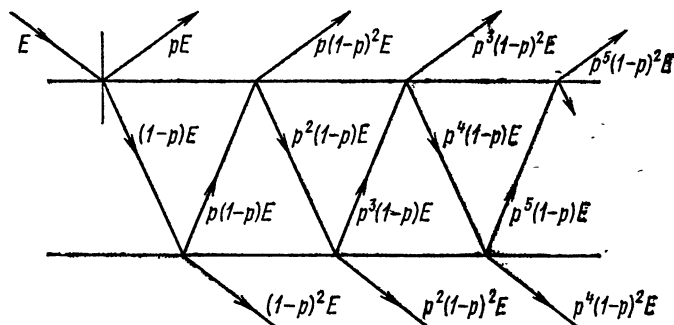


Рис. 513.

Суммарная энергия пучков, вышедших во вторую среду,

$$E_2 = (1-p)^2 E (1 + p^2 + p^4 + \dots) = E \frac{(1-p)^2}{1-p^2} = E \frac{1-p}{1+p}.$$

В первую среду возвратится

$$E_1 = pE + (1-p)^2 Ep (1 + p^2 + p^4 + \dots) = E \frac{2p}{1+p}.$$

Общая энергия

$$E_1 + E_2 = E \frac{2p}{1+p} + E \frac{1-p}{1+p} = E.$$

§ 30. Линзы и сферические зеркала

735. Пусть расстояние от светящейся точки до зеркала равно d , расстояние от изображения до зеркала f . Тогда по формуле вогнутого зеркала

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

По условию $|d-f| = 0,75R$. Решая полученную систему уравнений, находим следующие решения:

$$d_1 = 1,5R, \quad d_2 = 0,25R, \quad d_3 = 0,75R.$$

Четвертое решение $d_4 = -0,5R$ непригодно, так как должно быть $d > 0$.

736. $f = 2R$.

737. Линза рассеивающая. Ее фокусное расстояние равно $3m$.

738. В первом случае фокусное расстояние определяется по формуле

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Так как в пустоте фокусное расстояние линзы равно f , то

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{(n-1)f}.$$

Отсюда $f_1 = \frac{(n-1)f}{n/n_1 - 1} = 90$ см. Во втором случае искомое фокусное расстояние $f_2 = \frac{(n-1)f}{n/n_2 - 1} = -102$ см. Линза будет рассеивающей.

739. Если линза обращена выпуклой стороной внутрь трубки, то $F_1 = \frac{n_1}{n_2 - 1} R$. Если же внутрь трубки обращена плоская сторона линзы, то $F_2 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$.

740. Как показано в решении задачи 738, $-f = \frac{n_2(n_1 - 1)}{D(n_1 - n_2)}$. Отсюда $n_2 = \frac{fDn_1}{fD + 1 - n_1} \approx 1,67$.

741. Обозначим: R — радиус кривизны поверхностей линзы, n_1 — показатель преломления стекла. Тогда

$$\frac{1}{F_1} = (n_1 - 1) \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_1}{n} - 1 \right) \frac{2}{R}.$$

В то же время, если линза находится на границе раздела сред, а лучи идут из воды, то фокус линзы расположен в воздухе на расстоянии F' определяемом из равенства

$$\frac{1}{F'} = \frac{n_1 - n}{R} + \frac{n_1 - 1}{R}.$$

Соответственно, если лучи идут из воздуха, то фокус расположен в воде на расстоянии F'' , причем

$$\frac{n}{F''} = \frac{n_1 - n}{R} + \frac{n_1 - 1}{R}.$$

Из этих четырех уравнений следует:

$$F' = \frac{2F_1F_2}{F_2 + nF_1} = \frac{6F_1F_2}{4F_1 + 3F_2}, \quad F'' = \frac{2nF_1F_2}{F_2 + nF_1} = \frac{8F_1F_2}{4F_1 + 3F_2}.$$

742. Очевидно, что одно из изображений будет мнимым. Поэтому, обозначая через a_1 и a_2 расстояния от источников света до линзы, а через b_1 и b_2 расстояния от линзы до изображений, имеем

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f},$$

причем по условиям задачи $a_1 + a_2 = l$, $b_1 = b_2$. Решая данную систему уравнений, получим

$$a_1 = \frac{l(1 \pm \sqrt{1 - 2F/l})}{2}.$$

Линза должна помещаться на расстоянии 6 см от одного источника и 18 см от другого.

743. Применяя к обоим случаям формулу линзы, получим

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}.$$

По условию задачи $a_2 = a_1 + l$, $b_1/a_1 = k_1 = 3$ (увеличение в первом случае); $b_2/a_2 = k_2 = 2$ (увеличение во втором случае). Отсюда

$$f = \frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} l = 9 \text{ см.}$$

744. 1) Ход лучей в данном случае изображен на рис. 514, а. Используя обратимость световых пучков, можно точку В рассматривать

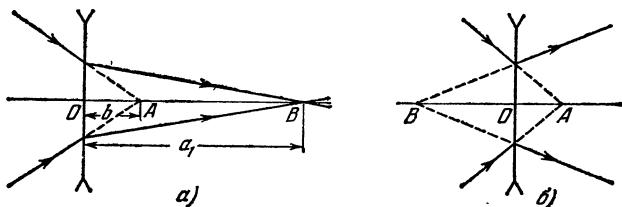


Рис. 514.

как источник света, а точку А — как изображение. Тогда по формуле линзы

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Отсюда $f = a_1 b / (a_1 - b) = 20 \text{ см.}$

2) Ход лучей изображен на рис. 514, б. В данном случае и изображение (точка А) и источник (точка В) являются мнимыми. По формуле линзы

$$-\frac{1}{a_2} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}.$$

Отсюда $f = a_2 b / (a_2 + b) = 12 \text{ см.}$

745. На основании формулы линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{1}{f},$$

где a — расстояние между линзой и лампочкой. Отсюда

$$a^2 - ad + df = 0.$$

Решая данное уравнение, получим

$$a = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - df}.$$

Следовательно, возможны два положения линзы: на расстоянии $a_1 = 70 \text{ см}$ от лампочки и на расстоянии $a_2 = 30 \text{ см}$. При $f' = 26 \text{ см}$ отчетливого изображения на экране не будет при любых положениях линзы, так как для получения изображения необходимо, чтобы $d \geq 4f$.

746. В первом случае $h_1/H = b_1/a_1$, где a_1 и b_1 — расстояния от предмета и изображения до линзы. Во втором случае соответственно $h_2/H = b_2/a_2$. Как вытекает из решения задачи 745, $a_1 = b_2$ и $b_1 = a_2$. Следовательно, $H = \sqrt{h_1 h_2}$.

$$747. F = \frac{n - n_1}{n_1(n - 1)} \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 4 \text{ см.}$$

748. На основании формулы зеркала

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Линейное увеличение зеркала $H/h = b/a$. Угловые размеры изображения в вогнутом зеркале по условию задачи в 1,5 раза больше

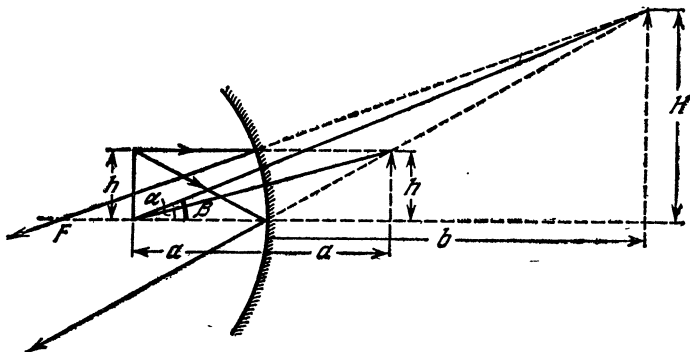


Рис. 515.

угловых размеров изображения в плоском зеркале: $\beta = 1,5\alpha$ (рис. 515). Очевидно, что $\tan \alpha = h/2a$, $\tan \beta = H/(a+b)$. При $h \ll 2a$ углы α и β малы. Для малых углов

$$H/(a+b) \approx 1,5h/2a.$$

Исключая из уравнений неизвестные H/h и b , найдем $f = 3a/2$. Следовательно, $R = 2f = 3a = 6 \text{ м.}$

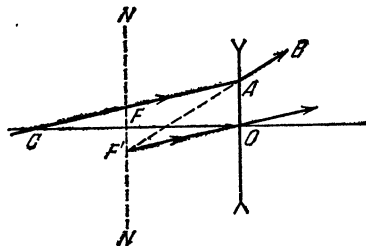


Рис. 516.

749. Искомое построение изображено на рис. 516. Продолжим АВ до пересечения с фокальной плоскостью линзы NN'. Пучок параллельных лучей после преломления в линзе идет так, что продолжения преломленных лучей должны пересекаться в F' . Луч $F'O$ не преломляется. Следовательно, до линзы луч CA, попадающий в точку A, идет параллельно $F'O$.

750. Если A — источник, а B — изображение, то линза собирающая. Положение оптического центра линзы O и ее фокусов F находится построением, изображенным на рис. 517. Если B — источник,

а A — изображение, то линза рассеивающая. Соответствующее построение дано на рис. 518.

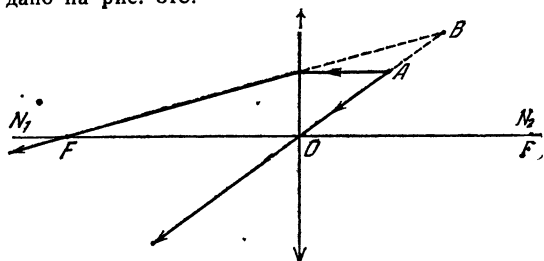


Рис. 517.

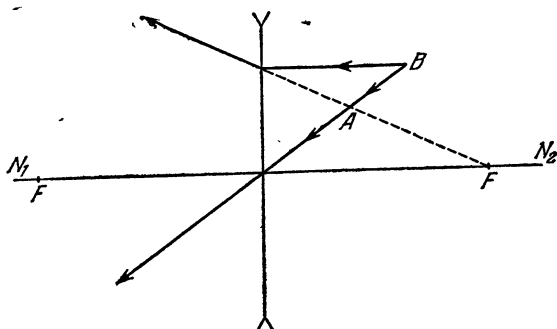


Рис. 518.

751. Центр линзы O — точка пересечения прямых SS' и N_1N_2 . Фокусы легко находятся построением лучей, параллельных главной оптической оси (рис. 519).

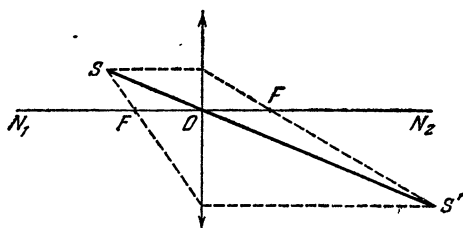


Рис. 519.

752. Опустив перпендикуляр BO на прямую N_1N_2 , находим точку O — оптический центр линзы (рис. 520). Проводим побочную оптическую ось DO , параллельную лучу AB . Продолжим прямую BC до пересечения с DO в точке E , лежащей в фокальной плоскости.

Опустив из E перпендикуляр на N_1N_2 , найдем точку F — один из главных фокусов линзы. Используя свойство обратимости луча, аналогичным образом можно найти другой главный фокус F_1 .

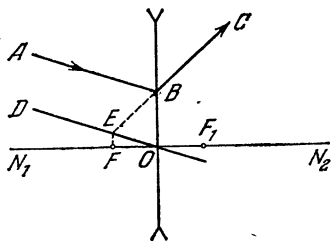


Рис. 520.

753. Изображение S' может быть действительным или мнимым. В обоих случаях для нахождения положения источника проведем произвольный луч ADS' и параллельную ему побочную оптическую ось BOC (рис. 521). Соединив прямыми точки пересечения B и C (побочной оси с фокальными плоскостями) с точкой D , найдем положения источника S_1 (если изображение S' действительное) и S_2 (если изображение S' мнимое).

754. Воспользовавшись тем, что луч, падающий на зеркало в его полюсе, отразится симметрично относительно главной оптической оси, построим симметричную с S' точку S_1 и проведем луч SS_1 до

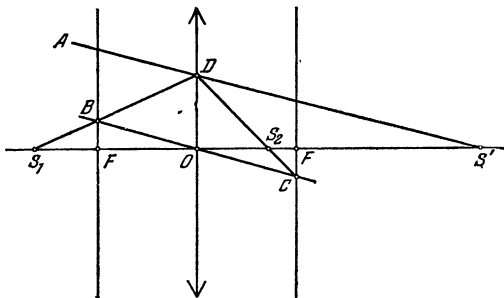


Рис. 521.

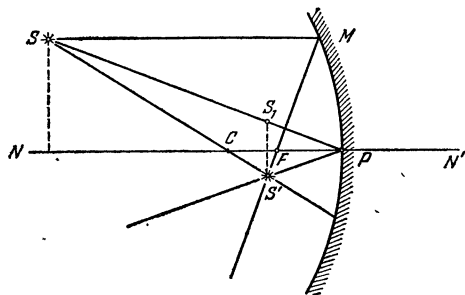


Рис. 522.

пересечения с осью в точке P (рис. 522). Эта точка и будет полюсом зеркала. Оптический центр C зеркала, очевидно, может быть найден как точка пересечения луча SS' с осью NN' . Фокус найдется обычным построением луча SM , параллельного оси, который, отразив-

шись, должен пройти через фокус F (лежащий на оптической оси зеркала) и через S' .

755. 1) Построив, как и в решении задачи 754, луч BAC , найдем точку C (оптический центр зеркала) (рис. 523, а). Полус P можно найти, построив с помощью симметричной точки A' ход отраженного в полюсе луча APA' . Положение фокуса зеркала F найдется с помощью обычного построения луча AM , параллельного оси.

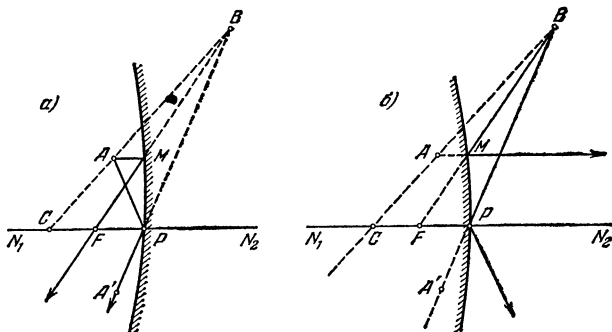


Рис. 523.

2) Аналогичным построением находим центр зеркала C и полюс P (рис. 523, б). Луч BM , отразившись, пойдет параллельно оптической оси зеркала. Поэтому для нахождения фокуса предварительно находим точку пересечения M прямой AM , параллельной оптической оси, с зеркалом, а затем продлеваем BM до пересечения с осью в фокусе F .

756. 1) Лучи, отраженные от плоского зеркала, увеличивают освещенность в центре экрана. Наличие зеркала эквивалентно появлению нового источника (с той же силой света), расположенного от экрана на расстоянии в 3 раза большем, чем первый источник. Поэтому освещенность должна увеличиться на $1/9$ той освещенности, которая была раньше: $E_1 = 2,5$ лк.

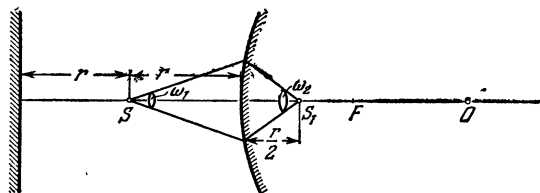


Рис. 524.

2) Вогнутое зеркало расположено так, что источник находится в его фокусе. Лучи после отражения от зеркала идут параллельным пучком. Освещенность по оси пучка параллельных лучей всюду одинакова и равна освещенности, создаваемой точечным источником в ближайшей к нему точке зеркала. Полная освещенность в центре экрана равна сумме освещенностей, созданных самим источником в центре экрана и отраженными лучами: $E_2 = 2 \cdot 2,25$ лк = 4,5 лк.

3) Мнимое изображение точечного источника в выпуклом зеркале находится на расстоянии $2,5r$ от экрана (r — расстояние от экрана до источника). Световой поток Φ , посылаемый этим мнимым источником, равен световому потоку истинного источника, падающему на зеркало: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$.

Так как телесный угол ω_1 потока, падающего на зеркало от источника S (рис. 524), в четыре раза меньше телесного угла ω_2 , внутри которого распространяются лучи от мнимого источника S_1 , то сила света I_2 мнимого источника в четыре раза меньше силы света источника S . Поэтому мнимый источник создает в центре экрана освещенность в $4 \cdot (2,5)^2 = 25$ раз меньшую, чем истинный источник. Следовательно, $E_s = 2,34$ лк.

757. Каждый участок линзы создает полное изображение независимо от других. Поэтому никаких полос на изображении не получится. Оно просто будет менее ярким.

758. Любой участок линзы дает такое же по форме изображение, как и вся линза. Сложную линзу можно поэтому рассматривать как

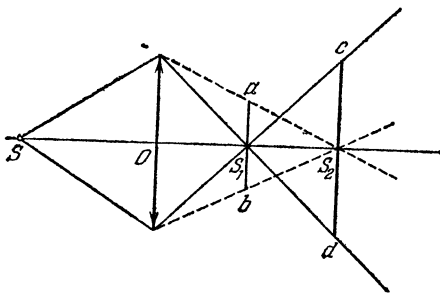


Рис. 525.

две линзы с разными фокусными расстояниями, но с общим оптическим центром. Соответственно эта линза будет давать два изображения: в точке S_1 и в точке S_2 (рис. 525). На экране, расположенном перпендикулярно оптической оси в точке S_1 или S_2 , изображение источника будет окружено светлым ореолом диаметра ab или, соответственно, cd .

759. Для доказательства равенства видимых размеров солнечного диска у самого горизонта и высоко над ним нужно спроецировать солнечный диск в том и другом случае на лист бумаги с помощью длиннофокусной линзы. При этом линза и лист должны быть перпендикулярны солнечным лучам. Линза должна быть длиннофокусной, так как размеры изображения пропорциональны фокусному расстоянию. Измеряя размеры изображений, можно убедиться, что они равны.

§ 31. Оптические системы и оптические приборы

760. Рассеивающую линзу следует расположить на расстоянии 25 см от собирающей. Тогда фокусы рассеивающей и собирающей линз будут совпадать. На рис. 526 изображен ход лучей.

761. Возможны два случая.

1) Зеркало находится на расстоянии $d = f + R$ от линзы. Ход луча, параллельного оптической оси системы, а также изображение предмета AB приведены на рис. 527. Изображение $A'B'$ (прямое и действительное) получается в натуральную величину при любом положении предмета.

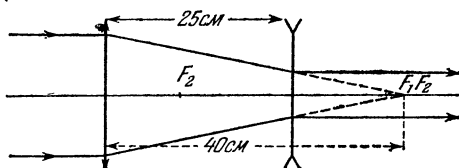


Рис. 526.

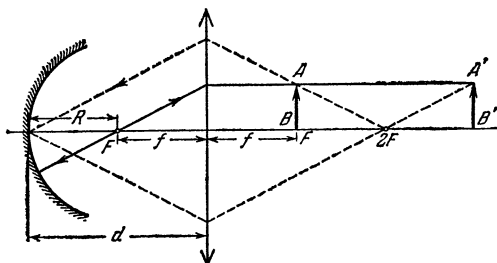


Рис. 527.

2) Зеркало находится на расстоянии $d = f = R$ от линзы (рис. 528). Изображение предмета $A'B'$, также в натуральную величину, будет обратным и мнимым при любом положении предмета.

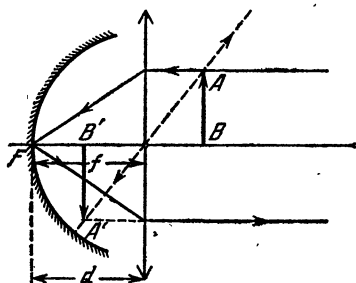


Рис. 528.

762. Ход лучей в данной оптической системе изображен на рис. 529. Первая линза при отсутствии второй дает изображение $A'B'$, находящееся на расстоянии $b_1 = 60$ см от линзы. Это расстояние находится по формуле линзы

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Изображение $A'B'$ является «мнимым» по отношению ко второй линзе. Следовательно,

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2},$$

где $a_2 = b_1 - d = 30$ см. Отсюда $b_2 = 7,5$ см.

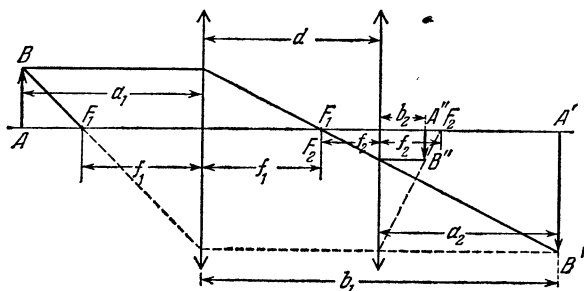


Рис. 529.

763. Из решения предыдущей задачи следует, что в случае двух собирающих линз, находящихся на некотором расстоянии d друг от друга, справедливо равенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{d}{a_2 b_1}.$$

В нашем случае рассеивающая линза расположена вплотную к собирающей ($d=0$), поэтому

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f},$$

где f — искомое фокусное расстояние системы. Отсюда $f = f_1 f_2 / (f_1 - f_2)$.

764. Средняя линза (третья) — собирающая. Если расстояние от предмета до передней линзы системы равно d , то расстояние от задней линзы до изображения $f = F^2/4d$, где F — фокусное расстояние рассеивающей линзы. Увеличение системы $k = F/2d$. При наименьшем расстоянии между предметом и его изображением (это расстояние равно $3F$) $k=1$.

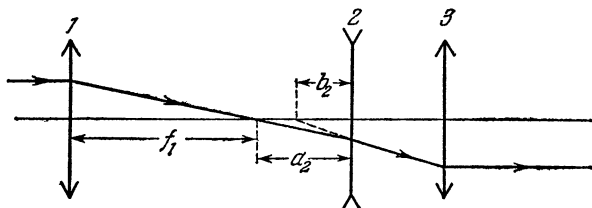


Рис. 530.

765. На вторую линзу падает световой пучок, выходящий из точки, расположенной на расстоянии $a_2 = 5$ см от линзы. Продол-

жения световых лучей, преломленных этой линзой, пересекаются, как вытекает из формулы линзы, на расстоянии $b_2 = 4$ см от нее (рис. 530). Эта точка как раз совпадает с фокусом третьей линзы. Поэтому лучи, вышедшие из системы, пойдут параллельным пучком. Данная система является телескопической.

766. Изображение, даваемое второй системой, получается мнимым. Оно располагается в передней фокальной плоскости первой линзы. Размер изображения 2 мм.

767. Пусть расстояние между линзами равно a . Тогда, если лучи падают сначала на рассеивающую линзу, то уравнение для второй (собирающей) линзы будет иметь вид

$$\frac{1}{F+a} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}.$$

В случае, когда первой стоит собирающая линза, уравнение для рассеивающей запишется в виде

$$-\frac{1}{F-a} + \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F}.$$

Здесь f_1 и f_2 — расстояния от задней линзы до изображения в первом и во втором случаях. По условию $f_1 - f_2 = l$. Из этих равенств $F = l/2 = 10$ см.

768. Диаметр изображения Луны, полученного с помощью одной линзы, $d_1 = \phi F_x$, где ϕ — угловой диаметр Луны. Диаметр действительного изображения, образованного данной системой, $d_2 = \phi F^2/a$, где a — расстояние между линзами, F — их фокусные расстояния (см. решение задачи 767). Следовательно, $F_x = F^2/a = 25$ см.

769. Размер изображения, образованного первой линзой, не зависит от того, рассеивающая эта линза или собирающая. В обоих случаях диаметр изображения равен ϕF , где ϕ — угловой диаметр Луны. Если вторая линза собирающая, то ее увеличение $k_1 = f_1/(F+a) = F/a$. Аналогично, если вторая линза рассеивающая, то $k_2 = f_2/(F-a)$. Отсюда следует, что $k_1 = k_2$ и диаметр окончательного изображения $d = \phi F \cdot F/a = \phi F^2/a$ одинаков в обоих случаях.

770. На рис. 531 изображен ход луча через пластинку от точки S предмета. В результате преломления света пластинкой луч BE кажется выходящим из точки S' ; S' — мнимое изображение S в пластинке. Таким образом, расстояние между изображением предмета в пластинке и линзой $a' = a - SS'$. Смещение $SS' = AD = d - DC$. Считая углы падения на пластинку малыми, имеем

$$DC = \frac{BC}{i} = \frac{d \cdot r}{i} = \frac{d}{n},$$

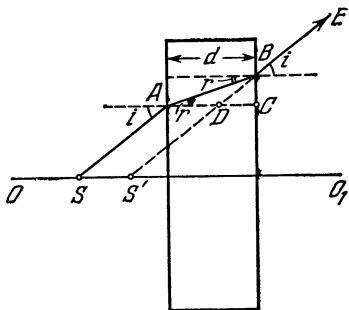


Рис. 531.

так как $i/r \approx n$. Следовательно, $SS' = d(1 - 1/n) = 4$ см. До помещения пластинки экран находился на расстоянии $b = af/(a-f) = 120$ см, после ее помещения — на расстоянии $b' = a'f/(a'-f) = 180$ см. Экран нужно сместить на 60 см.

771. Без зеркала изображение предмета $A'B'$ получится на расстоянии $b = af/(a-f) = 180$ см от линзы (рис. 532). После отражения

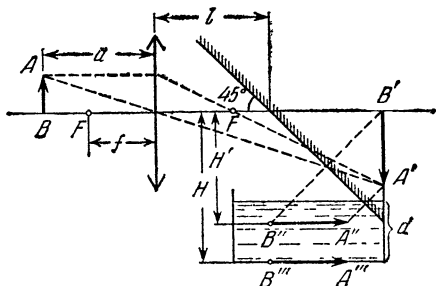


Рис. 532.

в зеркале изображение займет положение $A''B''$ и будет находиться на расстоянии $H' = b - l = 80$ см от оптической оси. Слой воды толщиной d сместит изображение на расстояние $H - H' = d(1 - 1/n)$, где n — показатель преломления воды. Это вытекает непосредственно из

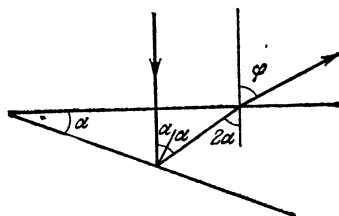


Рис. 533.

решения задачи 770. Следовательно, $H = H' + d(1 - 1/n) = 85$ см.

772. Возможны два случая:

1) Оптическая ось линзы перпендикулярна передней грани клина. Лучи, отраженные от передней грани, пройдя линзу, дадут изображение точечного источника, совпадающее с самим источником.

Лучи, отраженные от задней грани, отклонятся на угол φ (рис. 533), определяемый равенством $\sin \varphi / \sin 2\alpha = n$. Ввиду малости углов $\varphi \approx 2\alpha n$.

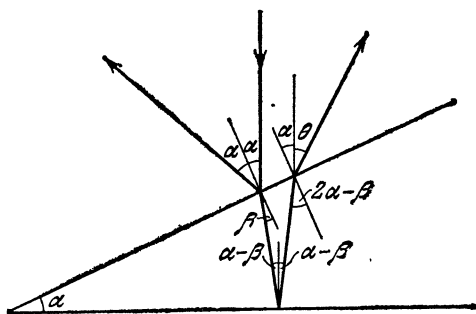


Рис. 534.

Второе изображение источника получится на расстоянии d от первого изображения: $d = f \cdot \varphi = f \cdot 2\alpha n$. Отсюда $n = d/2\alpha f$.

2) Оптическая ось линзы перпендикулярна задней поверхности клина. Лучи, отраженные от передней поверхности, отклонятся на угол $\varphi = 2\alpha$ и дадут изображение, отстоящее от источника на расстоянии $d_1 = 2\alpha f$ (рис. 534). Лучи, отраженные от задней поверхности, отклонятся на угол θ , определяемый из уравнений

$$\sin \alpha / \sin \beta = n, \quad \sin (\alpha + \theta) / \sin (2\alpha - \beta) = n.$$

При малых углах $\theta = 2\alpha(n-1)$. Поэтому второе изображение будет находиться от источника на расстоянии $d_2 = 2\alpha(n-1)f$. Полное расстояние между изображениями $d = d_1 + d_2 = 2\alpha n f$. Отсюда $n = d/2\alpha f$, как и в случае (1).

773. Так как изображение, совпадающее с источником, образуется в результате отражения от части зеркала, не покрытой жидкостью, то очевидно, что источник расположен в центре полусферы O . Найдем положение другого изображения (точка A на рис. 535). По закону преломления

$$\sin \alpha / \sin \beta = n \approx \alpha / \beta, \quad \sin \varphi / \sin \theta = n \approx \varphi / \theta.$$

Как видно из чертежа, $\theta = \beta + 2\gamma$, где $\gamma \approx \alpha - \beta$ — угол падения преломленного луча на зеркало, и $(R-l-h) \operatorname{tg} \varphi \approx (R-h) \operatorname{tg} \alpha$. Пренебрегая h по сравнению с R , из полученной системы уравнений найдем $n = (2R-l)/2(R-l) = 1,6$.

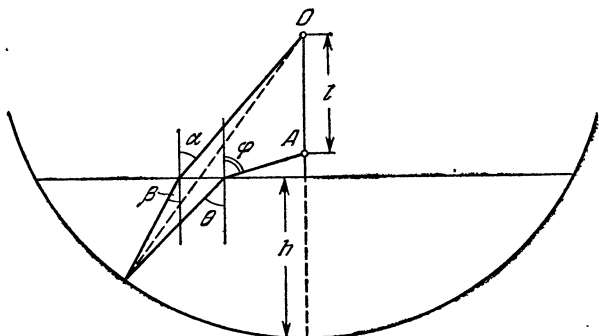


Рис. 535.

774. Получаемое в системе изображение $A'''B'''$ показано на рис. 536. F_1 и F_2 — фокусы линзы и зеркала. $A'B'$ — изображение, даваемое линзой в случае, если ее поверхность не посеребрена.

Изображение $A''B''$, даваемое вогнутым зеркалом, можно построить, учитывая, что луч BO после прохождения линзы и отражения от зеркальной поверхности пойдет по пути OB'' , причем $\angle BOA = \angle B''OA$. Луч BC выходит из линзы параллельно оптической оси системы и после отражения идет через F_2 .

Отраженные от зеркала лучи преломляются в линзе еще раз и дают изображение $A'''B'''$. Точка B''' лежит на пересечении лучей OB'' и CD . Луч OB'' проходит через оптический центр линзы после отражения и потому не преломляется. Луч CD строится следующим

образом. После первого преломления в линзе и отражения луч BC пойдет в направлении F_2 и преломится в линзе еще раз. Его направление после второго преломления находится способом, изложенным в задаче 753: через оптический центр O проводится до пересечения с фокальной плоскостью линзы луч OD , параллельный CF_2 . Тогда, соединяя C и D , получим искомый луч.

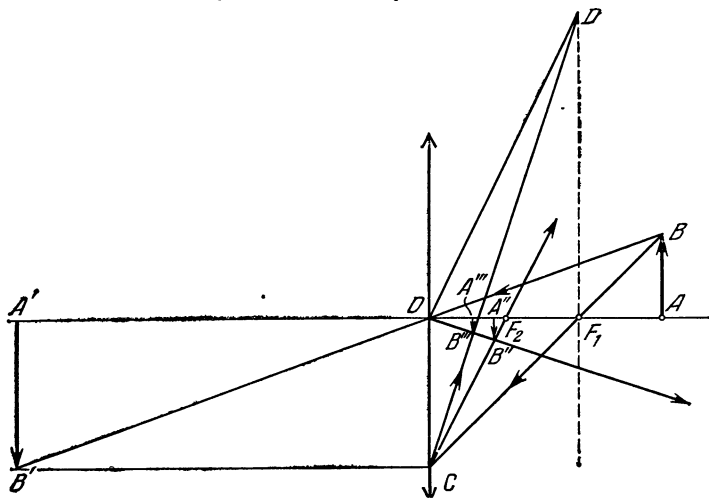


Рис. 536.

Так как лучи преломляются в линзе дважды, фокусное расстояние f системы может быть найдено из соотношения (см. задачу 763)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3},$$

где $f_2 = R/2$ — фокусное расстояние зеркала. Таким образом, $f = f_1 f_2 / (f_1 + 2f_2) = 2,5$ см. Отсюда расстояние b до изображения $A'''B'''$ находится по формуле

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Следовательно, $b = af/(a - f) = 3$ см.

775. Оптическая сила системы равна сумме оптических сил составляющих ее компонентов (если они сложены вплотную). В первом случае

$$\frac{1}{F_1} = (n-1) \frac{1}{R} + (n-1) \frac{1}{R}.$$

Во втором случае

$$\frac{1}{F_0} = (n-1) \frac{1}{R} + \frac{2}{R} + (n-1) \frac{1}{R}.$$

Отсюда $F_2 = F_1 (1 - 1/n)$.

776. Фокусное расстояние тонкой линзы $f = \frac{r}{n-1}$, где r — радиус сферической поверхности. Пусть лучи, параллельные оптической оси сферической поверхности, падают на нее из воздуха (рис. 537). Преломившись на поверхности, луч NK отклоняется на угол $\alpha - \beta$ от оптической оси. Как видно из рис. 537, а, $OP \cdot \operatorname{tg} \alpha = F_1 P \operatorname{tg} (\alpha - \beta)$.

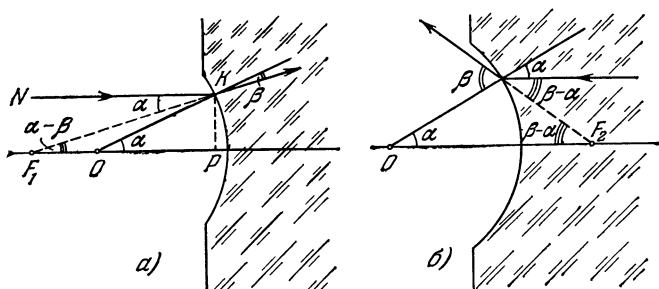


Рис. 537.

По закону преломления $\sin \alpha / \sin \beta = n$. Ввиду малости рассматриваемых углов отсюда вытекает, что $r\alpha \approx f_1(\alpha - \beta)$ и $\alpha = \beta n$. Следовательно,

$$f_1 = \frac{n}{n-1} r = n f.$$

Если же параллельные лучи падают из стекла (рис. 537, б), то аналогичное рассмотрение приводит к уравнениям

$$\sin \alpha / \sin \beta = 1/n, \quad r \operatorname{tg} \alpha = f_2 \operatorname{tg} (\beta - \alpha).$$

Ввиду малости углов $\beta = n\alpha$, $r\alpha = f_2(\beta - \alpha)$. Отсюда $f_2 = r/(n-1) = f$.

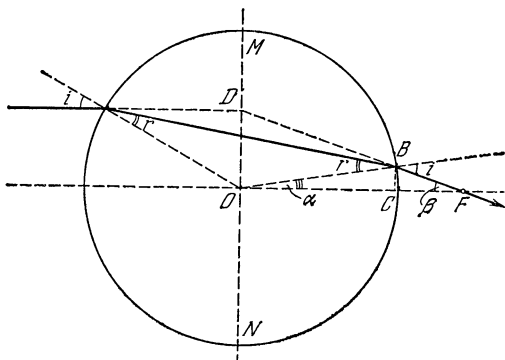


Рис. 538.

777. Возможны два случая: фокус находится вне шара и внутри шара. Рассмотрим сначала первый случай. Ход луча, падающего на

шар под углом i , изображен на рис. 538. Учитывая, что углы i и r малы в соответствии с условием задачи, имеем

$$BC = R \sin \alpha = R \sin (2r - i) \approx R (2r - i) \approx \frac{R \cdot i}{n} (2 - n).$$

Очевидно, что фокус лежит вне шара при $n < 2$. Если $n = 2$, то фокус лежит на поверхности шара. Расстояние

$$CF = BC \cdot \operatorname{ctg} \beta \approx BC / \beta, \quad \beta \approx 2(i - r) \approx 2i(n - 1)/n,$$

как нетрудно определить с помощью рис. 538.

Искомое расстояние $f = R + CF = Rn/2(n - 1)$.

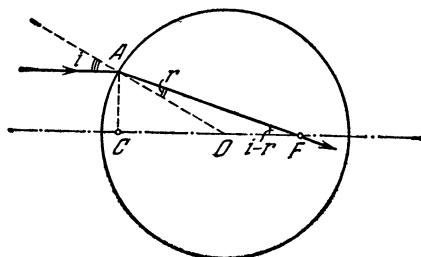


Рис. 539.

Ход луча при $n > 2$ изображен на рис. 539. Искомое расстояние $f' = OF \approx CF - R$. Как видно из рис. 539,

$$CF = AC \operatorname{ctg} (i - r) \approx \frac{AC}{i - r} \approx \frac{R \cdot i}{i - r}.$$

Отсюда $f' = R/(n - 1)$.

778. Преломление лучей от источника на передней поверхности шарика описывается формулой

$$\frac{1}{d} + \frac{n}{f_1} = \frac{n - 1}{R},$$

где f_1 — расстояние от изображения до передней поверхности. От задней (посеребренной) поверхности изображение находится на расстоянии $2R - f_1$. Отражение лучей в образовавшемся сферическом зеркале описывается формулой

$$\frac{1}{2R - f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{R}.$$

Новое изображение находится на расстоянии f_2 от зеркальной задней поверхности и на расстоянии $2R - f_2$ от передней. Расчет преломления на передней поверхности производится по формуле

$$\frac{n}{2R - f_2} + \frac{1}{d} = \frac{n - 1}{R},$$

где учтено, что окончательное изображение получается в воздухе на расстоянии d от шарика.

Решив систему трех уравнений, получим $d_1 = 5R$, $d_2 = -R$. Второе значение соответствует расположению источника в центре шарика, что противоречит условию.

779. Продолжим луч BF до пересечения с продолжением луча, падающего на шар параллельно оптической оси (рис. 538). Нетрудно видеть, что отрезок DO , соединяющий точку пересечения с центром шара, образует с направлением падающего луча прямой угол. Треугольник ODF прямоугольный, так как

$$OF \cdot \beta \approx \frac{R}{2} \frac{n}{n-1} \frac{2i(n-1)}{n} = R \cdot i$$

(см. задачу 777). Следовательно, главные плоскости шара MN совпадают и проходят через его центр.

780. Фокусное расстояние шара

$$f = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1} = 15 \text{ см}$$

(см. задачи 777 и 779). Используя формулу линзы, что допустимо, так как главные плоскости совпадают, найдем расстояние от центра линзы до изображения: $b = af/(a-f) = -15$ см. Изображение мнимое и находится перед шаром.

781. Тонкую стенку сферической колбы можно рассматривать как рассеивающую линзу с фокусным расстоянием

$$f_1 = \frac{1}{(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)} \approx \frac{R^2}{(n-1)\Delta R}.$$

Пройдя две такие линзы, расположенные на расстоянии $2R$ одна от другой (рис. 540), лучи, параллельные главной оптической оси

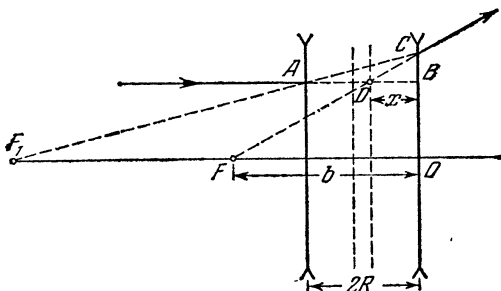


Рис. 540.

(диаметру колбы), преломятся так, что их продолжения пересекутся в фокусе F системы на расстоянии b от второй линзы, причем по формуле линзы

$$\frac{1}{f_1 + 2R} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f_1}.$$

Отсюда $b = f_1(f_1 + 2R)/(f_1 + R)$. Точка D пересечения отрезка AB (продолжение падающего луча) и отрезка CF (продолжение луча

преломленного) лежит на главной плоскости системы находящейся на расстоянии x от второй линзы.

Из подобия треугольников ACB и F_1CO , а также треугольников DCB и FCO следует, что

$$\frac{x}{b} = \frac{2R}{2R + f_1}.$$

Главная плоскость лежит от второй линзы на расстоянии

$$x = \frac{2Rb}{2R + f_1} = \frac{f_1 R}{f_1 + R}.$$

Следовательно, фокусное расстояние системы

$$f = b - x = \frac{f_1^2}{2(f_1 + R)} \approx \frac{f_1}{2} = \frac{R^2}{2(n-1)\Delta R}.$$

В силу симметрии данной оптической системы положения второго фокуса и другой главной плоскости очевидны.

782. Как видно из рис. 541, угол преломления $r = \angle OAB = \angle ABO = \angle OBC = \angle OCB$, а $\angle BAD = \angle BCD = i - r$.

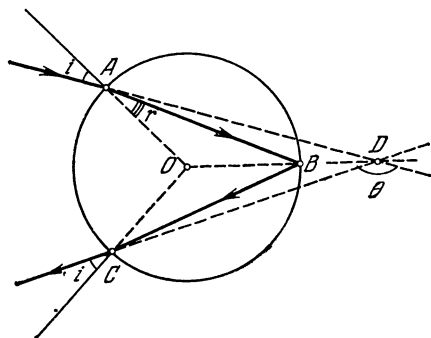


Рис. 541.

В точке A луч поворачивает на угол $i - r$, в точке B — на угол $\pi - 2r$ и в точке C — на угол $i - r$. Следовательно, полный угол отклонения луча от первоначального направления

$$\theta = i - r + \pi - 2r + i - r = \pi + 2i - 4r.$$

Угол r можно найти из соотношения $\sin i / \sin r = n$.

783. При падении на капельку параллельного пучка лучей луч, идущий вдоль диаметра, имеет угол падения $i = 0^\circ$, а лучи, лежащие выше и ниже его, имеют углы падения, принимающие всевозможные значения от 0° до 90° .

1) Используя результаты предыдущей задачи и закон преломления, можно найти значение θ для различных i :

Таблица II

i	θ	i	θ
0°	180°	55°	$138^\circ 20'$
20°	$160^\circ 24'$	60°	$137^\circ 56'$
40°	$144^\circ 40'$	65°	$138^\circ 40'$
50°	$139^\circ 40'$	70°	$140^\circ 44'$

2) График зависимости θ от i изображен на рис. 542.

3) Наименьшее значение угла отклонения приблизительно равно $\theta_{\min} = 138^\circ$. Лучи, вышедшие из капли, идут приблизительно

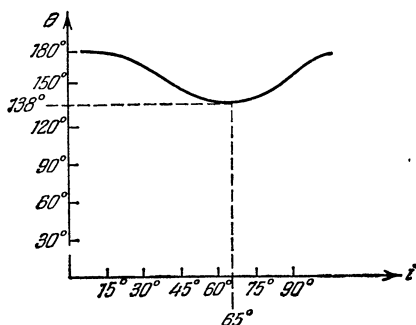


Рис. 542.

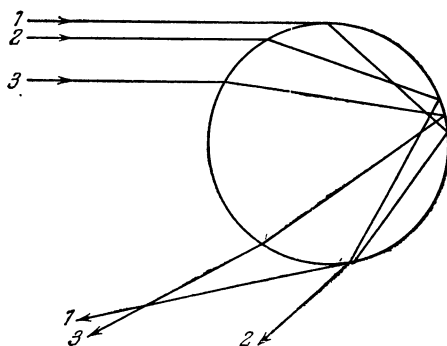


Рис. 543.

параллельно именно при $\theta = \theta_{\min}$, так как при этом, как видно из таблицы и графика, θ меняется наиболее медленно при изменении i . Примерный ход лучей в капле изображен на рис. 543.

784. Матовое стекло нужно, во-первых, для того, чтобы фиксировать плоскость, в которой получается изображение, и, во-вторых, для увеличения угла зрения.

Прозрачное стекло употребляется при рассматривании изображения, даваемого фотообъективом, в микроскоп. Для этого на прозрачном стекле наносят черту, которая фиксирует плоскость наводки, и добиваются резкого изображения в микроскопе этой черты и прилегающего к ней участка картины, даваемой объективом. Матовое стекло в этом случае применено быть не может, так как в микроскоп будут видны все искажения, обусловленные структурой матовой поверхности.

785. 1) Фонари будут казаться одинаково яркими, так как освещенность сетчатки глаза $E = BS/b^2$ одинакова для обоих фонарей. (Здесь B — яркость фонаря, S — площадь входного отверстия зрачка, b — расстояние от хрусталика до сетчатки.)

2) Изображение более удаленного предмета лежит ближе к объективу, чем изображение близкого предмета. Поэтому удаленный фонарь создаст большую освещенность на фотопластинке и изображение его на фотографии будет более ярким.

786. Освещенность фотопластинки $E \sim S/b^2 \sim A(a-f)^2/a^2$, где $A = d^2/f^2$ — светосила объектива, f — фокусное расстояние, a — расстояние от объектива до фотографируемого предмета (см. задачу 785). Отсюда очевидно, что у короткофокусного аппарата выдержка должна быть меньше.

787. Рассмотрим, от чего зависит освещенность изображения. Так как свет исходит от каждой точки протяженного источника, то световой поток Φ , попадающий на линзу, пропорционален площади источника S_1 . Кроме того, световой поток пропорционален телесному углу ω , под которым видна линза из точек источника. Если площадь линзы S_2 , а расстояние от источника до линзы равно d , то $\omega = S_2/d^2$. Таким образом, $\Phi = BS_1\omega$, где коэффициент пропорциональности B характеризует яркость источника.

Световой поток Φ распределяется по площади изображения S_3 . Поэтому освещенность изображения

$$E = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{BS_1\omega}{S_3} = \frac{BS_1S_2}{S_3d^2}.$$

Отношение площадей источника и изображения равно отношению квадратов их расстояний от линзы: $S_1/S_3 = d^2/f^2$. Следовательно, освещенность изображения $E = BS_2/f^2$ зависит при неизменных B и S_2 лишь от расстояния f от линзы до изображения. Используя формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и соотношение $k = f/d$, легко найти $f = F(k+1)$. Поэтому искомое отношение освещенностей

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \left(\frac{k_1+1}{k_2+1} \right)^2 = 4.$$

788. $F = 2al/(a-2l) = 60$ см.

789. Сила света изображения данного точечного источника не зависит от положения экрана. Поэтому $nl/(l-f)^2 = l/f^2$. Это квадратное

уравнение дает два значения f : $f = l/(1 \pm \sqrt{n})$. Применяя формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

получим два значения F :

$$F_1 = \frac{ld}{l+d+d\sqrt{n}} = 12 \text{ см}, \quad F_2 = \frac{ld}{l+d-d\sqrt{n}} = 60 \text{ см}.$$

790. $n = 0,75 + 0,25 \sqrt{E_1/(E_2 - E_1)} = 1,25$.

791. Если лучи падают сначала на собирающую линзу диаметра D (или на заменяющую эквивалентную линзу), весь световой поток Φ , прошедший через линзу, участвует в образовании изображения. Если же первой стоит рассеивающая линза, то часть света проходит мимо второй (собирающей) линзы. «Действующий диаметр» d рассеивающей линзы можно найти из подобия треугольников по формуле $d = \frac{F}{F+a} D$.

Поэтому в образовании изображения участвует световой поток

$$\Phi_1 = \left(\frac{F}{F+a} \right)^2 \Phi \approx \frac{\Phi}{2}.$$

Площадь изображения во всех случаях одинакова. Следовательно, освещенность изображения, если впереди стоит рассеивающая линза, будет в два раза меньше, чем в остальных случаях.

792. Расстояния между Солнцем и Землей и Солнцем и Луной практически равны. Поэтому, если бы Луна и стена имели одинаковые коэффициенты отражения, то яркость их казалась бы одинаковой. Следовательно, можно считать, что поверхность Луны состоит из темных пород.

793. В воздухе внешняя выпуклая роговая оболочка глаза собирает лучи и создает изображение на сетчатке. Хрусталик только помогает ей в этом. Показатель преломления жидкости внутри глаза очень близок к показателю преломления воды. Поэтому в воде роговица почти не преломляет свет и глаз становится крайне дальновзорким. В маске преломляющие свойства роговицы целиком сохраняются.

794. Рассматривая удаленные предметы через очки, человек видит их так же, как видел бы предметы, находящиеся на расстоянии $a_2 = 60$ см, без очков. Поэтому для человека, вооруженного очками (см. решение задачи 763),

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_0},$$

где $a = \infty$.

Для человека без очков

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Здесь b — глубина глаза, $1/f$ — наименьшая оптическая сила глаза, $1/f_0$ — оптическая сила очков. Предполагается, что очки придвинуты вплотную к глазу. Отсюда $f_0 = -a_2$.

Определим теперь положение ближней точки аккомодации глаза, вооруженного очками:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}, \quad \frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_0}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2},$$

и, следовательно, $a_3 = 15$ см.

795. Надев чужие очки, дальнорезкий видит резко только очень удаленные предметы. Следовательно, расстояние a_3 наилучшего зрения глаза дальнорезкого определяется из уравнения

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} = D_1,$$

где a_1 — очень большое расстояние ($a_1 \rightarrow \infty$), D_1 — оптическая сила очков близорезкого.

Оптическую силу D_2 очков, исправляющих дефект зрения дальнорезкого, можно найти по формуле

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_2} = D_2,$$

где $a_0 = 0,25$ м — расстояние наилучшего зрения нормального глаза. Расстояние a_3 наилучшего зрения близорезкого глаза определится из уравнения

$$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_3} = D_1.$$

Если же близорезкий наденет очки дальнорезкого, то расстояние наилучшего зрения, т. е. минимальное расстояние a , на котором близорезкий сможет без напряжения читать мелкий шрифт, можно определить по формуле

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_3} = D_2.$$

Решив эти 4 уравнения, получим $a = 12,5$ см.

796. При рассматривании предмета высотой l с расстояния D угол зрения φ_1 определяется выражением $\varphi_1 = l/D$. Если рассматривать тот же предмет в лупу, то $\varphi_2 = l'/(b+r) = l'/L$, где l' — высота изображения (рис. 544). Угловое увеличение

$$N = \varphi_2/\varphi_1 = l'D/lL = kD/L,$$

где $k = l'/l = b/D = (f+b)/f$ — линейное увеличение, определяемое по формуле линзы (f — фокусное расстояние). Следовательно,

$$N = \frac{D}{f} \frac{b+f}{L} = \frac{D}{f} \frac{L-r+f}{L}.$$

1) При $L = \infty$ $N = \frac{D}{f}$.

2) При $L = D$ $N = \frac{D}{f} + 1 - \frac{r}{f}$.

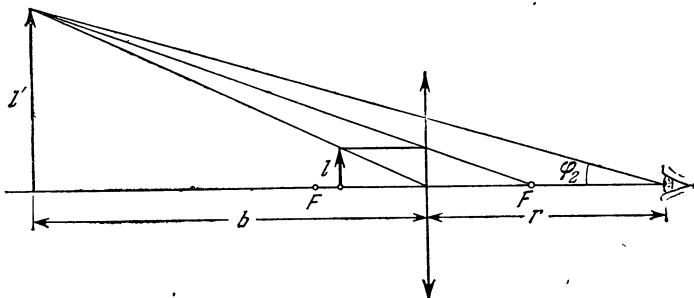


Рис. 544.

797. Увеличение трубы $N = f_1/f_2$, где f_1 — фокусное расстояние объектива, а f_2 — фокусное расстояние окуляра. Так как у установленной на бесконечность трубы расстояние между объективом и окуляром равно $f_1 + f_2$, то $D/d = (f_1 + f_2)/b$. Здесь b — расстояние от окуляра до изображения диафрагмы. По формуле линзы

$$\frac{1}{f_1 + f_2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}.$$

Исключая из этих уравнений b , найдем $D/d = f_1/f_2 = N$.

798. Резкие изображения удаленных предметов будут получаться при двух различных положениях собирающей линзы. Ее можно поместить перед рассеивающей линзой или за ней.

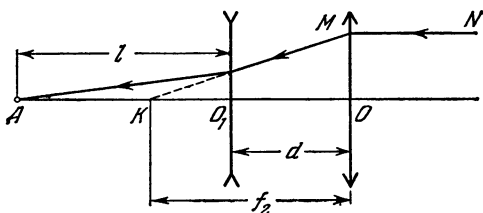


Рис. 545.

Для первого расположения расстояние d между линзами можно найти, рассматривая точку K как мнимое изображение точки A в рассеивающей линзе (рис. 545):

$$-\frac{1}{f_2 - d} + \frac{1}{l} = -\frac{1}{f_1}.$$

Луч MN параллелен оптической оси системы. Отсюда

$$d = f_2 - \frac{f_1 l}{f_1 + l} = 3,5 \text{ см.}$$

Для второго расположения (собирающая линза за рассеивающей) ход лучей изображен на рис. 546. Рассматривая точку A как изображение K в собирающей линзе, применим формулу линзы

$$\frac{1}{f_1 + d} + \frac{1}{l - d} = \frac{1}{f_2}.$$

Отсюда

$$d = \frac{l - f_1}{2} \pm \frac{l + f_1}{2} \sqrt{1 - \frac{4f_2}{l + f_1}}.$$

Расстояние между линзами может быть $d_2 = 35$ см или $d_3 = 5$ см.

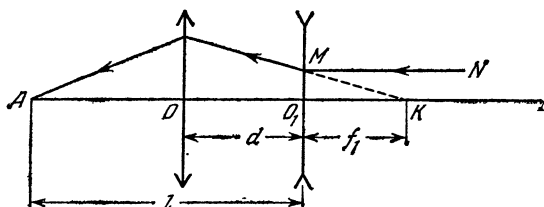


Рис. 546.

799. Пусть лучи, идущие от одного из концов диаметра видимого диска Луны, направлены вдоль оптической оси системы. Они дадут изображение на оптической оси в точке A , отстоящей на расстояние $l = 45$ см от рассеивающей линзы (рис. 547). Лучи, идущие от другого конца диаметра, составляют с первыми лучами по условию угол φ .

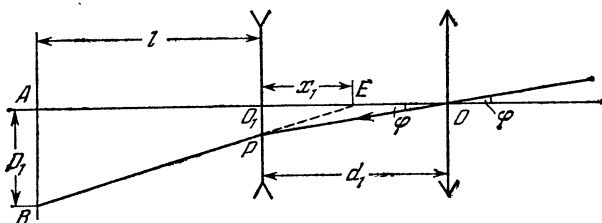


Рис. 547.

Пройдя систему, они дадут изображение (точка B), лежащее в плоскости, перпендикулярной оптической оси и отстоящей от рассеивающей линзы на то же расстояние l .

Для нахождения диаметра изображения $D_1 = AB$ рассмотрим ход луча, проходящего через оптический центр первой линзы. При первом расположении линз собирающая линза помещена перед рас-

сеивающей на расстоянии $d_1 = 3,5$ см. В этом случае, рассматривая точку E как мнимое изображение точки O , можно написать

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{f_1}.$$

Используя подобие треугольников ABE и O_1PE и учитывая, что $O_1P = d_1 \tan \varphi$, получим

$$\frac{D_1}{l + x_1} = \frac{d_1 \tan \varphi}{x_1} \approx \frac{d_1 \varphi}{x_1}.$$

Исключая x_1 из данных уравнений, найдем $D_1 = 0,72$ см.

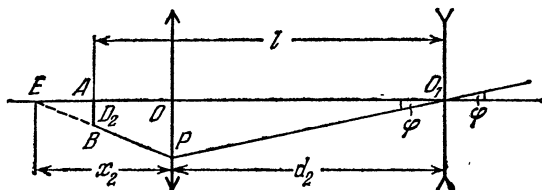


Рис. 548.

Для второго расположения линз ($d_2 = 35$ см) ход лучей изображен на рис. 548. Величину изображения Луны D_2 можно найти из уравнений

$$\frac{D_2}{(x_2 + d_2) - l} = \frac{d_2 \tan \varphi}{x_2} \approx \frac{d_2 \varphi}{x_2}$$

(рассматривая треугольники EOP , EAB и OPO_1),

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f_2}$$

(рассматривая E как изображение O_1). Отсюда $D_2 \approx 0,011$ см.

Для третьего расположения ($d_3 = 5$ см) ход лучей будет несколько иным (рис. 549) по сравнению с изображенным на рис. 548.

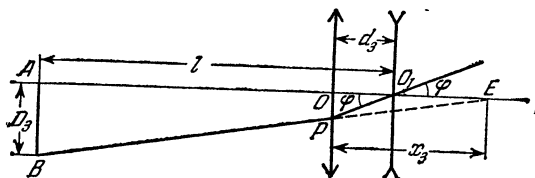


Рис. 549.

Уравнения для определения D_3 запишутся по аналогии с предшествующими случаями так:

$$\frac{D_3}{(l - d_3) + x_3} = \frac{d_3 \tan \varphi}{x_3} \approx \frac{d_3 \varphi}{x_3}, \quad \frac{1}{d_3} - \frac{1}{x_3} = \frac{1}{f_2}.$$

Отсюда $D_3 = 0,18$ см.

800. Из формулы линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_{об}}$$

следует, что увеличение объектива $k_1 = b/a = F_{об}/(a - F_{об}) = 30$. Действительное обратное увеличенное изображение предмета, даваемое объективом, рассматривается через окуляр, как через лупу, причем в первом случае мнимое изображение, даваемое этой лупой, располагается от глаза на расстоянии $D = 25$ см. По формуле лупы

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{D} = \frac{1}{F_{ок}},$$

где a_1 — расстояние изображения, даваемого объективом, до окуляра. Увеличение окуляра $k_2 = D/a_1 = (D + F_{ок})/F_{ок} = 6$. Полное увеличение микроскопа $k = k_1 k_2 = 180$ раз. Во втором случае $k_2 = D/F_{ок} = 5$ и $k = k_1 k_2 = 150$ раз.

Глава VI. ФИЗИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 32. Интерференция света

801. Нет. Наличие минимумов освещенности в интерференционной картине означает, что световая энергия не поступает в данные участки пространства.

802. В произвольной точке экрана C будет наблюдаться максимум освещенности, если разность хода $d_2 - d_1 = k\lambda$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ —

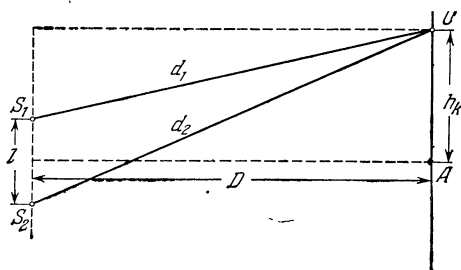


Рис. 550.

целые числа (рис. 550). По теореме Пифагора

$$d_2^2 = D^2 + (h_k + l/2)^2, \quad d_1^2 = D^2 + (h_k - l/2)^2.$$

Отсюда

$$d_2^2 - d_1^2 = (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2h_k l.$$

В соответствии с условием задачи $d_2 + d_1 \approx 2D$. Следовательно, $d_2 - d_1 = k\lambda \approx 2h_k l/2D$. Расстояние k -й светлой полосы от центра экрана $h_k = k\lambda D/l$. Расстояние между полосами $\Delta h = h_{k+1} - h_k = \lambda D/l$.

803. Расстояние между интерференционными полосами $\Delta h = \frac{\lambda D}{l}$ (см. задачу 802). В данном случае $D = AB \approx a + b$, а $l = S_1 S_2$ — расстояние между изображениями S_1 и S_2 источника S в плоских зеркалах (рис. 551). l можно определить из треугольника $S_1 S B$:

$$l/2 = 2b\alpha/2, \text{ или } l = 2b\alpha.$$

Следовательно, $\Delta h = \lambda (a + b) / 2b\alpha$.

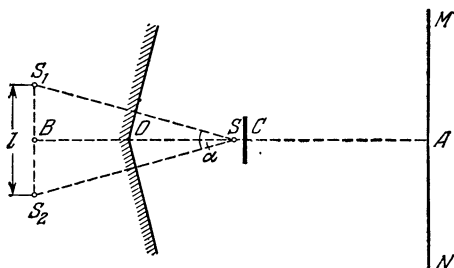


Рис. 551.

804. Второй когерентный источник получается в опыте Ллойда путем отражения лучей от зеркала AO . При отражении происходит изменение фазы на π (потеря полуволны), поэтому в точке O , где должна была бы наблюдаться светлая полоса, произойдет гашение колебаний — минимум освещенности. По сравнению с задачей 802 вся картина окажется сдвинутой на ширину светлой (или темной) полосы.

805. Усиление освещенности на экране получается, когда разность хода $d_2 - d_1 = k\lambda$. Геометрическое место точек экрана, до которых лучи от обоих источников доходят с такой разностью хода, есть

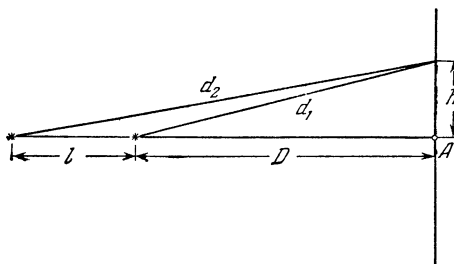


Рис. 552.

окружность с центром в точке A (рис. 552). Следовательно, интерференционные полосы будут представлять собой концентрические окружности.

В случае $l = n\lambda$ в точке A будет наблюдаться усиление освещенности (интерференционный максимум n -го порядка). Ближайшая светлая интерференционная полоса (окружность) $(n - 1)$ -го порядка

находится от точки A на расстоянии, определяемом из уравнения

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(n\lambda + D)^2 + h_{n-1}^2} - \sqrt{D^2 + h_{n-1}^2} = (n-1)\lambda.$$

Приняв во внимание условия задачи $\lambda \ll D$, $\lambda \ll l$, получим

$$h_{n-1} \approx \sqrt{\frac{2D(D+n\lambda)}{n}} = \sqrt{2D\lambda\left(\frac{D}{l} + 1\right)}.$$

806. Разность хода лучей для k -го светлого кольца

$$d_2 - d_1 = \sqrt{(2n\lambda)^2 + r_k^2} - \sqrt{(n\lambda)^2 + r_k^2} = k\lambda.$$

Отсюда $r_k = \frac{\lambda}{2k} \sqrt{(9n^2 - k^2)(n^2 - k^2)}$.

807. Для создания второго когерентного источника, расположенного ближе к экрану, чем первый, можно использовать полупрозрачную пластину с отверстием. На основании принципа Гюйгенса отверстие можно рассматривать как вторичный источник. На экране получается интерференционная картина. Если расстояние между источниками велико, то для получения интерференционной картины необходимо располагать источником, дающим волны, очень близкие к монохроматическим.

808. Чтобы найти искомое расстояние Δh , нужно предварительно вычислить расстояние l между мнимыми источниками S_1 и S_2 , расположенными на пересечении продолжений лучей, преломленных гранями призмы. Для этого проще всего рассмотреть ход луча, падающего на грань призмы нормально (рис. 553). Такого луча в действительности нет, но можно построить его, мысленно продолжив верхнюю призму вниз. Все преломленные призмой лучи от точечного

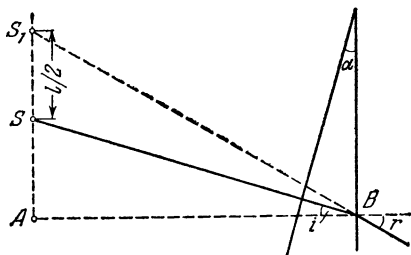


Рис. 553.

источника можно считать сходящимися в точке, и такой прием вполне допустим. Так как преломляющий угол призмы мал (призма тонкая), то мнимые изображения S_1 и S_2 источника можно считать лежащими на том же расстоянии от призмы, что и источник S . Как видно из рис. 553, $i = \alpha$ и $SA = \alpha\alpha$. По закону преломления $r \approx n\alpha$. Рассматривая треугольник AS_1B , можно записать

$$\frac{l}{2} + \alpha\alpha \approx \alpha n\alpha.$$

Отсюда $l = 2a\alpha(n-1)$. Используя решение задачи 802, находим

$$\Delta h = \frac{\lambda D}{l} = \frac{\lambda(a+b)}{2a\alpha(n-1)} = 0,15 \text{ см.}$$

809. $N = L/\Delta h$, где L — ширина интерференционной картины. Как видно из рис. 260, $L = (b/a)l$. Используя результаты предыдущей задачи, получим

$$N = \frac{4ab\alpha^2(n-1)^2}{(a+b)\lambda} \approx 5.$$

810. Бипризма, изготовленная из вещества с показателем преломления n_2 , отклоняет лучи на угол

$$\varphi_1 = (90^\circ - \beta/2)(n_2 - n_1),$$

где n_1 — показатель преломления среды, из которой падают лучи. Для бипризмы, находящейся в воздухе,

$$\varphi_2 = (90^\circ - \delta/2)(n_2 - 1).$$

В случае эквивалентности бипризм $\varphi_1 = \varphi_2$. Отсюда

$$\delta = \beta \frac{n_2 - n_1}{n_2 - 1} + 180^\circ \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1}.$$

Для заданных в условии величин $\delta \approx 179^\circ 37'$.

811. Ход лучей в системе изображен на рис. 554. S_1 и S_2 — изображения источника S в половинках линзы. Очевидно, что $b = fa/(a-f)$.

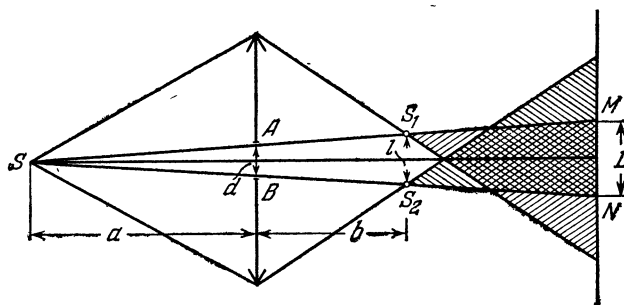


Рис. 554.

Из подобия треугольников SAB и SS_1S_2 можно найти расстояние l между S_1 и S_2 : $l = ad/(a-f)$. Расстояние между соседними интерференционными полосами на экране

$$\Delta h = \frac{\lambda(D-b)}{l} = \frac{\lambda}{ad}(Da - Df - af) = 10^{-2} \text{ см}$$

(см. задачу 802). Искомое число интерференционных полос

$$N = \frac{L}{\Delta h} = \frac{d(D+a)}{a\Delta h} = 25.$$

812. Расстояние между минимыми источниками S_1 и S_2 можно найти методом, изложенным в решении задачи 811 (рис. 555). Расстояние между интерференционными полосами

$$\Delta h = \frac{\lambda (Df - Da + af)}{da}.$$

Число полос на экране $N = L/\Delta h$, где $L = Df/b$ — размер участка экрана, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Отсюда

$$D = \frac{Nabf\lambda}{adl + abN\lambda - bfN\lambda} = 15 \text{ см.}$$

Максимально возможное число полос найдется из условия

$$adl + Nab\lambda - bfN\lambda = 0$$

(при этом $D \rightarrow \infty$). Следовательно

$$N_{\max} = \frac{adl}{bf\lambda - ab\lambda} = 5.$$

Число полос получается конечным, так как по мере удаления экрана одновременно с увеличением размеров участка экрана, на котором возникает интерференционная картина, растет расстояние между полосами.

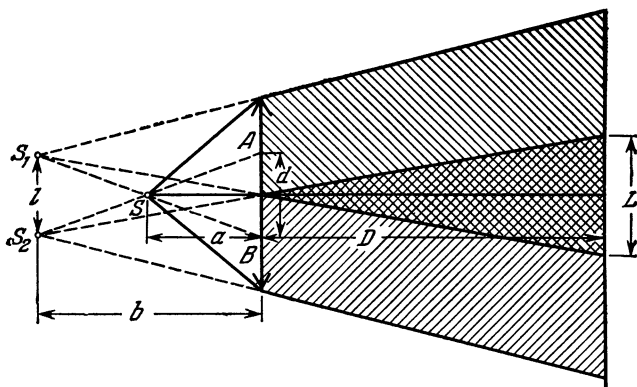


Рис. 555.

813: Расстояние между интерференционными полосами не будет зависеть от положения экрана только в том случае, если источник расположен в фокальной плоскости линзы. Это непосредственно вытекает из выражения

$$\Delta h = \frac{\lambda}{ad} (Df - Da + af),$$

которое получено при решении задачи 812. Если $a=f$, то $\Delta h = \lambda f/d = 10^{-2}$ см при любом D .

Ход лучей для данного случая изображен на рис. 556. Как видно из этого рисунка, число интерференционных полос будет максимально, когда экран займет положение AB . Расстояние экрана до линзы можно найти из треугольника OAB , учитывая, что угол $\alpha \approx d/f$, а $AB=R$: $D=Rf/d=2$ м.

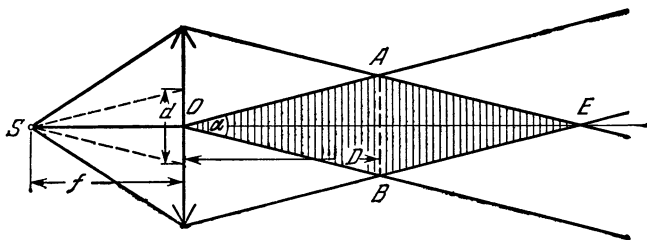


Рис. 556.

814. Внутри стекла длина световой волны уменьшается в n раз, так как частота не изменяется, а скорость уменьшается в n раз. Вследствие этого между когерентными волнами в пучках возникает дополнительная разность хода. На расстоянии d_1 в верхнем пучке уложится $k_1=d_1n/\lambda$ длин волн, а в нижнем на том же расстоянии уложится $k_2=d_2n/\lambda+(d_1-d_2)/\lambda$ длин волн. Световые волны в любой точке экрана окажутся дополнительно сдвинутыми друг относительно друга на k_1-k_2 длин волн. Вследствие этого вся интерференционная картина сместится вверх на $k_1-k_2=\frac{d_1-d_2}{\lambda}(n-1)=100$ полос. Процесс смещения можно наблюдать в момент введения пластин. После того как пластины введены, интерференционная картина на экране будет иметь прежний вид.

815. Толщина линзы слишком велика. Интерференция имеет место только в случае тонких пленок. Воздушная прослойка вблизи соприкосновения линзы и стекла является тонкой.

816. Нет, не изменится. Разность хода между волнами, встречающимися на экране от источников S и S_1 или S и S_2 , велика. В этих условиях спектры различных порядков, соответствующие спектральному интервалу источника, налагаются друг на друга подобно тому, как это имеет место при отражении волн от границ толстой пленки. Если ширму убрать, то это приведет только к наложению на интерференционную картину от источников S_1 и S_2 монотонно меняющейся освещенности.

817. При наблюдении колец в отраженном свете интенсивность интерферирующих пучков примерно одинакова. В проходящем же свете интенсивность одного пучка, не испытавшего отражений, значительно превышает интенсивность второго пучка, испытавшего два отражения. В результате максимумы и минимумы возникнут на фоне равномерной освещенности, полного гашения света не произойдет, и вся картина будет менее контрастной, чем в отраженном свете.

818. При отсутствии контакта радиус пятого кольца определяется уравнением $r_1^2/R+2d=5\lambda$. Если пыль удалить, то радиус этого кольца определится равенством $r_2^2/R=5\lambda$. Отсюда $d=(r_2^2-r_1^2)/2R=1,8 \cdot 10^{-4}$ см.

$$819. r_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{1/R_2 - 1/R_1}}.$$

820. Для уменьшения коэффициента отражения необходимо, чтобы лучи 1 и 2 (рис. 557), отраженные от внешней и внутренней поверхностей пленки, нанесенной на оптическое стекло, гасили друг друга. Гашение будет иметь место при условии

$$2hn = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где $k=0, 1, 2, \dots$. Отсюда минимальная толщина пленки $h_{\min} = \lambda/4n$. Условие (1) не может быть выполнено для всех длин волн. Поэтому обычно h выбирают так, чтобы гасилась средняя часть спектра. Наносимая пленка имеет толщину, превышающую $h_{\min}$ в нечетное число раз, так как более толстые пленки изготовить проще, чем тонкие (в четверть длины волны).

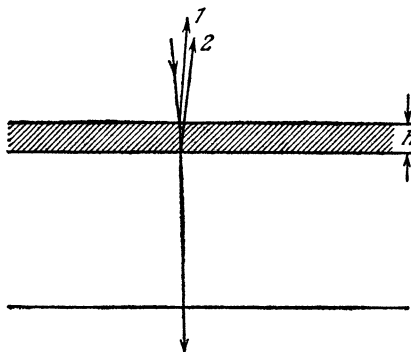


Рис. 557.

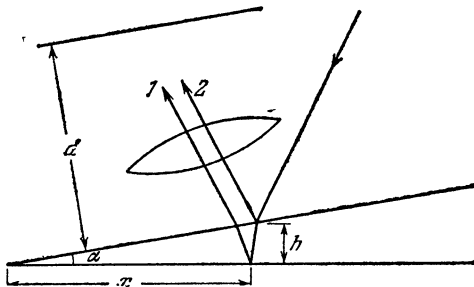


Рис. 558.

821. Для наблюдения интерференционной картины необходимо, чтобы максимум k -го порядка, соответствующий длине волны λ , не перекрывался с максимумом $(k+1)$ -го порядка, соответствующим длине волны $\lambda + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda = 100 \text{ \AA}$. Это будет иметь место при условии $(\lambda + \Delta\lambda)k \leq \lambda(k+1)$. Отсюда $k \leq \lambda/\Delta\lambda$.

Максимально допустимая толщина прослойки $h_{\max}$ удовлетворяет уравнению $2h_{\max} = (\lambda + \Delta\lambda) k_{\max}$, где $k_{\max} = \lambda/\Delta\lambda$. Если в качестве λ выбрать длину волны, соответствующую середине видимого участка спектра ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$), то $h_{\max} \approx 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

Если вместо воздушной прослойки взять тонкую пленку, имеющую показатель преломления n , то максимальная толщина должна быть в n раз меньше, чем у воздушной прослойки.

822. При интерференции лучей 1 и 2 (рис. 558), отраженных от различных граней клина, условие минимума запишется следующим образом: $2hn = k\lambda$ ($k = 0, 1, 2$). Так как угол α мал, то $h \approx x\alpha$. Следовательно, расстояние между интерференционными полосами на самом клине $\Delta x = \lambda/2\alpha n$.

Согласно формуле увеличения линзы $\Delta x/\Delta l = a/b$, где a — расстояние от экрана до линзы, а b — от линзы до клина. Так как $b = d - a$, то по формуле линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-a} = \frac{1}{f}.$$

Исключая из данных выражений a и b , найдем искомое значение угла α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2n \Delta l} \frac{d \mp \sqrt{d^2 - 4fd}}{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}.$$

Решение этой задачи не однозначно. Это связано с тем, что четкое изображение на экране при фиксированных d и f можно получить при двух положениях линзы.

§ 33. Дифракция света

823. Радиус первой зоны Френеля можно найти из треугольников ADE и DEB (рис. 559): $r_1^2 = a^2 - (a-x)^2 = (b + \lambda/2)^2 - (b+x)^2$.

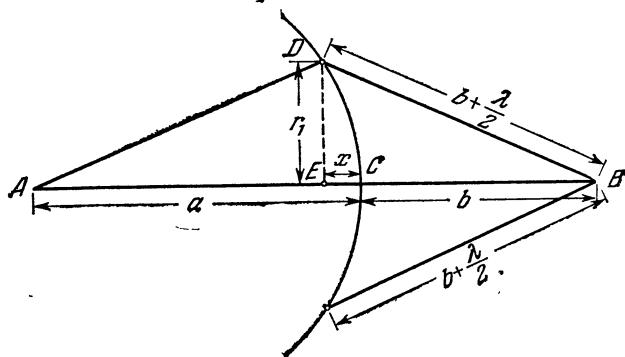


Рис. 559.

Так как длина волны мала, то $x = b\lambda/2(a+b)$. Следовательно, $r_1^2 = 2ax - x^2$. Пренебрегая малой величиной x^2 , окончательно получим $r_1 = \sqrt{ab\lambda/(a+b)}$.

Аналогичным образом можно найти радиусы последующих зон Френеля. Для зоны номера k $r_k = \sqrt{abk\lambda/(a+b)}$.

824. Плоской волне соответствует расстояние от точечного источника до фронта волны $a \rightarrow \infty$. Искомые радиусы зон:

$$r_k = \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{abk\lambda/(a+b)} = \sqrt{kb\lambda}$$

(см. решение задачи 823).

825. Для решения задачи необходимо подсчитать число k зон Френеля, укладывающихся в отверстиях диаметров D и D_1 . Используя результаты задачи 823, имеем $\sqrt{kab\lambda/(a+b)} = D/2$. Отсюда легко найти, что $k=3$ (нечетное число). При диаметре отверстия 5,2 мм в нем укладывается приблизительно 4 зоны (четное число). Следовательно, увеличение отверстия приведет к уменьшению освещенности в точке B .

826. Темное пятно на оси пучка при открытых четырех зонах Френеля окружено светлыми и темными кольцами. Суммарная освещенность экрана при увеличении отверстия возрастает, но распределение световой энергии по экрану меняется таким образом, что в центре будет минимум.

827. Искомая освещенность будет максимальна в том случае, когда в диафрагме укладывается одна зона Френеля. Учитывая решение задачи 824, имеем $D = 2\sqrt{b\lambda} = 0,2$ см.

828. Дифракция будет заметна, если в отверстии укладывается небольшое число зон Френеля, т. е. радиус отверстия будет того же порядка (или меньше), что и радиус первой зоны Френеля:

$$\sqrt{ab\lambda/(a+b)} \geq R,$$

где R — радиус отверстия. При $a=b$ имеем $a\lambda \geq 2R^2$.

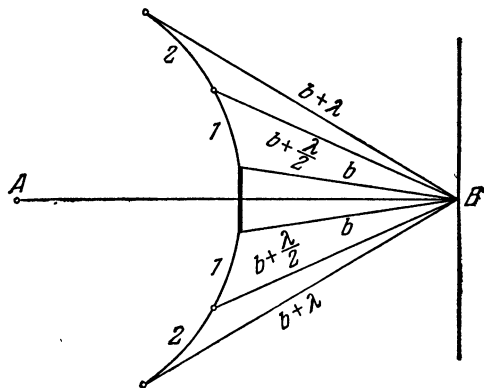


Рис. 560.

829. На рис. 560 построены зоны Френеля, позволяющие определить интенсивность света в точке B . Освещенность в точке B создается первой и последующими зонами Френеля. Если размеры экрана не

превышают значительно радиуса первой центральной зоны, определяемого по формуле задачи 823, то в точке *B* обязательно возникает светлое пятно с освещенностью, мало отличающейся от той освещенности, которая имела бы место в отсутствие экрана.

830. Приблизительно 3 м.

831. Зоны Френеля в данном случае удобно выбрать в виде полосок, параллельных краям щели. В направлении φ будет наблюдаться минимум в том случае, если в щели *AB* (рис. 561) укладывается

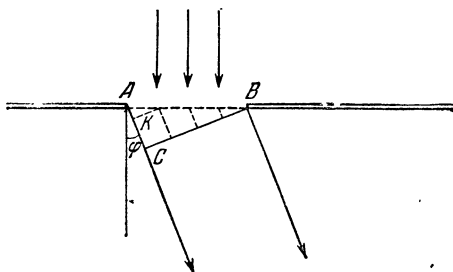


Рис. 561.

четное число зон. (На рис. 561 изображено четыре зоны Френеля.) $b = 2kx$, где x — ширина зоны Френеля, $k = 1, 2, 3, \dots$. AK представляет собой разность хода между крайними лучами, посылаемыми одной зоной:

$$AK = x \sin \varphi = \lambda/2.$$

Отсюда $x = \lambda/2 \sin \varphi$. Следовательно, в направлении φ будет наблюдаться минимум, если $b \sin \varphi = k\lambda$.

832. Лучи, падающие на отверстие камеры от удаленного точечного источника, идут приблизительно параллельно. Если бы не было дифракции, то размеры светлого пятна были бы равны $AB = 2r$ (рис. 562). Вследствие дифракции размеры пятна увеличатся до DC .

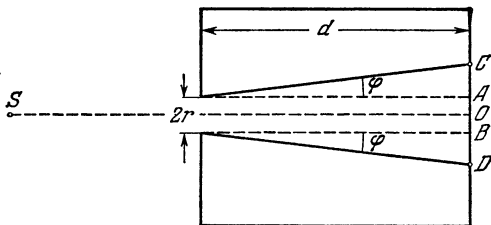


Рис 562.

Расстояние OC определяется углом φ , дающим направление на первый минимум (темное кольцо). Согласно указанию, $2r \sin \varphi \approx \lambda$. Следовательно, радиус пятна

$$OC = r + AC = r + d \sin \varphi \approx r + d\lambda/2r.$$

Эта величина достигает минимума при $r = \lambda d/2r$. Оптимальные размеры отверстия $r = \sqrt{\lambda d/2}$.

833. Углы, определяющие направления на максимумы второго и третьего порядков, удовлетворяют уравнениям

$$d \sin \varphi_2 = 2\lambda$$

и

$$d \sin \varphi_3 = 3\lambda.$$

Отсюда

$$\lambda = d (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2) = 2d \cos \frac{(\varphi_2 + \varphi_3)}{2} \sin \frac{(\varphi_3 - \varphi_2)}{2} \approx$$

$$\approx d (\varphi_3 - \varphi_2) = d\alpha \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

834. Максимальному k соответствует $\sin \varphi = 1$. Следовательно, $k = d/\lambda = 4$.

835. Чтобы возник спектр первого порядка, необходимо условие $d \geq \lambda$. Следовательно, искомый период решетки не может быть меньше 0,02 см.

836. Направление на первый максимум определяется выражением $d \sin \varphi = \lambda$. Экран расположен в фокальной плоскости линзы. Считая угол φ малым, имеем $l = f\varphi$. Отсюда $\lambda = dl/f = 5 \cdot 10^{-5}$ см.

837. В воде длина всех волн уменьшается в n раз (n — показатель преломления воды). Следовательно, углы φ , определяющие направления на максимумы, и расстояния от центра дифракционной картины до максимумов, соответствующих различным длинам волн, также уменьшаются в n раз, так как по условию углы φ малы и $\sin \varphi \approx \varphi$.

838. Спектры разных порядков будут соприкасаться при условии $k\lambda_2 = (k+1)\lambda_1$. Отсюда $k = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) = 5$. Следовательно, частично перекрываться могут только спектры шестого и седьмого порядков. Но данная решетка (см. задачу 834) может дать для данного интервала длин волн спектр только четвертого порядка. Поэтому спектры в нашем случае перекрываться не будут.

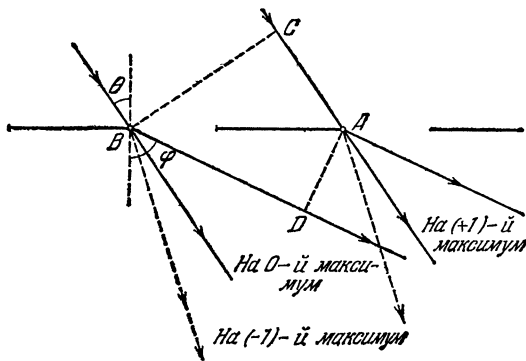


Рис. 563.

839. При наклонном падении лучей на решетку под углом θ (рис. 563) разность хода между волнами, идущими от краев соседних

щелей,

$$\delta = BD - AC = d \sin \varphi - d \sin \theta.$$

Эти волны, складываясь, усиливают друг друга при

$$d (\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ для максимумов, лежащих правее центрального ($k=0$), и $k = -1, -2, -3, \dots$ для максимумов, лежащих левее центрального.

Наибольший порядок спектра будет при $\varphi = -90^\circ$. Тогда $d(-1 - 1/2) = k\lambda$. Отсюда $k = -6$. Может наблюдаться спектр шестого порядка. Знак минус указывает на то, что спектр лежит левее центрального.

840. Как вытекает из формулы $d (\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda$ (см. решение задачи 839), минимальное значение периода решетки будет при скользшем падении лучей: $\theta = 90^\circ$. В этом случае $d \approx \lambda/2$. Следовательно, период решетки должен удовлетворять неравенству $d \geq \lambda/2$.

841. В общем случае, как показано в решении задачи 839, искомое условие имеет вид

$$d (\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda.$$

Его можно переписать в форме

$$2d \cos \frac{\varphi + \theta}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2} = k\lambda.$$

Если $d \gg k\lambda$, то $\varphi \approx \theta$. При этом

$$\cos \frac{\varphi + \theta}{2} \approx \cos \theta,$$

$$\sin \frac{\varphi - \theta}{2} \approx \frac{\varphi - \theta}{2}.$$

Следовательно, условие, определяющее направления на главные максимумы, примет вид

$$(d \cos \theta) (\varphi - \theta) \approx k\lambda.$$

Постоянная решетки как бы уменьшилась и стала равной $d \cos \theta$ вместо d . Углы $\varphi - \theta$ отсчитываются от направления падающего света.

§ 34. Дисперсия света и цвета тел

842. Как показано в задаче 730, угол падения α , преломляющий угол призмы φ и показатель преломления n связаны с углом β , под которым луч выходит из призмы, выражением

$$n = \sin \beta \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin \varphi} + \operatorname{ctg} \varphi \right)^2 + 1}.$$

Отсюда для $\sin \beta$ получаем следующее уравнение:

$$\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) + 2 \sin \beta \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} - n^2 = 0,$$

или (при данных значениях α и φ)

$$2 \sin^2 \beta + \sqrt{2} \sin \beta + \frac{1}{2} - n^2 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем

$$\sin \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{4n^2 - 1}}{2\sqrt{2}}.$$

Физический смысл имеет решение со знаком плюс. Для красных лучей $\sin \beta_k \approx 0,26$. Следовательно, $\beta_k \approx 15^\circ 6'$. Для фиолетовых $\sin \beta_\phi \approx 0,31$ и $\beta_\phi \approx 18^\circ 6'$. Искомый угол $\theta = \beta_\phi - \beta_k \approx 3^\circ$.

843. Для красных лучей фокусное расстояние линзы $f_k = R/(n_k - 1) \approx 27$ см; для фиолетовых $f_\phi = 25$ см. По формуле линзы изображение, даваемое красными лучами, будет расположено на расстоянии $b_k = af_k/(a - f_k) = 58,7$ см; фиолетовыми — на расстоянии $b_\phi = 50$ см.

На экране (рис. 564) изображение источника будет иметь форму пятна, края которого окрашены в красный цвет. Диаметр пятна d можно найти из подобия треугольников ABE и CDE : $d = D(b_k - b_\phi)/b_k \approx 0,15$ см.

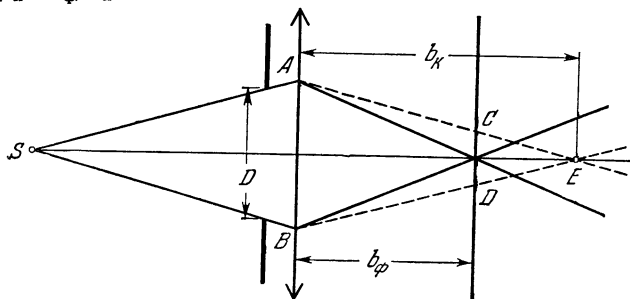


Рис. 564.

844. Солнечные лучи, падающие на капли дождя, можно считать параллельными. По выходе из капли после однократного отражения на внутренней поверхности капли лучи расходятся по всем направлениям. Лишь лучи, испытавшие наименьшее отклонение, идут приблизительно параллельно. Поэтому именно эти лучи, попадая в глаз, вызовут наибольшее зрительное впечатление. Эти лучи идут, так сказать, с наибольшей «плотностью». Остальные лучи рассеиваются во все стороны. Для параллельных лучей угол отклонения, как показано в задаче 783, равен 138° . Следовательно, угол между падающими от Солнца лучами и направлением на радугу составляет 42° (для красного света) (рис. 565).

В глаз попадает свет от тех капель, которые находятся в направлении, составляющем угол 42° с линией, проведенной через

глаз и Солнце. Для фиолетовых лучей этот угол составляет примерно 40° .

845. Первая (основная) радуга наблюдается благодаря лучам, испытавшим одно отражение внутри капелек воды. При преломлении наиболее сильно отклоняются от первоначального направления фиолетовые лучи (см. задачу 782) ($\angle \theta$ растет с ростом n , так как r уменьшается), поэтому внешняя дуга будет красной, а внутренняя — фиолетовой.

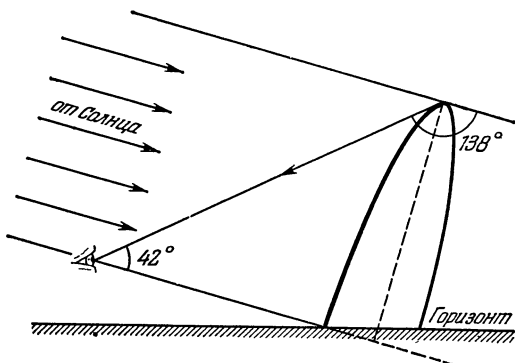


Рис. 565.

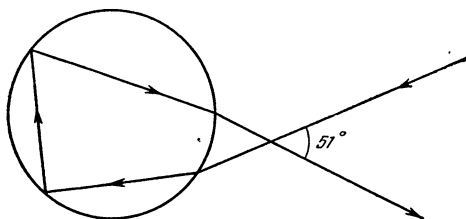


Рис. 566.

Вторая радуга вызвана лучами, испытавшими два отражения внутри капелек. Примерный ход луча изображен на рис. 566. Направление на радугу составляет, как можно показать, 51° с линией, соединяющей глаз и Солнце. Чередование цветов при двух преломлениях и двух отражениях получается обратным: внешняя дуга будет фиолетовой, а внутренняя — красной. После двух отражений интенсивность света оказывается сильно ослабленной, вследствие чего вторая радуга бывает гораздо менее интенсивной, чем первая.

846. Географическая широта Москвы, т. е. угол между плоскостью экватора и нормалью к поверхности земного шара, $\varphi = 56^\circ$. Солнце в этот момент стоит в зените над северным тропиком (широта $\alpha = 23,5^\circ$). Следовательно, угол между направлением на Солнце и горизонтом (рис. 567)

$$\beta = 90^\circ - \varphi + \alpha = 57^\circ 30'.$$

Радуга же может быть видна только в том случае, когда высота Солнца над горизонтом не превышает 42° (см. рис. 565). Следовательно, наблюдать радугу в указанное время нельзя.

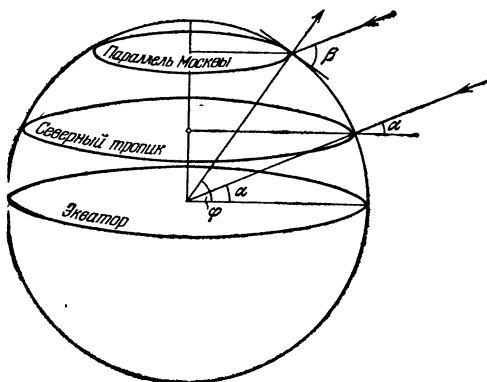


Рис. 567.

847. Наш глаз получает ощущение того или иного цвета, когда его чувствительные элементы раздражаются световой волной определенной частоты. Частота же световых волн не меняется при переходе из одной среды в другую.

848. Необходимо смотреть через зеленое стекло. При этом надпись будет видна черной на зеленом фоне бумаги, так как красный свет надписи «отлично» не пропускается зеленым стеклом. При рассмотрении через красное стекло красная надпись не будет видна на красном фоне бумаги.

849. Объектив преимущественно отражает крайние части видимого спектра: красную и фиолетовую (см. задачу 820). От смещения этих цветов возникает сиреневый оттенок.

850. Цвета радуги являются чистыми спектральными цветами (см. задачу 844), так как по данному направлению виден лишь луч вполне определенной длины волны. Цвета тонких пленок, наоборот, получаются из-за гашения (полного или частичного) лучей некоторого спектрального интервала в результате интерференции. Цвет пленки будет дополнительным к цвету этого спектрального интервала.

851. Под действием силы тяжести мыльная вода стекает в нижнюю часть пленки, которая всегда толще, чем верхняя. Следовательно, полосы, которые указывают геометрическое место точек одинаковой толщины, должны быть расположены горизонтально. Голубой (сине-зеленый) оттенок получается при исключении из полного спектра его длинноволновой (красно-оранжевой) части (см. задачу 850). При гашении средней (зеленой) части спектра оставшиеся лучи придадут пленке пурпурный (малиновый) оттенок, а при вычитании из сплошного спектра его коротковолновой (сине-фиолетовой) части пленка выглядит желтой. Если разность хода взаимно гасящихся лучей составляет одно и то же число полуволн во всех трех случаях, то сверху должна быть желтая полоса, затем пурпурная и внизу голубая.

852. Днем рассеянный небом голубой свет добавляется к желтоватому свету самой Луны. Это смешение цветов воспринимается глазом как белый цвет. После захода Солнца голубой свет неба ослабевает и Луна принимает желтоватый оттенок.

853. На темном фоне мы видим дым вследствие того, что он рассеивает падающие на него сверху солнечные лучи. Частицы дыма рассеивают синий свет гораздо сильнее, чем красный или желтый. Поэтому цвет дыма кажется синим.

На фоне светлого неба дым виден в проходящем свете. Дым кажется желтоватым, так как синий свет рассеивается во все стороны и только длинноволновый участок спектра белого света достигает глаз.

854. Тонкая пленка воды, покрывающая влажный предмет, отражает падающий белый свет по одному определенному направлению. Поверхность предмета уже не рассеивает белый свет во все стороны, и господствующим становится его собственный цвет. Рассеянный свет не налагается на отраженный от предмета, и поэтому цвет кажется более насыщенным.

*Буховцев Борис Борисович, Кривченко Владимир Дмитриевич,
Мякишев Геннадий Яковлевич, Сараева Ирина Макаровна*

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ФИЗИКЕ

М., 1974 г., 416 стр. с илл.

Редактор **Б. Ю. Коган**

Техн. редактор **В. Н. Кондакова**

Корректоры **Т. С. Плетнева, Л. С. Сомова**

Сдано в набор 10/VI 1974 г. Подписано к печати 30/IX 1974 г.
Бумага $84 \times 108^{1/32}$, тип. № 3. Физ. печ. л. 13. Условн. печ.
л. 21,84. Уч.-изд. л. 23,02. Тираж 400 000 экз. (2-й завод
150 001—400 000). Цена книги 72 коп. Заказ № 1472

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

72 коп.