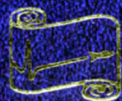


**Сборник задач
по общему курсу
физики**

часть 3

- **Атомная и ядерная физика**
- **Строение вещества**



Сборник задач по общему курсу физики

в трех частях

Под редакцией
В. А. ОВЧИНКИНА

*Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обуча-
ющихся по техническим специальностям*

Часть 3

**Атомная и ядерная физика
Строение вещества**

Издание второе, исправленное и дополненное



Москва
Физматкнига
2009

ББК 22.3
С35
УДК 53(075.8)

В. А. ОВЧИНКИН, А. О. РАЕВСКИЙ, Ю. М. ЦИПЕНЮК

Сборник задач по общему курсу физики: Учебн. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 3. Атомная и ядерная физика. Строение вещества / Под ред. В. А. Овчинкина. — М.: Издательство «Физматкнига», 2009. — 512 с.

ISBN 978-5-89155-186-2

Третья часть сборника включает в себя 1235 задач, в основном по квантовой физике атомов и молекул, ядерной физике, физике элементарных частиц, физике излучения, физике твердого тела и низкоразмерных систем. Все задачи, авторами которых являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ, предлагались студентам МФТИ на письменных экзаменах и олимпиадах. Свыше 20% задач снабжены подробными решениями, так что задачник в какой-то мере является одновременно и учебником. Книга содержит также большую подборку разнообразных (в том числе комплексных) задач, предлагавшихся студентам на заключительном (Государственном) экзамене по общей физике. В конце книги помещен традиционный справочный материал, а также некоторые теоретические приложения. В целом Сборник представляет собой уникальное издание, не имеющее аналогов в мировой практике.

Для студентов физических специальностей вузов, а также преподавателей высшей и средней школ.

Издание осуществлено на средства выпускников МФТИ: А. Н. Жукова, А. А. Исаева, О. А. Исаевой, А. И. Квасникова, В. П. Косицына, С. К. Косицкой, В. И. Красникова, М. Б. Кузнецова, В. В. Максименко.

ISBN 978-5-89155-186-2



© Овчинкин В. А., 2001, 2009
© «Физматкнига», 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
От составителей	6

Задачи Ответы

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 1. Фотоны. Фотоэффект. Эффект Комптона	10	200
§ 2. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей	16	210
§ 3. Уравнение Шредингера. Квантование. Потенциальные барьеры	25	223
§ 4. Атом водорода и водородоподобные атомы	35	238
§ 5. Ширина линий. Спектры молекул. Рентгеновское излучение	41	249
§ 6. Спин. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Магнитный резонанс	48	259
§ 7. Ядерные модели. Радиоактивность. Эффект Мессбауэра ...	59	279
§ 8. Нейтроны. Ядерные реакции	69	295
§ 9. Деление ядер. Реакторы. Термоядерный синтез	81	310
§ 10. Элементарные частицы. Резонансы. Лептоны и кварки. Реакции при высоких энергиях	89	321

СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

§ 1. Излучение	103	339
§ 2. Кристаллическая решетка. Фононы. Теплоемкость. Теплопроводность	114	362
§ 3. Электроны в металлах. Ферми-частицы	125	387
§ 4. Электроны в полупроводниках и низкоразмерных системах	139	418
§ 5. Сверхпроводимость	150	442

§ 6. Избранные задачи заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике	156	449
Приложение I		478
Приложение II		488
Приложение III		493
Приложение IV		498

Предисловие ко второму изданию

Настоящее издание третьей части Сборника задач по общему курсу физики подверглось значительной доработке. Некоторые задачи были изменены, формулировки многих задач были заново отредактированы, а в ответы и решения внесены необходимые исправления и уточнения. Кроме того, были включены и новые задачи. При этом нумерация задач везде была сохранена, за исключением § 6 из второй части задачника (Избранные задачи заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике). Отметим уникальность всего издания, не имеющего аналогов в мировой практике.

Авторами всех новых задач являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ. Все задачи составлялись для письменных семестровых контрольных работ и госэкзаменов.

Редактор Сборника выражает искреннюю благодарность составителей профессору А. В. Степанову, доценту О. А. Судакову и Ю. В. Юрьеву. Своими замечаниями и предложениями они способствовали улучшению Сборника.

Искренняя благодарность В. П. Нагирному, студенту МФТИ, выполнившему сложнейшую работу по компьютерной верстке книги.

Редактор Сборника и авторский коллектив особо благодарит выпускников МФТИ А. Н. Жукова, А. А. Исаева, О. А. Исаеву, А. И. Квасникова, В. П. Косицына, С. К. Косицыну, В. И. Красникова, М. Б. Кузнецова, В. В. Максименко за существенную материальную поддержку издания, без которой книга не могла бы выйти в свет в этом году.

Эта книга является третьей (последней) частью Сборника задач по общему курсу физики. Этот Сборник в какой-то мере подводит итог шестидесятилетней работы кафедры за все время существования МФТИ. Данная книга включает в себя два последних раздела курса общей физики: атомная и ядерная физика, а также физика элементарных частиц и строение вещества (квантовая микро- и макрофизика). Последний раздел — строение вещества — посвящен некоторым разделам физики твердого тела (фононы, электроны в металлах и полупроводниках), а также физике излучения, сверхпроводимости и низкоразмерных систем. Всего в этой части Сборника содержится 1235 задач. Почти все задачи предлагались студентам на письменных экзаменах и студенческих физических олимпиадах, их авторами являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ.

Часть задач (свыше 20% в этой книге) приведены с решениями. Для удобства в работе такие задачи помечены звездочкой. Эти задачи (их решения) бесспорно являются очень важным методическим пособием в изучении физики. Большинство предложенных задач ориентировано на получение численного ответа, что само по себе важно как в плане формирования у студентов правильных представлений о масштабах изучаемых явлений, так и в плане запоминания физических констант и переводных коэффициентов из одной системы единиц в другую. В Сборнике используются единицы измерения не только из СИ и гауссовой системы, но и внесистемные единицы. Однако все-таки предпочтение отдается гауссовой системе (СГСЭ), и формулы записываются именно в ней (кроме особо оговоренных случаев).

В конце этой части сборника приведено свыше двухсот задач, предлагавшихся студентам МФТИ на письменных государственных экзаменах по общей физике, которые проводятся начиная с 1966 г. по настоящее время на третьем курсе. Как правило, эти задачи посвящены не отдельным разделам физики, а совмещают в себе различные аспекты физических явлений, и, главное, в них отражены реальные эксперименты и достижения теории.

В конце книги в помощь студентам помещены также приложения. В Приложении I изложена последовательность заполнения состояний в атомах и ядрах, в Приложении II — туннелирование электронов в сверхпроводниках, в Приложении III рассмотрено образование зонной структуры электронного спектра в твердых телах, а в Приложении IV приведены таблицы мировых констант и величин.

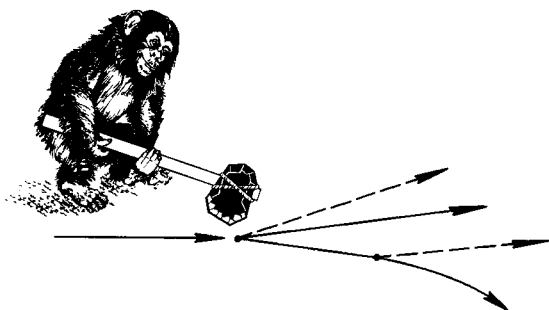
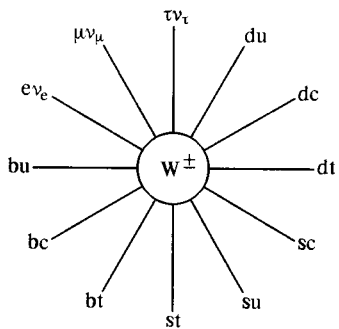
Часть задач третьей книги уже была опубликована в ранее выходивших изданиях. Прежде всего, это «Сборник задач по физике» С. М. Козела, Э. И. Рашбы и С. А. Славатинского (М.: Наука, 1987), а также «Сборник задач по общему курсу физики», часть V — атомная физика, физика ядра и элементарных частиц; под ред. Д. В. Сивухина (М.: Наука, 1981). Кроме того: «Сборник задач по

физике (Электричество, оптика и атомная физика)» под ред. С. М. Козела (М.: МФТИ, 1983) и «Сборник задач по физике (Ядерная физика и физика твердого тела)» И. П. Крылов и др. (М.: МФТИ, 1983).

Над составлением задач трудилось большое количество преподавателей кафедры общей физики МФТИ, и прежде всего, это В. Г. Аверин, Ю. В. Афанасьев, Г. С. Баронов, В. В. Бездудный, В. Е. Белонучкин, А. Д. Гладун, Л. Л. Гольдин, С. В. Гуденко, А. В. Гуденко, Д. Б. Диатроптов, А. С. Дьяков, Б. Г. Ерозолимский, Д. А. Заикин, В. Г. Зацепин, А. А. Иванов, А. П. Канавин, С. П. Капица, К. В. Караджев, А. С. Кингсен, Н. А. Кириченко, А. П. Кирьянов, С. Л. Кленов, С. М. Козел, П. Ф. Коротков, В. П. Корявов, К. А. Котельников, М. Г. Кремлев, И. П. Крылов, К. М. Крымский, Е. П. Кузнецов, В. Г. Лейман, А. М. Леонтович, Г. Р. Локшин, Л. Б. Луганский, Е. З. Мейлихов, В. В. Можаяев, Е. Н. Морозов, В. Г. Никольский, М. Г. Никулин, В. А. Овчинкин, В. В. Огороков, А. Я. Паршин, В. А. Петухов, Э. В. Прут, А. О. Раевский, Э. И. Раишба, Е. Г. Рудашевский, С. Ю. Савинов, Э. П. Свириденков, М. В. Серидов, Д. В. Сивухин, Г. В. Склизков, С. А. Славинский, А. В. Степанов, А. Б. Струминский, О. А. Судаков, В. Н. Топников, Е. И. Тукиш, А. В. Францессон, Ю. М. Ципенюк, Ф. Е. Чукреев, А. В. Шеронов, И. Ф. Щеголев.

Особо следует отметить огромный редакторский труд лекторов и преподавателей, готовивших задачи к письменным экзаменам и студенческим олимпиадам. В разные годы это были Д. В. Сивухин, Л. Л. Гольдин, Б. Г. Ерозолимский, С. П. Капица, А. В. Степанов, Д. Б. Диатроптов, А. Д. Гладун, Д. А. Заикин, И. Ф. Щеголев, И. П. Крылов, А. П. Кирьянов, Л. Б. Луганский, Ю. М. Ципенюк, А. А. Иванов, А. О. Раевский, А. П. Канавин, А. Б. Струминский, В. А. Овчинкин, Е. В. Тукиш, Э. В. Прут.

Составители этой части сборника выражают особую признательность за плодотворные обсуждения текстов задач и их решения С. П. Аллилуеву, С. В. Гуденко, А. А. Иванову, А. М. Леонтовичу, А. А. Лукьянову, В. В. Лобзину, Е. З. Мейлихову, Ю. В. Петрову, А. В. Степанову, С. Ю. Савинову, И. А. Фомину, А. В. Францессону, А. П. Кирьянову, А. П. Канавину, А. Б. Струминскому, Ю. В. Юрьеву.



Задачи

§ 1. Фотоны. Фотоэффект. Эффект Комптона

1.1. Найти импульс фотона видимого света ($\lambda = 500$ нм). Сравнить его с импульсом молекулы водорода при комнатной температуре.

1.2. При какой длине волны импульс фотона равен импульсу молекулы водорода при комнатной температуре?

1.3. Излучение гелий-неонового лазера мощностью $W = 1$ мВт сосредоточено в пучке диаметром $d = 0,5$ см. Длина волны $\lambda = 0,63$ мкм. Определить плотность потока j фотонов в пучке.

1.4: Согласно общей теории относительности (ОТО) энергия любого объекта \mathcal{E} в статическом гравитационном поле $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(1 + 2\varphi/c^2)^{-1/2}$, где \mathcal{E}_0 — энергия объекта в «пустом» (т. е. свободном от гравитационных полей) пространстве, а φ — гравитационный потенциал в точке нахождения объекта. Показать на основе этого соотношения, что разница энергий $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ между двумя состояниями объекта, расположенного на поверхности Земли и на высоте H от нее, оказывается эквивалентной разнице «гравитационных энергий» излученного объектом γ -кванта с энергией $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ и массой $m_\gamma = \mathcal{E}_\gamma/c^2$, как это было показано в опытах Паунда и Ребки с помощью эффекта Мессбауэра.

1.5. Как следует из общей теории относительности (ОТО), статическое гравитационное поле по отношению к своему воздействию на электромагнитные волны эквивалентно неоднородной среде с показателем преломления $n = (1 + 2\varphi/c^2)^{-1}$, где φ — гравитационный потенциал. Используя эту аналогию, найти угол отклонения δ луча света при прохождении его вблизи края Солнца. Масса Солнца $M = 1,99 \cdot 10^{33}$ г, радиус его фотосферы $R = 696\,000$ км.

1.6. Исходя из классического закона преломления света, показать, что при прохождении плоской границы двух прозрачных сред сохраняется тангенциальная компонента импульса фотонов.

1.7. Электромагнитная волна с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ с⁻¹ промодулирована по амплитуде синусоидой с круговой частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ с⁻¹. Найти энергию \mathcal{E} фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов водорода с энергией ионизации $\mathcal{E}_и = 13,5$ эВ.

1.8. Найти напряжение V на рентгеновской трубке, если известно, что в излучаемом ею сплошном спектре нет длин волн, меньших $0,0206$ нм.

1.9. Шарик электроскопа облучается монохроматическим рентгеновским излучением. Листочки электроскопа перестают расходиться, когда потенциал шарика равен 8 кВ. Определить длину волны λ падающего излучения.

1.10. В центре посеребренного изнутри вакуумного стеклянного баллона шаровой формы помещен маленький шарик, покрытый никелем. Шарик освещается светом от ртутной лампы с длиной волны $\lambda = 230,2$ нм. Между внутренней поверхностью сферы и шариком приложена задерживающая разность потенциалов. Оказалось, что при увеличении этой разности до $V = 0,75$ В ни один из фотоэлектронов не попадает на посеребренную поверхность сферы. Контактная разность потенциалов между никелем и серебром равна $V_k = 1$ В. Вычислить максимальную скорость фотоэлектронов.

1.11. Уединенный цинковый шарик облучается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 250$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик? Работа выхода электрона для цинка $A = 3,74$ эВ.

1.12. При каких длинах волн λ облучающего света шарик в условиях предыдущей задачи заряжаться не будет?

1.13. Цинковый электрод вакуумного фотоэлемента освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 250$ нм. При наложении задерживающей разности потенциалов фототок уменьшается и обращается в нуль, когда она достигает значения $V = 2$ В. Определить внешнюю контактную разность потенциалов V_k между цинком и материалом, из которого изготовлен другой электрод фотоэлемента. Работа выхода электрона из цинка $A = 3,74$ эВ.

1.14. Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету $K = 0,12$ А/Вт. Какова относительная флуктуация α числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью $W = 1,3 \cdot 10^{-11}$ Вт? Время регистрации равно $t = 10^{-3}$ с.

1.15* К фотокатоду фотоэлектронного умножителя прижат сцинтиллятор (рис. 1). При пролете через сцинтиллятор релятивистского электрона молекулы сцинтиллятора возбуждаются, а затем испускают фотоны, переходя в основные состояния. В свою очередь фотоны, попадая на тонкий

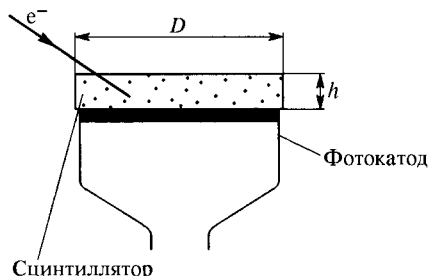


Рис. 1

($\sim 10^{-5}$ см) фотокатод, выбивают из него фотоэлектроны. Оценить, во сколько раз увеличится поток электронов из фотокатода, если сухой оптический контакт между фотоэлектронным умножителем и сцинтиллятором заменить на масляный контакт. Показатель преломления сцинтиллятора, стекла колбы и масла равен $n = 1,5$, $h = 2$ см, $D = 16$ см.

1.16: Показать, что свободный электрон в вакууме не может ни поглощать, ни излучать фотоны, а лишь рассеивать их.

1.17. Какую минимальную длительность импульса фототока можно получить в вакуумном фотоэлементе, между анодом и катодом которого приложено напряжение в несколько сотен вольт, при освещении фотокатода короткими ($< 10^{-11}$ с) импульсами света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Красная граница материала фотокатода $\lambda_{кр} = 1000$ нм, напряженность поля между анодом и фотокатодом $E = 300$ В/см.

1.18. По классической электромагнитной теории света поток световой энергии от источника непрерывно распространяется во все стороны. Через какой промежуток времени, согласно этой теории, отдельный атом танталового катода может накопить столько энергии, чтобы стал возможен вылет фотоэлектрона, если катод находится на расстоянии $L = 10$ м от 25-ваттной лампочки? Работа выхода электрона для тантала составляет $A = 4$ эВ. Считать, что фотоэлектрону передается вся энергия, накапливающаяся в атоме тантала, диаметр которого можно считать равным $d = 0,3$ нм.

1.19: Исходя из представления о фотонах как о квантах света, вывести формулу для эффекта Доплера в предположении, что источник света движется с нерелятивистской скоростью.

1.20: То же, но для источника, движущегося с релятивистской скоростью.

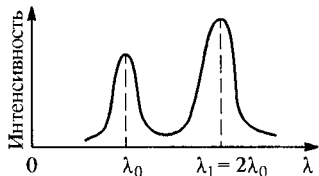


Рис. 2

1.21: В предыдущей задаче выяснить характер зависимости частоты ν от угла между направлением скорости источника и направлением импульса испущенного фотона при $\beta = v/c \rightarrow 1$. Оценить угол θ , начиная с которого излучаемая частота мала по сравнению с частотой, излучаемой под углом $\theta = 0^\circ$.

1.22. На рис. 2 изображены результаты, полученные Комптоном при исследовании рассеяния рентгеновских лучей в графите. Наблюдения велись под углом $\theta = 135^\circ$ к направлению падающего пучка. Определить длину волны λ_0 падающего излучения.

1.23. Фотон рентгеновского излучения с длиной волны λ в результате комптоновского рассеяния на неподвижном свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол θ . Определить кинетическую энергию T_e и импульс p_e электрона отдачи. Дать численный ответ для $\lambda = 0,02$ нм и $\theta = 90^\circ$.

1.24: В предыдущей задаче определить угол ϕ между направлением первичного фотона и направлением движения электрона отдачи.

1.25. Определить изменение длины волны при эффекте Комптона, если наблюдение ведется перпендикулярно к направлению первичного пучка излучения.

1.26: В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний получил импульс отдачи p . Определить,

под какими углами по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон с таким импульсом.

1.27. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний вылетел под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению падающего фотона. Какую максимальную кинетическую энергию T может приобрести электрон отдачи в этом случае?

1.28. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний приобрел кинетическую энергию, равную его удвоенной энергии покоя. Под каким углом φ по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон?

1.29. Фотон ($\lambda_0 = 662$ нм) рассеивается на электроне, летящем перпендикулярно направлению движения фотона. Найти начальный импульс электрона p_0 , если длина волны λ_0 при рассеянии не изменяется. Угол рассеяния $\theta = 60^\circ$.

1.30. Фотон с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 2m_e c^2$ при рассеянии на покоящемся электроне теряет половину своей энергии (m_e — масса электрона). Найти угол разлета α между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

1.31. Фотон рассеивается на покоящемся протоне. Энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии протона отдачи, а угол разлета между рассеянным фотоном и протоном отдачи равен 90° . Найти энергию \mathcal{E}_γ падающего фотона.

1.32. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы летящий ему навстречу фотон с длиной волны $\lambda = 0,0024$ нм не изменил свою энергию при 180° -рассеянии?

1.33. Оптический фотон с энергией $\hbar\omega_0$ рассеивается назад на электроне, движущемся ему навстречу с полной энергией \mathcal{E} и импульсом p . Какова энергия рассеянного фотона? Рассмотреть два предельных случая: а) $\frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2} \cdot \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \gg 1$; б) $\frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2} \cdot \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \ll 1$.

1.34. Определить энергию фотона $h\nu'$, рассеянного назад покоящимся электроном. Какова эта энергия, если энергия падающего фотона $h\nu$ удовлетворяет условию $h\nu \gg m_e c^2$ (m_e — масса электрона)?

1.35. Фотон от рубинового лазера ($\lambda = 0,6943$ мкм) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $T = 500$ МэВ. Оценить энергию \mathcal{E}_γ фотона, образующегося в результате «обратного комптон-эффекта» (т. е. при 180° -рассеянии фотона на движущемся электроне). См. также задачу 4.51 этого раздела.

1.36. Определить длину волны λ рентгеновского излучения, для которого комптоновское рассеяние на электроне на угол 90° удваивает длину волны.

1.37. При движении быстрой заряженной частицы в области пространства, заполненной изотропным электромагнитным излучением (например, светом Солнца и звезд), частица теряет энергию в результате взаимодействия с этим излучением. Считая частицу ультрарелятивистской (энергия $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$), а ее соударения с фотоном — лобовыми, найти изменение энергии частицы $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$ и энергию фо-

тона отдачи $\hbar\omega$. Энергию фотонов (до соударения) $\hbar\omega_0$ считать малой по сравнению с $\hbar\omega$. Чему равна энергия $\hbar\omega$, если движущейся частицей является электрон с энергией $\mathcal{E}_0 = 2,5 \cdot 10^9$ эВ и $\hbar\omega_0 = 1$ эВ?

1.38. Электрон с энергией $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ рассеивается на фотоне с энергией $\hbar\omega_0 \ll mc^2$. При каком условии энергия этого фотона в системе отсчета, в которой электрон покоится, удовлетворяет условию $\hbar\omega \ll mc^2$?

1.39. При прохождении γ -квантов через вещество образуются две группы быстрых электронов: одна в результате фотоэффекта, а другая — комптоновского рассеяния. Каково должно быть энергетическое разрешение регистрирующей аппаратуры, чтобы отличать фотоэлектроны от комптоновских электронов с максимальной энергией? Энергия γ -квантов известна: $\mathcal{E}_\gamma = 5$ МэВ.

1.40. Фотоны с длиной волны $\lambda = 1,4$ Å испытывают комптоновское рассеяние на угол $\varphi = 60^\circ$ к первоначальному направлению. Фотоны попадают в рентгеновский спектрограф, работающий по методу интерференционного отражения Брэгга—Вульфа. При какой минимальной толщине D кристаллической пластинки спектрографа можно обнаружить изменение длины волны рассеянного излучения (комптоновское смещение) в первом порядке, если постоянная кристаллической решетки $d = 1$ Å?

1.41. В рентгеновском спектрографе, работающем по методу интерференционного отражения Брэгга—Вульфа, применяется кристаллическая пластинка толщиной D . При какой минимальной толщине этой пластинки можно обнаружить комптоновское смещение при рассеянии фотонов под углом $\theta = 90^\circ$ к первоначальному направлению их движения? Длина волны исходного рентгеновского излучения $\lambda = 0,07$ нм. Рассеянное излучение падает на кристалл спектрографа под углом скольжения $\varphi = 30^\circ$.

1.42. Показать, что в вакууме рождение пары e^+e^- γ -квантом невозможно.

1.43. При взаимодействии с веществом высокоэнергетичный фотон ($\mathcal{E} > 2m_e c^2$, где m_e — масса электрона) может родить электрон-позитронную пару. Показать, что этот процесс невозможен для фотона, испытавшего рассеяние строго назад (на угол 180°) при комптон-эффекте на неподвижном электроне.

1.44. Найти максимальный угол θ_{\max} рассеяния γ -квантов при комптон-эффекте на неподвижных электронах, вне которого рассеянный квант не может родить электрон-позитронную пару при последующем взаимодействии с веществом. Рождение электрон-позитронной пары возможно, если энергия γ -кванта превышает $2m_e c^2$ (m_e — масса электрона).

1.45. При трехфотонной аннигиляции ортопозитрония оказалось, что один из фотонов имеет энергию $\mathcal{E}_1 = (1/2)\mathcal{E}_0$, а другой — $\mathcal{E}_2 = (2/3)\mathcal{E}_0$ (\mathcal{E}_0 — энергия покоя электрона). Найти углы θ_{12} , θ_{13} ,

θ_{23} между направлениями вылета фотонов. Считать, что ортопозитроний покоился.

У к а з а н и е. Ортопозитроний представляет собой атомную систему, состоящую из электрона и позитрона, спины которых направлены в одну сторону.

1.46. При трехфотонной аннигиляции ортопозитрония оказалось, что углы между направлениями вылета фотонов $\theta_{12} = 120^\circ$ и $\theta_{13} = 150^\circ$. Найти энергию фотонов. Считать, что ортопозитроний вначале покоился.

У к а з а н и е. См. указание к предыдущей задаче.

1.47*. Показать, что представление о фотонах позволяет получить формулу для продольного Доплер-эффекта из преобразования Лоренца для энергии.

1.48. Возбужденное ядро с энергией возбуждения $\Delta\mathcal{E} = 1$ МэВ с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100$ эВ и испускает гамма-квант. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ -кванта по энергии будет равен нулю?

1.49. Рассматривая процесс рождения фотона с энергией $\hbar\omega$ при прохождении в веществе с показателем преломления n релятивистской частицы массой m со скоростью v (эффект Вавилова—Черенкова), показать, что обычно приводимое условие возможности этого процесса $v > v_{\text{ф}} = c/n$ справедливо только при определенном ограничении на отношение Λ/λ (Λ — комптоновская длина волны частицы, λ — длина волны фотона). Найти явное выражение этого ограничения в зависимости от релятивистского фактора γ и n .

1.50. По современным представлениям в спектре солнечных нейтрино должна существовать достаточно интенсивная монохроматическая линия с энергией $\mathcal{E}_\nu = 0,86$ МэВ, что обусловлено идущей на Солнце реакцией ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$. Для регистрации этих нейтрино был создан детектор BOREXINO с жидким сцинтилятором, в котором регистрируются электроны по реакции рассеяния (ν, e^-). Какова максимальная кинетическая энергия регистрируемых электронов?

1.51*. Гамма-кванты с энергией $\mathcal{E} = 661$ кэВ от источника ${}^{137}\text{Cs}$ рассеиваются в воде. Каково должно быть относительное энергетическое разрешение $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ гамма-спектрометра, чтобы можно было по 90° -рассеянию гамма-квантов обнаружить примесь тяжелой воды D_2O ?

1.52*. В системе глобального позиционирования (GPS) используется высокоточный цезиевый генератор, установленный на спутнике. Определить высоту полета спутника, если при прохождении над приемником на Земле регистрируемая частота совпадает с частотой генератора. Учесть, что энергии квантовых уровней любой системы зависят от гравитационного потенциала в месте нахождения системы. Вращение Земли не учитывать. (См. также задачу 1.4 в этом разделе.)

§ 2. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

2.1. При каких кинетических энергиях электрона и протона их длины волн де Бройля близки к размеру протона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13}$ см.

2.2. Определить кинетическую энергию T электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.

2.3. Протон с дебройлевской длиной волны $\lambda = 0,001$ нм упруго рассеялся под углом $\pi/2$ на первоначально покоившейся α -частице. Определить дебройлевскую длину волны λ' рассеянного протона.

2.4.* В опытах по распространению радиоволн с длиной волны $\lambda = 300$ м было установлено, что скорость u их распространения в вакууме совпадает со скоростью света c с точностью до $0,05\%$. Оценить на основе этих результатов верхнюю границу массы фотона.

2.5. В опытах при измерении расстояния между Землей и Луной ($L = 3,8 \cdot 10^5$ км) локацией ее поверхности оказалось, что результаты в оптическом и радиодиапазоне ($\lambda_1 = 20$ см) не совпадают. Отличие в результатах измерений объяснялось попаданием излучения в разные точки лунной поверхности, которые могли отличаться по высоте на $\Delta L = \pm 100$ м. С другой стороны, этот результат можно интерпретировать как результат отражения фотона с ненулевой массой от ровной поверхности. Принимая это, оценить возможную верхнюю границу массы фотона m_γ (в эВ).

2.6. Найти выражение для показателя преломления n электронных волн через работу выхода $A_0 = eV_0$ (V_0 — внутренний потенциал кристалла).

2.7. Показать, что при преломлении электронной волны соблюдается закон преломления $\sin \phi / \sin \phi' = n$.

У к а з а н и е. При проникновении в кристалл меняется лишь нормальная компонента скорости электрона.

2.8. Как нужно изменить формулу Брэгга—Вульфа, чтобы учесть преломление волн на поверхности кристалла? Считать, что отражающая плоскость параллельна поверхности кристалла.

2.9. Пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $V = 150$ В, падает на поверхность серебра, внутренний потенциал которого $V_0 = 15$ В. Найти показатель преломления электронных волн в серебре.

2.10.* Электроны с кинетической энергией $T = 100$ эВ падают под углом $\phi = 30^\circ$ к нормали на систему, состоящую из двух параллельных сеток, между которыми создана разность потенциалов $V_1 = 36$ В (рис. 3). Полагая, что потенциал нижней сетки выше, чем верхней, найти относительный показатель преломления n сред, расположенных по обе стороны от сеток. При какой разности потенциалов V_2 произойдет полное отражение электронов от второй сетки?

2.11. Пучок электронов падает перпендикулярно на поликристаллическую пластинку Π из хлористого натрия, постоянная ре-

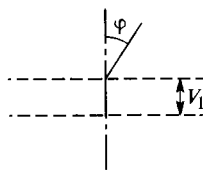


Рис. 3

шетки которого $a = 0,56$ нм. В результате брэгговского рассеяния пучка на фотопластинке Φ , расположенной на расстоянии $L = 25$ см от пластинки Π , возникают концентрические дифракционные кольца (рис. 4). Определить энергию электронов, зная, что радиус первого кольца равен $R = 0,5$ см.

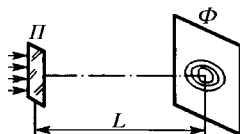


Рис. 4

2.12: На рис. 5 приведена кривая, полученная в опытах Дэвиссона и Джермера по рассеянию электронов от монокристалла никеля, падающих под углом скольжения 80° . По оси абсцисс отложено значение \sqrt{V} , где V — энергия электронов в вольтах, по оси ординат — относительная интенсивность рассеянных электронов. При больших порядках отражения m максимумы эквидистантны (расстояние между ними $3,06$ $V^{1/2}$), а при малых эта закономерность, показанная стрелками, нарушается. Оценить немонохроматичность используемых электронов и показатель преломления никеля для волны де Бройля электронов, соответствующих 3-му, 4-му и 5-му максимумам, которые наблюдаются при \sqrt{V} , равном соответственно 8,16, 11,42 и 14,68 $V^{1/2}$. Найти межплоскостное расстояние d никеля.

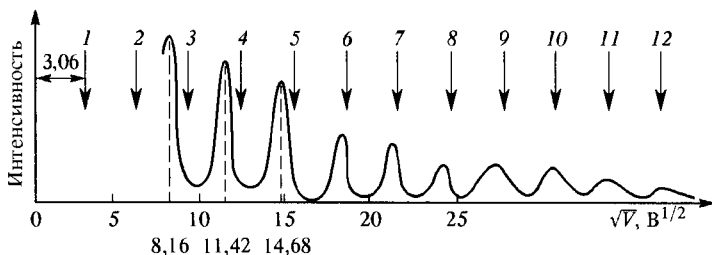


Рис. 5

2.13. Параллельный пучок моноэнергетических нерелятивистских нейтронов, движущихся со скоростью v , падает на плоскую поверхность кристалла под углом скольжения θ_0 и испытывает на ней брэгговское отражение n -го порядка. Кристалл приводит в движение с постоянной скоростью u в направлении нормали к отражающей плоскости (рис. 6). Под каким углом θ к отражающей плоскости надо направить пучок таких же нейтронов, чтобы наблюдалось брэгговское отражение их от движущегося кристалла в прежнем порядке n ? При какой скорости u такое отражение возможно?

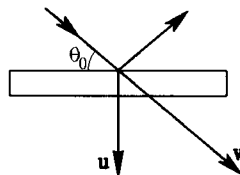


Рис. 6

2.14. При пропускании пучка нейтронов от ядерного реактора через блок поликристаллического графита все нейтроны с длинами волн де Бройля короче $\lambda = 0,67$ нм испытывают интерференционное отражение Брэгга—Вульфа. Проходят через блок только медленные, так называемые холодные нейтроны. Определить

максимальную температуру, соответствующую самым коротким волнам де Бройля нейтронов, пропускаемым графитом, а также вычислить постоянную d решетки графита.

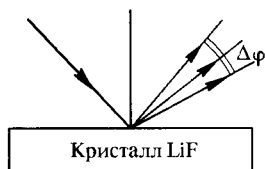


Рис. 7

2.15: Чтобы получить пучок нейтронов, обладающих заданной энергией $\mathcal{E} = 1$ эВ, используют брэгговское отражение первого порядка от кристалла LiF, для которого расстояние между плоскостями кристаллической решетки $d = 2,32 \text{ \AA}$ (рис. 7). На кристалл падает пучок нейтронов с различными энергиями. Оценить разброс нейтронов по энергиям $\Delta \mathcal{E}$ в отраженном пучке, если угловая ширина этого пучка $\Delta \varphi = 0,1^\circ$. Какую толщину кристалла D следует выбирать в этом эксперименте? Кристалл вырезан так, что отражающие плоскости параллельны поверхности кристалла.

2.16: На рис. 8 представлены результаты опыта Штерна и Эстермана (1930 г.) по дифракции молекул водорода на кристаллических плоскостях решетки хлористого лития, отстоящих друг от друга на расстояние $d = 1,65 \text{ \AA}$. В опыте использовались молекулы, которые вылетали из окошка печи и, пройдя отверстие коллиматора, падали узким пучком на поверхность кристалла под углом скольжения θ к рассеивающей плоскости кристалла. Определить, пользуясь рис. 8, температуру T печи, считая распределение молекул по скоростям в пучке максвелловским.

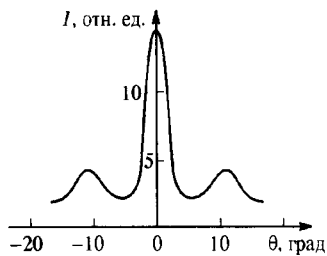


Рис. 8

2.17. В одном из способов монохроматизации медленных нейтронов применяются два диска из кадмия (кадмий практически не пропускает медленные нейтроны), насаженные на общую ось (рис. 9). На периферии дисков на одинаковых расстояниях R от оси сделаны два малых круглых отверстия диаметром a . Отверстия повернуты относительно друг друга на угол φ вокруг оси прибора, и в этом положении диски хорошо закреплены на оси. Диски равномерно вращаются вокруг той же оси с угловой скоростью Ω . Определить длину волны де Бройля λ , а также степень монохроматичности нейтронов, пропускаемых таким

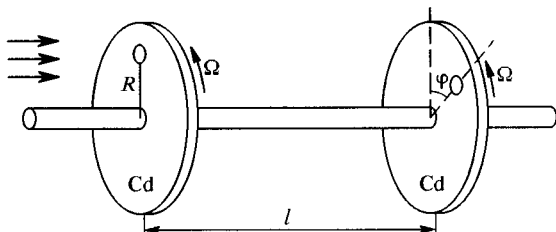


Рис. 9

монохроматором, если расстояние между дисками равно l . Произвести численный расчет для $l = 1$ м, $R = 10$ см, $\Omega = 300$ рад/с, $\varphi = 4^\circ$, $a = 5$ мм.

2.18. Один из способов монохроматизации медленных нейтронов состоит в следующем: в цилиндре радиусом $R = 10$ см и длиной $L = 1,0$ м делается винтовой паз шириной $b = 1$ см с поворотом на угол $\varphi = 30^\circ$ (рис. 10). Цилиндр вращается с частотой $n = 3000$ об/мин. Определить длину волны λ нейтронов, пропускаемых таким монохроматором, и оценить степень их монохроматизации $\Delta\lambda/\lambda$. Пучок нейтронов направлен вдоль оси цилиндра. Оценить оптимальную ширину паза, при которой достигается максимальная монохроматичность пучка.

2.19. Нейтроны со скоростью $v_0 = 5 \cdot 10^5$ см/с падают на брэгговский интерферометр, состоящий из трех тонких монокристаллических пластинок, вырезанных перпендикулярно главным кристаллическим плоскостям. На каждой из пластинок волна де Бройля разделяется на прошедшую и отраженную (рис. 11). Результат интерференции фиксируется счетчиком нейтронов C , скорость счета которого зависит от разности фаз в плечах интерферометра. В одном из плеч с помощью электродов (не показанных на рис. 11) на участке длиной $l = 1$ см создается электрическое поле с разностью потенциалов $V = 300$ В. Если бы у нейтрона был электрический заряд, то включение поля изменило бы скорость счета счетчика C . Найти, какой предельный заряд q нейтрона может быть обнаружен в таком опыте, если чувствительность интерферометра к сдвигу фаз составляет $\Delta\varphi = 0,1$ рад.

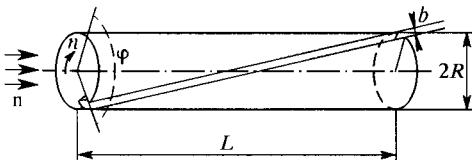


Рис. 10

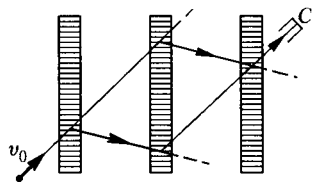


Рис. 11

2.20* Нейтроны со скоростью $v_0 = 5 \cdot 10^5$ см/с падают на брэгговский интерферометр, описанный в задаче 2.19. В одном из плеч интерферометра с помощью электродов (не показанных на рис. 11) на участке длиной $l = 1$ см создается электрическое поле $E = 3 \cdot 10^4$ В/см. Если бы у нейтрона был электрический дипольный момент d , то включение поля повлияло бы на скорость счета счетчика. Найти, какая предельная величина d может быть обнаружена в таком опыте, если поле E параллельно предполагаемому направлению дипольного момента, а чувствительность интерферометра к сдвигу фаз $\Delta\varphi$ составляет $0,1$ рад.

2.21* Коллимированный пучок электронов с кинетической энергией $T = 1,65$ кэВ пропускается через резонатор лазера, работающего

на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. При некоторых углах падения пучка относительно оси резонатора, близких к прямому, может наблюдаться брэгговское рассеяние электронов на стоячей электромагнитной волне (эффект Капицы—Дирака). Оценить возможные углы отклонения электронов.

2.22*: Исходя из требования, чтобы групповая скорость u волн де Бройля равнялась скорости движения v частицы, и пользуясь формулой Рэлея, связывающей фазовую и групповую скорости, определить фазовую скорость ω этих волн, а также найти связь между энергией частицы \mathcal{E} и частотой ν .

2.23*: Движение электрона описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Электрон в таком состоянии обладает вполне определенным импульсом, но его координата совершенно не определена. Для определения x -координаты электрона на пути волны перпендикулярно к направлению ее распространения ставится непрозрачный экран со щелью. Пусть координатная плоскость XU расположена в плоскости экрана, причем ось X направлена перпендикулярно к щели. Показать, что в результате дифракции на щели возникает состояние электрона, в котором неопределенности координаты электрона x и импульса p_x удовлетворяют соотношению Гейзенберга.

2.24*: В мысленном опыте Гейзенберга положение электрона определяется с помощью микроскопа при освещении электрона светом. Показать, что при таком методе измерения координата x и импульс p_x электрона не могут быть определены более точно, чем требует соотношение неопределенностей Гейзенберга.

2.25*: Скорость макроскопического тела измеряется по доплеровскому изменению частоты световой волны при отражении от этого тела (зеркала). Показать, что соответствующие неточности измерений импульса и положения тела удовлетворяют соотношению неопределенностей Гейзенберга.

2.26. Какова должна быть кинетическая энергия T электронов (протонов) для исследования распределения заряда и ядерной материи внутри ядра с точностью $l \sim 1$ фм (10^{-13} см), и структур с линейными размерами $l \sim 10^{-4}$ фм, что соответствует радиусу слабого взаимодействия?

2.27. Из ускорителя через щель выводится короткий сгусток протонов с энергией $\mathcal{E} = 100$ кэВ. Оценить минимально достижимую ширину пучка протонов на расстоянии $L = 100$ м от выходной щели.

2.28. Пучок протонов из ускорителя выводится через отверстие диаметром d . Используя соотношение неопределенностей, найти минимальный размер пучка на экране, расположенном на расстоянии $L = 1$ м от отверстия, если радиус орбиты в ускорителе $r = 10$ см, а величина магнитного поля в момент вывода $B = 300$ Гс.

2.29. Оценить минимальный диаметр d пятна, создаваемого на экране пучком электронов, если время пролета от коллиматора до экрана равно 10^{-8} с.

2.30. Оценить минимально достижимый диаметр d пятна, которое можно создать на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t^{\circ} = 1200^{\circ}\text{C}$. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1$ м. Расчет произвести: 1) исходя из волновой природы частиц (радиус первой зоны Френеля); 2) исходя из соотношения неопределенностей. Убедиться в эквивалентности обоих подходов.

2.31*. Предполагая, что ядерные силы между нуклонами обусловлены обменом квантами ядерного поля — виртуальными пионами, оценить радиус Δr действия ядерных сил, если известно, что энергия покоя пионов $m_{\pi}c^2 \approx 140$ МэВ.

2.32. Оценить кинетическую энергию \mathcal{E} электрона, локализованного в области пространства, радиус которого $r \sim 10^{-8}$ см (атом) и $r \sim 10^{-12}$ см (атомное ядро).

2.33*. Оценить, при какой напряженности E электрического поля лазерного излучения может произойти пробой вакуума, т. е. разрыв виртуальных электрон-позитронных пар. См. также задачу 6.260 из второй части задачника.

2.34. Определить теоретическое минимально разрешимое расстояние d электронным микроскопом при ускоряющем напряжении $V = 100$ кВ и числовой апертуре $A = 0,1$.

2.35. Мезоатомы водорода (связанные состояния протона и мюона) исследуются с помощью электронного микроскопа с ускоряющим напряжением $V = 3$ МВ. При какой числовой апертуре микроскопа можно определить размер мезоатома? Энергия покоя электрона $\mathcal{E}_0 = 0,511$ МэВ, масса мюона $m_{\mu} \approx 200m_e$.

2.36. В новых сверхпроводящих материалах расстояние d между соседними атомами около 4 Å. Определить, какую апертуру должен иметь электронный микроскоп с ускоряющим напряжением $V = 50$ кВ, чтобы можно было получить изображение кристаллической решетки этих материалов.

2.37. У оптического микроскопа угловая апертура порядка 1, а у электронного она равна 10^{-4} . При каком напряжении, ускоряющем электроны, разрешающая сила этих приборов будет одинакова?

2.38. Электрон притягивается к поверхности жидкого гелия электростатическими силами изображения, потенциальная энергия которых, как известно, равна

$$U(x) = \frac{e^2}{4x} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1},$$

где x — кратчайшее расстояние от электрона до поверхности, e — заряд электрона, $\varepsilon = 1,057$ — диэлектрическая проницаемость гелия (рис. 12). В то же время медленный электрон не может проникнуть внутрь гелия из-за отталкивания (так называемое отрицательное сродство гелия к электрону). Поэтому можно считать, что на поверхности ($x = 0$) потенциальная энергия испытывает бесконечный скачок и электрон оказывается в потенциальной яме

(рис. 12). Пользуясь этой моделью и соотношением неопределенностей, оценить по порядку величины среднее расстояние x электрона от поверхности гелия в основном состоянии и энергию связи $\mathcal{E}_{\text{св}}$ электрона вблизи поверхности гелия.

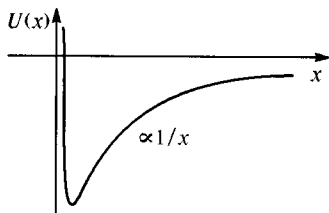


Рис. 12

преломления n перпендикулярно к ограничивающим плоскостям. Скорость электрона $v > c/n$, так что наблюдается излучение Вавилова—Черенкова. Определить угловую расходимость $\Delta\varphi$ излучения, обусловленную конечной толщиной слоя (рис. 13).

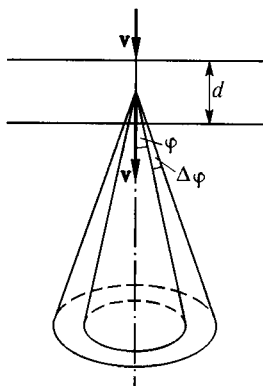


Рис. 13

2.39* Оценить энергию основного состояния частицы массой m и характерный размер области локализации частицы в потенциальном поле, равном

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ kx, & x > 0. \end{cases}$$

Сравнить с задачами 3.5 и 3.6.

2.40* Электрон движется со скоростью v в плоскопараллельном слое вещества толщиной d с показателем

2.41* Показать, что представление о классическом движении электрона в атоме водорода по первой боровской орбите противоречит соотношению неопределенностей Гейзенберга, т. е. неопределенность положения электрона порядка радиуса его орбиты.

2.42. Показать, что в водородоподобных атомах на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля. Определить длину волны де Бройля на круговой орбите с главным квантовым числом n .

2.43* Оценить на основании соотношения неопределенностей радиус атома водорода в основном состоянии и энергию связи электрона в том же состоянии. Определить на основании таких же оценок размер двух-

атомной молекулы и энергию ее основного состояния, рассматривая молекулу как одномерный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 и приведенной массой μ .

2.44* Действие силы на свободно движущуюся частицу массой m можно обнаружить, наблюдая изменение ее координаты во времени. Оценить в соответствии с квантовомеханическими законами, какую минимальную силу, действующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения t .

2.45* Силу можно измерить по изменению энергии пробного тела массой m до и после действия силы. Оценить в соответствии с квантовомеханическими законами, какую минимальную силу, дей-

ствующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения τ , если начальная энергия пробного тела, равная \mathcal{E}_0 , много больше приращения энергии.

2.46* Желание измерить координату x электрона с хорошей точностью путем уменьшения длины волны λ измерительного фотона, т. е. локализация его в размере λ , приводит к тому, что появляется вероятность рождения виртуальных (e^-e^+)-пар. В силу неразличимости электронов мы не можем отличить исходный электрон от электрона рожденной пары. Оценить, к какой погрешности Δx , которая практически определяет размер электрона, это приводит?

2.47. Соотношение неопределенностей между энергией и временем имеет два различных содержания: одно из них относится к нестабильным состояниям — оно определяет естественную ширину энергетического распределения излучения с энергией \mathcal{E} , происходящего за время τ , а другое относится к измерению — оно определяет время τ , необходимое для измерения энергии \mathcal{E} с заданной точностью $\Delta\mathcal{E}$. Используя обе эти стороны соотношения неопределенностей, оценить минимальное время $t_{\text{изм}}$, необходимое для определения того, находится ли ядро ^{57}Fe в первом возбужденном состоянии с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 14,4$ кэВ, или оно уже претерпело γ -распад и находится в основном состоянии. Какова будет ширина измеряемого при этом энергетического распределения γ -лучей.

2.48* Рассмотрим опыт по дифракции электронов на двух щелях в незакрепленном экране. Определив место попадания частицы (положение максимума 1-го порядка) и измерив x -компоненту импульса отдачи экрана со щелями Δp_x (рис. 14), можно, казалось бы, определить, через какую щель проходит электрон. Этот мысленный опыт Эйнштейн предлагал Бору в качестве аргумента против соотношения неопределенностей. Показать, что измерение импульса отдачи экрана с необходимой точностью приводит к неопределенности в импульсе рассеянного электрона и тем самым к размытию интерференционной картины в полном соответствии с соотношением неопределенностей.

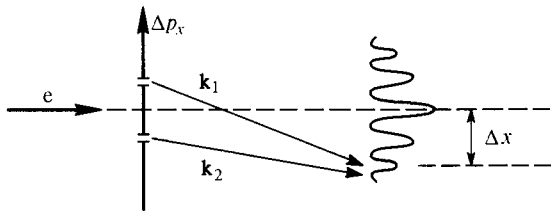


Рис. 14

2.49* Согласно принципу дополнительности Бора невозможно одновременное проявление микроскопическим объектом волновых и корпускулярных свойств. В 1995 г. в Массачусетском технологическом институте (США) был осуществлен эксперимент, направленный на проверку основ квантовой механики. Идея такого экспери-

мента обсуждалась Фейнманом в своих лекциях. Как показано на рис. 15, пучок монохроматических атомов Na ($v = 1400$ м/с) направляется на дифракционную решетку с периодом $a = 200$ нм, где он расщепляется на прямой пучок и продифрагировавший в первый порядок. Затем второй решеткой пучки сводились, образовывалась интерференционная картина, контраст которой измерялся. На расстоянии z от первой решетки атомы Na возбуждались лазером ($\lambda_{\text{ф}} = 6000$ Å). При возвращении в исходное состояние атомы испускали фотоны, которые в принципе позволяют определить траекторию атома. На каких расстояниях z согласно принципу дополнительности происходило размытие интерференционной картины?

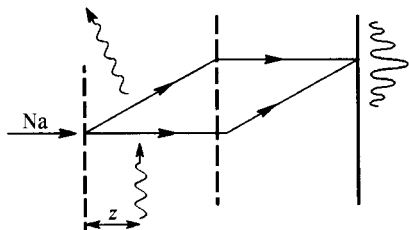


Рис. 15

на единицу длины и на единицу интервала длин волн $n(v) = n_0/v$ (v — скорость нейтронов), падает на толстый кусок поликристаллического бериллия, состоящего из большого числа ориентированных в различных направлениях маленьких кристаллов. Считая рассеяние нейтронов в образце однократным, вычислить силу, действующую на бериллий, если известно, что у Be межплоскостное расстояние $d \approx 2$ Å, а $n_0 = 10^6$ см⁻¹с⁻¹?

2.51. В октябре 1999 г. в Венском университете был осуществлен эксперимент по дифракции очень массивных частиц — фуллеренов — молекул углерода C₆₀. Пучок молекул направлялся на дифракционную решетку с периодом $d = 100$ нм, а затем на расстоянии $l = 1,25$ м от решетки измерялось пространственное распределение прошедших частиц. Как видно из приведенных на рис. 16 результа-

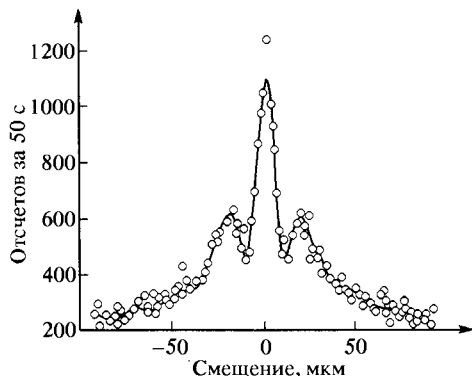


Рис. 16

тов эксперимента, кроме прямого пучка наблюдалось еще два симметрично расположенных максимума на расстояниях $\Delta = \pm 25$ мкм. Какова была скорость фуллеренов в пучке?

2.52. Кластеры атомов или молекул получают при расширении и, тем самым, охлаждении вылетающих из сопла монохроматических частиц. В одном из экспериментов с кластерами гелия в 1994 г. в Геттингеме (Германия) на пути

пучка была установлена дифракционная решетка с периодом $d = 200$ нм и затем с помощью масс-спектрометра анализировался спектр частиц под различными углами в первом порядке интерференции (рис. 17). Определить скорость гелиевых кластеров: димеров, состоящих из четырех атомов гелия и обозначенных на рис. 17 как $(\text{He}_2)_2$ ($\theta = 0,69$ мрад), и тримеров, состоящих из шести атомов гелия $(\text{He}_2)_3$ ($\theta = 0,46$ мрад).

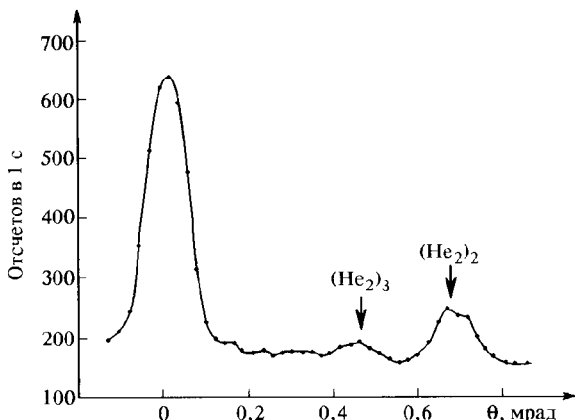


Рис. 17

2.53. Оценить неопределенности отклонения от вертикали $\Delta\varphi$ и момента импульса ΔL математического маятника, совершающего малые колебания в поле силы тяжести. Масса маятника равна m , длина — l .

2.54*. Для гармонического осциллятора можно определить время как «движение» фазы осциллятора: $t = \varphi/\omega$. Используя соотношение неопределенностей энергия-время, найти связь между флуктуациями ΔN среднего числа N когерентных осцилляторов в системе и флуктуацией $\Delta\varphi$ их фазы φ .

§ 3. Уравнение Шредингера. Квантование. Потенциальные барьеры

3.1*. Найти плотность потока вероятности для: а) плоской волны $\psi = \exp\left(i \frac{p_z}{\hbar} z\right) = \exp(ikz)$, б) сферической волны $\psi = \frac{1}{kr} \exp(ikr)$, в) суммы сходящейся и расходящейся волн $\psi = \frac{1}{2kr} (se^{ikr} - e^{-ikr})$.

3.2. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение, имеет вид $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$. Найти потенциал $U(x)$, в котором двигается частица, и ее энергию \mathcal{E} , если известно, что при $x = 0$, $U(x) = 0$.

3.3. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $U(x)$, есть

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2 \exp(-x/a) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Оценить с помощью соотношения неопределенностей среднюю кинетическую энергию $\langle T \rangle$ частицы и сравнить с результатом точного расчета. Найти $U(x)$ при $x > 0$ и полную энергию частицы \mathcal{E} , если известно, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

3.4. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $U(x)$, есть

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax \exp(-x/a) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Оценить с помощью соотношения неопределенностей среднюю кинетическую энергию $\langle T \rangle$ частицы и сравнить с результатом точного расчета. Найти среднее значение координаты $\langle x \rangle$, а также $U(x)$ при $x > 0$ и полную энергию \mathcal{E} , если известно, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

3.5. Частица массы m находится в одномерном потенциале

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ kx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Оценить энергию основного состояния частицы в этом потенциале, используя в качестве волновой функции $\psi = x \exp(-ax)$. В качестве оценки взять минимальное значение среднего значения полной энергии частицы. Сравнить с задачей 2.39.

3.6. Используя правило квантования Бора—Зоммерфельда, найти закон квантования энергии частицы массой m при больших значениях главного квантового числа n (в квазиклассическом приближении) в одномерном потенциале

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ kx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

У к а з а н и е. Правило квантования Бора—Зоммерфельда:

$$\oint \mathbf{p} \, dl = nh.$$

3.7. В кулоновском поле простейшим сферически симметричным решением уравнения Шредингера является волновая функция $\psi = A \exp(-ar)$. Какой энергии (в эВ) соответствует это состояние для электрона в кулоновском поле ядра с зарядом $Z = 10$? Чему равна a ?

3.8*. Взаимодействие между нуклонами в дейтроне может быть описано потенциалом Юкавы $U(r) = -U_0 \frac{\exp(-r/a)}{r/a}$, где r — относительное расстояние, a — радиус взаимодействия ядерных сил, $U_0 = 40$ МэВ. Если аппроксимировать волновую функцию основного состояния как водородоподобную $\psi(r, a) = \sqrt{\frac{a^3}{8\pi a^3}} \exp\left(-\frac{ar}{2a}\right)$, где

a — параметр, при котором достигается минимальная энергия основного состояния, то энергия связи оказывается равной $\mathcal{E}_0 = -1,08$ МэВ. Определить величину a .

У к а з а н и е. Уравнение $\frac{x^3(x-1)}{(1+x)^3} = 0,108$ имеет корень $x = 1,5$.

3.9. Взаимодействие между нуклонами в дейтроне может быть описано потенциалом $U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где $U_0 = 32,7$ МэВ, $a = 2,2$ фм, r — расстояние между нуклонами. Аппроксимируя волновую функцию основного состояния водородоподобной $\psi(r, a) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{8\pi a^3}} \exp\left(-\frac{ar}{2a}\right)$, где α — параметр, при котором достигается минимум энергии основного состояния, найти энергию связи дейтрона.

У к а з а н и е. Уравнение $\frac{(1+x)^4}{x} = 22,6$ имеет корень $x = 1,35$.

3.10* Волновая функция трехмерного изотропного осциллятора, характеризуемого классической частотой ω и приведенной массой μ , имеет вид $\psi = A(1 + \alpha r^2)e^{-\beta r^2}$, где A , α и β — некоторые константы. Определить величину констант α и β , энергию этого состояния и главное квантовое число. Смотрите также задачу 4.10.

3.11. Найти волновую функцию и уровни энергии стационарных состояний частицы массой m , локализованной в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечно высокими стенками (рис. 18). Ширина ямы равна $2a$.

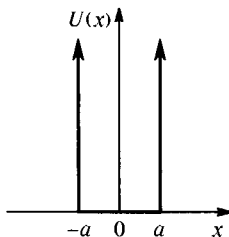


Рис. 18

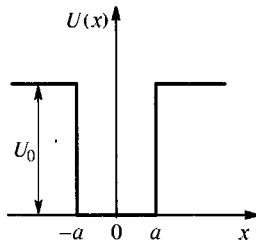


Рис. 19

3.12* Найти волновую функцию и уровни энергии стационарных состояний частицы массой m , локализованной в симметричной одномерной потенциальной яме прямоугольной формы, глубина которой равна U_0 , а ширина $2a$ (рис. 19).

3.13. В одномерной потенциальной яме шириной b с бесконечными стенками находятся N электронов. Определить минимальное значение полной энергии \mathcal{E}_{\min} и силу F давления электронов на стенки ямы. Взаимодействием электронов пренебречь.

3.14. Поток свободно распространяющихся нейтронов падает на непропускаемую стенку толщиной L , в которой имеется канал прямоугольного поперечного сечения с высотой $d = 10^{-3}$ см и шириной $l \gg d$. Длина канала $L \gg l$ (рис. 20). При каких значениях скорости

v нейтронов в падающем пучке нейтроны могут пройти сквозь канал? Чему равна минимальная скорость v_{\min} в случае квадратного сечения канала $d \times d$?

3.15. Поток нейтронов, летящих со скоростью $V_0 = 25$ см/сек, падает на широкую щель с абсолютно отражающими стенками (рис. 21). Длина щели $l = 1$ см, высота $d = 10^{-4}$ см. Сколько времени нейтрон будет находиться внутри щели, если он в нее попадет?

3.16*. Частица локализована в трехмерной прямоугольной потенциальной яме (рис. 22). Это значит, что потенциальная энергия частицы сферически симметрична относительно силового центра O , т. е. является функцией только расстояния r от силового центра:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Найти волновые функции и уровни энергии связанных стационарных состояний частицы, зависящие только от расстояния r . (В таких состояниях момент импульса частицы равен нулю.)

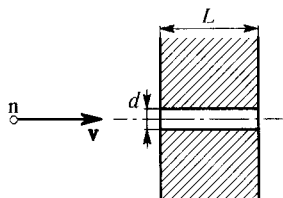


Рис. 20

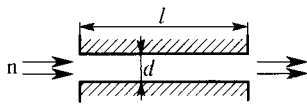


Рис. 21

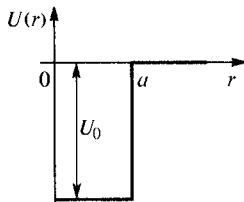


Рис. 22

3.17. Частица массой m локализована в трехмерной потенциальной яме прямоугольной формы, радиус которой равен a . Определить минимальную глубину ямы U_0 , при которой появится первый уровень энергии. Чему равна энергия частицы \mathcal{E} на этом уровне?

3.18. Дейтрон — это ядро дейтерия, состоящее из протона и нейтрона. Энергия связи дейтрона, измеренная экспериментально, равна $\mathcal{E} = 2,225$ МэВ. Аппроксимируя потенциальную энергию взаимодействия протона с нейтроном с помощью трехмерной прямоугольной потенциальной ямы, определить ее глубину U_0 , при которой возможно такое связанное состояние. Радиус потенциальной ямы $a = 1,6 \cdot 10^{-13}$ см.

3.19. Определить среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$ и среднее значение квадрата координаты $\langle x^2 \rangle$ частицы массой m , находящейся в одномерной «мелкой» ($U_0 \ll \hbar^2/ma^2$) симметричной потенциальной яме, изображенной на рис. 23. Проверить выполнение соотношения Гайзенберга $\langle p^2 \rangle \langle x^2 \rangle \geq \hbar^2/4$.

3.20*. Потенциальную энергию взаимодействия $U(z)$ атома гелия с плоской поверхностью твердого тела $z = 0$ можно аппроксимировать прямоугольной ямой некоторой глубины U_0 и шириной $a = 5 \text{ \AA}$, при-

чем $U(z=0) = +\infty$ (рис. 24). Полагая, что волновая функция адсорбированного атома в основном состоянии достигает максимума при $z = 0,99a$, найти среднее значение координаты $\langle z \rangle$ для адсорбированных атомов в основном состоянии.

3.21. Энергия взаимодействия $U(z)$ атома водорода с твердой стенкой аппроксимируется прямоугольной потенциальной ямой глубиной U_0 , шириной $a = 6 \text{ \AA}$ и $U(z=0) = +\infty$ (рис. 25). Энергия адсорбции — это разность наимизших уровней свободного и прилипшего к стенке атома $\mathcal{E} = U_0 - \mathcal{E}_1 = 1 \text{ К}$. Найти величину U_0 и среднее значение координаты $\langle z \rangle$ адсорбированных атомов.

У к а з а н и е. $\varphi \operatorname{ctg} \varphi = -1,21$ при $\varphi = 2\pi/3$.

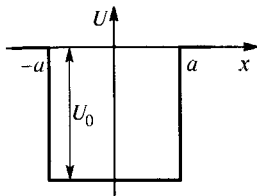


Рис. 23

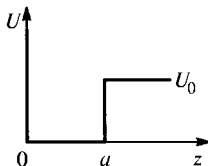


Рис. 24

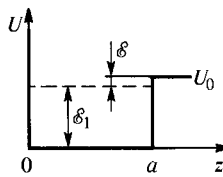


Рис. 25

3.22. Электрон находится в одномерной симметричной потенциальной яме размером $2a = 2 \text{ \AA}$. Отношение волновой функции основного состояния на границе ямы к ее максимальному значению внутри ямы составляет $\alpha = 1/2$. Найти глубину ямы и энергию ионизации электрона (в эВ).

3.23. Найти глубину ямы и энергию ионизации \mathcal{E} электрона (в эВ), находящегося в основном состоянии в одномерной яме шириной $a = 2 \text{ \AA}$ с потенциалом $U(0) = \infty$, $U = -U_0$ при $0 < x < a$ и $U = 0$ при $x > a$, если известно, что отношение волновой функции на границе ямы ($x = a$) к ее максимальному значению в яме равно $\alpha = \sqrt{3}/2$.

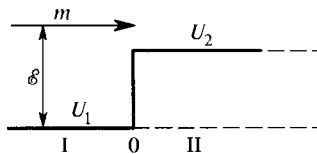


Рис. 26

3.24* Частица, находящаяся в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, излучает фотон, переходя из состояния с номером $(n + 1)$ в состояние n . Найти связь частоты фотона с периодом колебаний между стенками классической ямы частицы с энергией \mathcal{E}_n .

3.25* Свободно движущаяся частица массой m с энергией \mathcal{E} подходит к границе раздела двух областей I и II, на которой потенциальная энергия частицы скачкообразно меняется от постоянного значения U_1 до постоянного значения U_2 (рис. 26). Определить коэффициенты отражения и пропускания частицы на этой границе по амплитуде (r и d) и по энергии (R и D). Исследовать случаи, когда: 1) $\mathcal{E} > U_2$ и 2) $\mathcal{E} < U_2$. Во втором случае определить среднюю глубину проникновения l частицы во вторую среду.

3.26. Электрон, находящийся в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной несколько сантиметров и глубиной несколько электрон-вольт, поглощает квант света с частотой $\nu = 1,01\nu_0$, где ν_0 — предельная частота света, при которой электрон может вылететь из ямы. Определить среднее число отражений N от краев ямы, которые испытывает электрон, прежде чем покинуть ее. Считать, что время радиационного перехода электрона в основное состояние много больше времени вылета электрона из ямы.

3.27. Электрон, находящийся в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной $a = 4 \text{ \AA}$ и глубиной $U_0 = 10 \text{ эВ}$ (рис. 27) переведен в возбужденное состояние с энергией $\mathcal{E} \approx 10^{-2} \text{ эВ}$ (нуль отсчета энергии — состояние покоя вне ямы). Оценить время жизни возбужденного состояния, считая, что оно ограничивается вылетом электрона из ямы, а не переходом в основное состояние.

3.28. Электрон, введенный в жидкий гелий, расталкивает атомы жидкости и образует в ней сферическую вакуумную полость, которая является для электрона потенциальной ямой с практически бесконечно высокой стенкой. Вычислить радиус полости, если поверхностное натяжение жидкого гелия равно $0,35 \text{ дин/см}$, а электрон занимает в полости наименьший квантовый уровень. Внешнее давление считать равным нулю. Смотрите также задачу 2.38.

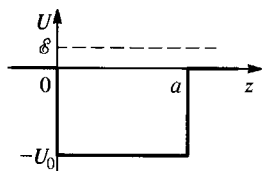


Рис. 27

3.29. Пусть в задаче 3.25 частицей является электрон с энергией $\mathcal{E} = 2 \text{ эВ}$, $U_1 = 0$, $U_2 = 5 \text{ эВ}$. Вычислить среднюю глубину его проникновения в область II.

3.30. Частица массой m и энергией \mathcal{E} из области I проходит в область II через одномерный потенциальный барьер (или яму) прямоугольной формы с шириной l (рис. 28). Определить для случаев $\mathcal{E} > U$ и $\mathcal{E} < U$ амплитудные коэффициенты отражения r и пропускания d частицы на этом препятствии, предполагая, что потенциальные энергии частицы в областях I, II и внутри барьера постоянны и равны соответственно U_1 , U_2 , U .

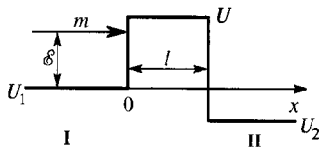


Рис. 28

3.31. В предыдущей задаче $U_1 = U_2$. При каком условии частица не будет отражаться от потенциального барьера (ямы)?

3.32. Найти энергию электрона, при которой он беспрепятственно пройдет над прямоугольным барьером высотой $U = 5 \text{ эВ}$ и шириной $l = 1 \text{ \AA}$.

3.33. В 1920 г. Рамзауэр обнаружил, что в сечении рассеяния σ_s медленных электронов на атомах криптона имеется глубокий минимум (резко увеличивается проникаемость атомов) при энергии $\mathcal{E} = 0,6 \text{ эВ}$ (рис. 29). Этот эффект обусловлен волновыми свойствами электронов. Считая, что для электрона потенциал атома является од-

номерной прямоугольной ямы глубиной $U = 2,5$ эВ, оценить радиус атома криптона. См. также задачу 8.14.

3.34. Электрон находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме, изображенной на рис. 30, и имеет энергию $\mathcal{E} = 1,5$ эВ. Ширина ямы равна $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Найти высоту потенциального барьера U и его проницаемость D . За какое время τ вероятность найти частицу в яме уменьшится в два раза? Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера пренебречь.

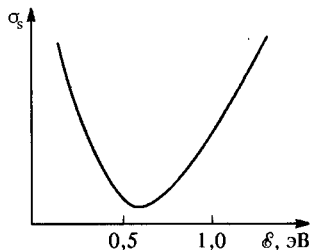


Рис. 29

3.35. Электрон находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рис. 31. Энергия частицы равна $\mathcal{E} = 0,9999$ эВ, а высота потенциального барьера $U = 1$ эВ. Найти ширину ямы, если уровень с указанным значением энергии является первым. Оценить время жизни τ частицы в яме. Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера следует пренебречь.

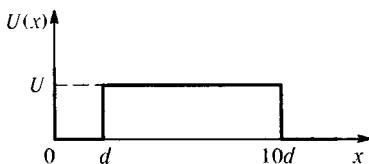


Рис. 30

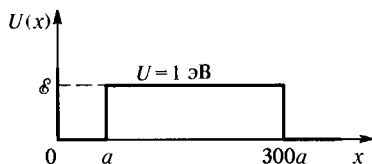


Рис. 31

3.36* Вывести для α -распада закон Гейгера—Неттола, связывающий период полураспада $T_{1/2}$ с энергией \mathcal{E} вылетающих частиц соотношением $\ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{\mathcal{E}}}$, где A и B — постоянные. Считать, что потенциальный барьер $U(r)$ имеет вертикальную стенку при $r = R$ (радиус ядра) и определяется законом Кулона при $r \geq R$ (рис. 32). Энергия вылетающей α -частицы $\mathcal{E} \ll U_0$ (высоты барьера). Задачу считать одномерной.

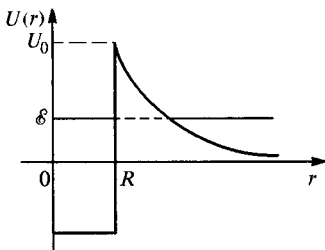


Рис. 32

3.37* В сканирующем туннельном микроскопе (изобретен Г. Биннингом и Г. Рорером в 1982 г.; Нобелевская премия 1986 г.) регистрируется туннельный ток электронов \mathcal{I} через вакуумный зазор между поверхностью проводящего образца и установленной перпендикулярно к ней острой металлической иглой. Оценить, как изменится туннельный ток, если игла при своем поступательном движении параллельно поверхности образца пройдет над ступенькой высотой $b = 1$ Å. Работы выхода электронов из иглы $A_1 = 4,5$ эВ и об-

разца $A_2 = 4,0$ эВ. На иглу подано напряжение $V = +0,2$ В относительно образца.

Указание. считать, что до приложения напряжения уровни максимальной энергии электронов в материалах иглы и образца совпадают.

3.38. В сканирующем туннельном микроскопе регистрируется туннельный ток электронов \mathcal{I} через вакуумный зазор между поверхностью проводящего образца и установленной перпендикулярно к ней острой металлической иглой. Работы выхода электронов из иглы $A_1 = 3,0$ эВ и образца $A_2 = 4,0$ эВ. На иглу подано напряжение $V = -0,5$ В относительно образца. Оценить, во сколько раз изменится туннельный ток, если игла при своем поступательном перемещении параллельно поверхности образца пройдет над участком, работа выхода для которого больше на 15%. При оценках считать, что электроны туннелируют сквозь одномерный потенциальный барьер, а электрическое поле между иглой и образцом является однородным. Величина зазора $b = 10$ Å. См. указание к задаче 3.37.

3.39. В сканирующем туннельном микроскопе регистрируется туннельный ток электронов \mathcal{I} через вакуумный зазор между поверхностью проводящего образца и установленной перпендикулярно к ней острой металлической иглой. Для повышения чувствительности микроскопа величина зазора модулируется посредством малых колебаний иглы вдоль ее оси с амплитудой колебаний $a = 0,2$ Å. Работы выхода электронов из иглы $A_1 = 3,0$ эВ и образца $A_2 = 2,0$ эВ. На иглу подано напряжение $V = +0,5$ В относительно образца. Какова амплитуда колебаний туннельного тока $\delta\mathcal{I} = (\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min})/2$, если $\mathcal{I}_{\max} = 1$ нА? При оценках считать, что электроны туннелируют сквозь одномерный прямоугольный потенциальный барьер. Поле между иглой и образцом можно считать однородным. См. указание к задаче 3.37.

3.40. В 1988 г. появилось сенсационное сообщение об осуществлении холодного ядерного синтеза дейтерия, растворенного в металлическом палладии. Можно считать, что при этом ядра дейтерия взаимодействуют друг с другом по закону Кулона, если расстояние между ними r удовлетворяет условию $R_1 = 2 \cdot 10^{-13}$ см $< r \leq 5 \cdot 10^{-9}$ см $= R_2$. При большем расстоянии между ядрами энергия электрического отталкивания $U = 0$ за счет экранирования ядер дейтерия электронами проводимости. Определить вероятность реакции синтеза $d + d$ при столкновении дейтронов внутри палладия при комнатной температуре за счет туннельного эффекта. Считать, что реакция синтеза происходит при $r < R_1$.

3.41. Рассчитать коэффициент прозрачности барьера деления тяжелых ядер, аппроксимируя его параболическим барьером (такая аппроксимация реально отражает форму барьера деления тяжелых ядер)

$$U = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$$

(рис. 33) и выразить его через «квант» $\hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{-U''}{m}}$, соответствующий кривизне барьера. Энергия возбуждения ядра равна \mathcal{E} . Смотрите также задачи 9.41 и 9.42.

3.42. Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме $U(x)$ с непроницаемыми стенками $U(x)|_{x \leq 0} = \infty$ и «колодцем» на дне (рис. 34)

$$U = \begin{cases} -U_0 & \text{при } 0 < x < a, \quad U_0 > 0, \\ 0 & \text{при } a < x < b. \end{cases}$$

Для стационарных состояний с энергией $0 < \mathcal{E} \leq U_0$ определить отношение f максимально возможных плотностей вероятности нахождения частицы при $x < a$ и $a < x < b$. Найти в случае $U_0 \gg \mathcal{E}$ резонансные значения энергии, при которых величина f сильно возрастает.

3.43* При вращении сосуда со сверхтекучим гелием в объеме образуются линейные вихри (рис. 35). Скорость атомов гелия в вихре $v = K/r$, где r — расстояние от оси, K — константа, называемая интенсивностью вихря. Найти минимальное численное значение интенсивности вихря.

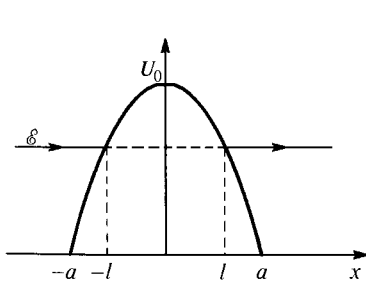


Рис. 33

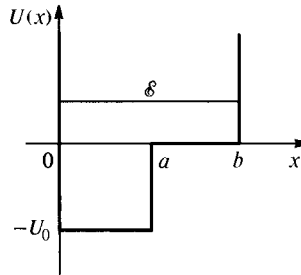


Рис. 34

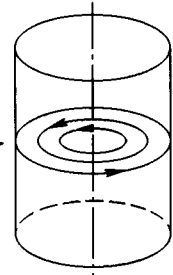


Рис. 35

3.44. В жидком гелии II при температуре ниже λ -точки могут существовать вихревые нити. Вокруг вихревой нити жидкость движется по окружностям, причем момент количества движения атомов гелия относительно оси вихревой нити подчиняется правилу квантования Бора. Найти поле скоростей вокруг вихревой нити.

3.45. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией \mathcal{E} над прямоугольным барьером высотой $U = (3/4)\mathcal{E}$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную ширину барьера в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.

У к а з а н и е. Воспользоваться известным из оптики условием, что при отражении от оптически менее плотной среды фазы отраженной и падающей волн совпадают.

3.46. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией \mathcal{E} над одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = -3\mathcal{E}$ коэффици-

ент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную глубину ямы в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.

У к а з а н и е. Воспользоваться известным из оптики условием, что при отражении от оптически более плотной среды фазы отраженной и падающей волн отличаются на π .

3.47. Электрон находится в основном состоянии в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме с шириной $2a = 10 \text{ \AA}$ с потенциалом $U(\pm \infty) = 0$. Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$. Считая, что изменение волновой функции внутри ямы мало, определить энергию связи электрона и глубину ямы (в эВ).

3.48. Нейтрон находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с шириной $a = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, ограниченной с одной стороны бесконечно высокой стенкой. При этом $U = 0$ при $0 < x < a$, а при $x \geq a$ потенциал U равен постоянной конечной величине U_0 . Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$. Считая, что максимум волновой функции достигается вблизи границы ямы, определить энергию связи нейтрона.

3.49. Микрочастица находится в прямоугольной потенциальной яме заданной ширины. Одна стенка бесконечная, а вторая — конечная, высотой U_0 . Энергия частицы в яме $\mathcal{E} = 3U_0/4$. Во сколько раз надо квазистатически «сжать» яму при неизменной высоте, чтобы частица стала свободной?

3.50. Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме заданной ширины. Одна ее стенка бесконечно высокая, а вторая — конечной высоты U_0 . Энергия частицы в яме $\mathcal{E} = U_0/2$. Во сколько раз надо квазистатически изменить высоту ямы при неизменной ширине, чтобы частица стала свободной?

3.51. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с шириной $a = 4 \text{ \AA}$ ($U(0) = \infty$, $U(a) = U_0 = 1 \text{ эВ}$) в состоянии с энергией $\mathcal{E} = 0,88 \text{ эВ}$. На яму накладывается постоянное электрическое поле $E = 3 \cdot 10^5 \text{ В/см}$, направленное в отрицательную сторону оси x . Оценить возникающую при этом ширину уровня энергии. Считать, что энергия уровня не меняется при наложении поля.

3.52. Электрон находится в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме с шириной $2a = 4 \text{ \AA}$ ($U(-a) = U(a) = U_0 = 1 \text{ эВ}$) в состоянии, энергия которого $\mathcal{E} = 0,8 \text{ эВ}$. На яму накладывается постоянное электрическое поле $E = 3 \cdot 10^5 \text{ В/см}$, направленное в отрицательную сторону оси x . Оценить время, через которое электрон покинет яму. Считать, что энергия уровня не меняется при наложении поля.

§ 4. Атом водорода и водородоподобные атомы

4.1. Частица находится в центральном поле силового центра с потенциальной энергией $U = -C/r^s$, где C — положительная постоянная, а r — расстояние от силового центра. Исходя из соотношения неопределенностей, показать, что при $s > 2$ возможны стационарные состояния частицы со сколь угодно большими по абсолютной величине отрицательными собственными значениями полной энергии. Частица при этом условии будет переходить на нижележащие энергетические уровни — произойдет ее «падение» в точку $r = 0$, т. е. на силовой центр. Если же $s < 2$, то наиболее низкий энергетический уровень будет иметь конечное значение полной энергии, т. е. падения на силовой центр не произойдет.

Пользуясь этими результатами, объяснить возможность существования атомов, например атома водорода.

4.2. Показать, что в пределе, когда главное квантовое число n в атоме водорода стремится к бесконечности, движение электрона переходит в классическое движение по круговой орбите.

4.3. Классические формулы следуют из квантовых в пределе вышесказанных состояний (т. е. при $n \rightarrow \infty$). В атоме водорода, как и в задаче Кеплера, потенциальная энергия $U(r) \propto \frac{1}{r}$. Исходя из квантовых формул для уровней энергии $\mathcal{E}_n = -Ry/n^2$ и радиусов состояний $r_n = an^2$ электрона в атоме водорода, получить для больших n третий закон Кеплера.

4.4. Показать, что среди сферически симметричных решений уравнения Шредингера для водородоподобного атома, конечных при $r = 0$ и обращающихся в нуль при $r = \infty$, имеется экспоненциальное решение $e^{-\alpha r}$. Найти постоянную α и энергию атома в рассматриваемом состоянии. Что это за состояние?

4.5. Найти объемную плотность вероятности нахождения электрона в водородоподобном атоме для основного состояния¹⁾.

4.6. Найти радиальную плотность вероятности нахождения электрона в водородоподобном атоме для основного состояния. При каких значениях r эта величина достигает максимума¹⁾.

4.7. Найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра в $1s$ -состоянии водородоподобного атома¹⁾.

4.8. Найти среднее значение обратного расстояния $\langle 1/r \rangle$ электрона от ядра в основном состоянии водородоподобного атома¹⁾.

4.9. Найти средние значения потенциальной $\langle U \rangle$ и кинетической $\langle T \rangle$ энергий основного состояния водородоподобного атома¹⁾.

4.10. Волновая функция одного из состояний атома водорода имеет вид $\psi = A(1 + \alpha r)e^{-\beta r}$, где A , α , β — некоторые константы. Опре-

¹⁾ Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

делить величину констант α и β , энергию этого состояния и его квантовые числа.

4.11. Определить разрешающую способность R спектрального прибора, необходимую для наблюдения изотопического сдвига спектральных линий дейтерия относительно линий водорода. Какова должна быть ширина b основания призмы из тяжелого флинта с дисперсией $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$ (в диапазоне красного света) в призмном спектрографе, применяемом для обнаружения изотопического сдвига головной линии серии Бальмера?

4.12. Серия Лаймана наблюдается в смеси атомарных водорода и трития (ядро атома трития состоит из протона и двух нейтронов). Определить разрешающую способность спектрального прибора, которая достаточна для разрешения изотопической структуры спектральных линий этой серии. Как меняется требуемая разрешающая способность при переходе к другим сериям (Бальмера, Пашена) той же смеси? Можно ли разрешить изотопическую структуру спектральных линий той же смеси в видимой области спектра с помощью стеклянной призмы с основанием $b = 1 \text{ см}$ и дисперсией показателя преломления $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$? Каково должно быть эффективное число отражений $N_{\text{эф}}$ и порядок m наблюдаемого спектра, чтобы разрешить и исследовать ту же структуру с помощью интерферометра Фабри—Перо?

4.13. Серия Бальмера наблюдается в смеси атомарных водорода и дейтерия. Определить разрешающую способность и число штрихов N дифракционной решетки, которые необходимы для разрешения во втором порядке изотопической структуры спектральных линий этой серии. Как меняется эта разрешающая способность с увеличением номера линии (т. е. с уменьшением длины волны) указанной серии?

4.14. В спектрах некоторых звезд наблюдается $m \approx 30$ линий водородной серии Бальмера. При каком наименьшем числе N штрихов дифракционной решетки можно разрешить эти линии в спектре первого порядка?

4.15. Кварцевая пластинка, расположенная между скрещенными поляроидами, образует поляризационный фильтр. Разрешенные направления пластинки составляют угол 45° с главными направлениями поляроидов. Какую минимальную толщину должна иметь пластинка, для того чтобы с помощью такого фильтра можно было выделить наиболее длинноволновую линию серии Бальмера для водорода ($\lambda = 656 \text{ нм}$) от той же линии дейтерия? Показатели преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в кварце $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$. Источником света является газоразрядная водородно-дейтериевая лампа.

4.16. Каково должно быть минимальное расстояние между зеркалами в интерферометре Фабри—Перо, чтобы по оптическому спектру установить наличие двух изотопов калия ^{39}K и ^{40}K ? Коэффициент отражения зеркал по энергии $0,9$, энергия ионизации атома калия $W = 4,3 \text{ эВ}$.

4.17. Отрицательные мюоны могут захватываться атомом и замещать в нем электроны электронной оболочки. Практически может замещаться лишь один электрон. Получающиеся в результате такой замены системы называются мезоатомами. Масса мюона $m_\mu = 207m_e$. Вычислить по теории Бора радиус первой круговой орбиты (K -орбиты) мюона в мезоатоме. Рассчитать энергетические уровни мезоатома. Какое излучение будет наблюдаться при переходе на K -орбиту мюона с более высоких орбит? Почему исследование такого излучения применяется для выявления структуры тяжелых атомных ядер? Массой мюона по сравнению с массой ядра пренебречь.

4.18. Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и его античастицы — позитрона. Найти уровни энергии, энергии ионизации и соответствующую ей длину волны резонансной линии позитрония. Резонансным называют переход из первого возбужденного состояния в основное.

4.19. Длина волны линии H_α водородной серии Бальмера равна $\lambda = 0,656$ мкм. Определить по этим данным энергии ионизации ϵ_μ позитрония и мюония, находящихся в основном состоянии. Масса мюона $m_\mu = 207m_e$ (m_e — масса электрона).

4.20. Рассчитать энергию излучения $\Delta\epsilon$, испускаемого в мезоатоме водорода (мюония) при переходе мюона с N - на M -оболочку. Как велик радиус 1-й боровской орбиты в этом случае?

4.21. Оценить скорость мюона μ^- в мезоатоме с зарядом ядра $Z = 10$. Найти радиус атома.

4.22. При переходе пиона π^- с $4f$ -оболочки на $3d$ -оболочку мезоатома с ядром фосфора ($Z = 15$) испускается рентгеновский квант с энергией $\epsilon = 40$ кэВ. Определить массу пиона и радиус $3d$ -оболочки.

4.23. Какова была бы энергия связи и радиус водородоподобной системы из двух нейтронов при учете только силы гравитационного притяжения между ними?

4.24. Какой радиус имела бы $2p$ -оболочка атома из нейтрона и электрона, связанных между собой только силой гравитационного взаимодействия?

4.25. Найти потенциалы ионизации ионов He^+ и Li^{++} .

4.26. Определить наименьшую энергию, которую надо сообщить в основном состоянии трижды ионизованному атому бериллия, чтобы возбудить полный спектр этого атома.

4.27. Энергия ионизации атома He равна 24,5 эВ. Определить энергию ϵ , необходимую для получения из нейтрального атома He дважды ионизованного иона He^{++} .

4.28. Ядро атома трития, находящееся в основном состоянии, испытывает β^- -распад. Считая, что за время вылета распадного электрона состояние атомного электрона не успевает измениться, найти его полную энергию сразу после распада.

4.29. В 1989 г. в ЦЕРНе при пропускании медленных антипротонов через водородную камеру наблюдалось образование протониума — атома состава $(p\bar{p})$. Энергия излучения, соответствующая пере-

ходу протониума из состояния $2p$ в $1s$, оказалась равной $10,1$ кэВ. Определить вклад сильного взаимодействия в разность энергий указанных уровней. Для какого из этих уровней вклад сильного взаимодействия оказывается наибольшим?

4.30. За счет сильного взаимодействия энергия основного состояния протониума (системы $(p\bar{p})$) сдвигается на $\delta\epsilon = 0,7$ кэВ относительно его «чисто кулоновского» значения. Считая, что сильное взаимодействие описывается потенциалом Юкавы $U(r) = -(g^2/r) \exp(-r/r_0)$, $r_0 = 0,8 \cdot 10^{-13}$ см, оцените величину константы сильного взаимодействия $g^2/(\hbar c)$ в системе $(p\bar{p})$. Волновая функция $1s$ -состояния протониума $\psi = (\pi r_B^3)^{-1/2} \exp(-r/r_B)$, где r_B — боровский радиус протониума.

4.31. Фотон головной (наиболее длинноволновой) линии серии Лаймана иона гелия He^+ поглощается водородным атомом в основном состоянии и ионизует его. Определить кинетическую энергию T , которую при этом получит электрон.

4.32. Атом водорода, вначале находившийся в неподвижном состоянии, излучил квант света, соответствующий головной (наиболее длинноволновой) линии серии Лаймана. Определить относительное изменение частоты фотона $\Delta\nu/\nu_0$ из-за отдачи. Какую скорость приобрел атом за счет энергии отдачи?

4.33. С какой скоростью и в каком направлении должна двигаться светящаяся газоразрядная лампа, заполненная водородом, чтобы в ней происходило поглощение света, излучаемого неподвижной газоразрядной лампой, заполненной дейтерием? Рассмотреть движение вдоль прямой, соединяющей лампы.

4.34. При аннигиляции позитронов с электронами образуются два γ -кванта, уносящие энергию покоя аннигилировавших частиц. Если бы электрон и позитрон перед аннигиляцией покоились, γ -кванты разлетались бы в строго противоположных направлениях. В реальном процессе аннигиляции замедленные в веществе позитроны сталкиваются с движущимися атомными электронами, и угол конуса разлета γ -квантов отличается от 180° . Оценить, насколько этот угол отличается от развернутого, если аннигиляция происходит на электронах L -оболочки углерода.

4.35. Позитроний поглощает фотон, образовавшийся при переходе атомарного водорода из первого возбужденного состояния в основное. Определить скорости электрона и позитрона в случае их симметричного относительно направления движения фотона разлета. Атом в исходном состоянии считать неподвижным.

4.36. При комптоновском рассеянии квантов на атомных электронах явление осложняется тем, что электроны в атомах не находятся в покое. Оценить связанный с этим разброс в углах разлета электронов отдачи, выбиваемых из атомов водорода при рассеянии рентгеновских квантов ($\lambda = 1 \text{ \AA}$) строго назад.

4.37. Решить предыдущую задачу для электронов отдачи, выбиваемых с K -оболочки атомов свинца при рассеянии гамма-квантов с длиной волны $\lambda = 0,01 \text{ \AA}$ строго назад. Для свинца $Z = 82$.

4.38*: Считая, что поправка на экранирование заряда ядра электронами на K -оболочке одинакова для атомов с $Z < 50$, найти кинетическую энергию T_e фотоэлектронов, вылетающих из K -оболочки атомов ${}_{30}\text{Zn}$ под действием K_α -излучения серебра ${}_{47}\text{Ag}$ с энергией $21,6 \text{ кэВ}$.

4.39. Во сколько раз отличаются средние длины свободного пробега атома водорода в основном и возбужденном состояниях ($n = 10$) в разреженном одноатомном газе при одинаковой концентрации?

4.40. В электрическом поле возможна спонтанная ионизация атомов. Оценить, при какой величине напряженности поля E (в В/см) окажется ионизованным атом водорода в состоянии с $n = 10$. Энергии уровней считать не зависящими от поля.

4.41*: Задача об отыскании уровней энергии атомов обычно решается в предположении, что заряд ядра точечный. На самом деле ядро имеет размер, и радиусы ядер $R_\text{я} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$, где A — атомная масса. Определить знак и оценить порядок величины относительной поправки $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ к энергии мюона на K -оболочке в мезоатоме неона ($Z = 10, A = 20$), связанной с тем, что часть времени мюон находится внутри ядра, т. е. в поле с потенциалом, отличным от Ze^2/r . Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

Масса мюона $m_\mu = 207 m_e$.

4.42. Задача об отыскании уровней энергии атома решается в предположении, что заряд ядра точечный. На самом деле ядро имеет размер, и радиусы ядер $R_\text{я} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$, где A — атомная масса. Определить знак и оценить порядок величины относительной поправки $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ к энергии электрона на K -оболочке в атоме неона ($Z = 10, A = 20$), связанной с тем, что часть времени электрон находится внутри ядра, т. е. в поле, отличном от кулоновского. Нормированное выражение для волновой функции основного состояния электрона в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.43. Положительно заряженный мюон ($m_\mu = 207 m_e$), образовавшийся вместе с электроном водородоподобный атом — мюоний, распался, причем продукты распада быстро разлетелись в разные стороны. Каково среднее значение кинетической энергии оставшегося после этого электрона, если в момент распада мюона мюоний находился в состоянии $1s$? Волновая функция основного состояния в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.44. Рассчитать для этой же системы (см. задачу 4.43) среднее значение кинетической энергии оставшегося после этого электро-

на, если в момент распада мюона мюоний находился в состоянии $2s$. Волновая функция электрона, находящегося в $2s$ -состоянии в атоме водорода, $\psi = \frac{1}{\sqrt{8\pi r_1^3}} \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) e^{-r/2r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.45. В атоме гелия один из электронов замещен мюоном. Оценить энергию электронного ($3p-2s$)-перехода в таком атоме.

4.46. В сложных атомах электрическое поле, в котором движется электрон, формируется как ядром, так и другими электронами. Однако в щелочных металлах с достаточной точностью можно считать, что внешний электрон движется в поле ядра с эффективным зарядом $Z_{\text{эфф}}$. Оценить величину эффективного заряда для $3p$ -электрона Na, если известно, что потенциал ионизации натрия равен $U_0 = 5,1$ эВ, а длина волны его яркой желтой линии $\lambda = 589$ нм (переход $3p-3s$).

4.47. Атом, пролетая через кристалл, подвергается воздействию периодического поля решетки кристалла, в результате чего возможно резонансное возбуждение его уровней (эффект Окорокова). Какова должна быть скорость двукратно ионизованного атома лития, чтобы при пролете его через кристалл золота возбуждался уровень с квантовым числом $n = 2$? Период решетки в направлении движения иона $a = 4,07$ Å. См. также задачу 7.34.

4.48* Найти энергию основного состояния и первый потенциал ионизации атома He, используя в качестве ψ -функций произведение ψ -функций основного состояния электрона в водородоподобном атоме $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где $a = r_B/Z$, так что $\psi(r_1, r_2) = \psi_0(r_1) \psi_0(r_2)$. При вычислении энергии кулоновского расталкивания электронов воспользоваться теоремой Гаусса.

4.49. Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -1,51$ эВ и при этом радиальная часть волновой функции ни разу не обращается в ноль на интервале $0 < r < \infty$. Что это за состояние?

4.50. Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -3,4$ эВ и при этом радиальная часть волновой функции один раз обращается в ноль на интервале $0 < r < \infty$. Что это за состояние?

4.51* Релятивистский пучок однократно ионизованных атомов гелия, находящихся в основном состоянии, движется навстречу лазерному излучению с длиной волны $\lambda_0 = 248$ нм. Ионы поглощают это излучение, переходят в первое возбужденное состояние, а затем испускают кванты света при обратном переходе. Найти длину волны этого излучения (в направлении движения ионов) в ЛСО (лабораторной системе отчета), а также кинетическую энергию ионов.

4.52. Исходя из формулы, определяющей интенсивность дипольного излучения $I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$, где \mathbf{d} — дипольный момент излучающей системы, оценить время жизни первого возбужденного уровня однократно ионизованного атома гелия. Считать атом гармоническим осциллятором.

4.53. Исходя из формулы, определяющей интенсивность дипольного излучения $I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$, где \mathbf{d} — дипольный момент излучающей системы, оценить время жизни возбужденного состояния иона Be^{3+} по отношению к переходу с уровня $n = 10$ на уровень с $n = 9$. Считать атом гармоническим осциллятором.

4.54. Конечный размер атомных ядер приводит к смещению энергетических уровней K -электронов по сравнению с моделью точечного ядра. Например, согласно расчету в атоме неона этот сдвиг составляет $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} = 6 \cdot 10^{-7}$. Оценить эту величину для K -электронов атома свинца.

4.55. Оценить, какой радиус должна иметь звезда с массой, равной массе Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, и магнитным полем на поверхности $B = 5$ кТл, чтобы на экваторе звезды могла происходить ионизация атома водорода межзвездного газа, падающего из бесконечности. Считать, что ионизация атома происходит, когда вершина возникающего для электрона потенциального барьера сравнивается с энергией основного состояния.

§ 5. Ширина линий. Спектры молекул. Рентгеновское излучение

5.1. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет около $\tau \sim 10^{-8}$ с. При переходе атома в основное состояние испускается фотон, средняя длина волны которого равна $\lambda = 500$ нм. Оценить ширину $\Delta\lambda$ и относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ излучаемой спектральной линии, если не происходит ее уширения за счет других процессов. (Такая ширина называется естественной шириной спектральной линии.)

5.2. В π -мезоатоме водорода роль электрона играет отрицательный пион π^- , энергия покоя которого составляет 140 МэВ. Оценить связанную с распадом пиона относительную ширину спектральной линии, соответствующей переходу пиона с L на K -оболочку. Время жизни пиона равно $2,6 \cdot 10^{-8}$ с.

5.3. Оценить минимальную ширину L_{\min} , которую должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было обнаружить естественную ширину линии, испускаемой атомами с временем жизни возбужденного состояния $\tau = 0,1$ нс. (Все условия постановки опыта предполагаются идеальными.)

5.4. Моноэнергетический параллельный пучок возбужденных атомов движется вдоль оси вакуумной трубки со скоростью $v = 10^8$ см/с. В стенках трубки сделаны окошки для регистрации излучения атомов пучка в зависимости от пути, пройденного атомами. Результаты этих измерений изображены на рис. 36. По оси абсцисс отложено расстояние x , пройденное атомами вдоль трубки, отсчитанное от 1-го окошка, а по оси ординат — натуральный логарифм отношения интенсивности света \mathcal{I} к интенсивности \mathcal{I}_1 , измеренной

детектором, стоящим в 1-м окошке. Определить естественную ширину линии $\Delta\nu$, излучаемой атомами пучка.

5.5. Температуру газовых облаков в межзвездном пространстве можно оценить по доплеровскому уширению спектральных линий, испускаемых атомами, входящими в состав газа. Для этой цели обычно используют водородную линию с длиной волны $\lambda = 21$ см (см. также тексты задач 6.48 и 6.50, объясняющие природу этой линии). Оценить температуру T газового водородного облака, если испускаемая им водородная линия имеет полуширину $\Delta\nu = 5$ кГц.

5.6. На рис. 37 изображено распределение энергии в спектральной линии дважды ионизованного углерода ^{12}C (эту спектральную линию можно наблюдать в дуговом разряде в сильном магнитном поле). Уширение спектральной линии обусловлено движением излучающих атомов (эффект Доплера). Оценить температуру T излучающих атомов.

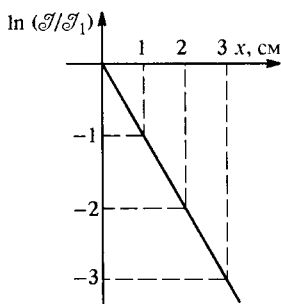


Рис. 36

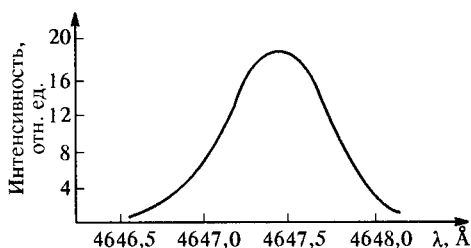


Рис. 37

5.7. Изучается спектр излучения газа в разрядной трубке. Считая, что при столкновениях возбужденные атомы мгновенно переходят в нижележащие состояния, оценить соотношение между доплеровской шириной спектральных линий в диапазоне видимого света и их уширением за счет столкновений, если длина свободного пробега $l \approx 10^{-4}$ см.

5.8. Возбужденные атомы с временем жизни $\tau \sim 10^{-10}$ с и энергией ионизации $\epsilon_{\text{и}} \sim 10$ эВ ионизируются излучением с длиной волны $\lambda \sim 100$ Å. Оценить относительный разброс фотоэлектронов по энергиям.

5.9. Одна из причин уширения спектральных линий атомов в газе связана со столкновениями, которые ограничивают время жизни возбужденного состояния. Оценить вклад этого механизма в относительную ширину линии перехода в неоне на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм, используемой в гелий-неоновом газовом лазере, в условиях, когда коэффициент диффузии атомов неона $D = 100$ см²/с. Температуру газа принять равной $T = 400$ К.

5.10*. Молекула CO_2 имеет множество дискретных переходов, пригодных для генерации лазерного излучения вблизи 1000 см⁻¹ с

расстоянием между линиями $\Delta q \approx 2 \text{ см}^{-1}$. Для осуществления плавной перестройки частоты лазера пользуются повышенным давлением, когда ударное уширение приводит к слиянию этих линий в одну полосу. Оценить необходимое для этого давление P при температуре $T = 400 \text{ К}$ Сечение столкновения молекул $\sigma \approx 10^{-15} \text{ см}^2$.

5.11. В опытах с разными молекулами измерялись энергии перехода между тремя последовательными уровнями энергии вращательной полосы двухатомной молекулы (рис. 38а и б). Найти квантовые числа l этих уровней и момент инерции I молекулы в случаях а и б.

5.12. Из опыта известно отношение длин волн электромагнитного излучения, соответствующего переходам в молекулах HCl и HI из основного в первое вращательное состояние: $\alpha = \lambda_{\text{HCl}}/\lambda_{\text{HI}}$. Определить отношение между ядерных расстояний в этих молекулах $x = r_{\text{HCl}}/r_{\text{HI}}$.

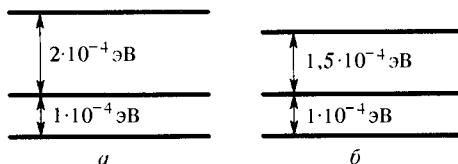


Рис. 38

5.13. Какова максимальная длина волны СВЧ-излучения, с помощью которой можно вызвать переход между ротационными уровнями молекул хлора? Расстояние между ядрами атомов в молекуле Cl_2 равно $a = 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Относительная атомная масса изотопа хлора $A = 35$.

5.14. Найти отношение частот линий поглощения наиболее длинноволновых вращательных переходов молекулы HCl для двух изотопов хлора ^{35}Cl и ^{37}Cl . Считать, что межатомные расстояния не зависят от изотопического состава молекулы. Вычисления произвести с точностью $10^{-2}\%$.

5.15. Найти отношение наименьших энергий переходов между вращательными уровнями газа, состоящего из смеси водорода и дейтерия, в котором присутствуют молекулы H_2 , HD и D_2 . Считать, что межатомное расстояние не зависит от изотопического состава.

5.16. Дальний инфракрасный спектр молекулы HBr , обусловленный переходами между соседними вращательными уровнями молекул, состоит из ряда линий, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 17 \text{ см}^{-1}$. Найти расстояние между ядрами в молекуле HBr .

5.17. Оценить в видимой области спектра ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$) разрешающую способность R спектрального прибора, пригодного для исследования спектра молекулярного водорода (т. е. спектра, обусловленного переходами между электронновращательными уровнями молекулы). Момент инерции молекулы H_2 в основном электронном состоянии $I = 0,46 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

5.18. При каких величинах периода вращения T песчинки с характерным размером $a = 0,1 \text{ мкм}$ начинает проявляться кванто-

вый характер вращения, т. е. дискретность вращательного спектра? Плотность песчинки ρ принять равной 5 г/см^3 .

5.19: При температурах ниже приблизительно $T = 100 \text{ К}$ молярная теплоемкость C_V молекулярного водорода составляет $3R/2$, тогда как при комнатных температурах она равна $5R/2$ (R — универсальная газовая постоянная). Пользуясь этими данными, оценить момент инерции I молекулы водорода относительно оси, проходящей через ее центр перпендикулярно к оси, проходящей через атомы, из которых построена молекула. Оценить также частоты ν и длины волн λ спектральных линий, возникающих при переходах между вращательными уровнями молекулы.

5.20. Оценить количество вращательных уровней молекулы HCl , возбуждаемых при комнатной температуре. Межъядерное расстояние у этой молекулы равно $d = 1,27 \text{ \AA}$.

5.21. Показать, что в основном состоянии гармонического осциллятора $\overline{\Delta p^2} \cdot \overline{\Delta x^2} = \hbar^2/4$, где $\overline{\Delta p^2}$ и $\overline{\Delta x^2}$ — среднеквадратичные отклонения импульса и координаты от их средних значений. Волновая функция основного состояния гармонического осциллятора $\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right)$, где $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$. Смотрите также задачу 2.43.

5.22: Показать, что уравнение Шредингера, описывающее одномерный гармонический осциллятор, помещенный в однородное электрическое поле E , может быть сведено к задаче о гармоническом осцилляторе, т. е. движению в потенциале вида $U = m\omega^2 x^2/2$. Каковы уровни энергии частицы в этом случае?

5.23: В спектре испускания молекулярного азота имеются линии с длинами волн 3371 \AA , 3577 \AA и 3805 \AA . Можно ли интерпретировать эти линии как переходы с изменением колебательного квантового числа на 0, 1 и 2, если измерения сделаны с точностью 0,2%? Определить энергетическое расстояние между соответствующими уровнями молекулы азота. С помощью полученных результатов по формулам классической физики оценить жесткость k упругой связи атомов в молекуле азота.

5.24: Оценить отношение кванта колебаний молекул H_2 и O_2 к характерной энергии возбуждения валентных электронов \mathcal{E}_e , считая, что эффективный коэффициент упругости молекулярной связи $k = \mathcal{E}_e/a^2$, где a — межатомное расстояние. Выразить ответ через отношение массы электрона m к массе ядра M . Оценить амплитуду нулевых колебаний молекул и выразить ее через отношение m/M и a .

5.25. В угарном газе CO из-за возбуждения колебаний молекул наблюдается пик поглощения инфракрасного излучения на длине волны $\lambda = 4,61 \text{ мкм}$. Определить амплитуду A_0 нулевых колебаний молекулы CO . Оценить температуру, при которой амплитуда тепловых колебаний превзойдет A_0 .

5.26. Какова амплитуда колебаний молекулы кислорода O_2 при комнатной температуре, если известно, что расстояние между ее колебательными уровнями равно $\Delta\epsilon = 0,25$ эВ?

5.27. На рис. 39 изображена часть графика зависимости энергии взаимодействия U атомов азота друг с другом от межатомного расстояния r . Считая яму параболической, найти отношение колебательного кванта к энергии возбуждения первого вращательного состояния в молекуле азота.

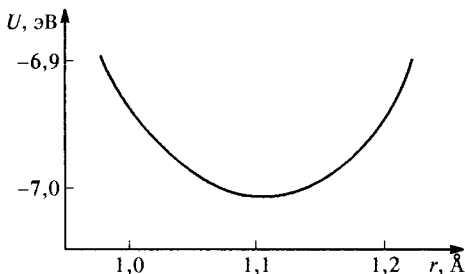


Рис. 39

5.28. Пылинка с плотностью $\rho = 2$ г/см³ и радиусом r прикреплена к неподвижной стенке невесомым стержнем длиной $l = 4r$ и диаметром $d = 2r = 1$ мкм (рис. 40). Модуль Юнга стержня $E = 10^{11}$ Па. Определить энергию кванта колебаний пылинки вдоль

нормали к стенке, а также длину электромагнитной волны, способной возбудить такие колебания, и амплитуду нулевых колебаний.

5.29* Разность энергий диссоциации молекул D_2 и H_2 равна $\Delta\epsilon = 0,08$ эВ, а потенциал взаимодействия атомов в этих молекулах одинаков. Каковы энергии нулевых колебаний этих молекул (в эВ)?

5.30. Оценить энергию нулевых колебаний атомов жидкого гелия (плотность $\rho = 0,145$ г/см³).

5.31* Определить отношение энергий возбуждения первого вращательного уровня молекулы азота в основном и первом возбужденном колебательном состояниях. Расстояние между атомами азота в основном состоянии молекулы $r_0 = 1,1$ Å, квант вибрационных возбуждений $\hbar\omega = 0,3$ эВ. См. также задачу 5.57.

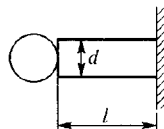


Рис. 40

5.32. Поле, в котором движется атом жидкого гелия, хорошо описывается потенциалом Леннард-Джонса $U(r) = \varphi[(r_0/r)^{12} - 2(r_0/r)^6]$, где $\varphi = 232$ К, а $r_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Оценить энергию нулевых колебаний.

5.33. Потенциал взаимодействия атомов в двухатомной молекуле можно с достаточной точностью аппроксимировать потенциалом Морса $U(r) = D[\exp(-2\alpha(r - r_0)) - 2\exp(-\alpha(r - r_0))]$. У молекулы азота постоянная $\alpha = 4 \cdot 10^8$ см⁻¹, энергия диссоциации равна $D = 7,4$ эВ. Оценить расстояние между колебательными уровнями молекулы азота.

5.34. Смесь атомов двух видов А и В имеет уровни возбужденных состояний ϵ_A, ϵ_B , причем $\epsilon_A - \epsilon_B = \Delta\epsilon$. При освещении излучением с частотой ν , такой что $h\nu = \epsilon_A$, кроме последующего обратного излучения той же частоты в результате соударений атомов А и В появ-

ляется также излучение с частотой $\nu' = \mathcal{E}_B/h$ и происходит увеличение кинетической энергии атомов. Найти скорости атомов после соударений, если известны массы атомов m_A и m_B . Считать, что энергия теплового движения мала по сравнению с $\Delta\mathcal{E}$.

5.35. При лазерном разделении изотопов в газообразной фазе один из разделяемых изотопов ионизируется лазерным лучом и затем удаляется из смеси электростатическим полем. Такому разделению изотопов препятствует тепловое движение атомов. Определить, возможно ли подобное разделение изотопов ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ с помощью ультрафиолетового лазера, если известно, что энергия ионизации лития 5,4 эВ; газообразный литий может существовать при температуре $t^\circ \geq 800$ °С. Принять, что $Z_{\text{эфф}}$ для электрона незаполненной оболочки не зависит от массы изотопа.

5.36. В атоме тантала ($Z = 73$) совершается переход с M -слоя на L -слой. Определить длину волны λ испущенного фотона, если постоянная экранирования $\sigma = 5,5$.

5.37. Вычислить приближенно частоту и длину волны K_α -линии Mo , а также энергию кванта, соответствующую этой линии.

5.38. Найти приближенно минимальное напряжение V на рентгеновской трубке, при котором начинают появляться K_α -линии Mo , Cu , Fe .

5.39*. Найти границу K -полосы излучения Mo , Cu и Fe .

5.40. Какие линии Ni возбуждаются K -излучением Co ?

5.41. Известно, что длина K_α -линии одного элемента равна 0,0788 нм, а другого 0,0713 нм. Выяснить, стоят ли эти элементы рядом в таблице Менделеева. Какие это элементы?

5.42. Начиная с какого элемента появляется L -серия?

5.43. Определить напряжение V на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длин волн между K_α -линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна $\Delta\lambda = 84$ нм.

5.44. Какой минимальной кинетической энергией должна обладать α -частица, чтобы при бомбардировке такими частицами атомов лития ${}^7\text{Li}$ эти атомы начали излучать полный спектр своего характеристического рентгеновского излучения?

5.45. Какова максимальная скорость v электронов, вырываемых из свинца характеристическим излучением железа?

5.46. У каких элементов характеристическое рентгеновское излучение длинноволновой границы K -серии может испытывать брэгговское отражение от кристалла LiF , постоянная решетки которого $d = 0,23$ нм?

5.47. Какой потенциал V следует приложить к рентгеновской трубке, чтобы тормозное рентгеновское излучение могло испытывать брэгговское отражение от кристалла LiF , межплоскостное расстояние в котором составляет $d = 2,3$ Å?

5.48. Длина волны, соответствующая переходу между двумя соседними состояниями вращательного спектра молекулы HBr , равна

$\lambda = 202$ мкм. Определить, между состояниями с какими квантовыми вращательными числами происходит переход. Межъядерное расстояние $d = 1,41$ Å.

5.49. Оценить, при какой температуре отношение числа молекул NO, находящихся в чисто вращательных состояниях с квантовыми числами $l = 1$ и $l = 0$, равно $\alpha = 0,1$. Межъядерное расстояние в молекуле равно $d = 1,15$ Å.

5.50. С какой относительной точностью $\Delta\lambda/\lambda$ надо измерить длинноволновую часть вращательного спектра CO, чтобы увидеть изотопическое расщепление спектра, появляющееся при наличии примеси $^{12}\text{C}^{17}\text{O}$ в обычном $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$? Чему равна наибольшая длина волны вращательного кванта у молекул CO? Расстояние между ядрами C и O равно $d = 1,13$ Å.

5.51. Природный хлор представляет собой смесь двух изотопов — ^{35}Cl и ^{37}Cl . С какой относительной точностью $\Delta\lambda/\lambda$ надо измерять длину волны колебательного кванта у молекулы HCl, чтобы увидеть изотопическое расщепление колебательного спектра?

5.52. Одномерный осциллятор находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 10$. Оценить, какова вероятность обнаружить частицу вблизи положения равновесия в области размером порядка плюс-минус амплитуда его нулевых колебаний.

Указание. При больших квантовых числах движение частицы можно рассматривать как классическое.

5.53. Одномерный осциллятор находится в основном состоянии. Оценить вероятность нахождения частицы в классически разрешенной области. Волновая функция основного состояния $\psi = A \exp(-x^2/2a_0^2)$, где $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

Указание. Для оценки получающегося интеграла использовать разложение подынтегральной функции в ряд.

5.54. Для молекулы азота N_2 оценить число вращательных уровней, приходящихся на интервал между соседними колебательными уровнями.

5.55. Потенциальная энергия взаимодействия атомов в двухатомной молекуле не является чисто квадратичной (гармонической). При слабой ангармоничности уровни осциллятора можно представить в виде $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \alpha\hbar\omega(n + 1/2)^2$, где α — коэффициент ангармоничности, ω — частота осциллятора. Найти в этой модели максимальное число колебательных уровней молекулы N_2 , у которой $\alpha = 0,006145$.

Указание. Для реальных состояний функция $\epsilon_n(n)$ должна быть монотонно возрастающей.

5.56. Из-за конечного размера ядра энергетический уровень K -электрона претерпевает небольшое смещение $\delta\epsilon \propto R^2$, где R — радиус ядра, который находится по формуле $R = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, A — относительная атомная масса. Оценить величину изотопического сдвига $\delta(h\nu)_{205}$ границы характеристического рентгеновского K -излучения для ядра $^{205}_{81}\text{Tl}$, если известно, что для $^{203}_{81}\text{Tl}$ этот сдвиг

$\delta(h\nu)_{203} = -8,25$ эВ, т. к. энергия ионизации K -электрона уменьшается по сравнению со случаем точечного ядра.

5.57* Считая, что взаимодействие атомов в молекуле HCl описывается потенциалом Кратцера $U(r) = 2\varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^2 - \frac{\sigma}{r} \right]$, определить относительное изменение частоты $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ колебаний молекулы при возбуждении ее с вращательного уровня с $l = 0$ на уровень $l = 10$. В молекуле HCl $\varepsilon = 4,62$ эВ, $\sigma = 1,27$ Å.

§ 6. Спин. Атом в магнитном поле.

Эффект Зеемана. Магнитный резонанс

6.1. Пучок циркулярно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм падает на зачерненный диск, подвешенный на тонкой нити так, что он может совершать крутильные колебания относительно оси. При этом измеряется установившийся угол поворота диска массой $m = 1$ г и радиусом $r = 5$ см. Найти период собственных колебаний диска T , если при мощности светового потока $N = 10$ Вт угол поворота диска составил $\alpha = 1''$.

6.2. Абсолютно черная пластинка площадью $S = 10$ см² освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, поляризованным по кругу. Интенсивность света равна $\mathcal{I} = 30$ Вт/см². Какой вращающий момент M испытывает пластинка? Зависит ли M от распределения интенсивности в пучке? Как изменится вращающий момент, если черную пластинку заменить на кристаллическую пластинку в $\lambda/4$? Какую надо взять кристаллическую пластинку, чтобы вращающий момент M удвоился?

6.3. Эллиптически поляризованный параллельный световой поток с длиной волны $\lambda = 600$ нм и интенсивностью $\mathcal{I} = 30$ Вт/см² падает перпендикулярно на абсолютно черную пластинку. Площадь поперечного сечения светового потока $S = 10$ см². Отношение длин главных полуосей эллипса поляризации в световом пучке составляет $a/b = 2$. Найти вращающий момент M , который испытывает пластинка при поглощении света.

6.4. Поляризованный по правому кругу световой поток с длиной волны $\lambda = 500$ нм, интенсивность которого составляет $\mathcal{I} = 1,4 \cdot 10^6$ эрг/(с · см²) (такой интенсивностью обладает солнечное излучение на границе земной атмосферы), падает на двоякопреломляющую пластинку в $\lambda/2$. Как будет поляризован свет после прохождения пластинки? Определить вращающий момент на единицу площади (M/S) такой пластинки.

6.5. На кварцевую пластинку в $\lambda/4$ перпендикулярно падает пучок линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 628$ нм и мощностью $N = 3$ Вт. При каких условиях пластинка будет испытывать вращающий момент и каковы его значение и направление?

6.6. Некогерентная смесь естественного и линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью $\mathcal{I} = 1,4 \cdot 10^6$ эрг/(с·см²) (такой интенсивностью обладает солнечное излучение на границе земной атмосферы) падает на двоякопреломляющую пластинку в $\lambda/4$. Определить вращающий момент на единицу площади (M/S) такой пластинки, если направление колебаний в линейно поляризованном свете составляет угол 45° с главными направлениями пластинки. Известно, что при анализе падающего излучения с помощью поляризатора соотношение $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 3$.

6.7.* Параллельный пучок монохроматического излучения (длина волны в вакууме $\lambda = 496$ мкм), поляризованного по кругу, падает нормально на решетку, изготовленную в виде натянутых проволочек с расстоянием между ними $d \ll \lambda$. При таких условиях решетка полностью пропускает излучение, поляризованное так, что электрический вектор направлен перпендикулярно проволочкам, и отражает излучение с поляризацией, повернутой на 90° . Найти вращающий момент M и силу F , действующих на решетку, если интенсивность потока в пучке $\mathcal{I} = 10$ Вт/см², а облучаемая поверхность решетки $S = 10$ см².

6.8. Пучок продольно поляризованных по спину электронов с током 100 А и кинетической энергией 100 кэВ поглощается цилиндром Фарадея. Определить силу и крутящий момент, действующие на цилиндр. Пучок электронов направлен параллельно оси цилиндра.

6.9. С какой угловой скоростью ω и в каком направлении должен начать вращаться цилиндр, подвешенный в магнитном поле B , направленном параллельно его оси вертикально вверх, если изменить направление поля на обратное? Считать, что цилиндр намагничивается до насыщения. (Момент импульса электрона в атоме равен l , число атомов в цилиндре N , момент инерции цилиндра I .)

6.10. Какое значение для ω следует ожидать в упрощенном опыте Эйнштейна—де Гааза (предыдущая задача), если длина цилиндра $L = 1$ см, его масса $m = 1$ г, цилиндр сделан из железа и если предположить, что момент импульса каждого атома равен таковому для электрона на первой боровской орбите?

6.11. На сколько компонент расщепится при проведении опыта Штерна—Герлаха пучок атомов водорода?

6.12.* Пучок атомов натрия, находящихся в основном состоянии, вылетает из печи, температура которой $T = 350$ К. Пучок расщепляется в поперечном неоднородном магнитном поле с градиентом $dB/dx = 50$ Тл/м на пути $l = 1$ см. Детектор удален от магнита на расстояние $L = 6,5$ м. Найти расстояние s между пятнами на экране.

6.13. Пучок атомов лития в основном состоянии с максимальной кинетической энергией $T = 0,1$ эВ проходит через магнит типа Штерна—Герлаха длиной $l = 6$ см с градиентом поля $dB/dx = 5 \cdot 10^4$ Гс/см. Сразу за магнитом расположена система из двух одинаковых диафрагм S диаметром d , находящихся на расстоянии $L = 1$ м одна от другой (рис. 41). При какой минимальной вели-

чине диаметра d_{\min} компоненты разделенного пучка пройдут через систему диафрагм?

6.14. Пучок атомов ванадия ($A = 50$), находящихся в состоянии ${}^4F_{3/2}$, пропускается через сильное неоднородное магнитное поле. На

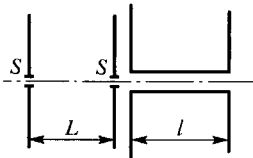


Рис. 41

сколькую компонент разобьется такой пучок? На какой угол разойдутся соседние компоненты пучка, если участок с неоднородным полем имеет протяженность $l = 25$ см, градиент поля в нем $dB/dx = 5 \cdot 10^4$ Гс/см, а скорость атомов $v = 500$ м/с?

6.15. Параллельный пучок нейтронов с энергией $T = 0,025$ эВ проходит через коллимирующую щель шириной $d = 0,1$ мм и затем через зазор в магните Штерна—Герлаха длиной $L = 1$ м. Оценить значение градиента поля dB/dx , при котором угол магнитного отклонения компонент пучка равен углу дифракционного уширения. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = 9,66 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс.

6.16.* В опытах Шалла (1968 г.) наблюдалось расщепление пучка нейтронов на два пучка при преломлении на границе однородного магнитного поля. Найти малый угол θ между направлениями преломления пучков. Однородное магнитное поле имеет индукцию $B = 2,5$ Тл. Нейтроны с дебройлевской длиной волны $\lambda = 0,5$ нм падают под углом $\varphi = 30^\circ$ к достаточно резкой границе магнитного поля.

6.17.* Определить возможную мультиплетность атомов H, He, Li, Mg, Fe, Hg, U, Cl.

6.18. Какова возможная мультиплетность Sr^+ , Li^+ , Ca^+ , C^{++} , O^{4+} ?

6.19. Какова наивысшая мультиплетность атомов элементов третьей группы?

6.20. Желтый дублет Na возникает при переходе электронов $3^2P \rightarrow 3^2S$ и соответствует длинам волн $\lambda_1 = 5896 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5890 \text{ \AA}$. Найти энергетическое расстояние $\Delta \epsilon$ между соответствующими подуровнями терма 3^2P (мультиплетное расщепление). Оценить среднюю величину магнитного поля B , действующего на «оптический» электрон.

6.21.* При переходе $P \rightarrow S$ из возбужденного состояния атома в основное испускается дублет $\lambda_1 = 455,1$ нм и $\lambda_2 = 458,9$ нм. Какие линии, соответствующие переходу ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$, будут наблюдаться в спектре поглощения газа, состоящего из таких атомов, при наложении магнитного поля 50 кГс при температуре $T = 0,5$ К?

6.22. В отсутствии магнитного поля газ поглощает электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 500$ нм, соответствующее переходу из основного состояния ${}^2P_{1/2}$ в возбужденное ${}^2D_{3/2}$. Как изменится спектр поглощения этого газа в окрестности этой длины волны при наложении магнитного поля $B = 2$ кГс при температуре, близкой к комнатной? В спектре испускания этого газа в окрест-

ности $\lambda = 500$ нм наблюдается дублет с $\Delta\lambda = 0,5$ нм, соответствующий переходам ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$, ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$.

6.23. На сколько компонент расщепится в слабом магнитном поле мультиплет с заданным полным моментом J ?

6.24. Найти энергетическое расщепление термов атомов группы щелочных металлов, помещенных в слабое магнитное поле.

6.25. На сколько компонент расщепится в слабом магнитном поле линия Na, отвечающая переходу ${}^2F_{7/2} \rightarrow {}^2D_{5/2}$?

6.26. Найти число компонент сложного эффекта Зеемана линии Na, указанной в предыдущей задаче, которые поляризованы по магнитному полю.

6.27*. Определить расщепление спектральной линии ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле. Для натрия эта линия является коротковолновой компонентой ($\lambda = 589,0$ нм) двойной линии D с $\Delta\lambda = 0,6$ нм. Какие магнитные поля в этом случае являются слабыми?

6.28. На сколько уровней расщепится в сильном магнитном поле терм с $L = 3$ и $S = 0$? Какова разность энергий соседних уровней?

6.29. На сколько компонент расщепится в магнитном поле спектральная линия, связанная с оптическим переходом $L = 3 \rightarrow L = 2$ (излучается $E1$ -фотон), при простом эффекте Зеемана?

6.30*. В сильном магнитном поле \mathbf{B} при наблюдении в направлении, перпендикулярном полю (поперечный эффект Зеемана), в спектре излучения имеется три линейно поляризованных линии: несмещенная спектральная линия с длиной волны λ и электрическим вектором, направленным вдоль магнитного поля, и две смещенные — с электрическим вектором $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Это излучение пропускается через два скрещенных поляризатора, между которыми находится анизотропная кристаллическая пластинка с заданными Δn и d . Оптическая ось пластины составляет углы 45° с направлениями поляризаторов. При какой величине магнитного поля в спектре излучения будут видны лишь две крайние линии?

6.31. Атомарный водород помещен в магнитное поле 2 Тл, много большее характерного поля атома, т. е. магнитного поля атома, действующего на электрон. Определить максимальную дополнительную энергию (в эВ), которую приобретает атом в состоянии с $n = 3$ и нарисовать картину расщепления этого уровня.

6.32. Наблюдается простой поперечный эффект Зеемана в магнитном поле $B = 5000$ Гс. Какова должна быть минимальная длина L дифракционной решетки, чтобы разрешить все линии зеемановского триплета?

6.33. При какой минимальной ширине L дифракционной решетки, имеющей $n = 600$ линий/мм, можно разрешить в первом порядке дублет простого эффекта Зеемана для спектральной линии $\lambda = 0,612$ мкм? Напряженность магнитного поля $B = 10$ кГс.

6.34. С помощью эшелона Майкельсона наблюдается зеемановское расщепление D -линии натрия в магнитном поле $B = 5000$ Гс (сложный эффект). Какова должна быть максимальная толщина

d пластины, чтобы эшелон был пригоден для исследования расщепления? Показатель преломления материала пластины $n = 1,5$. Под D -линиями Na понимают две линии нерасщепленного поля дублета $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ и $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$.

6.35. Определить верхний предел расстояния L_{\max} между зеркалами интерферометра Фабри—Перо, чтобы с его помощью можно было исследовать (без перекрытия спектров разных порядков) простой эффект Зеемана в магнитном поле $B = 1$ Тл.

6.36. Какой эффект Зеемана — простой или сложный — наблюдается при расщеплении спектральной линии $^1D_2 \rightarrow ^1F_3$ в магнитном поле $B = 10^4$ Гс? В каких пределах должно лежать расстояние L между зеркалами интерферометра Фабри—Перо, чтобы обнаружить и исследовать зеемановское расщепление рассматриваемой линии? Зеркала посеребрены так, что эффективное число отражений между ними $N_{\text{эфф}} = 20$.

6.37. Найти зеемановское расщепление $\Delta\omega$ спектральной линии $^2D_{3/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$. Указать число компонент в расщепленной линии.

6.38. Цезий принадлежит к числу щелочных металлов. При $P \rightarrow S$ -переходе в атомарном цезии испускается дублет, состоящий из двух линий: $\lambda_1 = 0,4555$ мкм и $\lambda_2 = 0,4593$ мкм. Найти расщепление термов этого дублета в магнитном поле. Какими формулами описывается в этом случае расщепление линий в магнитном поле с индукцией $B = 3$ Тл: формулами для нормального или аномального эффектов Зеемана?

6.39. В спектре лития две первые линии главной серии принадлежат переходам $2^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$. Длины волн этих линий равны $\lambda_1 = 0,670780$ мкм и $\lambda_2 = 0,670795$ мкм. Оценить индукцию B магнитного поля, которое создает орбитальное движение электрона в атоме лития в состоянии $2P$.

6.40. Так как атом мюония (μ^+e^-) состоит из двух «точечных» частиц, то для него не нужно вводить при расчете уровней энергии никаких поправок на конечный размер ядра. В результате очень точных измерений частоты перехода $1^2S_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, проведенных в 1992 году, было получено значение $\nu = 2\,455\,529$ ГГц. Найти из этих данных отношение массы мюона к массе электрона.

6.41. Оценить расщепление уровня $n = 2$, $l = 1$ водорода из-за магнитного взаимодействия спина с его орбитальным движением.

У к а з а н и е. Энергия взаимодействия спина с орбитой пропорциональна $\cos \mathbf{ls}$, где l — орбитальный и s — спиновый моменты.

6.42. Оценить дублетное расщепление первой линии серии Лаймана в спектре излучения водорода, предполагая, что состояние $n = 1$ не расщепляется, а состояние $n = 2$ расщеплено на величину, вычисленную в задаче 6.41.

6.43. Показать, учитывая магнитное взаимодействие спина с орбитой, что интервалы между компонентами одного мультиплета (в шкале частот) относятся, как целые числа. Чему равны эти числа?

У к а з а н и е: см. задачу 6.41.

6.44. Оценить, какое минимальное магнитное поле B можно обнаружить у звезды типа Солнца (период вращения $\tau = 10^6$ с, радиус $R = 10^{10}$ см, температура поверхности Солнца $T = 6 \cdot 10^3$ К) с помощью эффекта Зеемана в оптической области спектра ($\omega_0 = 10^{15}$ с $^{-1}$).

6.45. Найти минимальную величину магнитного поля B , в котором происходит перекрытие крайних компонент магнитных подуровней атома водорода в возбужденных состояниях с главными квантовыми числами $n_1 = 10$ и $n_2 = 11$. Собственный магнитный момент электрона не учитывать.

6.46. Оценить величину расщепления $2p$ -состояния позитрония, вызванного взаимодействием спиновых магнитных моментов позитрона и электрона.

6.47. Определить отношение интервалов между соседними подуровнями сверхтонкой структуры атомного мультиплетта с заданным значением полного момента J . Спин ядра равен I .

У к а з а н и е. Спином ядра принято называть его полный момент импульса.

6.48. Взаимодействие магнитных моментов протона и электрона в атоме водорода приводит к расщеплению энергетических уровней и возникновению сверхтонкой структуры. Излучение межзвездного атомарного водорода, находящегося в основном состоянии, вызвано переориентацией электронного спина, т. е. переходами между компонентами сверхтонкой структуры. Оценить длину волны λ этого излучения. Для оценки заменить истинное распределение плотности спинового магнитного момента электрона таким, которое дает однородно намагниченный шар радиусом r_B . Размагничивающий фактор шара $\beta = 4\pi/3$.

У к а з а н и е. Магнитное поле внутри шара $\mathbf{H} = -\beta\mathbf{M}$, где \mathbf{M} — намагниченность. Магнитный момент протона равен $\boldsymbol{\mu}_p = g_{sp}\mu_{\text{яд}}\mathbf{s}_p$, где $g_{sp} = 5,58$ — спиновый g -фактор протона, \mathbf{s}_p — его спин, $\mu_{\text{яд}}$ — ядерный магнетон Бора.

6.49. Магнитное поле, создаваемое электроном с $l \neq 0$ в месте нахождения ядра, является суммой поля орбитального движения

$$\mathbf{V}_l = -2 \frac{\boldsymbol{\mu}_l}{r^3} = -2g_l\mu_B \frac{\mathbf{l}}{r^3}$$
 и поля магнитного диполя, связанного с распределением спиновой плотности. Аппроксимируя последнее как

$$\mathbf{V}_s = -2 \frac{\boldsymbol{\mu}_s}{r^3} = -2g_s\mu_B \frac{\mathbf{s}}{r^3}$$
, оценить сверхтонкое расщепление уровня $2p_{3/2}$ в атоме водорода. Спиновые g -факторы для протона $g_{sp} = 5,58$, для электрона $g_s = 2$, $g_l = 1$.

6.50. Хорошо известно, что космическое излучение на длине волны $\lambda = 21$ см обусловлено сверхтонким расщеплением основного состояния атомарного водорода. Оценить на основе этих данных величину энергетического расщепления (в эВ) $2p$ -состояния позитрония.

6.51: Взаимодействие магнитных моментов нейтрона и электрона может формально привести к связанному стабильному состоянию этих частиц. Каков получается характерный размер такой системы? Движение электрона считать нерелятивистским.

6.52. Система из двух тождественных нейтральных частиц со спином $1/2$ находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной d с бесконечно высокими стенками. Каждая частица обладает массой m и магнитным моментом μ , направленным параллельно механическому моменту. Определить величину магнитного поля, которое необходимо приложить для намагничивания такой системы. Дипольным взаимодействием частиц пренебречь.

6.53. Атом водорода в основном состоянии помещен в магнитное поле \mathbf{B} . Оставаясь в рамках боровской модели атома водорода, оценить, при какой его величине размеры атома в плоскости, перпендикулярной полю \mathbf{B} , начнут уменьшаться.

6.54. Найти энергию магнитного взаимодействия двух атомов водорода, находящихся на расстоянии $3 \cdot 10^{-6}$ см. Считать, что электроны в атомах движутся по первым боровским орбитам. Плоскости орбит обоих атомов параллельны. Спин электрона не учитывать.

6.55. Свободные атомы могут обладать магнитным моментом, но не имеют дипольного электрического момента. Атомы, входящие в состав кристаллической решетки, при известных условиях могут иметь такой момент. В этом случае возможен параэлектрический резонанс, аналогичный парамагнитному. Найти дипольный момент атома $p_{ат}$, если известно, что резонансное поглощение электромагнитных волн с длиной волны $\lambda = 5$ мм наблюдается при напряженности постоянного электрического поля $E = 2,5 \cdot 10^3$ кВ/м. Оценить размер l атомного диполя.

6.56: Известно, что в сильных магнитных полях, когда магнитное расщепление μB превышает расстояние между линиями тонкой структуры U_{SL} , в оптических спектрах, соответствующих $2P \rightarrow 2S$ переходам, наблюдаются три линии. Однако при измерениях с высокой разрешающей способностью видно большее число линий спектра. Их наличие обусловлено спин-орбитальным взаимодействием. Вклад этого взаимодействия в энергию атома можно рассматривать как малую добавку и считать его равным $A \langle (\mathbf{S}, \mathbf{L}) \rangle$, где A — константа, \mathbf{S} , \mathbf{L} — спиновый и орбитальный моменты атома, а угловые скобки означают усреднение по основному состоянию. Нарисовать истинную картину расщепления атомных уровней и результирующую структуру спектра при учете спин-орбитального взаимодействия. Чему равна величина тонкого расщепления спектра?

6.57. При наблюдении ЯМР на ядрах ^{25}Mg обнаружено резонансное поглощение излучения на частоте $\nu = 1,4$ МГц в поле $B = 5,4$ кГс. У ядра ^{25}Mg спин $I = 5/2$. Найти g -фактор и магнитный момент ядра (см. указание к задаче 6.47).

6.58. Для измерения магнитных полей $B \simeq 0,1$ кГс используют метод ЯМР в проточной воде, в котором вода предварительно на-

магничивается пропусканием ее через область магнитного поля $B_0 = 10$ кГс. Время перемещения воды до измерительной ячейки гораздо меньше времени релаксации намагниченности. Оценить увеличение сигнала ЯМР в намагниченной воде по сравнению с сигналом для ненамагниченной воды.

Указание. В экспериментах обычно измеряют поглощение мощности (энергии) переменного поля. Поэтому сигнал — это поглощенная мощность (энергия), равная $h\nu N$, где N — число поглощенных квантов. Оно равно числу ядер (электронов), совершивших переход между двумя магнитными подуровнями, т. е. разности заселенностей двух (для простоты) уровней при данной температуре.

6.59. Как изменится величина сигнала ЯМР при увеличении резонансной частоты в два раза? Считать, что магнитная энергия $\mu B \ll kT$. См. указание к задаче 6.58.

6.60*: В методе адиабатического размагничивания низкая температура получается при выключении внешнего магнитного поля за счет энергии, затрачиваемой на разориентацию атомных или ядерных магнитных моментов в теплоизолированном образце. Оценить предельно низкую температуру, до которой можно охладить систему ядер ^{63}Cu таким методом. Спин ядра ^{63}Cu равен $I = 3/2$, среднее расстояние между ядрами в решетке меди $d = 2,5$ Å. Известно, что ядерный магнитный резонанс на ядрах ^{63}Cu наблюдается на частоте $\nu = 11,31$ МГц в поле $B = 10$ кГс.

6.61*: Электронная конфигурация трехвалентного иона иттербия представляет собой полностью заполненные оболочки $\text{Xe} + 4f^{13}$. На какой частоте наблюдается электронный парамагнитный резонанс на ионах Yb^{3+} солей трехвалентного иттербия в магнитном поле $B = 10^3$ Гс?

Указание. По правилу Хунда в основном состоянии $J = |L - S|$, если заполнено меньше половины оболочки, и $J = L + S$, если больше половины.

6.62. Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) обусловлен переходами между подуровнями с различными проекциями магнитного момента. Найти частоту ЭПР для солей трехвалентного празеодима в магнитном поле $B = 0,1$ Тл. Электронная конфигурация Pr^{3+} представляет собой полностью заполненные оболочки $\text{Xe} + 4f^2$. См. указание к задаче 6.61.

6.63. Определить намагниченность насыщения M_0 образца металлического диспрозия (плотность $\rho = 8,55$ г/см³) при температуре, близкой к абсолютному нулю. Полный момент иона диспрозия Dy^{3+} $J = 15/2$, а электронный парамагнитный резонанс на ионах диспрозия наблюдается в магнитном поле $B_{\text{рез}} = 1000$ Гс на частоте $\nu = 1,9 \cdot 10^9$ Гц.

6.64. Определить намагниченность насыщения M_0 образца металлического эрбия (плотность $\rho = 9,07$ г/см³) при температуре, близкой к абсолютному нулю, если известно, что электронная конфигурация

иона Er^{3+} представляет собой полностью заполненную оболочку $\text{Xe} + 4f^{11}$. На какой частоте ν наблюдается электронный парамагнитный резонанс на ионах эрбия в магнитном поле $B = 1000 \text{ Гс}$?

6.65. В атомах хлора, находящихся в основном состоянии $2P_{3/2}$, один из электронов с $l_z = 1$ из $3p$ -оболочки переведен в $3d$ -оболочку. При этом полученная конфигурация обладает максимально возможными L и S и минимально возможным J . На сколько компонент расщепится пучок таких возбужденных атомов хлора, если его пропустить через прибор типа Штерна—Герлаха? Объяснить полученный результат на основе векторной модели.

6.66*. Образец тефлона (полимера с химической формулой $(\text{CF}_2)_n$, где n — целое число) массой 50 г намагничивается в магнитном поле $B = 20 \text{ кГс}$ при температуре $T = 0,05 \text{ К}$. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора ^{19}F (спин ядра $I = 1/2$, см. указание к задаче 6.47) в магнитном поле на два подуровня. При выключении поля образец получает момент импульса $L = 24,2 \cdot 10^{-6} \text{ эрг} \cdot \text{с}$ (аналог эффекта Эйнштейна—де Гааза в ферромагнетиках). Определить величину магнитного момента ядра фтора.

6.67. В атоме гелия состояние 3S_1 отстоит от основного примерно на 20 эВ . Оценить, в какое магнитное поле нужно поместить атом гелия, чтобы выстроить спины его электронов параллельно.

6.68*. Образование молекул водорода происходит только в том случае, если спины двух сталкивающихся атомов антипараллельны. В настоящее время предпринимаются попытки хранения атомарного водорода при низких температурах в сильных магнитных полях. Оценить степень деполаризации α атомарного водорода, определяемую отношением числа атомов с антипараллельными спинами к их полному числу, при температуре $T = 1 \text{ К}$ в магнитном поле $B = 10 \text{ Тл}$.

6.69*. Атомы, обладающие магнитным моментом, могли бы образовывать упорядоченную структуру за счет магнитного взаимодействия. Оценить, при какой максимальной температуре это еще возможно, если межатомное расстояние $a = 3 \text{ \AA}$ (типичное значение постоянной решетки в твердом теле).

6.70*. Электрон, движущийся с постоянной скоростью в плоскости, перпендикулярной силовым линиям однородного магнитного поля $B = 10^3 \text{ Гс}$, совершает финитное движение. Согласно квантовой механике такое движение квантуется. Используя аналогию с классическими уравнениями движения Гамильтона, определить квантованные значения энергии электрона, соответствующие этому орбитальному расщеплению (уровни Ландау). Какова возможная минимальная энергия электрона? Как изменится спектр разрешенных энергий при учете спина электрона?

Указание. В присутствии магнитного поля связь между скоростью и импульсом заряженной частицы имеет вид $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$, где \mathbf{A} — векторный потенциал. Для постоянного магнитного поля

В, направленного по оси z , его можно взять в виде $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ — калибровка Ландау.

6.71: Электрон движется в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $B = 3,14 \cdot 10^3$ Гс. Как и любое другое финитное движение, такое движение квантуется. Используя аналогию с классическими уравнениями движения Гамильтона, найти минимальную площадь, описываемую электроном в координатном и импульсном пространстве.

У к а з а н и е. Воспользоваться результатами задачи 6.70.

6.72: В рентгеновском спектре нейтронной звезды массой $M = 10^{33}$ г наблюдается провал (поглощение излучения) при энергии $\epsilon_1 = 50$ кэВ и максимум при $\epsilon_2 = 460$ кэВ (рис. 42). Поглощение при энергии ϵ_1 связывают с квантовыми переходами свободных электронов в магнитном поле звезды (уровнями Ландау), а максимум при ϵ_2 — с аннигиляцией электрон-позитронных пар. Учитывая смещение спектра в гравитационном поле звезды, оценить радиус звезды и величину ее магнитного поля.

6.73: В экспериментах Цзяньсин Ву с сотрудниками по наблюдению несохранения четности в слабых взаимодействиях изучался β -распад ядер, которые были внедрены в парамагнитную соль. Последняя служила для получения низких температур ($T = 0,01$ К) методом адиабатического размагничивания (см. задачу 6.60). Электроны парамагнитной соли создавали на ядрах кобальта магнитное поле $H = 10^5$ Э и тем самым поляризовали ядра по спину. Какова была бы в экспериментах такого рода степень поляризации ядер $P = (N^+ - N^-)/(N^+ + N^-)$, где N^+ , N^- — числа ядер со спинами по полю и против поля, если бы изучался β -распад из возбужденного состояния со спином $I = 1$, $g = 2$?

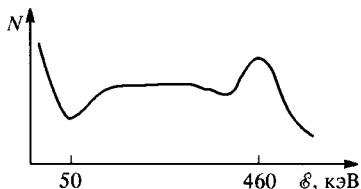


Рис. 42

6.74: Атом водорода находится в состоянии с энергией $\epsilon = -3,4$ эВ, и при этом радиальная часть волновой функции ни разу не обращается в нуль на интервале $0 < r < \infty$. На сколько подуровней расщепится данный энергетический уровень в сильном магнитном поле?

6.75: Атом водорода находится в состоянии с энергией $\epsilon = -3,4$ эВ, и при этом радиальная часть волновой функции один раз обращается в нуль на интервале $0 < r < \infty$. На сколько линий расщепится данный уровень энергии в слабом и сильном магнитных полях?

6.76: В спектрах газовых туманностей наблюдаются линии, которые долго не могли приписать ни одному из известных элементов и поэтому приписывали их гипотетическому элементу «небулию» (nebula — туманность). Впоследствии выяснилось, что это — линии ионов кислорода и азота. Наиболее интенсивные линии «небулия» соответствуют переходам ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_2$ ($\lambda_1 = 5007 \text{ \AA}$) и ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_1$

($\lambda_2 = 4959 \text{ \AA}$) иона O^{++} . Найти длину линии перехода $^3P_1 \rightarrow ^3P_0$ в схеме Рассела—Саундерса (LS -схема).

Указание. Энергия спин-орбитального взаимодействия есть $\mathcal{E}_{SL} = A \langle (\mathbf{L}, \mathbf{S}) \rangle$, где A — константа (для иона O^{++} константа $A > 0$), а угловые скобки означают усреднение по направлению векторов орбитального момента \mathbf{L} и спина \mathbf{S} .

6.77. В спектрах солнечной короны наблюдаются линии, которые долго не могли приписать ни одному из известных элементов, поэтому их приписывали гипотетическому элементу «коронию». Впоследствии выяснилось, что это — в основном линии ионов железа и никеля. Среди наблюдаемых линий «корония» есть линии, соответствующие переходам $^1D_2 \rightarrow ^3P_2$ ($\lambda_1 = 2649 \text{ \AA}$) и $^1D_2 \rightarrow ^3P_1$ ($\lambda_2 = 3987 \text{ \AA}$) иона железа Fe^{10+} . Найти длину линии перехода $^3P_0 \rightarrow ^3P_1$ в схеме Рассела—Саундерса (LS -схема).

Указание. Энергия спин-орбитального взаимодействия есть $\mathcal{E}_{SL} = A \langle (\mathbf{L}, \mathbf{S}) \rangle$, где A — константа (для иона Fe^{10+} константа $A < 0$), а угловые скобки означают усреднение по направлению векторов орбитального момента \mathbf{L} и спина \mathbf{S} .

6.78. Возбужденное состояние атома гелия $1s^1 2s^1$ может иметь полный спин электронной оболочки S как 1 (ортогелий), так и 0 (парагелий). Энергии полной ионизации этих состояний $W_{орто} = 59,2 \text{ эВ}$ и $W_{пара} = 58,4 \text{ эВ}$. Кроме энергии взаимодействия с ядром, в эти энергии вносят вклад не зависящая от полного спина часть энергии кулоновского отталкивания электронов \mathcal{E}_k и зависящая от полного спина часть, называемая энергией обменного взаимодействия, $V = -\frac{A}{2} (1 + 4\langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle)$, где A — константа, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ — спины электронов ($\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$), а угловые скобки означают усреднение по направлениям спинов. Найти A и \mathcal{E}_k считая, что оба электрона находятся в поле ядра с $Z = 2$, т. е. не учитывая экранировку поля ядра электронами.

6.79. Атом хлора, находящийся в основном состоянии $^2P_{3/2}$, помещен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^4 \text{ Гс}$. Найти частоту переменного поля, при которой возникает резонансное поглощение энергии атомами хлора. Расстояние между подуровнями тонкой структуры атома хлора составляет $0,11 \text{ эВ}$. Угловой момент ядра не учитывать.

6.80. Пучок атомов, находящихся в основном состоянии, расщепляется в эксперименте типа Штерна—Герлаха на 9 компонент. Магнитный момент атома в этом состоянии равен $2,4\mu_B$. Найти орбитальный момент атома, если мультиплетность данного состояния равна 5. Момент в атомной физике — это величина его максимальной проекции.

§ 7. Ядерные модели. Радиоактивность. Эффект Мессбауэра

7.1. Определить среднюю плотность ядерного вещества, полагая, что радиус ядра равен $R = 1,3 A^{1/3}$ фм, где A — массовое число (число нуклонов). Энергия связи на один нуклон $B = 8,5$ МэВ/нуклон. Средняя масса нуклона $m_N \approx 940$ МэВ/ c^2 .¹⁾

7.2. Определить энергию \mathcal{E}_k кулоновского расталкивания протонов в ядре в предположении, что протоны распределены по ядру равномерно. Установить зависимость \mathcal{E}_k от числа нуклонов A и заряда ядра Z . Радиус ядра $R = 1,3 A^{1/3}$ фм.

7.3.* Поверхностная энергия атомного ядра равняется примерно $-17,8 A^{1/3}$ МэВ. Радиус атомного ядра $R = 1,3 A^{1/3}$ фм. Найти поверхностное натяжение σ ядерного вещества. Сравнить найденное значение с поверхностным натяжением ртути ($\sigma_{Hg} = 470$ эрг/см²).

7.4.* Энергия связи атомных ядер при заданном числе A нуклонов в ядре уменьшается с увеличением числа протонов Z из-за возрастания кулоновской энергии $|\mathcal{E}_k| = 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ МэВ. С другой стороны, при отличии числа нейтронов от числа протонов энергия связи уменьшается на величину $\mathcal{E} = \frac{47,4(N-Z)^2}{2A}$ МэВ. Определить при заданном A оптимальное значение Z , при котором энергия связи ядра минимальна. Определить Z/A при $A = 10; 50; 100; 150$ и 200 . Найти из справочных данных подходящие изотопы.

7.5. С помощью формулы Вайцеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары при заданном нечетном значении A . Выяснить, каков характер активности у ядер ^{27}Mg , ^{29}P , ^{37}K , ^{67}Cu .

7.6.* Разница в энергиях связи ядер трития ^3H и гелия ^3He обусловлена энергией электростатического взаимодействия протонов. Оценить размеры ядра ^3He . Энергии связи ядер ^3H и ^3He равны соответственно $\mathcal{E}_H = 8,482$ МэВ, $\mathcal{E}_{He} = 7,718$ МэВ.

7.7.* Ядро $^{27}_{14}\text{Si}$ переходит в «зеркальное» ядро $^{27}_{13}\text{Al}$, испытывая β^+ -распад. Максимальная кинетическая энергия вылетевшего позитрона $\mathcal{E}_{\max} = 3,48$ МэВ. Оценить по этим данным величину r_0 в формуле для радиуса ядра $R = r_0 A^{1/3}$.

7.8. Найти разность энергий связи для пар зеркальных ядер (^{11}B , ^{11}C) и (^{13}N , ^{13}C). Показать, что эта разность в значительной степени обусловлена кулоновским взаимодействием протонов в ядре. Энергию связи ядер взять из таблицы в конце сборника.

7.9. Ядро ^4_2Be «перегружено» протонами и испытывает превращение $^4_2\text{Be} \rightarrow ^3_3\text{Li}$. Массы этих атомов равны, соответственно, 7,0169 и

¹⁾ Радиус ядра определяется по формуле $R_j = r_0 A^{1/3}$. При этом коэффициент r_0 при различных аппроксимациях может принимать значения от 1,2 до $1,4 \cdot 10^{-13}$ см. В данном задачнике r_0 принимается равным $1,3 \cdot 10^{-13}$ см.

7,0160 а. е. м. Определить тип бета-распада, обуславливающего это превращение.

7.10. В 1942 г. американский физик Аллен измерил максимальную энергию \mathcal{E}_0 атомов ${}^7\text{Li}$, образующихся в результате K -захвата в ядре ${}^7\text{Be}$, и она оказалась равной 50 эВ. Оценить на основе этих данных разность масс атомов ${}^7\text{Be}$ и ${}^7\text{Li}$.

7.11. Определить энергию отдачи ядра атома лития, которое образуется в основном состоянии при поглощении электрона с K -оболочки ядром атома бериллия.

7.12: Потенциальную энергию взаимодействия нуклонов в дейтроне можно аппроксимировать сферически симметричной прямоугольной ямой (см. задачи 3.16–3.18). При этом в системе центра масс волновая функция основного состояния имеет вне области ямы следующий вид $\psi = A e^{-\kappa r}/r$, где $A = \text{const}$, $\kappa = 2,3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$. Найти красную границу реакции фоторасщепления дейтрона γ -квантами.

7.13: Согласно гидродинамической модели ядра Штайнведеля—Енсена протоны и нейтроны образуют сжимаемые и свободно проникающие друг в друга жидкости, двигающиеся внутри жесткой оболочки исходного ядра. Гигантский резонанс в ядрах соответствует возбуждению противофазных колебаний этих жидкостей, при которых протоны и нейтроны в ядре то пространственно разделяются, то равномерно перемешиваются. Используя формулу Вайцзеккера, оценить энергию гигантского дипольного резонанса \mathcal{E}_{GR} по этой модели в сферическом ядре с $A = 64$ ($Z = N$), который возникает при возбуждении волн с $kR = 2,08$, где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, R — радиус ядра. Закон дисперсии этих волн считать линейным ($\omega = ku$, где u — скорость распространения колебаний, равная, как в любой жидкости, $u = \sqrt{K/M}$, где в данном случае K — жесткость ядра относительно смещений нуклонов, M — масса ядра).

7.14. Согласно оболочечной модели ядра нейтроны и протоны независимо заполняют потенциальную яму. Определить число нуклонов A , которые могут располагаться на трех первых ядерных оболочках, считая потенциальную яму трехмерной параболической.

7.15: Простейшей оболочечной моделью ядра является трехмерный гармонический осциллятор. Считая, что потенциальная яма ядра имеет глубину $U_0 = -70$ МэВ, а $U(R_0) = 0$, где R_0 — радиус ядра, оценить энергию связи нуклона для ядра кислорода ${}^{16}\text{O}$.

7.16. Аппроксимируя ядерный потенциал трехмерной параболической ямой глубиной $U_0 = -60$ МэВ, оценить энергию однонуклонного возбуждения в ядре ${}^{40}_{20}\text{Ca}$. Считать, что $U(R_0) = 0$, где R_0 — радиус ядра.

7.17. У ядра дейтерия — дейтрона d — нет стационарных возбужденных состояний, а энергия связи нуклонов составляет $\mathcal{E}_{\text{св}} = 2,23$ МэВ. Аппроксимируя эффективный потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия трехмерной сферически симметричной прямоугольной потенциальной ямой глубиной $U_0 = -30$ МэВ, оценить радиус эффективного потенциала (см. также задачу 3.18).

7.18. У ядра дейтерия — дейтрона d — нет стационарных возбужденных состояний, а энергия связи нуклонов составляет $\epsilon = 2,23$ МэВ. Аппроксимируя эффективный потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия трехмерной сферически симметричной прямоугольной потенциальной ямой, оценить среднеквадратичный радиус дейтрона, т. е. среднеквадратичное расстояние между нуклонами (см. задачи 7.12, 3.18 и 3.20). Считать, что глубина ямы велика по сравнению с энергией уровня.

7.19. На рис. 43 изображен спектр низколежащих возбужденных уровней ядра ^{234}U , где ϵ — энергия уровня, L — квантовое число момента импульса. Показать, что эти уровни соответствуют возбуждению вращения ядра как целого относительно оси, перпендикулярной к оси симметрии ядра. Оценить из этих данных момент инерции J ядра.



7.20. Ядро ^{234}U является продуктом распада основного изотопа урана ^{238}U . Определить период полураспада ^{234}U , если его содержание в естественном уране в настоящее время составляет 0,0055%. Период полураспада ^{238}U равен $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет. Считать, что вначале «наработанного» ^{234}U не было.

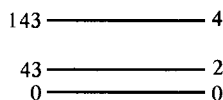


Рис. 43

7.21. В настоящее время в природном уране содержится $k_8 = 99,28\%$ ^{238}U и $k_5 = 0,72\%$ ^{235}U . Какое соотношение между ^{238}U и ^{235}U было в момент образования Земли, если возраст Земли равен $4 \cdot 10^9$ лет? Периоды полураспада $T_5 = 0,713 \cdot 10^9$ лет; $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет. Вычислить возраст Земли в предположении, что в момент образования Земли содержание ^{235}U и ^{238}U было одинаковым.

7.22. Период полураспада ^{234}U равняется $T_4 = 2,48 \cdot 10^5$ лет. Остался ли хотя бы один атом ^{234}U , который существовал в момент образования Земли — $4 \cdot 10^9$ лет тому назад? Как объяснить, что в природном уране содержится примесь ^{234}U в количестве 0,055%?

7.23. Периоды полураспада ^{238}U и ^{235}U равны соответственно $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет и $T_5 = 0,713 \cdot 10^9$ лет. Определить средние времена жизни этих изотопов.

7.24. Полагая, что перед α -распадом в ядре образуется самостоятельная α -частица, оценить отношение интенсивностей $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2$ двух групп α -частиц с кинетическими энергиями 6,3 и 5,7 МэВ, испускаемых ядрами с $Z = 86$ и $A = 220$. В обоих случаях частоту ударов о «стенку» потенциального барьера считать одинаковой.

7.25. Оценить период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного ядра, испускающего α -частицы в энергией 1 МэВ, если ядро $^{232}_{90}\text{Th}$ имеет период полураспада $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ лет и испускает α -частицы с энергией 4 МэВ, а для ядра $^{212}_{84}\text{Po}$ период полураспада равен $T_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7}$ с и $\epsilon_\alpha = 8,8$ МэВ.

7.26. Энергия α -частиц, испускаемых тяжелыми ядрами ($Z \sim 90$), примерно равна $\mathcal{E}_\alpha \sim 4,5$ МэВ, а период их полураспада $T_\alpha \sim 7 \cdot 10^8$ лет. Оценить период полураспада такого же ядра по отношению к вылету протона той же энергии $\mathcal{E}_p = 4,5$ МэВ. Считать задачу одномерной, кулоновский потенциал $U \gg \mathcal{E}$, а предэкспоненциальный множитель в выражении для проницаемости барьера константой.

7.27*. Исследование свойств α -радиоактивных ядер показало, что ядра в области $Z_1 \sim 90$ испускают α -частицы с энергией $\mathcal{E}_1 \sim 4$ МэВ (например, ядро ${}_{90}^{232}\text{Th}$), а в области редкоземельных элементов, где $Z_2 \sim 65$, — с энергией $\mathcal{E}_2 \sim 2$ МэВ. Оценить период полураспада редкоземельных ядер T_2 , если известно, что у тяжелых ядер он лежит в районе $T_1 \sim 10^{10}$ лет. Считать, что α -частицы при распаде преодолевают высокий одномерный потенциальный барьер, т. е. $U \gg \mathcal{E}$, а предэкспоненциальный множитель в выражении для проницаемости барьера — константа.

7.28. Оценить высоту кулоновского барьера для α -частиц, испускаемых ядрами ${}_{86}^{222}\text{Rn}$. Какова у этих ядер ширина барьера (туннельное расстояние) для α -частиц с энергией $\mathcal{E} = 5,5$ МэВ?

7.29*. При радиоактивном распаде ${}^{60}\text{Co}$ испускается электрон, спин которого параллелен импульсу. Считая, что электроны вылетают из образца изотропно, оценить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на нити, если образец кобальта нанесен на одну из поверхностей диска. Толщина диска достаточна для полного поглощения в нем электронов, вылетающих в сторону диска. Активность препарата*) $\frac{dN}{dt} = 0,37$ ТБк = $0,37 \cdot 10^{12}$ расп/с, модуль кручения нити равен $f = 10^{-6}$ дин·см/рад.

7.30. Содержание изотопа ${}^{235}\text{U}$ в природном уране сейчас составляет 0,7196%. Свежеприготовленный препарат, содержащий 100 мг химически чистого природного урана, характеризуется α -активностью в 0,043 мкКи. Такой же препарат урана, обогащенного до концентрации ${}^{235}\text{U}$ в 50%, имеет активность 0,150 мкКи. Вычислить: сколько лет назад содержание ${}^{235}\text{U}$ составляло 50%? Сравнить полученный результат с возрастом Земли.

7.31*. Оценить по порядку величины время жизни возбужденного уровня ядра с радиусом $R = 4 \cdot 10^{-13}$ см при электрическом мультипольном (дипольном, квадрупольном и т. д.) излучении γ -кванта с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 1$ МэВ.

У к а з а н и е. Классическое выражение для интенсивности, т. е. энергии дипольного излучения заряженного осциллятора в единицу времени, есть $W = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$, где $\ddot{\mathbf{d}}$ — вторая производная по времени дипольного момента.

*) Для 1 распада в секунду установлено название 1 беккерель (1 Бк); 1 Ки (кюри) = $3,7 \cdot 10^{10}$ расп/с.

7.32. Удельное содержание изотопа ^{14}C , усвоенного деревом при его жизни,¹⁾ затем уменьшается вследствие β -распада с периодом полураспада $T_{1/2} = 5700$ лет. Определить возраст t деревянного предмета, обнаруженного при раскопках, если удельная активность ^{14}C этого предмета составляет 0,1 от удельной активности²⁾ свежесрубленного дерева.

7.32. Удельное содержание изотопа ^{14}C , усвоенного деревом при его жизни, уменьшается затем благодаря β -распаду с $T_{1/2} = 5700$ лет. Какой минимальный возраст дерева можно определить по активности ^{14}C , если регистрируется $N = 10^4$ актов распада? Считать, что скорость образования ^{14}C за счет бомбардировки атмосферы космическими лучами от времени не зависит.

7.34. Ядро, пролетая через кристалл, подвергается воздействию периодического поля решетки кристалла, в результате чего возможно резонансное возбуждение ядерных уровней (эффект Окорокова смотрите также задачу 4.47). Обусловлен этот эффект тем, что в системе покоя ядра возникает переменное электрическое поле. До какой полной энергии надо разогнать ядро ^{19}F фтора, чтобы при пролете через кристалл вольфрама в нем возбуждался уровень с энергией $\mathcal{E} = 110$ кэВ? Период решетки в направлении движения ядра $a = 3,2 \text{ \AA}$.

7.35. Угловой и магнитный момент ядра ^{13}C полностью определяется неспаренным нейтроном, находящимся в состоянии $1p_{1/2}$ над полностью заполненной подоболочкой $1p_{3/2}$. Определить магнитный момент μ ядра ^{13}C (в ядерных магнетонах Бора). Магнитный момент свободного нейтрона $\mu_n = g_{\text{сп}} \mu_{\text{яд}} s_n = -1,91 \mu_{\text{яд}}$, где $g_{\text{сп}} = -3,82$ — спиновой g -фактор нейтрона, $s_n = 1/2$ — спин нейтрона.

У к а з а н и е. Магнитным моментом ядра принято называть величину максимальной проекции магнитного момента на заданную ось.

7.36. Согласно оболочечной модели ядра в ядре ^{15}N неспаренный протон, определяющий его угловой и магнитный моменты, находится в состоянии $1p_{1/2}$ сверх полностью заполненной подоболочки $1p_{3/2}$. Определить величину магнитного момента μ этого ядра (в

¹⁾ Суть радиоуглеродного метода определения возраста биологических объектов заключается в следующем. В атмосфере Земли постоянно образуется радиоактивный изотоп углерода ^{14}C из атмосферного азота при взаимодействии последнего с нейтронами космического излучения в верхних слоях атмосферы. Живые организмы потребляют его в той или иной форме наряду со стабильным углеродом ^{12}C . В результате обмена веществ в живом организме, как полагают биологи, концентрация ^{14}C при жизни поддерживается постоянной и одинаковой во всех живых организмах. Полагают также постоянной и не меняющейся в течение тысяч лет концентрацию ^{14}C в атмосфере. После биологической смерти, когда обмен веществ прекращается, радиоуглерод начинает распадаться, и концентрация его уменьшается с временем. По активности препарата, изготовленного из объекта, и определяют его возраст.

²⁾ Активностью называется величина λN — число ядер (из общего числа N), распадающихся в единицу времени, λ — вероятность распада нестабильного ядра в единицу времени. Удельная активность — активность 1 г радиоактивного препарата. Величина λ называется также константой распада, т. е. по определению $dN/dt = -\lambda N$.

ядерных магнетонах Бора). Магнитный момент свободного протона $\mu_p = g_{sp}\mu_{яд}S_p = 2,79\mu_{яд}$, где $g_{sp} = 5,58$ — спиновой g-фактор протона, $S_p = 1/2$ — спин протона. Смотрите указание к задаче 7.35.

7.37*: При учете сверхтонкого взаимодействия интегралом движения является полный угловой момент атома $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$, где \mathbf{I} , \mathbf{J} — полные моменты ядра и электронной оболочки соответственно. Энергия сверхтонкого взаимодействия может быть записана в виде $U_{ст} = A(\boldsymbol{\mu}_e \boldsymbol{\mu}_я)$, где $A = \text{const}$, $\boldsymbol{\mu}_e$, $\boldsymbol{\mu}_я$ — магнитные моменты электрона и ядра соответственно. Найти отношение сверхтонких расщеплений основного состояния атомов водорода и дейтерия, т. е. расстояний между уровнями с разными значениями F . Спиновые g-факторы протона и нейтрона равны $g_{sp} = 5,58$ и $g_{sn} = -3,82$, спины нуклонов в дейтроне параллельны.

7.38*: Спин ядра атома лития (его полный угловой момент) $I = 3/2$. При учете сверхтонкого взаимодействия интегралом движения является полный момент атома $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ (\mathbf{J} — угловой момент электронной оболочки). Найти два возможных значения магнитного момента атома лития, находящегося в состоянии $2^2P_{1/2}$. Собственным магнитным моментом ядра пренебречь.

7.39*: Свободное покоящееся атомное ядро массой M переходит из возбужденного состояния в основное, испуская γ -квант. Найти энергию γ -кванта и энергию отдачи R , если энергия возбуждения равнялась \mathcal{E} . Получить числовой ответ для $^{191}_{77}\text{Ir}$, если $\mathcal{E} = 129$ кэВ.

7.40. Свободное покоящееся атомное ядро массой M переходит в возбужденное состояние с энергией возбуждения \mathcal{E} , поглощая γ -квант. Определить энергию γ -кванта и энергию отдачи ядра R .

7.41. Ядра изотопа $^{197}_{77}\text{Ir}$, входящие в состав кристаллической решетки, испускают γ -кванты с энергией 129 кэВ. Линия Мессбауэра испускания и поглощения γ -квантов имеет ширину $\Gamma = 4,6 \cdot 10^{-6}$ эВ. Предположим, что кристалл, испускающий γ -кванты, движется со скоростью v , а поглощающий кристалл покоится. Вычислить наименьшую скорость v источника, которую можно зарегистрировать по изменению величины поглощения γ -квантов. Предположить, что можно уверенно зарегистрировать доплеровское смещение частоты γ -квантов движущегося источника, равное $1/6$ ширины линии.

7.42. В первых экспериментах Мессбауэра источником излучения служил радиоактивный изотоп $^{191}_{76}\text{Os}$, который в результате β -распада переходил в возбужденное состояние изотопа $^{191}_{77}\text{Ir}$. Испускаемые им γ -кванты с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 129$ кэВ поглощались иридиевой фольгой. Было обнаружено, что даже при комнатной температуре наблюдается значительный эффект резонансного поглощения. Вероятность эффекта Мессбауэра тем больше, чем меньше амплитуда колебаний атомов в кристалле. Поскольку при конечной температуре атомы в кристалле колеблются с разными частотами, то, усредняя по всем частотам, мы получим, что кристаллу можно поставить в соответствие некоторую эффективную температуру $T_{эфф}$. Тогда условие резонансного погло-

щения можно записать в виде $R \leq D$, где R — энергия отдачи, а $D = 2\sqrt{k_B T_{\text{эфф}}} R$ — уширение линии (ширина на полувысоте). Оценить эту эффективную температуру.

7.43. Если излучающее ядро находится в кристаллической решетке, то возможна ситуация (при температурах, много меньших так называемой дебаевской температуры, которая характеризует наибольшую возможную энергию колебаний атомов кристаллической решетки), когда излучение и поглощение γ -кванта с большой вероятностью происходит без возбуждения колебаний атомов. Вычислить, каково при этом изменение энергии γ -кванта для кристалла иридия конечного размера с массой $M = 100$ мг, испускающего γ -квант с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 129$ кэВ.

7.44. Источник, содержащий ядра изотопа ^{57}Fe , которые испускают γ -кванты с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 14,4$ кэВ и шириной линии $\Gamma = 4 \cdot 10^{-9}$ эВ, помещен в центр вращающегося диска, а поглотитель из того же материала — на диске на расстоянии $R = 1$ м от центра. С какой частотой Ω нужно вращать диск, чтобы смещение $\Delta\omega$ частоты поглотителя относительно излучателя равнялось $1/10$ ширины линии Мессбауэра?

7.45. С какой относительной скоростью v надо сближать кристаллический источник, содержащий возбужденные ядра ^{191}Ir (энергия возбуждения $\mathcal{E} = 129$ кэВ), с мишенью, содержащей свободные ядра ^{191}Ir , чтобы наблюдать максимальное поглощение γ -квантов в мишени?

7.46. Используя эффект Мессбауэра, можно измерить гравитационное смещение частоты. Для этой цели были использованы γ -лучи, испускаемые возбужденным ядром ^{57}Fe (энергия γ -лучей $\mathcal{E}_\gamma = 14,4$ кэВ, ширина линии $\Gamma = 4 \cdot 10^{-9}$ эВ). При какой разности высот между приемником (поглотителем) и источником γ -лучей сместится на 1% от ширины линии (при этом еще можно заметить изменение поглощения γ -лучей)? См. задачу 1.4.

7.47.* Ядра в решетке кристалла совершают тепловые колебания, что приводит в доплеровскому смещению частоты излучаемых квантов. Однако в направлении излучения продольный эффект Доплера при усреднении по времени дает ноль, т. к. время жизни ядра в возбужденном состоянии (порядка 10^{-7} с) много больше периода колебаний атомов в решетке (порядка 10^{-13} с). Поэтому остается только поперечный релятивистский эффект Доплера. Если эффективные температуры (см. задачу 7.42) источника и приемника различаются, то частоты излучения и поглощения смещаются по-разному. Какой разности высот между источником и поглотителем в опытах с ^{57}Fe соответствует разность температур $\delta T_{\text{эфф}} = 1$ К?

7.48. На какой высоте H надо поместить поглотитель относительно источника для проверки красного смещения, предсказываемого общей теорией относительности? Используется эффект Мессбауэра на изотопе ^{67}Zn , время жизни его возбужденного уровня с энергией $\mathcal{E} = 93$ кэВ равно $\tau = 10$ мкс. Считать, что для достижения необходи-

мой точности эффект смещения должен в 10 раз превышать ширину линии резонансного поглощения.

Указание: см. задачу 1.4.

7.49. Оценить минимальные массу m и размер b железной пылинки, при которых можно наблюдать эффект Мессбауэра с энергией перехода $\mathcal{E} = 14$ кэВ и временем жизни $\tau = 1$ мс. Считать, что эффект еще наблюдаем, когда отдача пылинки приведет к доплеровскому смещению, равному собственной ширине линии. Плотность железа $\rho \approx 7,9$ г/см³.

7.50* Исследование ядерных свойств ¹⁵²Eu на прецизионной установке TRISTAN в Гренобле (Франция) показало, что в результате электронного захвата и последующего испускания нейтрино это ядро переходит в возбужденное ядро ¹⁵²Sm, а затем в основное состояние путем испускания γ -кванта с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 963$ кэВ. Ширина этой линии оказалась равной $\Delta\mathcal{E} = 13$ эВ, а время жизни возбужденного состояния $\tau = 40$ фс. Оценить энергию вылетевшего нейтрино.

7.51. На спектрометре высокого разрешения GAMS4 в Гренобле (Франция) у изотопа ⁴⁹Ti зарегистрирован каскадный переход из высоковозбужденного в основное состояние с последовательным испусканием двух γ -квантов с энергиями $\mathcal{E}_1 = 5$ МэВ и $\mathcal{E}_2 = 1,5$ МэВ. Прецизионные измерения формы линии \mathcal{E}_2 показали, что она имеет ширину $\Delta\mathcal{E} = 400$ эВ. Оценить время жизни уровня с энергией \mathcal{E}_2 . Учсть, что детектор спектрометра регистрирует γ -излучение в узком телесном угле вблизи нормали к окну детектора.

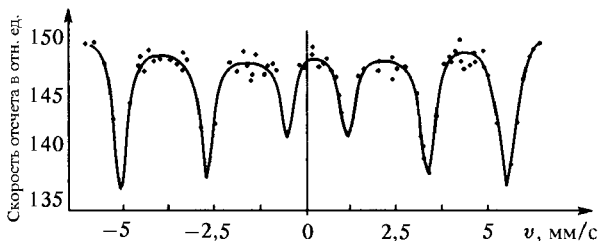


Рис. 44

7.52. Широко используемое в мессбауэровской спектроскопии ядро ⁵⁷Fe имеет спин и четность основного состояния $1/2 +$ (g -фактор равен 0,18), а первого возбужденного состояния $3/2 +$ ($g = -0,1$). Энергия перехода $\mathcal{E}_0 = 14,4$ кэВ. На рис. 44 показан спектр резонансного поглощения этой нерасщепленной линии железа в металлическом железе, являющемся ферромагнетиком. Возбужденное ядро ⁵⁷Fe* образуется в результате β -распада ядра ⁵⁷Co, внедренного в нержавеющую сталь, не являющуюся ферромагнетиком, поэтому в стали не наблюдается расщепление указанной линии излучения. Расщепление линии обусловлено наличием внутреннего магнитного поля на ядрах магнитного железа (ядерный Зееман-эффект). Образец

железа приводят в движение со скоростью v . Определить тип излучаемых γ -квантов. Какова величина магнитного поля на ядрах железа?

7.53: Мюон захватывается ядром свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Оценить энергию основного состояния мюона.

7.54. Мюон захватывается ядром свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Оценить область локализации мюона в основном состоянии.

7.55. Радий-226 за счет последовательных радиоактивных распадов превращается в устойчивый изотоп свинца ^{206}Pb . Какая масса M гелия выделится за время $t = 1$ месяц из $m = 1$ г радия, находящегося в равновесии со своими продуктами распада? Период полураспада ^{226}Ra составляет $T_{1/2} = 1600$ лет.

7.56. Радий был впервые выделен П. и М. Кюри из урановых месторождений в Богемии. Являясь продуктом распада ^{238}U (период полураспада $T_{\text{U}} = 4,5 \cdot 10^9$ лет), сам радий нестабилен, его период полураспада $T_{\text{Ra}} = 1600$ лет. Считая, что в цепочке превращения урана установилось равновесие и что эффективность выделения радия составляет 100%, оценить, какую массу урановой руды надо было переработать, чтобы выделить один грамм радия. Содержание урана в руде $\eta = 1$ масс %.

7.57: Нуклон из незаполненной оболочки ядра углерода ^{13}C , поглощает $E1$ -фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

У к а з а н и е. Последовательность расположения однонуклонных ядерных уровней: $N = 0$ ($1s_{1/2}$); $N = 1$ ($1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$); $N = 2$ ($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$); $N = 3$ ($1f_{7/2}$, ...).

7.58. Нуклон из незаполненной оболочки ядра углерода ^{17}O , поглощает $M1$ -фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

У к а з а н и е. Последовательность расположения однонуклонных ядерных уровней: $N = 0$ ($1s_{1/2}$); $N = 1$ ($1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$); $N = 2$ ($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$); $N = 3$ ($1f_{7/2}$, ...).

7.59. На одну сторону поглощающей пластинки нанесен слой α -активного ^{226}Th (период полураспада $T_{1/2} \approx 31$ мин). При каком минимальном отношении масс тория и пластинки возможна левитация системы в поле тяжести из-за отдачи, возникающей при испускании α -частиц ($\mathcal{E}_{\alpha} = 6,3$ МэВ)? Самопоглощением α -частиц в ториевом слое пренебречь.

7.60: Из-за нецентрального характера ядерных сил основное состояние дейтрона представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Каков был бы магнитный момент дейтрона, если бы он находился в «чистом» состоянии 3D_1 ? Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны соответственно $g_{\text{sp}} = 5,58$ и $g_{\text{sn}} = -3,82$. Разницу масс нуклонов не учитывать. Рассмотреть случаи ls - и jj -связи.

7.61. В силу нецентрального характера ядерных сил основное состояние дейтрона представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Экспериментальное значение магнитного момента основного состояния дейтрона равно $0,86\mu_{\text{яд}}$. Используя тот факт, что магнитный момент состояния дейтрона 3D_1 равен $0,31\mu_{\text{яд}}$, определить вероятность нахождения дейтрона в этом состоянии. Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны соответственно $g_{\text{сп}} = 5,58$, $g_{\text{сн}} = -3,82$.

7.62. В 1998 г. Я. Джели с сотрудниками было осуществлено прецизионное измерение ширины линии γ -перехода между двумя возбужденными состояниями 1^- и 2^+ ядра ${}^{152}_{62}\text{Sm}$. Это ядро образовывалось в результате K -захвата по схеме ${}^{152}_{63}\text{Eu} + e^- \rightarrow {}^{152}_{62}\text{Sm} + \nu_e$. Выделяемая при этом энергия составила $Q = 962$ кэВ. Энергия данного γ -перехода в неподвижном ядре ${}^{152}_{62}\text{Sm}$ равна $\mathcal{E}_\gamma = 841$ кэВ. На сколько смещается линия \mathcal{E}_γ в результате отдачи излучающего ядра? Каково вызванное этим уширение линий? Оценить естественную ширину этой линии, если времена жизни ядра в состояниях 1^- и 2^+ составляют $\tau_1 = 29$ фс и $\tau_2 = 2$ нс соответственно.

7.63. В экспериментах Ф. Блоха по определению магнитного момента тритона использовался метод ЯМР на сверхтяжелой воде (80% T_2O и 20% H_2O). При фиксированной частоте переменного поля $\nu = 41,5$ МГц проводилось сканирование подмагничивающего поля. Были обнаружены два пика: при $B_1 = 9160$ Гс и $B_2 = 9770$ Гс, причем первый пик был по величине примерно в четыре раза больше второго. Определить из этих данных магнитный момент тритона. Спин тритона рассчитывать по однонуклонной оболочечной модели.

У к а з а н и е. В магнитном поле расположение подуровней энергии ядра трития аналогично таковому для протона.

7.64. В медицинской томографии внутренних органов используется метод ЯМР на протонах, входящих в состав воды, а для томографии легких — на ядрах газообразного ${}^3\text{He}$ при его вдыхании. Определить

разницу между экспериментальными и теоретическими значениями магнитного момента ядра ${}^3_2\text{He}$, если сигнал резонанса наблюдается во внешнем поле $B = 1,5$ Тл на частоте $\nu = 48,75$ МГц. Спин ядра и его магнитный момент вычислять по однонуклонной оболочечной модели.

У к а з а н и е. В магнитном поле расположение подуровней энергии для ядра ${}^3\text{He}$ противоположно таковому для протона.

7.65. В угловом распределении электронов с энергией $\mathcal{E} = 750$ МэВ, рассеянных на дважды магическом ядре кальция ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, эксперименталь-

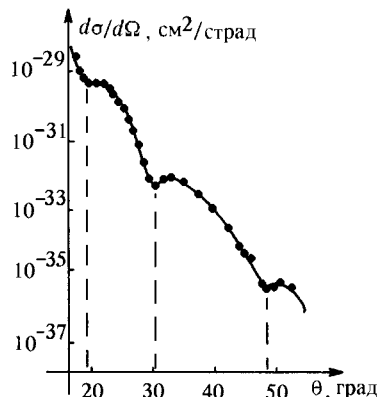


Рис. 45

но наблюдается ряд последовательных дифракционных минимумов, как это показано на рис. 45. Оценить из положений трех отчетливых минимумов средний радиус ядра кальция, которое можно рассматривать в данной задаче как черный шарик, и среднюю величину r_0 в формуле для радиусов ядер.

§ 8. Нейтроны. Ядерные реакции

8.1. Нейтрон упруго рассеивается на ядре. Какое минимальное отличное от нуля прицельное расстояние b может реализоваться для нейтрона с энергией $\mathcal{E} = 100$ кэВ (рис. 46)?

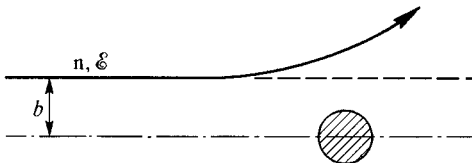


Рис. 46

8.2*. Оценить отношение сечений образования компаунд-состояния (составного ядра) при бомбардировке ядер ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ нейтронами и протонами с одной и той же начальной энергией $\mathcal{E}_0 = 10$ МэВ.

8.3. Оценить полное сечение σ взаимодействия ультрарелятивистского нейтрона с ядром урана. Приняв для сечения нуклон-нуклонного взаимодействия величину $\sigma_{\text{NN}} \approx 40$ мбн, оценить длину свободного пробега такого нейтрона в ядре.

8.4*. Медленный нейтрон упруго рассеивается на свободном ядре со спином $I = 3/2$ в состоянии с орбитальным моментом $L = 0$. Определить вероятность рассеяния в состояниях с параллельной и антипараллельной взаимной ориентацией спинов нейтрона и ядра.

У к а з а н и е. Учтеть, что ядерные силы между нуклонами зависят от взаимной ориентации их спинов и поэтому сечение рассеяния зависит от полного углового момента сталкивающихся частиц, являющегося интегралом движения. Спином ядра называют его полный момент. В данном случае (при $L = 0$) спин ядра является «чистым» спином в традиционном его понимании.

8.5. Вплоть до энергий $T = 20$ МэВ угловое распределение рассеянных нейтронов в реакции $\text{p} \rightarrow \text{p}$ в лабораторной системе отсчета хорошо описывается формулой $d\sigma(\theta) = A \cos \theta d\Omega$. Как выглядит это распределение в системе центра инерции? Какая оценка для радиуса действия ядерных сил отсюда следует?

8.6*. Тепловой нейтрон из реактора попадает по нормали в биологическую защиту (рис. 47), состоящую в основном из водорода (например, парафин), толщиной $l = 1$ м и плотностью ядер $n = 10^{22}$ см $^{-3}$. Сечение упругого рассеяния составляет $\sigma_{\text{расс}} = \sigma_0 = 20$ бн, сечение поглощения — $\sigma_{\text{погл}} = \sigma_1 = 0,3$ бн и не зави-

сит от энергии. Угловое распределение упруго рассеянных нейтронов в системе центра масс изотропно. Считая, что после рассеяния нейтрон пролетает в защите путь в $1/\cos \theta$ раз больший, чем при прямом пролете, где θ — угол рассеяния, оценить вероятность того, что нейтрон пройдет через защиту, испытав лишь только одно упругое столкновение¹⁾.

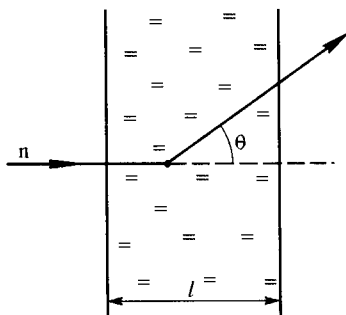


Рис. 47

8.7. Плотность потока нейтронов, выходящих из реактора, равна $j_0 = 10^{14} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$. Определить выход реакции в единицу времени (отношение числа актов реакции к числу частиц, упавших на единицу площади мишени в единицу времени) в мишени толщиной 1 см. Сечение реакции $\sigma = 10^{-27} \text{ см}^2$, плотность ядер мишени $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

8.8. Узкий пучок тепловых нейтронов проходит через слой воды толщиной 1 см. Определить доли первоначального потока нейтронов, выбывающих из пучка в результате поглощения и рассеяния. Сечение поглощения для воды $\sigma_{\text{полг}} = 0,66 \text{ бн}$, а сечение рассеяния $\sigma_{\text{расс}} = 69 \text{ бн}$.

8.9. Определить, во сколько раз уменьшается интенсивность узкого пучка тепловых нейтронов после прохождения пластинки Al толщиной $d = 3 \text{ см}$. На выходе из пластинки регистрируется пучок первоначальной ширины. Сечение рассеяния для алюминия $\sigma_{\text{расс}} = 1,41 \text{ бн}$, а сечение поглощения $\sigma_{\text{полг}} = 0,23 \text{ бн}$.

8.10. Быстрые нейтроны, попав в воду, быстро замедляются до тепловых скоростей $v = 2,2 \text{ км/с}$ и диффундируют в ней, пока не захватятся ядрами водорода (захватом кислородом можно пренебречь). Оценить время жизни τ нейтронов в воде. Сечение захвата (поглощения) теплового нейтрона протоном $\sigma_{\text{полг}} = \sigma = 0,3 \text{ бн}$.

8.11. Исследование структуры жидкого или твердого ${}^3\text{He}$ с помощью пропускания нейтронов через слой вещества затруднено из-за большой величины сечения экзотермической реакции ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$, и для нейтронов с энергией 300 К оно равно $\sigma_0 = 5400 \text{ бн}$. Определить энергию нейтронов, с помощью которых можно изучать слои ${}^3\text{He}$ толщиной $d = 1 \text{ мм}$, чтобы проходило не менее 10% от потока падающих нейтронов. Концентрация ядер ${}^3\text{He}$ $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

У к а з а н и е. Сечение указанной реакции для нейтронов с энергией до 1 МэВ имеет нерезонансный характер.

8.12. Для регистрации медленных нейтронов широко используются счетчики, наполненные газообразным изотопом ${}^3\text{He}$. Рассчитать долю ϵ регистрируемых частиц — эффективность счетчика,

¹⁾ В этой и последующей задачах приняты следующие определения: $\sigma_{\text{реакции}} = \sigma_{\text{полг}} = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}} = \sigma_{\text{расс}} + \sigma_{\text{полг}} = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{захв}} + \sigma_{\text{дел}} + \dots$

представляющего собой цилиндр диаметром $d = 25$ мм, наполненный газом при давлении $P = 10$ атм. Нейтроны при температуре $T = 300$ К летят вдоль диаметра цилиндра. В счетчике происходит реакция ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$, сечение которой для регистрируемых нейтронов $\sigma = 5400$ бн.

8.13* Для детектирования медленных нейтронов широко используются ионизационные счетчики, наполненные ${}^3\text{He}$. Регистрация нейтронов производится по реакции $(n, {}^3\text{He}) \rightarrow ({}^3\text{H}, p)$. Показать на основе законов сохранения, что взаимодействие нейтронов с гелием-3 не может приводить к образованию ${}^4\text{He}$ по реакции $n + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He}$. См. также задачу 1.16.

8.14. В сечении рассеяния нейтронов на ядрах может проявляться «волновой резонанс», когда интерференция нейтронных волн де Бройля приводит к «прозрачности» ядер (ядерный аналог эффекта Рамзауэра). Оценить, при какой минимальной энергии нейтронов должны быть видны эти «резонансы проницаемости» на ядре ${}^{208}\text{Pb}$. Ядерный потенциал считать одномерной ямой, ширина которой равна диаметру ядра, глубина ямы $U = 40$ МэВ (см. задачу 3.33).

8.15* Источник тепловых нейтронов установлен в центре большого графитового куба, и со временем нейтроны, многократно рассеиваясь на ядрах углерода и иногда поглощаясь, распространяются по всему объему. Оценить эффективный размер области, занимаемой в результате нейтронами, если эффективное сечение рассеяния нейтронов $\sigma_{\text{расс}} = 4,8 \cdot 10^{-24}$ см², а поглощения — $\sigma_{\text{погл}} = 3 \cdot 10^{-27}$ см². Плотность графита $\rho = 2,2$ г/см³.

8.16. Поликристаллический бериллий слабо поглощает, но интенсивно рассеивает нейтроны (брэгговское отражение на кристалликах). На этом основано действие поликристаллического фильтра, пропускающего нейтроны с энергией $\epsilon < \epsilon_{\text{гр}}$. Найти $\epsilon_{\text{гр}}$ для бериллия, у которого межплоскостное расстояние $d = 2\text{Å}$.

8.17. Поток нейтронов из реактора, имеющих максвелловское распределение по скоростям с температурой $T = 370$ К, пропускается через толстый поликристаллический фильтр из спрессованного порошка графита. Найти, какая доля нейтронов проходит через такой фильтр. Максимальное межплоскостное расстояние для решетки графита $a = 3,35\text{Å}$.

8.18. Два цилиндрических стержня с одинаковыми диаметрами, один из графита, другой из висмута, совмещены основаниями. Графитовый стержень через открытый торец облучается параллельно его оси потоком нейтронов, выходящих из замедлителя с комнатной температурой 300 К (рис. 48). Полагая рассеяние нейтронов в графите и висмуте брэгговским, оценить, во сколько раз средняя кинетическая энергия нейтронов $\epsilon_{\text{х}}$, выходящих из висмутового цилиндра через его боковую поверхность, меньше энергии падающих нейтронов ϵ_0 . Максимальное

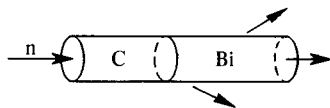


Рис. 48

расстояние между кристаллическими плоскостями для графита $d_C = 3,35 \text{ \AA}$ и для висмута $d_{Bi} = 4,05 \text{ \AA}$. Длина стержней много больше их диаметров, которые сравнимы со средним пробегом нейтронов.

8.19. Чему равна критическая скорость нейтронов, испытывающих полное отражение на границе вещества при произвольном угле падения? Число рассеивающих ядер в единице объема N и амплитуду рассеяния нейтронов f считать заданными.

8.20. Найти критический угол скольжения φ_0 для тепловых нейтронов с заданной длиной волны λ при отражении от материала с известными значениями N и f . При $\varphi < \varphi_0$ нейтроны полностью отражаются.

8.21. Вычислить коэффициент преломления нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$ в металлическом Ве ($\rho \approx 1,85 \text{ г/см}^3$), если амплитуда рассеяния $f = -0,77 \cdot 10^{-12} \text{ см}$. Чему равен угол полного отражения нейтронов?

8.22. Максимальная скорость нейтронов, накапливаемых в ловушке в силу полного отражения от медных стенок, равна $v = 5,7 \text{ м/с}$. Определить амплитуду рассеяния нейтронов на ядрах меди.

8.23. После прохождения свинцовой пластинки толщиной $d = 2 \text{ см}$ интенсивность потока нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 0,25 \text{ МэВ}$ уменьшилась и составила 70% от интенсивности падающего пучка. Показать, что это ослабление потока обусловлено преимущественно упругим изотропным s -рассеянием нейтронов ядрами свинца. Считая, что величина амплитуды рассеяния равна радиусу ядра, оценить размер ядра ^{208}Pb . Плотность свинца $\rho = 11,3 \text{ г/см}^3$.

8.24. Ультрахолодные нейтроны выходят широким пучком из горизонтального нейтроновода и затем движутся свободно над горизонтально расположенной пластинкой, упруго от нее отражаясь и тем самым совершая периодическое движение, как показано на рис. 49. Это движение в гравитационном поле квантуется, и поэтому пройдут над пластинкой только те нейтроны, у которых высота движения H соответствует разрешенной энергии. Оценить на основе правила квантования Бора—Зоммерфельда, какова третья разрешенная высота. См. задачу 3.6.

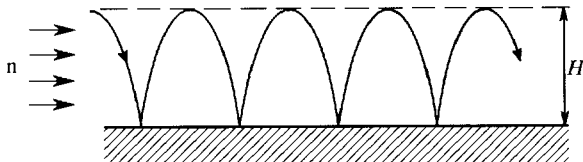


Рис. 49

8.25. Гравитационный рефрактометр (рис. 50) дает возможность определить амплитуду рассеяния медленных нейтронов атомными ядрами, используя падение нейтронов в гравитационном поле Земли. Найти амплитуду рассеяния для ^{209}Bi , если известно, что для него на

высоте $H = 60$ см резко изменяется скорость счета. Плотность висмута $\rho = 9,8 \text{ г/см}^3$.

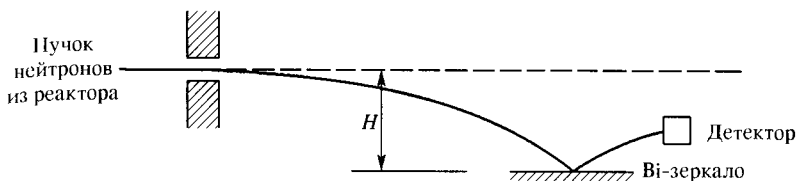


Рис. 50

8.26. На рис. 51 показаны: реактор P , работающий на тепловых нейтронах, полая изогнутая труба (нейтроновод) и детектор нейтронов D . Распределение нейтронов в реакторе по скоростям максвелловское при температуре $T \approx 400 \text{ К}$. Нейтроны, скорость v которых меньше граничной скорости ($v_{гр} \sim 10 \text{ м/с}$), называют ультрахолодными. Особенностью таких нейтронов является то, что они испытывают полное упругое отражение от стенок при любом угле падения. Найти зависимость скорости счета детектора от высоты колена H , полагая, что детектор одинаково эффективно регистрирует все ультрахолодные нейтроны. При каком значении H детектор не регистрирует ультрахолодные нейтроны?

8.27. В реакторах, работающих на тепловых нейтронах, имеются очень медленные ультрахолодные нейтроны (УХН). Особенностью УХН является то, что при скоростях $v < v_{гр}$ (обычно граничная скорость $v_{гр} \sim 10 \text{ м/с}$) нейтроны упруго отражаются от стенок при любых углах падения. Для вывода УХН из реактора используют полые трубы — нейтроноводы. На рис. 52 изображен реактор P , нейтроновод специальной формы и на его конце — детектор нейтронов D . Полагая, что распределение нейтронов по скоростям в реакторе максвелловское (при температуре $T \approx 400 \text{ К}$), найти, как зависит поток нейтронов, доходящих до детектора, от высоты его поднятия H . Оценить высоту $H_{гр}$, на которой поток нейтронов исчезает.

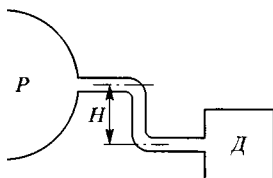


Рис. 51

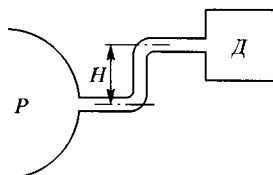


Рис. 52

8.28. В вакуированном сосуде объемом $V = 1 \text{ л}$ находятся ультрахолодные нейтроны, отражающиеся от стенок с коэффициентом отражения, практически равным единице. В сосуде имеется отверстие площадью S , заклеенное фольгой, полностью прозрачной для ультрахолодных нейтронов. Какова должна быть площадь окошка

S , если наблюдаемое время хранения нейтронов в ловушке в 2 раза меньше среднего времени жизни свободных нейтронов $\tau \sim 10^3$ с. Считать, что скорость всех ультрахолодных нейтронов одинакова и равна $v = 5$ м/с.

8.29. Вхождение нейтронов из вакуума в большинство веществ связано с преодолением энергетического барьера. Поэтому в замкнутой полости достаточно медленные нейтроны оказываются запертыми и могут накапливаться. Определить, какая доля из потока тепловых нейтронов, распределение по скоростям которых максвелловское, окажется запертой в медной камере. Предельный угол скольжения при полном «внешнем» отражении для нейтронов, движущихся со среднеквадратичной скоростью, составляет $i = 10$ угл. мин. Соударения нейтронов со стенками камеры могут рассматриваться как упругие.

8.30* Монохроматические нейтроны с энергией $\mathcal{E} = 10^{-7}$ эВ транспортируются к мишени из источника (медной сферы радиусом R) по длинному круглому алюминиевому нейтронному радиусу $r = 10$ см $\ll R$. Концентрация нейтронов в источнике $n_0 = 1$ см $^{-3}$ все время поддерживается постоянной, плотности алюминия и меди равны соответственно 2,7 и 8,9 г/см 3 , а их амплитуды когерентного рассеяния $-3,5 \cdot 10^{-13}$ см и $-7,8 \cdot 10^{-13}$ см. Вычислить поток нейтронов на мишени (распадом нейтронов пренебречь).

8.31. Параллельный пучок монохроматических нейтронов ($\lambda = 5$ Å) шириной $b = 2,5$ см попадает на вход длинного изогнутого нейтронного радиуса прямоугольного сечения радиусом $R = 50$ м (рис. 53). Внутренняя поверхность нейтронного радиуса покрыта слоем ^{56}Ni ($\rho = 8,9$ г/см 3 , амплитуда когерентного рассеяния $f = -10$ фм). Определить, какая часть нейтронов пройдет по волноводу (распадом нейтронов пренебречь).

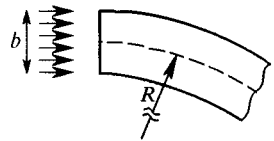


Рис. 53

8.32. В конце 1980-х годов М. А. Кумахов предложил использовать тонкие полые стеклянные капилляры в качестве световодов для рентгеновских лучей и медленных нейтронов. Для нейтронов с длиной волны $\lambda = 2,4$ Å критический угол у стекла равен $\theta_{кр} = 2,2 \cdot 10^{-3}$ радиан. При каком минимальном радиусе кривизны стеклянной трубки диаметром $d = 0,1$ мм будет полностью передаваться попадающий на ее вход параллельный пучок нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 25$ мэВ?

8.33. В рентгеновской и нейтронной физике начинает широко применяться так называемая «ораче optics» (непрозрачная оптика). Например, цилиндрической линзой может

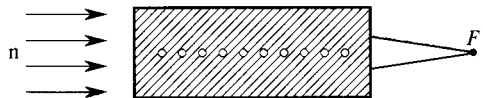


Рис. 54

служить цилиндрической линзой в сплошном веществе. Рассчитать для нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 25$ мэВ фокусное расстояние составной никелевой линзы, образованной 10 отверстиями диаметром

$2R = 200$ мкм, как это показано на рис. 54. Длина когерентного рассеяния нейтронов в никеле естественного состава $a = 10^{-12}$ см, плотность никеля $\rho = 8,9$ г/см³.

8.34. Образец иода ^{127}I облучается нейтронным потоком такой интенсивности, что в 1 с образуется 10^7 атомов радиоактивного иода ^{128}I , период полураспада $T_{1/2}$ которого 25 мин. Найти число атомов ^{128}I и активность препарата через 1, 10, 25, 50 мин после начала облучения. Каковы максимальные числа атомов ^{128}I и активность препарата при долгом облучении (т. е. при облучении до насыщения)?

8.35. При облучении образца золота в потоке тепловых нейтронов плотностью $j = 10^{14}$ см⁻²·с⁻¹ в реакторе в результате реакции $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$ (сечение $\sigma_1 = 96$ бн) образуется β^- -активный нуклид ^{198}Au , переходящий в ^{198}Hg с периодом полураспада $T_{1/2} = 2,7$ суток. В то же время, сечение реакции $^{198}\text{Au}(n, \gamma)^{199}\text{Au}$ очень велико и равно $\sigma_2 = 26\,000$ бн, так что изотоп ^{198}Au активно поглощает нейтроны (вторичная активация). На сколько уменьшается при учете вторичной реакции число образующихся ядер ^{198}Hg при времени облучения $t = 10T_{1/2}$?

8.36. Образец золота ^{197}Au массой $m = 10$ мг облучали в потоке тепловых нейтронов плотностью $j = 10^{12}$ см⁻²·с⁻¹ дважды: в течение первого дня с 9 до 17 час и в то же время на следующий день. Найти число образовавшихся радиоактивных ядер ^{198}Au ($T_{1/2} = 2,7$ сут, сечение активации, т. е. радиационного захвата нейтронов ядрами ^{197}Au , $\sigma = 96$ бн) к концу облучения во второй день. За какое время это же количество ядер ^{198}Au может быть получено при непрерывном облучении?

8.37. Образец алюминия облучается дейтронами с энергией 7 МэВ, в результате чего происходит реакция $^{27}\text{Al}(d, p)^{28}\text{Al}$. Период полураспада ^{28}Al равен $T_{1/2} = 2,24$ мин. Облучение длится в течение $t_1 = 3,5$ мин, какое-то время t_2 уходит на перенос образца к детектору, а затем в течение времени $t_3 = 6$ мин производится измерение активности образца. Какую часть распадов регистрирует детектор от максимально возможного при том же времени переноса образца?

8.38. Распространенность группы легких элементов Li, Be, B в Земле, Солнце, метеоритах намного меньше, чем более тяжелых C, N, O, однако в космических лучах содержание группы легких элементов Li, Be, B относительно группы C, N, O равно $\alpha = 0,34$. Это объясняется фрагментацией (развалом) C, N, O при прохождении через межзвездную среду, состоящую в основном из водорода. Оценить в г/см² количество водорода, которое должны при этом пройти высокоэнергетичные ядра C, N, O. Сечение деления (фрагментации) тяжелых элементов с образованием легких $\sigma_f = 90$ мбн, полное сечение их взаимодействия с водородом $\sigma_0 = 200$ мбн, фрагментацией легких элементов пренебречь.

8.39. Сосуд объемом $V = 1$ л помещен в активную зону реактора на тепловых нейтронах с плотностью потока $j = 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Считая, что сосуд не возмущает пространственное максвелловское распределение нейтронов с $T = 300 \text{ К}$, найти количество протонов, накопившееся в сосуде за счет распада нейтронов в течение $t = 6$ месяцев.

8.40. Один из методов определения времени жизни нейтронов по отношению к β -распаду состоит в измерении числа протонов, образующихся при пролете медленных нейтронов через промежуток a фокусирующей системы детектора протонов D (рис. 55). Найти число протонов N_p , поступающих на детектор, если длина промежутка, в котором протоны распадаются, равна $a = 20 \text{ см}$. Плотность потока медленных нейтронов $j_n = 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, скорость нейтронов $v = 2 \text{ км/с}$, эффективность сбора протонов 100%.

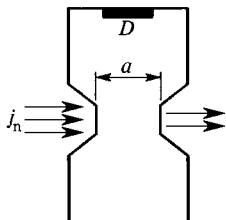


Рис. 55

8.41.* Найти среднее по энергии эффективное сечение σ реакции $\alpha + {}^{27}_{13}\text{Al} \rightarrow \text{p} + {}^{30}_{14}\text{Si}$. Известно, что при облучении толстой алюминиевой мишени α -частицами с энергией 8 МэВ выход протонов¹⁾ равен $\eta = 8 \cdot 10^{-6}$. Длина пробега α -частиц в воздухе равна $l_b = 7,0 \text{ см}$.

8.42. Толстая мишень, содержащая n_0 ядер/см³, облучается α -частицами. Зависимость дифференциального выхода η исследуемой реакции от энергии²⁾ α -частиц в интервале $1 \div 10 \text{ МэВ}$ оказалась кубической: $d\eta/d\varepsilon = c\varepsilon^3$. Определить приблизительно характер зависимости эффективного сечения реакции от энергии $\sigma(\varepsilon)$. Принять, что тормозные потери обратно пропорциональны энергии, т. е. $d\varepsilon/dx = A/\varepsilon$, где $A = \text{const}$.

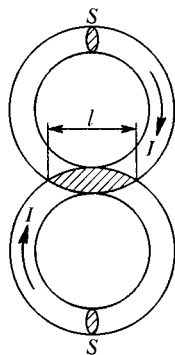


Рис. 56

8.43. В одном из экспериментов со встречными пучками электронов используются два одинаковых накопительных кольца, в которых пучки ультрарелятивистских частиц движутся в противоположных направлениях, сталкиваясь друг с другом на длине взаимодействия $l = 0,5 \text{ м}$ (рис. 56). Система счетчиков, окружающая область взаимодействия, установлена так, что она регистрирует одно из 10 событий ($\varepsilon = 0,1$) взаимодействия час-

¹⁾ Выходом ядерной реакции называется отношение полного числа рожденных в мишени частиц к полному числу частиц, попавших на мишень.

²⁾ В толстом слое вещества поток частиц будет изменяться как вследствие ядерных реакций, так и вследствие ионизационного торможения заряженных частиц. В случае реакций, вызванных заряженными частицами, ионизационные потери существенно изменяют энергию этих частиц, и поэтому выход реакции — это $\eta = \frac{N}{N_0} =$

$$= n_0 \int \frac{\sigma(\varepsilon') d\varepsilon'}{|d\varepsilon'/dx|_{\text{иониз}}}, \text{ где } n_0 \text{ — концентрация ядер мишени.}$$

тиц. Площадь сечения циркулирующих пучков в кольцах равна $S = 5 \text{ мм}^2$, эффективное сечение взаимодействия двух соударяющихся частиц $\sigma = 10^{-5}$ бн. Найти циркулирующий ток \mathcal{I} , который нужно накопить в каждом кольце, чтобы системой счетчиков регистрировалось в 1 с не менее $K = 10 \text{ с}^{-1}$ событий. Считать, что плотность числа частиц вдоль орбиты постоянна.

8.44. При распаде ядра ^{60}Co одновременно (в каскаде) образуются два γ -кванта с энергиями $\epsilon_1 = 1,17 \text{ МэВ}$ и $\epsilon_2 = 1,33 \text{ МэВ}$ соответственно. Определить, как изменится отношение потоков этих γ -квантов после их прохождения через свинец толщиной d и вычислить это отношение при $d = 5 \text{ см}$. Коэффициенты ослабления потока γ -квантов в свинце равны соответственно $\mu_1 = 0,7 \text{ см}^{-1}$, $\mu_2 = 0,62 \text{ см}^{-1}$.

8.45. При просвечивании детали монократическими тепловыми нейтронами с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$ на изображении было обнаружено слабое темное пятно, свидетельствующее о наличии внутри детали инородного включения. Контраст изображения (отношение интенсивностей прошедших нейтронов в области включения к соседним однородным областям) был равен 1,26. Какова должна быть длина волны нейтрона, чтобы контраст возрос до 2? Считать, что сечение взаимодействия нейтронов с веществом носит нерезонансный характер.

8.46. Оценить, какая доля ультрарелятивистских протонов космического излучения дойдет до поверхности Земли, не испытав ядерного взаимодействия.

8.47. Оценить длины свободного пробега l_p и l_N ультрарелятивистских протонов и ядер азота в жидководородной камере. Радиус протона $r_p = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, плотность жидкого водорода $\rho_H = 0,07 \text{ г/см}^3$.

8.48. Для создания пучков быстрых нейтронов часто используют взаимодействие релятивистских дейтронов с тяжелыми ядрами, когда в результате периферийного взаимодействия протон поглощается ядром — т.н. реакция срыва. Оценить сечение $\sigma_{\text{полг}}$ такого процесса, когда мишенью служит абсолютно поглощающее нуклоны ядро свинца ^{208}Pb . Среднее расстояние между нуклонами в дейтроне равно $2R_d = 3,6 \text{ фм}$.

8.49. Определить кинетические энергии T_n нейтрона и T_α ядра ^6Li , образующихся при фоторасщеплении ядра ^7Li под действием γ -кванта с энергией $\epsilon_\gamma = 15 \text{ МэВ}$, если нейтрон вылетает «вперед», т.е. по направлению пучка γ -квантов. Энергии связи ядер ^6Li и ^7Li равны соответственно $\epsilon_1 = 32 \text{ МэВ}$ и $\epsilon_2 = 39,2 \text{ МэВ}$.

8.50. При какой кинетической энергии T_p налетающего протона на покоящийся протон в реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ кинетическая энергия пиона в лабораторной системе координат равна нулю?

8.51*. Хорошо сколлапсированный пучок γ -квантов с энергией $\epsilon_\gamma = 250 \text{ МэВ}$ падает на мишень, содержащую дейтерий. Вследствие фоторасщепления дейтерия вторичный пучок содержит нуклоны. Оценить угол разлета φ нуклонов после реакции. Среднее расстояние между нуклонами в ядре дейтерия принять равным $2R_d \approx 4 \text{ фм}$.

8.52. Ядра кислорода ^{16}O облучаются пучком протонов с импульсом $p = 10$ ГэВ/с. Отбираются такие события, когда в результате реакции $p + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{O}^* + p$ возбужденные ядра кислорода $^{16}\text{O}^*$ с энергией возбуждения, равной $\mathcal{E} = 1$ МэВ, вылетают в направлениях, практически перпендикулярных пучку, и испускают монохроматические γ -кванты вдоль своей траектории (рис. 57). Детектор γ -квантов регистрирует две линии, расстояние между которыми $\Delta\mathcal{E} = 200$ кэВ.

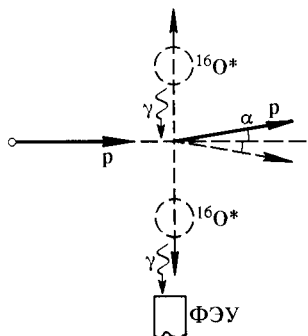


Рис. 57

Оценить импульс p_{O^*} вылетевших ядер кислорода и малый угол α , на который отклоняются протоны.

8.53. Реакция $^7\text{Li} (p, n)^7\text{Be}$ является удобным источником монохроматических нейтронов в интервале $0,2 \div 1,5$ МэВ. Для изменения энергии нейтронов можно менять как энергию первичных протонов, так и угол наблюдения. Найти: а) выделенные энергии в реакции $^7\text{Li} (p, n)^7\text{Be}$, зная массу атомов ^7Li , ^7Be , ^1H и нейтрона в атомных единицах; б) при какой минимальной энергии протонов возможна эта реакция? Какова связь между энергиями нейтрона и протона в лабораторной системе

и системе центра масс?

8.54. Сечение взаимодействия (поглощения) нейтрино с нуклоном $\sigma = 10^{-43}$ см². Какова вероятность взаимодействия нейтрино при пролете по диаметру гипотетического железного шара с радиусом R , равным одной астрономической единице ($1,5 \cdot 10^8$ км — среднее расстояние от Солнца до Земли)? Шар считать несжимаемым с плотностью $\rho = 7,8$ г/см³.

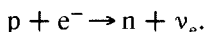
8.55. Считая, что сечение взаимодействия (поглощения) нейтрино с нуклонами σ (в см²) зависит от энергии \mathcal{E} нейтрино (в ГэВ) как $\sigma = A\mathcal{E}$, где коэффициент $A = 10^{-38}$ см²/ГэВ, оценить энергию нейтрино, необходимую для его эффективного поглощения Землей. Радиус Земли принять равным $R = 6400$ км, ее среднюю плотность $\rho = 5,5$ г/см³.

8.56. Оценить, насколько толща Земли ослабляет поток нейтрино, приходящих с противоположной стороны земного шара. Усредненное по энергетическому спектру сечение поглощения нейтрино на нуклонах равно $\sigma \approx 10^{-35}$ см², средняя плотность Земли $\rho = 5,5$ г/см³, эффективная относительная атомная масса $A = 50$.

8.57.* Для объяснения загадки тунгусского метеорита привлекалась гипотеза, что он состоял из антивещества. Оценить, может ли подобный «гость» долететь к нам от удаленных на несколько десятков миллионов световых лет галактик, поскольку ближе антивещества нет из-за отсутствия характерного аннигиляционного излучения. В самых «пустых» частях Вселенной обычно все же не бывает менее одного протона в 1 см³.

8.58. Ядерные реакции, проходящие на Солнце, можно изучать, измеряя поток нейтрино от Солнца. Нейтрино с энергией в несколько МэВ (эти нейтрино образуются при распаде ядер ^8B на заключительной стадии превращения водорода в гелий) детектируются в реакции $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$. Сечение такой реакции, усредненное по энергетическому спектру рассматриваемых нейтрино, $\sigma = 1,4 \cdot 10^{-42} \text{ см}^2$. Считая, что в секунду Солнце испускает число нейтрино $N_\nu = 3 \cdot 10^{33} \text{ с}^{-1}$, определить, какова должна быть масса M четыреххлористого углерода CCl_4 (естественной смеси изотопов), чтобы в нем за время $t = 1$ год произошло $n = 100$ актов образования ядер ${}^{37}\text{Ar}$. В естественной смеси изотопов хлора содержится $\eta = 25\%$ (по массе) ядер ${}^{37}\text{Cl}$.

8.59: Время жизни ядра ${}^{37}\text{Ar}$ из-за K -захвата составляет $t_0 = 32$ сут. На основе этого факта оценить эффективное сечение σ слабого взаимодействия в реакции



8.60. Мюон μ , попав в свинцовую пластинку, очень быстро тормозится, после чего захватывается на K -оболочку ядра ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, на которой он живет $\tau = 7 \cdot 10^{-8}$ с. Это время примерно в 30 раз меньше времени жизни свободного мюона. Сравнить размер мюонной оболочки с размерами ядра Pb . Взаимодействие с каким из нуклонов ограничивает время жизни мюона? Написать соответствующую реакцию и оценить ее эффективное сечение.

8.61: При комнатной температуре примерно $f = 20\%$ γ -распадов ${}^{119}_{50}\text{Sn}$ в соединении BaSnO_3 происходит без возбуждения колебаний атомов решетки (бесфононный переход). Такой процесс называется эффектом Мессбауэра. Оценить, какой должна быть толщина источника, чтобы в нем не происходило заметного самопоглощения мессбауэровских γ -квантов, носящего упругий характер. Плотность BaSnO_3 $\rho = 3 \text{ г/см}^3$, содержание изотопа ${}^{119}_{50}\text{Sn}$ в естественной смеси $\varepsilon = 8\%$, энергия γ -квантов $\mathcal{E}_\gamma = 24$ кэВ.

8.62. По современным расчетам плотность потока высокоэнергетичных солнечных нейтрино на Земле должна быть равной $j = 5,6 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Нейтрино регистрируются детектором, содержащим $M = 615$ тонн перхлорэтилена C_2Cl_4 . В естественной смеси изотопов хлора содержится 25 массовых процентов изотопа ${}^{37}\text{Cl}$, на ядрах которого происходит реакция, обратная K -захвату. Среднее сечение захвата ядрами ${}^{37}\text{Cl}$ таких нейтрино составляет $\sigma = 1,06 \cdot 10^{-42} \text{ см}^2$. Период полураспада $T_{1/2}$ образующегося ядра ${}^{37}\text{Ar}$ равен 35 суткам. Какое максимальное количество ядер ${}^{37}\text{Ar}$ можно выделить из вещества детектора после экспозиции в течение времени $t = T_{1/2}$?

8.63. По современным расчетам плотность потока низкоэнергетичных солнечных нейтрино на Земле должна быть равной $j = 6,07 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Нейтрино регистрируются детектором, содер-

жацим $M = 75,5$ тонн хлорида галлия GaCl_3 . В естественной смеси изотопов галлия содержится 40 массовых % изотопа ^{71}Ga , на ядрах которого происходит реакция, обратная K -захвату. Среднее сечение этой реакции составляет $\sigma = 11,8 \cdot 10^{-46}$ см². Период полураспада $T_{1/2}$ образующегося ядра ^{71}Ge равен 11,4 суток. Какое максимальное количество ядер ^{71}Ge можно извлечь из вещества детектора через время экспозиции $t = T_{1/2}$?

8.64. Оценить, во сколько раз сечение поглощения атомом натрия резонансной линии, соответствующей его $(3S - 3P)$ -переходу и рассматриваемого как неупругий процесс, отличается от геометрического поперечного сечения атома.

8.65. Коллимированный пучок монохроматических нейтронов проходит через пластинку из железа толщиной $d = 5$ мм, для которого эффективные сечения поглощения и рассеяния нейтронов данной энергии равны соответственно $\sigma_{\text{погл}} = 2,5$ бн и $\sigma_{\text{расс}} = 11$ бн. Определить относительные доли падающего потока нейтронов, выбывших из пучка в результате поглощения и рассеяния. Плотность железа $\rho = 7,9$ г/см³.

8.66. Мак-Рейнольдс (1951 г.) измерил зависимость интенсивности I отражения медленных нейтронов, падающих под малым углом

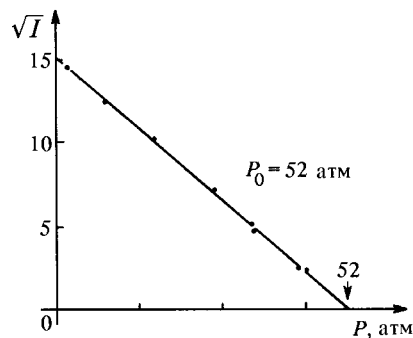


Рис. 58

скольжения на границу раздела азот (газ) — этиленгликоль (жидкость), от давления газа P при температуре $T = 300$ К (рис. 58). Нейтроны падают из азота (1) на границу раздела с этиленгликолем (2). Показать, что, действительно, должна наблюдаться зависимость $\sqrt{I} \propto P$. Найти величину сечения когерентного рассеяния нейтронов на ядрах азота, если известно, что у этиленгликоля плотность ядер равна $N_2 = 1,13 \cdot 10^{23}$ см⁻³, среднее сечение когерентного рассеяния равно $\sigma_2 = 0,0055$ бн. В эксперименте коэффициент отражения нейтронов $R = \text{const} \cdot (n_2^2 - n_1^2)^2$; n_1, n_2 — показатели преломления соответственно газа и жидкости. Это выражение получается из формул Френеля при малых углах скольжения и близких к единице показателей преломления.

8.67. На рис. 59 точками показаны результаты Д. Юза с сотрудниками, которые измерили зависимость от угла скольжения θ (в угловых минутах) интенсивности отражения нейтронов с длиной волны $\lambda = 6,7$ Å от границы раздела между висмутом и жидким кислородом. Нейтроны падают из висмута (1) на границу с кислородом (2). Штриховой линией показана следующая из измерений угловая зависимость интенсивности отражения для монохроматического па-

раллельного пучка. В отражении нейтронов участвуют независимо как ядра, так и электроны. Найти длину рассеяния $a_{эл}$ на электронах, если плотности и длины рассеяния на ядрах висмута и жидкого кислорода равны $\rho_1 = 9,8 \text{ г/см}^3$, $a_1 = 8,64 \text{ фм}$; $\rho_2 = 1,13 \text{ г/см}^3$, $a_2 = 5,77 \text{ фм}$.

8.68. При облучении ядра ^{115}In нейтронами с энергией $\epsilon_n = 1,44 \text{ эВ}$ происходит их резонансное поглощение. Распад составного ядра происходит по двум каналам — радиационному (с испусканием γ -квантов) и упругому (с вылетом нейтрона). Полное сечение этой реакции равно $\sigma_{\text{полн}} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ бн}$. Ширина нейтронного канала распада $\Gamma_n = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Оценить среднее время жизни составного ядра относительно испускания γ -квантов, считая, что $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$. Частицы считать бесспиновыми.

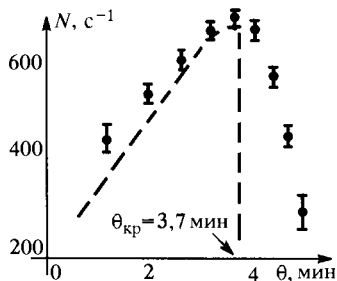


Рис. 59

8.69* При захвате тяжелым ядром медленного нейтрона с энергией ϵ образуется составное ядро. Снятие возбуждения происходит либо путем упругого испускания нейтрона, либо путем испускания γ -квантов. Найти отношение сечений испускания нейтрона при $\epsilon = 1 \text{ эВ}$ и $\epsilon = 10 \text{ кэВ}$. Вероятность радиационного распада много больше вероятности вылета нейтрона. Считать потенциал ядра прямоугольной потенциальной ямой, а процессы поглощения и испускания нейтронов — нерезонансными.

§ 9. Деление ядер. Реакторы. Термоядерный синтез

9.1: Кулоновские силы способствуют делению атомного ядра, а силы поверхностного натяжения препятствуют. Определить отношение кулоновской ϵ_k и поверхностной ϵ_n энергий атомного ядра, при котором деление на два равных осколка энергетически выгодно. Выразить то же условие через параметр деления Z^2/A , пользуясь формулой Вайцзеккера для энергий ϵ_k и ϵ_n . Четности A и Z не учитывать.

9.2. С помощью полуэмпирической формулы Вайцзеккера найти минимальное значение параметра Z^2/A , при котором становится энергетически возможным деление ядра с четным A и четным Z на две одинаковые части. Рассмотреть три случая: 1) $A/2$ — нечетное, $Z/2$ — произвольное; 2) $A/2$ — четное, $Z/2$ — нечетное; 3) $A/2$ — четное, $Z/2$ — четное.

9.3: Предполагая, что форма ядра является сферической, получить критерий устойчивости ядер по отношению к малым статическим деформациям формы. Ядерную материю считать несжимаемой. Проверить по полученному критерию устойчивость тяжелых естественных ядер. Как можно объяснить явления спонтанного деления?

Указание. Площадь поверхности вытянутого эллипсоида вращения с полуосями a и b

$$S = 2\pi ab \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right).$$

Энергия равномерно заряженного по объему эллипсоида с зарядом Q равна

$$\mathcal{E} = \frac{3}{10} \frac{Q^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

9.4* Оценить эффективное сечение деления ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ нейтронами с энергиями 0,025 эВ (тепловые нейтроны) и 10 кэВ. Считать, что сечение деления равно сечению образования составного ядра. Ядерный потенциал аппроксимировать прямоугольной потенциальной ямой глубиной 40 МэВ.

9.5. Сечение деления ${}^{238}\text{U}$ быстрыми нейтронами с энергией $\mathcal{E} = 5$ МэВ равно $\sigma(n, f) = 0,5$ бн. Какова относительная вероятность этого нерезонансного процесса по отношению ко всем процессам, идущим через компаунд-состояние? Глубину потенциальной ямы ядра урана принять равной $U = 50$ МэВ.

9.6. Размножение нейтронов в делящейся среде можно условно представить как смену поколений. Существовавшие в некоторое время нейтроны будут все рано или поздно поглощены ядрами. На смену «умершему» поколению нейтронов появится новое поколение нейтронов, которое опять через некоторое время «умрет», чтобы дать «жизнь» следующему поколению. Конечно, время жизни нейтронов неодинаково, но можно ввести среднее время жизни одного поколения, точно так же, как это делается для человеческих поколений. Отношение числа нейтронов второго поколения к числу нейтронов первого поколения в делящейся среде называется коэффициентом размножения k_{∞} . Если $k_{\infty} < 1$, то говорят, что система находится в подкритическом состоянии. Число нейтронов в такой системе будет уменьшаться во времени. Пусть в подкритической бесконечной системе в некоторый момент времени появилось N_0 нейтронов. Определить общее число нейтронов, образующихся в системе, если исходное их число равнялось N_0 .

9.7. Показать, что в системе из чистого ${}^{238}\text{U}$ нельзя достигнуть $k_{\infty} > 1$ (см. задачу 9.6). Для энергии нейтронов больше 1,1 МэВ сечение поглощения не превышает величины 10^{-24} см²: $\sigma_{\text{полг}} = \sigma_{\text{дел}} + \sigma_{\text{захв}} < 10^{-24}$ см², где $\sigma_{\text{дел}}$ — сечение деления, а $\sigma_{\text{захв}}$ — сечение радиационного захвата. В то же время сечение упругого рассеяния, при котором нейтрон теряет относительно большую часть своей энергии, $\sigma_{\text{расс}} \approx 3 \cdot 10^{-24}$ см².

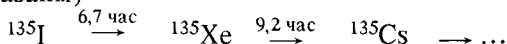
9.8. Реактивностью реактора называют величину $\rho = \frac{k-1}{k}$, где k — коэффициент размножения нейтронов; если $|k-1| \ll 1$, то $\rho \approx k-1$. Найти в этом приближении изменение мощности $W(t)$ ре-

актора в надкритическом режиме, когда $k > 1$. Определить характерное время T реактора, т. е. время возрастания мощности W в e раз. Среднее время жизни одного поколения нейтронов равно t .

9.9. При каких значениях реактивности реактора ρ , определенного в предыдущей задаче, запаздывающие нейтроны определяют зависимость мощности от времени? Доля запаздывающих нейтронов $\beta = 0,0064$.

9.10: Активная зона ядерного реактора заполнена смесью урана и графита, имеющей при бесконечных размерах коэффициент размножения нейтронов $k_{\infty} = 1,05$. Среднее расстояние, проходимое нейтроном от места рождения до поглощения, $L = 50$ см. Оценить критический радиус реактора R , при котором полное число нейтронов остается постоянным, считая, что плотность нейтронов изменяется линейно по радиусу и равна нулю на границе.

9.11: В работающем ядерном реакторе в числе многих элементов из урана все время образуются изотопы иода ^{135}I , претерпевающие следующую последовательность бета-распадов (периоды полураспада указаны)



Так как ядра ^{135}Xe обладают очень большим сечением поглощения нейтронов, в работающем реакторе накопления этого изотопа не происходит. Однако при остановке реактора ксенон начинает накапливаться, тем самым уменьшается коэффициент размножения нейтронов и сразу же повторный запуск реактора затрудняется (образуется так называемая иодная яма). Через какое время после остановки реактора количество ядер ^{135}Xe будет максимальным? Считать, что в момент остановки реактора ядер ксенона в нем нет.

9.12: Один из способов утилизации оружейного плутония (почти чистый ^{239}Pu) состоит в его облучении в реакторе, где за счет захвата (поглощения) нейтронов ^{239}Pu либо делится, либо переводится в ^{240}Pu , который в свою очередь переходит в ^{241}Pu . Сечения этих реакций равны $\sigma_{f1} = 741$, $\sigma_{n1} = 267$, $\sigma_{n2} = 290$ бн. Плутоний считается непригодным для создания ядерного оружия, если содержание в нем ^{240}Pu составляет 40% от ^{239}Pu . Определить время, необходимое для достижения этой концентрации ^{240}Pu в образце оружейного плутония в реакторе с массой $M = 2,75$ т ^{235}U и мощностью $W = 3500$ МВт. Сечение деления ^{235}U равно $\sigma_{f3} = 579$ бн, в одном акте деления выделяется энергия $\epsilon = 180$ МэВ.

9.13. Под действием нейтронной компоненты космического излучения на поверхности Земли из ^{238}U образуется ^{239}Pu . Считая, что плотность потока космических нейтронов равна $j_n = 1 \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$ и эффективное сечение захвата (поглощения) нейтронов ядром урана равно $\sigma = 3$ бн, определить отношение концентрации ^{239}Pu и ^{238}U при временах $t \gg T_{1/2}$ от начала облучения ($T_{1/2} = 2,4 \cdot 10^4$ лет — период полураспада плутония).

9.14. Много лет тому назад в урановом месторождении в Окло (Габон, Африка) «работал» природный ядерный реактор на ^{235}U . Из массы $M = 200$ т имевшегося там урана выделилась энергия $\mathcal{E} = 10^{11}$ кВт·час. Оценить, какая часть массы ^{235}U $\Delta M/M$ была при этом израсходована, если его начальная концентрация составляла $n_0 = 3,5\%$. Время «работы» реактора много меньше периода полураспада урана. Энергию \mathcal{E}_0 , выделяющуюся при делении ядра ^{235}U , принять равной 200 МэВ.

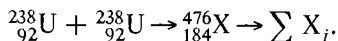
9.15. Естественный уран состоит из 99,3% изотопа ^{238}U и 0,7% ^{235}U . При обогащении смеси изотопов ^{235}U до 3% возможна цепная реакция деления. Какое время t тому назад такой природный реактор мог «загореться»?

9.16. В урановом реакторе мощностью $W = 1$ МВт образуется в среднем $N = 6$ антинейтрино на один акт деления ядра урана. Энергия антинейтрино $\mathcal{E} = 1,5$ МэВ. Реактор окружен биологической защитой (бетон). Оценить плотность потока антинейтрино j за биологической защитой на расстоянии $L = 5$ м и долю энергии η , уносимой антинейтрино из реактора. Считать, что реактор имеет сферическую форму.

9.17. При спонтанном делении тяжелых элементов (тория, урана) внутри Земли выделяется мощность $W \approx 15$ ТВт. Делящиеся элементы являются источниками антинейтрино (≈ 6 антинейтрино на акт распада). Предполагая распределение элементов в Земле равномерным, оценить плотность потока антинейтрино на ее поверхности. Сечение поглощения антинейтрино принять равным $\sigma = 10^{-43}$ см²/нуклон.

9.18. Во всем мире в 1978 г. была выработана тепловая энергия, эквивалентная сжиганию около 10^{10} т условного топлива. Условное топливо имеет тепловыделение 7000 кал на 1 г. Какое количество естественного урана потребовалось бы взамен сжигания 10^{10} т условного топлива для получения такого же количества тепловой энергии? Считать, что в реакторах коэффициент воспроизводства «ядерного горючего» $k_b = 0,8$ (k_b — это отношение числа атомов созданного «горючего» к числу атомов затраченного). За один акт деления выделяется 200 МэВ энергии. В естественном уране содержится 0,714% ^{235}U .

9.19. Один из перспективных методов получения новых изотопов — синтез сверхтяжелых ядер с их последующим распадом. Найти пороговую скорость v ядер урана, бомбардирующих урановую мишень, для реакции



9.20. В термоядерном реакторе концентрация дейтерия $n_d = 2,5 \cdot 10^{15}$ ядер/см³ поддерживается на постоянном уровне с помощью внешнего источника дейтронов, который обеспечивает поступление q ядер/(с·см³). Принимая во внимание только реакции (d, d) и (d, t), найти: 1) установившуюся концентрацию n_t трития t; 2) вели-

чину q ; 3) мощность W , выделяемую в 1 см^3 плазмы. При температуре плазмы $T = 60 \text{ кэВ}$ усредненные по максвелловскому распределению произведения сечений реакций на относительную скорость частиц равны $\overline{\sigma v_{\text{dd}}} = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$; $\overline{\sigma v_{\text{dt}}} = 10^{-15} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

9.21. Каково количество термоядерных реакций, происходящих в 1 см^3 в 1 с , если известно сечение реакции $\sigma(v)$, где v — относительная скорость реагирующих дейтронов, а n — число дейтронов в 1 см^3 ?

9.22. Какая плотность тепловой мощности W [$\text{эрг}/\text{с} \cdot \text{см}^3$] создается термоядерными реакциями в чисто дейтериевой плазме с концентрацией ядер $n_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\overline{\sigma v_{\text{dd}}} = 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с}$, что соответствует температуре плазмы $4,6 \cdot 10^8 \text{ К}$ или 40 кэВ в энергетических единицах? При вычислениях учитывать лишь энергию реакций $d + d$.

9.23. В первом поколении термоядерных реакторов предполагается использовать реакцию дейтерия с тритием:



Теплота реакции $Q = 17,6 \text{ МэВ}$. Предполагая, что квазинейтральная плазма содержит равное количество ядер дейтерия и трития при плотности электронов $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, рассчитать плотность тепловой мощности W , а также полную мощность N термоядерной установки. Объем плазмы $V = 500 \text{ м}^3$. Для данной реакции

$$\overline{\sigma v_{\text{dt}}} = \begin{cases} 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3/\text{с} & \text{при } kT = 1 \text{ кэВ}, \\ 6 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с} & \text{при } kT = 10 \text{ кэВ}. \end{cases}$$

9.24. Термоядерная реакция называется самоподдерживающейся, если выделяемая энергия полностью уходит на разогрев плазмы (ядер дейтерия, трития и электронов) до необходимой температуры T . Исходя из этого, найти минимально необходимое время τ удержания квазинейтральной дейтериево-тритиевой плазмы с полной концентрацией частиц $n_d + n_t = n$. Для данной реакции при данной температуре величины Q_{dt} и $\overline{\sigma v_{\text{dt}}}$ считать заданными.

Примечание. Время удержания плазмы определяется в первую очередь различными неустойчивостями, а также процессами диффузии и излучения.

9.25. Согласно критерию Лоусона в равнокомпонентной смеси дейтерия и трития при $kT = 10 \text{ кэВ}$ термоядерная реакция будет самоподдерживающейся, если $n\tau = 10^{14} \text{ с}/\text{см}^{-3}$, где n — плотность электронов, τ — время удержания плазмы (см. задачу 9.24). Какова для этого случая должна быть плотность тепловой мощности, выделяемой в реакторе, если $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

Примечание. Такой режим работы называют режимом нулевой мощности.

9.26. Экономически выгодным считается такой термоядерный реактор, в котором выделяемая энергия втрое превышает затраты на разогрев плазмы. Это связано с тем, что часть выделяемой мощности должна идти на поддержание работы различных вспомогательных

устройств. Показать, что для квазинейтральной равнокомпонентной дейтериево-третиевой плазмы при $kT = 10$ кэВ критерий Лоусона имеет вид $n\tau > 3 \cdot 10^{14}$ с/см⁻³. Здесь n — плотность электронов, τ — время удержания плазмы (см. задачу 9.24). Для данной реакции при заданной температуре $\overline{\sigma v_{dt}} = 6 \cdot 10^{-17}$ см³/с, а $Q_{dt} = 17,6$ МэВ.

9.27. Оценить радиус плазменного дейтериевого шара, для которого термоядерная реакция станет самоподдерживающейся при $kT = 10$ кэВ. Плазму можно рассматривать, как абсолютно черное тело, непрозрачное для излучения, и считать, что основные потери энергии связаны с излучением через поверхность шара. Концентрация дейтерия равна $n_d = 3,0 \cdot 10^{20}$ см⁻³; при данной температуре величина $\overline{\sigma v_{dd}} = 10^{-18}$ см³/с. Учитывать только реакции (d,d) и (d,t) (см. задачу 9.20). Концентрации дейтерия и трития считать стационарными.

9.28* При классическом рассмотрении реакция термоядерного синтеза (d, d) может произойти только тогда, когда кинетическая энергия сталкивающихся дейтронов достаточна для преодоления кулоновского барьера $U_{кул} = 0,5$ МэВ. Однако, благодаря туннельному эффекту эта реакция возможна и при меньших энергиях. Оценить, во сколько раз увеличивается скорость реакции при квантовом рассмотрении по сравнению с классическим. Температура дейтериевой плазмы $T_0 = 10^8$ К.

9.29* Реакция термоядерного синтеза $d + t \rightarrow n + \alpha$ при низких энергиях идет преимущественно в состоянии с полным моментом импульса сталкивающихся ядер $I = 3/2$. Во сколько раз изменится среднее сечение этой реакции, если дейтериево-третиевая плазма помещена в магнитное поле, полностью поляризующее спины взаимодействующих ядер? Спины ядер дейтерия и трития равны соответственно $S_d = 1$ и $S_t = 1/2$ (см. указание к задаче 8.4).

9.30* В морской воде примерно на каждые 6000 молекул обычной воды приходится одна молекула тяжелой воды D₂O. Учитывая четыре основные реакции синтеза, возможные в дейтериевой плазме, определить, какая энергия выделится в термоядерном реакторе при сжигании всего дейтерия, содержащегося в 1 л морской воды. Какому количеству бензина эквивалентен по энергии 1 л воды, если при сжигании 1 кг бензина выделяется 13 кВт·ч энергии?

9.31. Оценить запас термоядерной энергии \mathcal{E} в 1 м³ морской воды, если использовать 10% дейтерия, содержащегося в воде, для осуществления реакции $d + d$. Число атомов дейтерия в природной смеси изотопов равно 0,015%.

9.32. Определить отношение начальной кинетической энергии частиц дейтериевой плазмы, нагретой до $T = 10^9$ К, к энергии, выделенной после «выгорания» всего дейтерия в результате реакции термоядерного синтеза. Учитывать только реакции (d, d) и (d, t).

9.33* На рис. 60 изображена предполагаемая схема термоядерной электростанции. В реактор вводится подогретое до необходимой температуры топливо — дейтериевая плазма. Часть частиц покидает зону реакции, не испытав ядерного взаимодействия. Часть энергии за-

ряженных частиц, которая бесполезно излучается из зоны реакции за счет тормозного излучения, с помощью системы отражателей возвращается обратно в реактор. Коэффициент преобразования выделенной энергии в электрическую (КПД станции) $\eta = 30\%$. Температура дейтериевой плазмы $T = 10^9$ К. Найти $n_d t$ — произведение концентрации ядер дейтерия на время удержания дейтериевой плазмы в зоне реакции, необходимое для протекания самоподдерживающейся реакции. Принять во внимание только реакции (d, d) и (d, t) . При заданной температуре $\bar{\sigma} v_{dd} = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Считать, что за единицу времени из единицы объема плазмы уходит в среднем n_d/t частиц. Интенсивность тормозного излучения единицы объема $W_{\text{изл}} = 1,5 \cdot 10^{-34} n_d^2 \sqrt{T} \text{ Вт/см}^3$. Для упрощения расчета принять, что доля β мощности потерь из-за тормозного излучения, возвращенная обратно в реактор отражателями, равна КПД станции, т. е. $\beta = \eta$.

9.34. Согласно современным представлениям на Солнце осуществляется звездный углеродный цикл, в результате которого из четырех протонов образуется α -частица. Конечной реакцией этого цикла является реакция $p + {}^{15}\text{N} \rightarrow {}^{12}\text{C} + {}^4\text{He}$. Оценить, какая доля энергии η от полной энергии цикла выделяется в указанной реакции.

9.35. Под действием медленных нейтронов из литиевой мишени, состоящей из изотопа ${}^6\text{Li}$, вылетают тритоны. Они в свою очередь попадают в дейтериевую мишень и могут приводить к реакции $t + d \rightarrow p + \alpha$. Какова при этом максимальная кинетическая энергия вторичных нейтронов?

9.36. Основная реакция в водородной среде в центрах звезд $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ обусловлена слабым взаимодействием. Этот процесс можно промоделировать в лабораторных условиях. Рассчитать, какой ток \mathcal{I} протонов с энергией 1 МэВ должен падать на водородную мишень, чтобы за $t = 1$ ч произошла одна такая реакция.

Пробег протонов данной энергии в мишени до взаимодействия $l = 8 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}^2$, сечение взаимодействия при данной энергии $\sigma = 10^{-47} \text{ см}^2$.

9.37. В центре Солнца плотность ядер водорода $\rho \approx 160 \text{ г/см}^3$, температура $T = 1,5 \cdot 10^7 \text{ К}$ ($kT \approx 1 \text{ кэВ}$). Рассчитать время выгорания 50% ядер водорода в центре Солнца за счет реакции $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Считать, что все протоны в центре Солнца имеют скорость, равную скорости при данной температуре, а сечение их взаимодействия $\sigma = 10^{-51} \text{ см}^2$.

9.38. Сечение деления ядер ${}^{238}\text{U}$ γ -квантами с энергией 3 МэВ составляет $\sigma = 0,1 \text{ нбн}$ (10^{-34} см^2). Какова должна быть плотность потока j [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$] падающих на мишень γ -квантов, чтобы можно

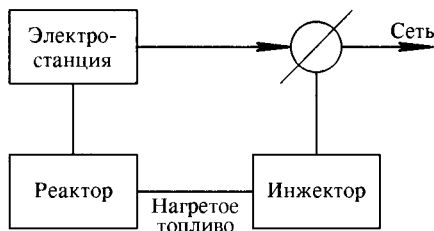


Рис. 60

было заметить вынужденное деление в $m = 1$ мг урана на фоне спонтанного деления ($T_{1/2} = 10^{15}$ лет) при продолжительности эксперимента $t_0 = 100$ час?

9.39. Оценить критический радиус и массу шара из металлического урана-235 плотностью $\rho = 18,7$ г/см³ (заряда ядерной бомбы), если известно, что среднее сечение деления ядер рождающимися нейтронами $\sigma = 1,5$ бн, среднее число рождающихся в одном акте деления нейтронов $\nu = 2,5$. Всеми другими каналами реакции, кроме делительного, пренебречь. Плотность потока нейтронов считать однородной.

9.40. В бесконечной среде, состоящей из металлического урана-235, самопроизвольно разделилось одно ядро. Коэффициент размножения нейтронов $k_{\infty} = 1,001$, средняя энергия делительных нейтронов $\bar{\epsilon} = 1,6$ МэВ, сечение деления этими нейтронами $\sigma = 1,5$ бн. Оценить, за какое время в среде выделится энергия $W = 5$ МДж. Плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³, неупругими процессами пренебречь.

9.41*: Высота и форма барьера деления зависят от спина (полного момента) и четности делящегося ядра (рис. 61). Так, например, в уране-238, у которого спин и четность основного состояния 0^+ , высоты барьеров деления для возбужденных состояний ядра 2^+ и 1^- равны 5,2 и 5,7 МэВ соответственно. Найти отношение β вероятностей деления ядра через эти состояния под действием γ -квантов с энергией $\epsilon_{\gamma} = 6,0$ МэВ. Как изменится вероятность деления через состояние 2^+ , если поместить ядра в поле интенсивного лазерного излучения (т. е. в случае, когда ядро практически одновременно поглощает γ -квант и фотон)?

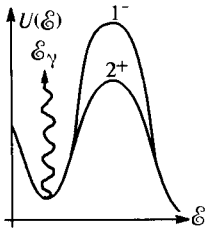


Рис. 61

9.42. Высота и форма барьера деления зависят от спина (полного момента) и четности делящегося ядра (рис. 61). Так, например, у ядра ²⁴⁰Pu, основное состояние есть 0^+ , высоты барьеров деления для возбужденных состояний ядра

2^+ и 1^- равны соответственно 5,2 и 5,7 МэВ. Оценить отношение вероятностей деления ядра через эти состояния под действием γ -квантов с энергией $\epsilon_{\gamma} = 5,4$ МэВ. Форму барьера деления для состояния 1^- можно аппроксимировать «перевернутой параболой» с характерным квантом $\hbar\omega = 1,3$ МэВ. См. также задачу 3.41.

9.43. Источником питания находящегося на околоземной орбите спутника является ядерный реактор мощностью $W = 3$ кВт. Оценить, на каком максимальном расстоянии от спутника можно обнаружить наличие реактора с помощью γ -телескопа. Считать, что сигнал надежно регистрируется, если он вдвое превышает γ -фон неба $\Phi_0 = 10^{-2}$ см⁻²·с⁻¹. В каждом акте деления в среднем испускается $k = 7$ γ -квантов, защита реактора поглощает $\alpha = 95\%$ образующегося излучения. Считать, что угловое разрешение телескопа равно угловому размеру спутника.

§ 10. Элементарные частицы. Резонансы.

Лептоны и кварки. Реакции при высоких энергиях

10.1. При рождении и распаде частиц выполняется (помимо законов сохранения энергии, импульса и момента импульса) ряд точных законов сохранения (тильда сверху в обозначении частицы является знаком античастицы):

1) закон сохранения электрического заряда;

2) закон сохранения барионного заряда (барионный заряд равен 1 для барионов, т. е., например, для нуклонов (p , n) и гиперонов (Λ , Σ , Ξ); -1 для антибарионов, т. е., например, для антинуклонов (\bar{p} , \bar{n}) и антигиперонов ($\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Xi}$); 0 для всех остальных типов частиц);

3) законы сохранения электронного лептонного заряда L_e , мюонного лептонного заряда L_μ и таонного лептонного заряда L_τ . Для электрона (e^-) и электронного нейтрино (ν_e) принято, что $L_e = 1$, а для позитрона и электронного антинейтрино $L_e = -1$. Для всех остальных частиц $L_e = 0$. Аналогично, L_μ отлично от нуля только для четырех частиц: μ^- , ν_μ , μ^+ , $\bar{\nu}_\mu$ (мюонов и мюонных нейтрино), причем для первых двух частиц $L_\mu = 1$, а для последних двух $L_\mu = -1$. Аналогично вводятся лептонные заряды и для сверхтяжелого лептона τ^- .

Указать, какие из приведенных ниже реакций запрещены перечисленными законами сохранения:

$$1. p \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e. \quad 5. \pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0.$$

$$2. p \rightarrow p + e^+. \quad 6. K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-.$$

$$3. \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e. \quad 7. \pi^+ + p \rightarrow \Lambda^0 + K^+.$$

$$4. K^+ \rightarrow \pi^- + 2e^+. \quad 8. \pi^+ + n \rightarrow K^+ + K^0.$$

10.2. Рассмотреть приведенные ниже распады и реакции и указать, какие из них запрещены:

$$1. \pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu. \quad 6. \tilde{\nu}_\mu + p \rightarrow p + e^+.$$

$$2. \pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_e. \quad 7. \tilde{\nu}_e + p \rightarrow p + \mu^+.$$

$$3. \mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \tilde{\nu}_e. \quad 8. \tilde{\nu}_e + p \rightarrow p + e^+.$$

$$4. \mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu. \quad 9. \mu^- \rightarrow e^- + \gamma.$$

$$5. \nu_\mu + p \rightarrow p + \mu^+. \quad 10. \tau^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu.$$

10.3. Взаимодействие и распад частиц происходят в результате сильного, электромагнитного или слабого взаимодействий. Вероятность процессов при слабом взаимодействии на много порядков меньше, чем при сильном. Сильное взаимодействие может происходить только между адронами. При сильном и электромагнитном взаимодействиях сохраняется квантовое число S (странность). При слабом взаимодействии странность не сохраняется. Принято приписывать странность S частицам следующим образом:

$S = 0$ для нуклонов, антинуклонов, π -мезонов;

$S = -1$ для Λ , Σ^+ , Σ^- , K^- , Σ^0 , \tilde{K}^0 (K -мезонов, Σ -гиперонов, Λ -частицы);

$S = -2$ для Ξ^- , Ξ^0 (каскадных гиперонов);

$S = -3$ для Ω^- (гиперона);

$S = +1$ для $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{\Sigma}^+$, $\tilde{\Sigma}^-$, $\tilde{\Sigma}^0$, K^+ , K^0 ;

$S = +2$ для $\tilde{\Xi}^-$, $\tilde{\Xi}^0$;

$S = +3$ для Ω^+ .

В этих формулах тильда сверху — знак античастицы. При изменении странности на 1 вероятность процесса уменьшается в $10^{10} \div 10^{12}$ раз по сравнению со случаем сильного взаимодействия, а при изменении S на 2 реакция фактически не наблюдается, если возможна реакция с изменением S только на 1. При существующей интенсивности частиц, генерируемых в ускорителях, реакции между ними с нарушением странности практически ненаблюдаемы. Однако распады частиц с нарушением закона сохранения странности наблюдаются всегда.

Выяснить, какие из перечисленных реакций и распадов разрешены по закону сохранения S , какие не наблюдаются:

- | | |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$. | 8. $\pi^+ + n \rightarrow \Lambda + K^+$. |
| 2. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^0$. | 9. $K + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^+$. |
| 3. $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$. | 10. $p + \tilde{\Sigma}^+ \rightarrow K^+ + \pi^+$. |
| 4. $\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^-$. | 11. $p + \tilde{\Sigma}^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+$. |
| 5. $\Xi^- \rightarrow 2\pi^- + p$. | 12. $\pi^- + p \rightarrow \Xi^- + \Xi^+ + n$. |
| 6. $\pi^+ + \tilde{p} \rightarrow \tilde{\Sigma}^+ + K^-$. | 13. $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$. |
| 7. $\pi^+ + \tilde{p} \rightarrow \tilde{\Sigma}^+ + \pi^-$. | 14. $\pi^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ + K^0$. |

10.4. При распадах странных адронов (барионов и мезонов), приводящих к рождению лептонов, существует эмпирическое правило, управляющее вероятностью распада. Если изменение странности адрона при реакции ΔS не равняется изменению заряда адронов ΔZ , то такой распад не наблюдается. Например, наблюдается распад

$$\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (\Delta Z = \Delta S = +1),$$

но не наблюдается распад

$$\Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (\Delta Z = -1; \Delta S = +1).$$

Существование первого и отсутствие второго из этих распадов можно рассматривать как подтверждение кварковой структуры адронов. Определить, какие из перечисленных ниже распадов разрешены по правилу $\Delta Z = \Delta S$, а какие запрещены:

- | | |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1. $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$. | 6. $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$. |
| 2. $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$. | 7. $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^- + e^+ + \nu_e$. |
| 3. $\Xi^- \rightarrow \Lambda + e^- + \tilde{\nu}_e$. | 8. $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^0$. |
| 4. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + e^- + e^+$. | 9. $K^+ \rightarrow \pi^+ + \mu^+ + \mu^-$. |
| 5. $\Lambda \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$. | 10. $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^- + e^+ + \nu_e$. |

10.5. Все частицы естественным образом разбиваются на группы с близкими значениями масс (отличие масс в группе порядка 1%). Группу частиц с близкими массами называют изотопическим мультиплетом (синглетом, дублетом, триплетом, кваттетом). Частицы мультиплета можно трактовать как различные состояния одной фиктивной частицы, отличающиеся значениями проекции нового квантового числа — изотопического спина T . Как и обычный спин (момент импульса), изотопический спин имеет $2T + 1$ проекций на ось квантования в фиктивном изотопическом пространстве. Число проекций изотопического спина совпадает с числом частиц в мультиплете, т. е. $N = 2T + 1$. При этом проекция изотопического спина на ось квантования T_3 связывается с электрическим зарядом члена мультиплета $T_3 = Z - Y/2$, где Y — квантовое число, одинаковое для всех членов мультиплета, называемое гиперзарядом (или унитарным спином). Поскольку $\Sigma T_3 = 0$, то $Y = 2 \frac{Z}{N+1} = 2Z_{\text{ср}}$ — удвоенный средний заряд мультиплета. Оказалось, что странность S (см. задачу 10.3) связана с гиперзарядом Y и барионным зарядом B простым соотношением: $S = Y - B$. Пользуясь приведенными равенствами, определить S , T , T_3 и Y для Λ , Σ^- , Ξ^- , Ω^- , π^- , K^- , η -частиц.

Примечание. Для античастиц все заряды (электрический, барионный, лептонный, гиперзаряд) противоположны зарядам частиц. Противоположны также странность S и проекция изотопического спина T_3 . Массы, времена жизни, спины и изотопические спины T у частиц и античастиц совпадают. Частицы, у которых все заряды равны нулю, называются истинно нейтральными.

10.6. Строгие законы сохранения (см. задачу 10.1) ограничивают число типов реакций и распадов. Нестрогие законы сохранения ограничивают типы взаимодействий. Какие из приведенных ниже реакций и распадов разрешены законами сохранения, какие строго запрещены, какие практически ненаблюдаемы? (См. задачу 10.3.)

- | | |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. $p \rightarrow p + e^+ + \nu_e$. | 4. $\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$. |
| 2. $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \gamma$. | 5. $K^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$. |
| 3. $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ + \gamma$. | 6. $p \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$. |

10.7. Указать, какие из перечисленных ниже реакций и распадов невозможны или практически ненаблюдаемы из-за нарушения законов сохранения:

- | | |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + p$. | 5. $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+$. |
| 2. $\Sigma^- + p \rightarrow \pi^0 + \tilde{K}^0$. | 6. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$. |
| 3. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + \tilde{K}^0$. | 7. $\Sigma^- \rightarrow \Lambda + e^- + \tilde{\nu}_e$. |
| 4. $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$. | 8. $\Sigma^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$. |

По какому типу взаимодействия происходят процессы 1, 5, 6, 7?

10.8. Рассмотреть приводимые ниже реакции и распады и определить тип взаимодействия:

- | | |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1. $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^0$. | 4. $\Xi^0 \rightarrow \Lambda + \pi^0$. |
| 2. $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$. | 5. $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. |
| 3. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$. | 6. $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$. |

10.9: Как отличаются друг от друга значения квантовых чисел K^0 -мезона и \bar{K}^0 -мезона и как это сказывается на поглощении K^0 и \bar{K}^0 -мезонов веществом? Возможны ли переходы этих частиц друг в друга?

10.10. Определить типы взаимодействий при следующих реакциях и распадах:

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $K^- + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \Lambda + \pi^-$. | 5. ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} + \pi^0$. |
| 2. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \pi^0$. | 6. $\Omega^- \rightarrow K^- + \Lambda$. |
| 3. $p + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H}$. | 7. $\pi^- \rightarrow \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$. |
| 4. ${}^3_2\text{He} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^2_1\text{H}$. | 8. $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$. |

10.11. Возможны ли следующие схемы распада частиц, и если нет, то по какой причине?

- | | |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$. | 4. $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_\mu$. |
| 2. $\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$. | 5. $p \rightarrow \mu^+ + \tilde{\nu}_\mu$. |
| 3. $n \rightarrow p + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$. | 6. $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \mu^-$. |

10.12. Какая частица обязана образоваться одновременно с K^0 -мезоном при соударении π^- -мезона с протоном? Реакция идет по сильному взаимодействию.

10.13. «Экспериментом века» были названы опыты по определению времени жизни протона. Теория великого объединения предсказывает, что протон распадается на пион и лептоны со временем жизни $\tau \sim 10^{31}$ лет. Оценить, какую массу вещества необходимо использовать, чтобы за время эксперимента $t = 1$ год произошло $N = 10$ таких распадов.

10.14. Определить время жизни мюона, образовавшегося при распаде положительно заряженного каона. До распада каон покоился.

10.15. Определить время жизни ипсилон-частицы Υ по ширине ее резонанса $\Delta \mathcal{E}$, взятой на половине высоты и равной 25 кэВ.

10.16: Найти, какие из самых тяжелых ядер и антиядер могут образоваться в реакции $p + p$ при соударении протона с энергией $\mathcal{E}_p = 3 \cdot 10^{12}$ эВ с неподвижным протоном и на встречных пучках протонов, ускоренных до такой же энергии.

10.17: В 1976 г. Нобелевская премия по физике была присуждена за открытие новой элементарной частицы — джи-мезона (ныне: J/ψ -мезон). Открытие было сделано практически одновременно и независимо в двух разных лабораториях. В одной из них опыт был поставлен на встречных пучках электронов и позитронов, ускоренных до одинаковой энергии $\mathcal{E}_{\text{СЦМ}}$ ($\mathcal{E}_{\text{СЦМ}}$ — энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс). Полученные в этом эксперименте результаты показаны на рис. 62. Определить энергию покоя и оценить нижнюю границу времени жизни джи-частицы.

10.18. В 1984 г. появилось сообщение, впоследствии не подтвердившееся, об открытии ξ -частицы как продукта распада Y -частицы в реакции $Y \rightarrow \xi + \gamma$. Определить энергию покоя и скорость гипотетической ξ -частицы в системе покоя Y -частицы, если энергия γ -кванта в этой системе оказалась $\mathcal{E}_\gamma = 1072$ МэВ. Энергия покоя Y -частицы равна $m_Y c^2 = 9460$ МэВ.

10.19. В 1974 г. была открыта элементарная частица J/ψ , названная впоследствии чармонием. В одном из опытов были зарегистрированы продукты ее распада «на лету»: $J/\psi \rightarrow e^+ + e^-$. Найти массу и скорость чармония, если энергии и электрона, и позитрона были равны $\mathcal{E} = 3,1$ ГэВ, а угол между направлениями разлета электрона и позитрона составил $\theta = 60^\circ$.

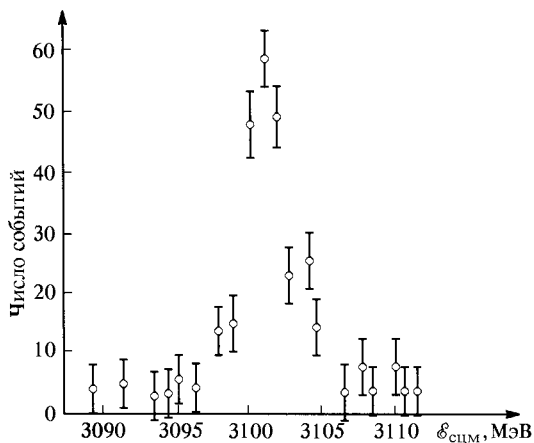
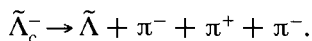


Рис. 62

10.20. В 1976 г. были получены первые указания о существовании заряженной «очарованной» $\tilde{\Lambda}_c^-$ -частицы, распадающейся по схеме



Найти кинетическую энергию, уносимую продуктами распада $\tilde{\Lambda}_c^-$ -частицы в ее системе покоя.

10.21. Определить, выше какой минимальной энергии \mathcal{E}_{min} встречных электрон-позитронных пучков, имеющих одинаковую энергию, могут рождаться частицы из семейства «красивых» (В-мезоны). Энергия покоя В-мезона $m_B c^2 \approx 5279$ МэВ.

10.22. Определить пороговую энергию $\mathcal{E}_{\text{пор}}$ рождения пары Σ -гиперонов при облучении протонами жидководородной мишени.

10.23. Найти, чему равно наибольшее количество заряженных или нейтральных пионов, которое может быть образовано при столкновении протона с энергией $\mathcal{E}_p = 5$ ГэВ с покоящимся протоном.

10.24. Определить минимальную (пороговую) кинетическую энергию нейтрона, при столкновении которого с ядром водорода в жидководородной мишени образуется лямбда-частица.

10.25. Найти минимальную (пороговую) кинетическую энергию налетающего протона, необходимую для рождения пары барионов ($\Xi^0 \bar{\Xi}^0$), имеющих энергию покоя по 1315 МэВ каждый, в (pp)-соударениях в жидководородной камере.

10.26. Определить максимальную энергию \mathcal{E}_{\max} электрона, образующегося при распаде покоящегося мюона.

10.27. Определить в лабораторной системе отсчета минимальную и максимальную энергии электрона, образованного при распаде мюона с энергией $\mathcal{E}_\mu = 10,5$ ГэВ.

10.28. Нейтральный пион распался на два γ -кванта с энергиями $\mathcal{E}_1 = 3,1$ и $\mathcal{E}_2 = 2,0$ ГэВ. Найти угол разлета θ между γ -квантами.

10.29. Оценить, при какой энергии \mathcal{E} ультрарелятивистского заряженного пиона его пробег до распада равен пробегу в воздухе при плотности $\rho = 10^{-5}$ г/см³. Собственное время жизни и энергия покоя пиона равны $\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с и $m_\pi c^2 = 140$ МэВ.

10.30. Нейтральный пион π^0 с энергией покоя $m_\pi c^2 = 135$ МэВ распадается на лету на два одинаковых γ -кванта, разлетающихся под углом $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад по отношению к направлению движения пиона. Какова кинетическая энергия пиона π^0 ? Чему равна неопределенность энергии покоя пиона π^0 и каково его время жизни в лабораторной системе координат, если в собственной системе он живет $\tau_0 = 0,84 \cdot 10^{-16}$ с?

10.31. D^0 -мезон распадается на лету на K^- - и π^+ -мезоны. Расстояние от точки его рождения до точки распада равно $L = 350$ мкм. Импульсы каона и пиона равны $p_K = 3,6$ ГэВ/с и $p_\pi = 1,9$ ГэВ/с и направлены под углами $\theta_K = 13^\circ 30'$ и $\theta_\pi = 27^\circ 50'$ к направлению импульса D^0 -мезона. Определить энергию покоя, скорость и время жизни D^0 -мезона.

10.32. При распаде «на лету» Ω^- -гиперона ($\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$) измерены импульсы частиц распада $p_\Lambda = 5,7$ ГэВ/с и $p_K = 2,0$ ГэВ/с и угол разлета между ними $\theta = 28,5^\circ$. Определить энергию покоя Ω^- -гиперона.

10.33. За распадом остановившегося в ядерной фотоэмульсии K^+ -мезона по схеме $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ последовал распад нейтрального пиона π^0 по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$, причем точка рождения пары e^+e^- находилась на расстоянии $L = 0,04$ мкм от места остановки K -мезона. Оценить собственное время жизни нейтрального пиона π^0 .

10.34. Какова средняя длина пути L до распада Λ -гиперона в воздухе, если его энергия $\mathcal{E}_\Lambda = 7$ ГэВ?

10.35. Коллимированный монохроматический пучок заряженных пионов, энергия которых $\mathcal{E}_\pi = 10$ ГэВ, вследствие распада постепенно превращается в пучки мюонов и нейтрино. На каком рас-

стоянии L от области формирования пучка число образовавшихся мюонов в три раза превышает число пионов?

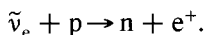
10.36. Оценить примесь мюонов в пучке заряженных каонов на расстоянии $L = 10$ м от места формирования пучка каонов. Каоны в пучке имеют энергию $\mathcal{E} = 3$ ГэВ. Выходом мюонов из пучка в процессе распада пренебречь.

10.37. При рождении π^- - и K^+ -мезонов в мишени ускорителя с импульсами $p_\pi = p_K = p = 2$ ГэВ/с их числа относятся как 100:1. Найти это отношение на расстоянии $L = 50$ м от мишени.

10.38. Заряженный пион, имеющий энергию $\mathcal{E}_\pi = 420$ МэВ, распадается на лету на мюон и антинейтрино. Определить энергию мюона \mathcal{E}_μ в лабораторной системе, если в системе покоя пиона мюон вылетел под углом 90° к направлению полета пиона.

10.39. Для получения пучков заряженных пионов на ускорителях на пути пучка ускоренных протонов ставится тонкая мишень. Определить число заряженных пионов N_π , образовавшихся в мишени в секунду, если на расстоянии $L = 5$ м от мишени интенсивность пионов равна $n = 5 \cdot 10^5$ с $^{-1}$. Регистрация осуществляется детектором, площадь которого равна $S = 100$ см 2 . Кинетическая энергия пионов $T = 500$ МэВ. Считать, что из мишени пионы вылетают изотропно, т. е. равновероятно под любыми углами в лабораторной системе координат.

10.40. Определить пороговую энергию $\mathcal{E}_{\text{пор}}$ для реакции на покоящемся протоне



10.41. Какова наибольшая энергия электрона, образованного при распаде покоящегося t -лептона на мюон и два нейтрино, а мюона в свою очередь на электрон и два нейтрино.

10.42. В результате облучения жидководородной мишени нейтронами в реакции $n + p \rightarrow d + \pi^0$ наблюдаются гамма-кванты от распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, разлетающиеся в строго противоположных направлениях в лабораторной системе отсчета. Какова кинетическая энергия нейтронов облучения?

10.43. При какой энергии налетающего протона на покоящийся протон в реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ кинетическая энергия дейтрона в лабораторной системе координат может быть равна нулю?

10.44. Взаимодействие протонов космического излучения с реликтовыми фотонами (средняя энергия квантов $\varepsilon \sim 10^{-3}$ эВ, а плотность $n = 400$ см $^{-3}$) может, в частности, приводить к реакции $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, порог которой (кинетическая энергия) при бомбардировке покоящегося протона равен $T = 140$ МэВ, а сечение — $\sigma \approx 10^{-4}$ бн. При какой минимальной энергии протона \mathcal{E} этот процесс идет в космосе? Каково время жизни τ протона до взаимодействия?

10.45. Взаимодействие высокоэнергетичных γ -квантов космического излучения с реликтовыми фотонами (средняя энергия квантов $\varepsilon \sim 10^{-3}$ эВ, а плотность $n = 400$ см $^{-3}$) может приводить к образова-

нию электрон-позитронных пар. Определить пороговую энергию γ -квантов T (эВ) в этом процессе. Каково время жизни τ надпорогового γ -кванта до взаимодействия, если сечение этого процесса $\sigma = 1$ бн?

10.46. Мюоны космических лучей образуются, в основном, в стратосфере Земли под действием первичного космического излучения. Оценить энергию мюона, достигающего поверхности Земли, если он образовался на высоте $H = 40$ км. Потерями энергии мюона на ионизацию воздуха пренебречь.

10.47. Мюоны космических лучей образуются в верхнем слое атмосферы Земли. Оценить, какую наименьшую энергию \mathcal{E}_{\min} должен иметь мюон, чтобы достигнуть Земли, если он образовался на высоте $H = 40$ км. Потери энергии мюонов на ионизацию воздуха составляют $\alpha = 1,8 \text{ МэВ} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{см}^2$.

10.48. В настоящее время экспериментально установлено, что верхняя граница энергии покоя мюонного нейтрино равна $0,17 \text{ МэВ}$. С какой относительной точностью нужно измерять кинетическую энергию мюона, возникающего при распаде покоящегося пиона, чтобы довести границу до более низкого значения, равного $0,1 \text{ МэВ}$?

10.49. На вход распадного канала длиной 1 км из ускорителя попадают заряженные пионы с энергией $0,9 \text{ ТэВ}$. В результате распада пионов ($\pi \rightarrow \mu\nu$) в канале рождаются нейтрино с энергией порядка 100 ГэВ . Каков относительный выход нейтрино? Какой вклад в поток нейтрино дает распад родившихся мюонов? Нейтрино и антинейтрино считать одинаковыми частицами.

10.50. На Землю непрерывно приходят от Солнца нейтрино с энергиями в диапазоне $0,1 \div 15 \text{ МэВ}$. Детектором регистрируются возникающие в его материале под действием этих нейтрино электроны отдачи с кинетическими энергиями выше $T_e = 5 \text{ МэВ}$. Какой минимальной энергии нейтрино соответствует этот порог регистрации для свободных электронов?

10.51. На Землю непрерывно приходят от Солнца нейтрино с энергиями в диапазоне $0,1 \div 15 \text{ МэВ}$. Детектором регистрируются возникающие в его материале под действием этих нейтрино электроны отдачи с кинетическими энергиями выше $T_e = 5 \text{ МэВ}$. Каков максимальный угол рассеяния свободных электронов от нейтрино максимальной энергии?

10.52. Под действием протонов космических лучей в атмосфере Земли генерируются заряженные пионы. По мере прохождения к поверхности Земли они распадаются с образованием мюонов, которые также нестабильны. Какая должна быть зарегистрирована у поверхности Земли величина отношения потоков мюонных и электронных нейтрино, родившихся в результате распадов этих частиц? Нейтрино считать безмассовыми частицами. Частицы и античастицы в эксперименте не различаются.

10.53. В 1983 г. были открыты переносчики слабого взаимодействия бозоны W^+ и W^- . В одном из первых обнаруженных распадов $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ наблюдался след электрона с энергией $\mathcal{E} = 58,5 \text{ ГэВ}$ и

углом вылета его относительно направления движения распадной частицы $\theta = 45^\circ$. Какова может быть минимальная энергия покоя W^- -бозона в этом процессе?

10.54. Чему равно для электрона — продукта распада ультрарелятивистского τ -лептона — максимальное значение проекции импульса на направление, перпендикулярное импульсу τ -лептона?

10.55. В 1983 г. был открыт нейтральный Z -бозон. При анализе его распада $Z \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ найдены два следа мюонов с импульсами $p = 85 \text{ ГэВ}/c$ при угле разлета $\theta = 70^\circ$. Найти энергию покоя и скорость Z -бозона.

10.56. На рис. 63 представлена полученная экспериментально зависимость эффективного сечения реакции: $e^+ + e^- \rightarrow$ адроны от энергии $\mathcal{E}_{\text{СЦМ}}$ частиц в системе центра масс. Она свидетельствует о существовании резонанса (ψ -частиц) с энергией покоя $M_\psi c^2 = 3,10 \text{ ГэВ}$. Наблюдаемое при этом значительное возрастание сечения выше области резонанса (асимметрия графика) объясняется рождением ψ -частицы с одновременным испусканием одного фотона. Оценить, пользуясь графиком, минимальную длину волны фотонов, зарегистрированных в этом опыте.

10.57* При распаде покоящегося K^+ -мезона возникает мюон ($K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$). Определить ориентацию спина мюона относительно его импульса. Найти путь, пройденный мюоном до момента своего распада. Исходя из кварковой модели, начертить схему распада K^+ -мезона.

10.58. Взяв радиус дейтрона $R_d \sim 10^{-13} \text{ см}$ и воспользовавшись соотношением неопределенностей, оценить безразмерную константу $g^2 = \frac{q^2}{\hbar c}$ нуклон-нуклонного взаимодействия в области малых энергий. Здесь q — «заряд» нуклонов по отношению к сильному взаимодействию.

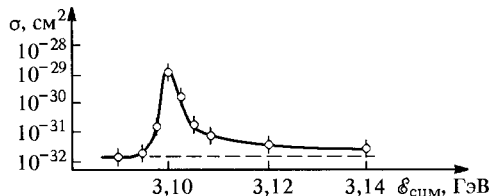


Рис. 63

10.59* Мезоны J/ψ и ψ' с энергиями покоя $\mathcal{E}_1 = 3,1 \text{ ГэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 3,7 \text{ ГэВ}$ можно считать соответственно основным и первым возбужденным состояниями чармония — системы кварков ($c\bar{c}$). Пользуясь нерелятивистским приближением и считая, что потенциал взаимодействия кварков $U = -q^2/r$, где q — «цветовой заряд», оценить характерный радиус J/ψ -мезона.

10.60. Резонансы Υ и Υ' с энергиями покоя $\mathcal{E}_1 = 9,46 \text{ ГэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 10,02 \text{ ГэВ}$ (ипсилон-мезоны) можно считать соответственно основным и первым возбужденным состояниями боттомония — пары кварков ($b\bar{b}$). Пользуясь нерелятивистским приближением и считая, что потенциал взаимодействия кварков $U = -q^2/r$, где q — «цвето-

вой заряд», оценить массу b -кварка M_b и безразмерную константу $g^2 = q^2/\hbar c$ сильного взаимодействия.

10.61. В 1983 г. были обнаружены переносчики слабого взаимодействия W -бозоны, энергия покоя которых оказалась равной примерно $m_W c^2 \approx 80$ ГэВ. Оценить радиус действия слабого взаимодействия.

10.62. В полном сечении реакции $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ при $T_{\text{ц}} = 190$ МэВ наблюдается резонанс с полной шириной $\Gamma = 120$ МэВ, называемый Δ^{++} -изобарой. Определить время жизни и энергию покоя этой частицы.

10.63. В сечении рассеяния пионов π^+ на ядрах водорода наблюдается резонанс, соответствующий образованию $\Delta^{++}(1232)$ с энергией покоя 1232 МэВ. Оценить сечение этой реакции. Радиус протона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13}$ см. Экспериментальное значение $\sigma_{\text{полн}}^{\text{экс}} \approx 200$ мбн.

Резонанс с энергией покоя 1232 МэВ образуется также и в реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$. Полное сечение этой реакции $\sigma_{\text{полн}} = 68$ мбн. Указать неупругий канал распада этого резонанса (Δ^0 -изобара) и найти сечение этого процесса.

10.64. Пользуясь кварковой моделью, определить, из каких кварков состоят протон, нейтрон, Ω -гиперон.

10.65. Определить кварковый состав положительно заряженного пиона и положительно заряженного каона.

10.66. Определить кварковый состав нейтрального каона.

10.67. Определить кварковый состав Ξ^0 и Λ -гиперона.

10.68. В результате аннигиляции кварков $u + \bar{u}$ возможно образование пары мюонов $\mu^+ + \mu^-$. При соударении каких заряженных мезонов с протонами можно ожидать появление мюонных пар?

10.69. В реакциях при больших энергиях (~ 100 ГэВ) известны полные сечения σ_1 и σ_2 соответственно для реакций $(K^+ + \Sigma^+)$ и $(K^+ + \Xi^0)$. Определить на основе кварковой модели сечение σ_3 для реакции $(K^+ + \Omega^-)$.

10.70. При больших энергиях полное сечение протон-протонного рассеяния примерно постоянно и равно $\sigma(pp) = 39$ мбн. Принимая во внимание кварковую структуру протона и пиона, оценить, какой будет в этих условиях величина полного сечения рассеяния $\sigma(\pi p)$. Считая, что для каон-нуклонного рассеяния $\sigma(KN) = 19$ мбн, оценить из всех приведенных данных сечения рассеяния $\sigma(\Lambda N)$ и $\sigma(\Xi N)$.

10.71. В области больших энергий полные сечения пион-нуклонного и каон-нуклонного взаимодействий равны соответственно 26 и 19 мбн. Учитывая кварковую структуру адронов, оценить из этих данных сечения процессов (ΛN) , (ΞN) и (ΩN) .

10.72. Разница энергий покоя Λ -гиперона и протона равна 175 МэВ. Исходя из кварковой структуры гиперонов, оценить энергию покоя Ξ -частицы.

10.73. Исходя из законов сохранения, дописать следующие реакции:

- а) $\nu_\mu + p \rightarrow$ в) $\tilde{\nu}_\mu + p \rightarrow$
 б) $\nu_\mu + p \rightarrow$ г) $\tilde{\nu}_\mu + p \rightarrow$.

Найти отношения эффективных сечений этих реакций, нарисовать кварковые схемы реакций.

10.74: В разрабатываемой сейчас теории «великого объединения» предполагаются превращения пары кварков в пару антилептон-антикварк за счет испускания очень тяжелого X-бозона, существующего в течение 10^{-38} с. Найти энергию покоя M_X (выразить в ГэВ) и заряд бозона, обеспечивающего распад протона $p \rightarrow \pi^0 + e^+$. Указать схему превращения кварков в этом процессе.

10.75. В ряде теоретических работ предполагается существование тяжелых Y-бозонов с энергией покоя $M_Y = 10^{15}$ ГэВ. Обмен таким бозоном предположительно обуславливает взаимодействие, в результате которого два кварка превращаются в антилептон и антикварк. Оценить радиус этого гипотетического взаимодействия. Указать схему преобразования кварков и найти заряд Y-бозона при распаде протона на π^+ -мезон и антинейтрино.

10.76: В 1985 г. в ЦЕРНе в фотоэмульсии были зарегистрированы треки (рис. 64), на которых видны рождение (вершина 1) и последующий распад (вершина 2) тяжелого B^- -мезона с предполагаемым кварковым составом $(b\bar{u})$. Определить тяжелый продукт распада X, не оставивший следа в фотоэмульсии, но затем распавшийся в вершине 3. Какие возможны продукты нелептонного распада X?

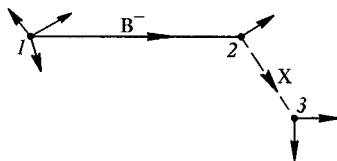


Рис. 64

10.77. В 1964 г. в США на брукхейвенском синхротроне Р. Шаттом с сотрудниками в жидководородной камере, облучаемой пучком отрицательных K-мезонов, был зарегистрирован процесс рождения новой частицы X, схематически показанной на рис. 65. В этой реакции одновременно образовалось три частицы — одна нейтральная (штриховая линия) и две заряженные (сплошные линии). Неизвестная частица X распалась на Ξ^0 и π^- . Определить, рождение какой частицы было зарегистрировано и какие еще две частицы при этом образовались. Реакция $K^- + p$ идет по сильному взаимодействию.

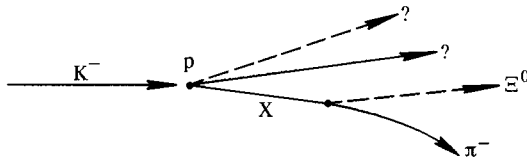


Рис. 65

10.78: Исходя из кварковой модели, найти странность электрически нейтрального адрона с проекцией изотопспина $T_3 = -1/2$ и барионным зарядом $B = 0$. Что это за частицы?

10.79. На основе кварковой модели найти странность электрически нейтрального адрона с проекцией изотопического спина $T_3 = 1/2$ и барионным зарядом $B = -1$. Что это за частица?

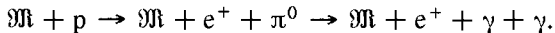
10.80. На основе кварковой модели найти странность и гиперзаряд адрона с электрическим зарядом $Q = -1$, проекцией изоспина $T_3 = 0$ и барионным зарядом $B = +1$. Что это за частица?

10.81. На основе кварковой модели найти странность и гиперзаряд электрически нейтрального адрона с проекцией изоспина $T_3 = +1/2$ и барионным зарядом $B = +1$. Что это за частица?

10.82. Магнитные моменты кварков пропорциональны их электрическим зарядам, причем для кварков I поколения коэффициент пропорциональности численно равен магнитному моменту протона. Каков магнитный момент резонанса Δ^{++} ?

10.83. Магнитные моменты кварков в нерелятивистском приближении определяются, как и для электрона, формулой $\mu_q = \frac{e\hbar}{2m_q c} Q_q$, где, соответственно, m_q и Q_q — масса и зарядовое число кварка. Каков магнитный момент бариона Ω^- ?

10.84. В современных теориях великого объединения электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий необходимо существование магнитного монополя \mathbb{M} с массой $M = 10^{16}$ ГэВ/ c^2 и магнитным зарядом $\mu = \frac{c\hbar}{2e} = \frac{c\hbar}{2e^2} e = \frac{e}{2\alpha}$. Если такие монополи существуют, то они рождены на ранних стадиях развития Вселенной, имеют энергию \mathcal{E} около 10^{12} ГэВ, обладают высокой проникающей способностью и могут «пожирать материю», инициируя распад протона



Оценить, какое количество таких монополей, находящихся внутри Солнца, могло бы полностью обеспечить светимость Солнца $L_C \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с, если на пути 1 см в воде монополь инициирует около одного распада протона. Считать, что вся масса Солнца сосредоточена в протонах.

10.85. При столкновении встречных протон-антипротонных пучков возможно рождение W-бозонов. Написать эту реакцию на кварковом уровне. Оценить пороговую энергию протонов, если известно, что импульс нуклона распределяется между кварками и глюонами в соотношении 0,45 : 0,55. Энергия покоя W-бозона $M_W c^2 = 80,6$ ГэВ.

10.86. При столкновении встречных протон-антипротонных пучков возможно рождение Z-бозонов. Написать эту реакцию на кварковом уровне. Оценить пороговую энергию протонов, если известно, что импульс нуклона распределяется между кварками и глюонами в соотношении 0,45 : 0,55. Энергия покоя Z-бозона $M_Z c^2 = 91,2$ ГэВ.

10.87. Красивый кварк (b-кварк) был экспериментально обнаружен в 1983 г. в (e^+e^-)-соударениях на Корнельском электронном накопительном кольце (США). Проверке подвергалась гипотеза о том, что ипсилон-мезон $\Upsilon(4S)$ является возбужденным состоянием

боттомония (пары кварков (b, \bar{b})). Нарисовать на кварковом уровне цепочку распада (b, \bar{b}) , ведущую к рождению наблюдавшейся в эксперименте пары мезонов V^+ , V^- , а затем распада V^- на мезоны D^0 и π^- с последующим образованием K^- , π^+ -мезонов.

10.88. Самый тяжелый t -кварк был открыт в 1995 г. в экспериментах на встречных протон-антипротонных пучках в лаборатории им. Ферми в США. Оказалось, что кварки пары (t, \bar{t}) распадаются раньше, чем могут образоваться t -мезоны и \bar{t} -барионы. В результате распада рождающейся при столкновении (t, \bar{t}) -пары образуется пара мезонов V^+ , V^- , позитрон и π^- -мезон. Нарисовать на кварковом уровне последовательность распада (t, \bar{t}) -пары, ведущую к образованию указанных частиц. Какие реальные частицы образовались на каждом этапе?

10.89. Нарисовать на кварковом уровне диаграмму распада очарованного бариона $\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$. Время жизни Λ_c^+ равно $2 \cdot 10^{-13}$ с.

10.90. Нарисовать на кварковом уровне диаграмму распада очарованного бариона $\Lambda_c^+ \rightarrow p^+ + \bar{K}_0$. Время жизни Λ_c^+ равно $2 \cdot 10^{-13}$ с.

10.91. Тяжелая вода D_2O используется для регистрации нейтрино с энергиями, меньшими 15 МэВ, в реакции, обратной K -захвату. Детектор регистрирует образующиеся заряженные лептоны. Какой тип нейтрино регистрируется и какие ядра захватывают нейтрино? Найти пороговую энергию регистрируемых нейтрино. Энергии покоя ядер: $p - 938,23$ МэВ, $d - 1875,6$ МэВ, ${}^1_8O - 14895$ МэВ, ${}^1_9F - 14910$ МэВ.

10.92. Обыкновенная вода H_2O используется для регистрации нейтрино по реакции, обратной K -захвату. Регистрируются вторичные заряженные лептоны. Какова пороговая энергия регистрируемых таким детектором нейтрино? При какой энергии нейтрино возможна регистрация как электронных, так и мюонных нейтрино? Энергии покоя ядер: ${}^1_8O - 14895$ МэВ, ${}^1_9F - 14910$ МэВ.

10.93: Структура протона и нейтрона описывается кварковой моделью, согласно которой $p = (u, u, d)$, $n = (u, d, d)$. Вероятность, что спины одинаковых кварков внутри нуклона параллельны, в два раза больше, чем вероятность того, что они антипараллельны. Предполагая, что магнитный момент кварка пропорционален его заряду, найти отношение магнитного момента протона μ_p к магнитному моменту нейтрона μ_n и сравнить найденное значение с экспериментальными данными. Считать, что орбитальные моменты кварков в нуклоне равны нулю.

10.94. Какую энергию надо затратить на переворот спина одного из кварков в нуклоне?

10.95. Позитроний (система $\{e^+, e^-\}$) аннигилирует, если расстояние между электроном и позитроном меньше комптоновской длины волны электрона $\lambda_e = \hbar/m_e c$. Оценить время жизни основного состояния парапозитрония 1S_0 .

У к а з а н и е. При аннигиляции вероятность одновременного излучения в единицу времени n фотонов с частотой ω порядка $\omega_n \simeq \alpha^n \omega$, где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры.

10.96. Протониум (система $\{p, \bar{p}\}$) распадается преимущественно за счет аннигиляции на пионы. Полагая, что распад происходит тогда, когда протон и антипротон находятся на расстоянии порядка радиуса сильного взаимодействия, оценить время жизни основного состояния протониума.

10.97: В простейшем варианте модели «мешков» считается, что энергия покоя нуклона $m_N c^2 \approx 940$ МэВ складывается из энергии безмассовых кварков, заключенных в непроницаемую сферу, и энергии глюонного поля в этой сфере. Полагая, что плотность энергии глюонного поля постоянна, определить радиус нуклона и величину энергии глюонного поля.

У к а з а н и е. Считать, что волновая функция безмассового кварка удовлетворяет волновому уравнению $\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

10.98. Сечение неупругого взаимодействия нейтрино с ядром можно описать $\sigma(\mathcal{E}) = \frac{\sigma_c(\mathcal{E}) t}{\tau(\mathcal{E})}$, где $\sigma_c(\mathcal{E})$ — геометрическое сечение процесса, t — характерное время взаимодействия, а вероятность β -процесса в единицу времени $\frac{1}{\tau(\mathcal{E})} \propto \mathcal{E}^5$ (Б. М. Понтекорво, 1946). Оценить отношение сечений при энергиях нейтрино $\mathcal{E} = 1$ и 10 МэВ.

§ 1. Излучение

1.1. Рассматривая равновесное тепловое излучение как идеальный газ фотонов, содержащихся в вакуумированной полости с неподвижными непрозрачными стенками, имеющими постоянную температуру, получить формулу $P = \rho/3$, связывающую плотность энергии теплового излучения ρ с давлением излучения P . Найти связь между энергетической светимостью R (интегральной излучательной способностью) абсолютно черного тела и плотностью энергии теплового излучения $\rho(T)$.

1.2. Используя тот факт, что плотность энергии теплового излучения ρ не зависит от объема системы, а также формулу $P = \rho/3$ (см. задачу 1.1), найти с помощью законов термодинамики зависимость ρ и энтропии s единицы объема от температуры T .

1.3. Найти изменение энтропии равновесного теплового излучения абсолютно черного тела при расширении объема, занятого излучением, от V_1 до V_2 при постоянной температуре T .

1.4. Используя формулы для энергии и энтропии равновесного теплового излучения, показать, что свободная энергия излучения может быть представлена в виде $\Psi = -AVT^4$, где V — объем, T — температура. Воспользовавшись законом Стефана—Больцмана, выразить A через постоянную Стефана—Больцмана σ . Пользуясь термодинамическими формулами, определить по найденному Ψ теплоемкость c_V фотонного газа в расчете на единицу объема и давление излучения P . Сравнить ее с теплоемкостью $c_V^{\text{ид}}$ единицы объема идеального одноатомного газа при одинаковых значениях P и T . Вычислить значение термодинамического потенциала Гиббса $\Phi = \Psi + PV$.

1.5. Найти работу, которую совершает в цикле Карно равновесное тепловое излучение абсолютно черного тела, полагая известными температуры «горячей» и «холодной» изотерм T_1 и T_2 , а также максимальный и минимальный объемы V_2 и V_1 системы на изотерме T_1 .

1.6. Газообразный неон находится в замкнутом сосуде постоянного объема в равновесии с тепловым излучением. При каком давлении P неона его теплоемкость равна теплоемкости теплового излучения в том же объеме при $T = 500$ К?

1.7. Найти теплоемкость C_P и уравнение адиабаты фотонного газа, заключенного в сосуд с переменным объемом.

1.8. При какой температуре T давление равновесного теплового излучения равно $P = 1$ атм?

1.9. При какой концентрации n молекул газа газокинетическое давление равно давлению равновесного теплового излучения при той же температуре $T = 300$ К?

1.10. При расчете теплоемкости C_V идеального газа, находящегося в равновесии с тепловым излучением в замкнутом сосуде постоянного объема, обычно пренебрегают вкладом равновесного излучения в теплоемкость системы. Найти отношение теплоемкостей C_V одинакового газа и равновесного излучения, когда их давления одинаковы.

1.11. Цилиндрический сосуд разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может свободно перемещаться вдоль цилиндра герметично и без трения. В одной части сосуда находится идеальный газ, а в другой — равновесное тепловое излучение при температуре $T = 10^3$ К. Найти концентрацию атомов газа, если при малых изменениях температуры в обеих частях сосуда на одну и ту же величину направление смещения поршня не зависит от знака этой величины. Чему была равна начальная температура газа T_1 ?

1.12. Над плоскостью, зачерненной с обеих сторон, на высоте h расположен центр шара радиусом $a \ll h$, являющийся источником равновесного теплового излучения с температурой T_0 . Найти стационарное распределение температуры на плоскости. Считать, что система находится в вакууме, фон теплового излучения отсутствует и теплопроводностью вдоль плоскости можно пренебречь.

1.13. Решить предыдущую задачу, считая источником теплового излучения бесконечный круглый цилиндр радиусом a . Ось цилиндра параллельна плоскости и находится на расстоянии h от нее.

1.14. Над плоскостью, зачерненной с обеих сторон, на высоте h расположен круглый диск радиусом a , являющийся источником равновесного теплового излучения с температурой T_0 . Радиус диска $a \ll h$, диск расположен параллельно плоскости. Найти стационарное распределение температуры $T = T(r)$ на плоскости, где r — расстояние от проекции центра диска. Считать, что система находится в вакууме, фон теплового излучения отсутствует и теплопроводностью вдоль плоскости можно пренебречь.

1.15. Имеются два полых тела, абсолютно отражающих снаружи и черных внутри. Оба тела имеют отверстия радиусом r и расположены на расстоянии R ($R \gg r$). Первое тело имеет температуру T_1 и является единственным источником тепла для второго тела. Найти температуру второго тела T_2 при различных наклонах плоскостей отверстий по отношению к соединяющей их прямой. Насколько изменится T_2 при изменении угла наклона второго тела от 0 до 45° ?

1.16. Два одинаковых абсолютно черных шарика расположены в вакууме на расстоянии $2l = 8$ см друг от друга. Посередине между двумя шариками помещена линза диаметром $D = 6$ см, собирающая излучение одного шарика на поверхность другого. Один из шариков

раскален до температуры $T_1 = 2000$ К. Определить температуру другого шарика, пренебрегая фоном теплового излучения и потерями в линзе.

1.17. В сферической оболочке диаметром D имеется отверстие диаметром $d \ll D$. Внутренняя поверхность оболочки рассеивает излучение диффузно по закону Ламберта с коэффициентом рассеяния $\rho < 1$. Определить коэффициент поглощения A , характеризующий отверстие для внешнего наблюдателя. При каком отношении диаметров d/D коэффициент поглощения A будет отличаться от 1 меньше, чем на 0,1%, если $\rho \approx 1$?

1.18*. Линза со светосилой 1:16 (это отношение D^2/F^2) собирает солнечный свет на поверхность черного шарика, помещенного в вакуум. До какой температуры T может нагреться шарик, диаметр которого равен диаметру изображения Солнца? Считать Солнце абсолютно черным телом с температурой $T_C = 6000$ К.

1.19. Объектив диаметром $D = 5$ см и фокусным расстоянием $F = 5$ см фокусирует солнечный свет на абсолютно черный шар диаметром $d = 1$ мм, обладающий высокой теплопроводностью и находящийся в высоком вакууме вне Земли, на ее орбите. Определить температуру T шара. Принять, что плотность потока солнечной энергии равна $J_C = 0,14$ Вт/см², температура стенок сосуда $T_0 = 300$ К. Потери энергии в объективе пренебречь. Угловой размер Солнца $\alpha_C = 0,01$ рад.

1.20. Найти отношение плотностей потоков энергии корпускулярного и электромагнитного излучения Солнца в околоземном пространстве. Считать, что корпускулярный поток представляет собой нейтральную плазму из протонов и электронов с концентрацией $n = 5$ см⁻³ частиц каждого сорта и скоростью потока $v = 300$ км/с, а Солнце — источник равновесного теплового излучения с температурой $T = 6000$ К. Выразить результат через угловой размер α_C Солнца, т. е. угол, под которым с Земли виден диаметр Солнца ($\alpha_C = 0,01$ рад).

1.21. Солнечная постоянная J_C означает мощность излучения, падающего на единицу площади, помещенной перпендикулярно солнечным лучам за пределами земной атмосферы на расстоянии от Солнца, равном среднему расстоянию между Землей и Солнцем $L = 1,5 \cdot 10^8$ км. Принимая $J_C = 0,14$ Вт/см² и радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^5$ км, определить радиационную температуру $T_{\text{рад}}$ излучающей поверхности Солнца.

1.22. Спектр излучения космического рентгеновского источника соответствует спектру излучения абсолютно черного тела. Максимум плотности излучения $\rho(\lambda)$ наблюдается на длине волны $\lambda_{\text{max}} = 2$ Å, а суммарная по спектру (интегральная) плотность потока на Земле $j = 10^{-11}$ Вт/см². Расстояние от Земли до источника $L = 1,3 \cdot 10^4$ световых лет. Оценить диаметр источника.

1.23. Абсолютно черное тело подвешено в вакуумной установке так, что через оптическое окно на него падает солнечный свет. Если

стенки установки охладить до температуры $T_{ст1} = 77$ К, то тело будет иметь $T_1 = 275$ К. Найти температуру тела T_2 при $T_{ст2} = 295$ К. Теплопроводностью остаточных газов и подвески пренебречь.

1.24. На графитовый шарик радиусом $r = 1$ см, подвешенный точно в центре сферы с зеркальными стенками, находящейся в околоземном пространстве, с помощью линзы фокусируется изображение Солнца (рис. 66). Радиус сферы $R = 0,25$ м, диаметр линзы $D = 2,5$ см, фокусное расстояние линзы $F = 0,25$ м, угловой размер Солнца $\alpha_C = 10^{-2}$, температура поверхности Солнца $T_C = 6 \cdot 10^3$ К. Считая графит абсолютно черным телом, найти установившуюся температуру шарика T .

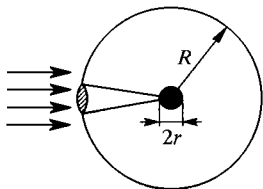


Рис. 66

1.25. Хорошо теплопроводящий шар с зачерненной поверхностью находится в космическом пространстве на некотором расстоянии r от центра Солнца. Найти температуру шара, если он находится от Солнца на расстояниях, равных радиусам орбит Венеры, Земли, Марса и Юпитера, равных (в млн км) $R_B = 108$, $R_3 = 150$, $R_M = 228$, $R_{Ю} = 780$. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T_C = 6000$ К и радиусом $R_C = 7 \cdot 10^5$ км. Сравнить полученные величины с радиоастрономическими данными: средние температуры освещенной части поверхностей планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера оцениваются, соответственно, как $T_B = 735$ К, $T_3 = 275$ К, $T_M = 235$ К и $T_{Ю} = 135$ К. Чем можно объяснить большое расхождение рассчитанной таким образом и полученной в измерениях температуры поверхности Венеры?

1.26. Оценить температуру Солнца, исходя из его видимого углового размера $\alpha_C = 0,01$ рад и температуры земной поверхности ($T_3 \approx 300$ К).

1.27. Космонавт оказался в свободном пространстве в тени Земли. Считая что его организм в процессе нормальной жизнедеятельности выделяет мощность $W = 100$ Вт, оценить скорость изменения температуры космонавта. Коэффициент отражения скафандра $\epsilon = 0,95$.

1.28. Межпланетная станция имеет оболочку в форме шара диаметром $2r = 1$ м. На борту станции находится радиопередатчик мощностью $N = 200$ Вт с КПД $\eta = 50\%$. Станция заполнена теплообменным газом. Аппаратура станции может работать в интервале температур $t = -50 \div 100$ °С. Определить, при каких удалениях L от Солнца станция может работать: 1) при кратковременных включениях; 2) в непрерывном режиме. Какова должна быть отражательная способность α поверхности станции, чтобы станция могла работать при сколь угодно большом удалении от Солнца? Радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^5$ км; считать, что оно излучает как абсолютно черное тело с температурой $T_C = 6000$ К.

1.29. В свободном пространстве находится железная пластина, одна поверхность которой абсолютно «черная», а другая — идеально

отражающая. В начальный момент пластина покоилась и ее температура была равна $T = 10^3$ К. До какой максимальной скорости v_{\max} может разогнаться пластина при остывании? Теплоемкость пластины считать подчиняющейся закону Дюлонга—Пти.

1.30. В настоящее время мощность всех промышленных источников энергии на Земле составляет $W \approx 10^{13}$ Вт, в то время как средняя мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, $\bar{W} \approx 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят промышленные источники? Оценить максимальное значение W_{\max} , если предельный перегрев, допустимый из экологических соображений, составляет примерно 1 К.

1.31. Считая Землю абсолютно черным телом, а орбиту Земли круговой с радиусом $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, оценить среднюю температуру земной поверхности, если светимость Солнца $L_C = 3,83 \cdot 10^{26}$ Вт. Исходя из экологических оценок, согласно которым величина допустимого перегрева планеты Земля составляет $\Delta T \approx 1$ К, определить допустимый предел уменьшения радиуса земной орбиты ΔR . См. также задачи 1.25 и 1.26.

1.32. Оценить, до какой максимальной температуры может разогреться в космосе сферический кусочек металлического урана-238 массой $m = 4$ г за счет естественной радиоактивности, считая, что продукты распада не покидают его. Плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³, период спонтанного деления $T_{1/2}^{\text{сп}} = 10^{16}$ лет, характеристики α -распада: $T_{1/2}^{\alpha} = 10^9$ лет, $\mathcal{E}_{\alpha} = 4,2$ МэВ. Влиянием солнечной радиации и космических лучей пренебречь.

1.33. В криогенной технике для уменьшения теплопотерь, связанных с тепловым излучением, в вакуумный промежуток между более холодной (T_x) и более нагретой (T_r) стенками вводят систему тепловых экранов (рис. 67). Считая обе стенки, как и все экраны, бесконечно протяженными и абсолютно черными, найти уменьшение радиационного теплообмена между стенками за счет введения N экранов в стационарных условиях. Рассчитать установившиеся температуры экранов.

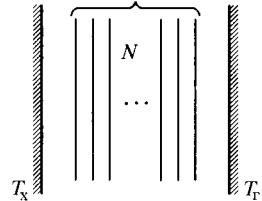


Рис. 67

1.34*. При напряжении на диоде $V = 500$ В температура анода равна 800 К. Оценить температуру анода при напряжении 1000 В для двух вариантов:

- 1) уже при напряжении 500 В анодный ток достигает насыщения;
- 2) в интервале напряжений $500 \div 1000$ В насыщения нет, а сила тока определяется законом трех вторых: $\mathcal{I} \propto V^{3/2}$. Основные потери тепла происходят за счет теплового излучения анода. По сравнению с ними все прочие потери могут считаться пренебрежимо малыми. При оценке анод считать абсолютно черным телом.

1.35. Вакуумный диод с термокатодом, расположенным внутри цилиндрического анода, включен в цепь с ЭДС 10 кВ и нагрузкой

10 кОм. В нормальном режиме при мощности накала 100 Вт на диоде падает 100 В, а температура анода равна 300 °С. Оператор уменьшил мощность накала до 50 Вт. При этом уменьшилась эмиссия и ток стал равным 0,5 А. Оценить установившуюся температуру анода, считая его абсолютно черным телом.

1.36. Межгалактическое пространство заполнено в основном протонами с концентрацией $n = 1$ протон/м³, а также пронизано реликтовым тепловым излучением с температурой $T = 3$ К. Определить отношение плотности энергии этого излучения к плотности энергии покоя вещества.

1.37. Межгалактическое пространство пронизано постоянным магнитным полем с индукцией $B \approx 2 \cdot 10^{-6}$ Гс, а также реликтовым тепловым излучением с температурой $T = 3$ К. Определить отношение плотности энергии этого излучения к плотности магнитной энергии.

1.38. Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

1.39*. В откачанной до высокого вакуума лампе накаливания с диаметром колбы 2 см температура нити равна $T_0 = 2500$ К. Оценить, на сколько процентов изменится яркость лампы на длине волны $\lambda = 5000$ Å, если из-за дефекта изготовления в колбу попал наружный воздух при температуре $T_1 = 300$ К и в ней установилось давление $P = 6 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Молекула азота N_2 имеет межъядерное расстояние $d = 0,77$ Å, энергию диссоциации 9,74 эВ, квант колебательной энергии $\hbar\omega = 0,29$ эВ.

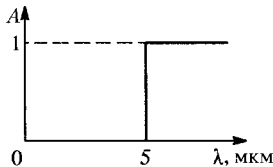


Рис. 68

1.40*. Кварцевая пластина расположена в вакууме перпендикулярно солнечным лучам. В этих условиях полностью поглощающая пластина нагревается до $T_1 = 300$ К. Найти температуру кварца T_2 . Спектральную зависимость коэффициента поглощения A кварцевой пластины можно аппроксимировать ступенчатой функцией, изображенной на рис. 68. Излучением окружающих тел пренебречь, считать $e^x \approx 1 + x$ вплоть до $x \approx 0,5$, а температуру поверхности Солнца $T_C = 6000$ К.

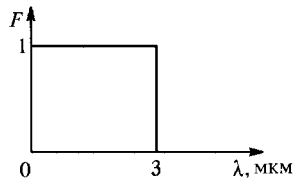


Рис. 69

1.41. В оптическом криостате круглое окно диаметром $d = 2$ см изготовлено из стекла. Коэффициент прозрачности стекла F в зависимости от длины волны можно аппроксимировать ступенчатой функцией, изображенной на рис. 69. Определить поток тепла, идущий внутрь криостата за счет теплового излучения из комнаты с темпера-

турой $T = 295$ К. Стекло охлаждается жидким гелием и поэтому его излучением можно пренебречь.

1.42. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $\mathcal{E} \geq 0,2$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю x солнечной энергии пропускает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6000$ К.

1.43. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $\mathcal{E} \geq 12$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю x солнечной энергии пропускает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6000$ К.

1.44. Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \leq \omega_0$ и $A = 0$ при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствии других источников излучения нагревается за счет внутреннего источника энергии до температуры T . Определить эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно черной поверхностью в тех же условиях равновесная температура $T^* = 300$ К. Граничная частота соответствует температуре $\theta = \hbar\omega_0/k_B = 300$ К.

1.45. Частотная зависимость коэффициента поглощения A некоторого тела, имеющего внутренний источник энергии, изображена на рис. 70. Это тело помещено в космическом пространстве вдали от источников излучения. Такое же тело, но с абсолютно черной поверхностью, нагревается там до температуры $T^* = 100$ К. Определить температуру тела, если величины ω_1 и ω_2 соответствуют энергиям квантов $0,015$ эВ и $0,6$ эВ.

1.46. Однородный слой плазмы находится в равновесии с излучением. С помощью монохроматора выделяется спектральная составляющая собственного излучения плазмы на некоторой длине волны, наблюдение ведется в направлении, перпендикулярном плоскости слоя. При какой толщине d слоя интенсивность такой составляющей окажется равной 90% интенсивности равновесного излучения? Линейный коэффициент поглощения данной длины волны $\kappa = 0,1$ см⁻¹. Показатели преломления плазмы и окружающей среды считать при этом одинаковыми.

1.47. Излучение Солнца регистрируется селективным приемником на длине волны $\lambda = 300$ нм с относительной шириной области чувствительности $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$ за промежутки времени $\tau = 10^{-3}$ с. Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию принимаемого сигнала. Солнце считать абсолютно черным телом с температурой $T = 6000$ К и видимым угловым размером $\alpha_c = 0,01$. Площадь приемной площадки равна $S = 1$ мм².



Рис. 70

Указание. Так как энергия кванта $\hbar\omega \gg k_B T$, то среднее планковское число заполнения (среднее число фотонов) $\bar{n}_\omega \ll 1$, и поэтому к фотонам можно применять классическую, а не квантовую статистику.

1.48. Радиоизлучение из межзвездного пространства (реликтовое излучение) регистрируется приемником с фиксированной относительной полосой пропускания $\Delta\nu/\nu = \text{const}$. Оказалось, что при переходе от приема на длине волны $\lambda_1 = 3$ см к приему на длине волны $\lambda_2 = 0,3$ см величина сигнала возросла в 400 раз, причем при дальнейшем небольшом уменьшении λ увеличилась незначительно. Исходя из этих данных, определить температуру реликтового излучения, считая его равновесным тепловым излучением. Во сколько раз изменится сигнал при переходе от $\lambda = 3$ см к $\lambda = 30$ см?

Указание. Корнем уравнения $e^x - 2,5x = 1$, которое возникает при решении задачи, является $x \approx 1,62$.

1.49: Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau = 0,5$ мс энергию $\mathcal{E} = 10$ Дж в виде почти параллельного светового пучка сечением $S = 1$ см². Рабочая длина волны лазера $\lambda = 6943$ Å, ширина линии $\Delta\lambda = 0,01$ Å. Определить по спектральной плотности излучаемой энергии эффективную температуру $T_{\text{эфф}}$ ¹⁾ в лазерном пучке а) до фокусировки, б) при максимально возможном сужении пучка (в фокусе).

1.50: Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения с энергией в импульсе $\mathcal{E} = 1$ Дж. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется только дифракцией на выходном отверстии, а монохроматичность — длительностью импульса.

1.51. При какой температуре интенсивность излучения поверхности абсолютно черного тела в соответствующем спектральном интервале (энергия, уносимая с единицы поверхности в единицу времени в единицу телесного угла) сравнится с интенсивностью лазера с плотностью потока энергии $j = 1$ мВт/см² и относительной стабильностью частоты $\Delta\nu/\nu = 10^{-12}$, работающего на длине волны $\lambda = 6900$ Å? Диаметр пучка принять равным $d = 1$ см.

1.52. Оценить эффективную температуру гелий-неонового лазера, генерирующего в непрерывном режиме свет с шириной спектральной линии $\delta\nu = 10^4$ Гц. Мощность излучения лазера $W = 1$ мВт.

1.53: Измерение интенсивности реликтового излучения Вселенной производится радиоскопом вблизи $\lambda = 3$ см. Его антенный тракт находится при температуре $T = 300$ К и поглощает $a = 1\%$ поступающей мощности. Какой эффективной температуре абсолютно черного тела $T_{\text{эфф}}$ соответствует тепловой шум антенного тракта в области данной длины волны?

¹⁾ В задачах 1.49-1.53 под эффективной температурой лазерного излучения $T_{\text{эфф}}$ понимается такая температура абсолютно черного тела, при которой оно дает излучение той же удельной интенсивности I_ω на частоте ω , что и лазер.

1.54: Атом Na находится в пучке лазерного света с плотностью потока энергии j и длиной волны $\lambda = 0,59$ мкм, совпадающей с одной из спектральных линий Na. Время спонтанного испускания Na для этой линии $\tau = 16$ нс. При больших плотностях потока $j > j_0$ ускорение a , приобретаемое атомом за счет давления света, перестает зависеть от j . Оценить значение плотности потока насыщения j_0 . Определить также предельную величину a . Доплеровским сдвигом частоты при излучении движущегося атома пренебречь.

1.55. Возбужденный атом с энергией возбуждения $\mathcal{E} = 1$ эВ находится в поле равновесного излучения с температурой $T = 300$ К. Найти отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучений атома. Найти аналогичное отношение для электронного спина в магнитном поле с индукцией $B = 10^3$ Гс.

1.56. Определить диапазон частот излучения, при котором вероятность спонтанного перехода более чем в 100 раз превосходит вероятность индуцированного перехода под влиянием равновесного излучения температуры $T = 293$ К.

1.57. Система, состоящая из атомов, имеющих два невырожденных уровня энергии \mathcal{E}_1 и $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, находится в тепловом равновесии. Выразить коэффициент поглощения света $\kappa(T, \omega)$ этой системой на частоте $\omega = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/\hbar$ через его значение κ_0 при $T = 0$. Рассмотреть два предельных случая: 1) $k_B T \gg \hbar\omega$ и 2) $k_B T \ll \hbar\omega$.

1.58: Оценить вероятность $W_{\text{сп}}$ спонтанного излучения молекулы при переходе с возбужденного уровня \mathcal{E}_n на уровень \mathcal{E}_m в случае, когда молекула помещена внутрь объемного резонатора, настроенного на частоту $\omega = (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m)/\hbar$. Соответствующая вероятность спонтанного излучения в свободном пространстве равна $W_{\text{сп}}^0$. Объем резонатора равен V , его добротность — Q . Считать, что ширина Γ молекулярных уровней все время остается меньше ширины ω/Q линии резонатора: $\Gamma < \omega/Q$. Сделать численную оценку для случаев: 1) $V = 1$ см³, $\lambda = 1$ см, $Q = 10^4$ и 2) $V = 1$ см³, $\lambda = 1$ мкм, $Q = 10^6$.

1.59. Резонатор лазера с кристаллом рубина имеет одно зеркало со 100%-ным отражением, а другое — с коэффициентом пропускания $\tau = 0,1$ на длине волны, отвечающей генерации лазера. Длина кристалла $l = 12$ см. Известно, что коэффициент поглощения света в невозбужденном кристалле рубина в максимуме рабочей линии равен $k_n = 0,4$ см⁻¹. Найти, какую часть атомов хрома нужно перевести в возбужденное состояние, чтобы лазер начал работать. Рассеянием света в кристалле пренебречь.

1.60. В спектре энергетических уровней молекулы воды есть два уровня A и B с разностью энергий \mathcal{E}_0 , между которыми разрешены оптические переходы. Создавая в разреженном водяном паре при температуре $T = 300$ К тлеющий разряд, не нагревающий пар, можно получить инверсную заселенность этих уровней. На этом основана работа лазера, в котором электромагнитная волна с частотой $\nu_0 = \mathcal{E}_0/h = 8,48 \cdot 10^{11}$ Гц усиливается по мощности на длине резона-

тора в $\beta_0 = 1,04$ раз. Расстояние между зеркалами резонатора можно слегка менять, регулируя тем самым собственную частоту резонатора. Коэффициент отражения каждого из зеркал $R = 0,99$. Определить возможную перестройку частоты излучения лазера, принимая во внимание эффект Доплера, обусловленный тепловым движением молекул.

1.61. Реликтовое межгалактическое излучение могло бы служить «абсолютной» системой отсчета для измерения скорости космических объектов. Оценить, с какой точностью надо измерять принимаемую мощность излучения, чтобы заметить сдвиг спектрального распределения при изменении направления наблюдения вдоль «абсолютной» скорости на 180° . Считать, что «абсолютная» скорость наблюдателя на Земле близка к скорости движения Солнца относительно центра Галактики $v = 220$ км/с.

Указание. Максимумы функции $\left| x \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} \right|$: $x_1 = 1,51$ и $x_2 = 5,23$.

1.62. Вселенная, возраст которой $t_1 \sim 10^{10}$ лет, заполнена равновесным реликтовым излучением, температура которого в настоящее время равна $T_1 \approx 3$ К. Начиная с эпохи, когда его температура составляла $T_0 \approx 3000$ К и образовались нейтральные атомы, излучение слабо взаимодействовало с веществом, расширяясь вместе со Вселенной. Как указывают все космические данные, этот процесс расширения можно считать адиабатическим. Оценить ее возраст t к моменту образования нейтральных атомов. Скорость линейного расширения Вселенной считать постоянной.

1.63. Оценить световое давление внутри ядерной урановой бомбы в момент ее взрыва, предполагая, что излучение — равновесное, а температура внутри бомбы $T = 10$ кэВ. Каково при этом газокинетическое давление? Плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³. Для оценки считать, что происходит полная ионизация атомов урана.

1.64. Звезда 51 в созвездии Пегас — почти двойник нашего Солнца. Предполагается, что около этой звезды находится планета с атмосферой схожей с атмосферой Земли. Ее период обращения по орбите составляет около $\tau_{пл} = 4$ суток. Оценить температуру поверхности планеты $T_{пл}$.

1.65. Для уничтожения в нижних слоях атмосферы старого космического аппарата — шара радиусом $R = 1$ м — с Земли запускают ракету, которая летит прямо навстречу цели. При спуске шар раскалится, причем температура его поверхности $T = T_0 \cos^2 \theta$ ($T_0 = 1000$ К, угол θ отсчитывается от направления его движения). С какого наибольшего расстояния L головка самонаведения ракеты начнет регистрировать тепловое излучение шара, если ее чувствительность $j = 5 \cdot 10^{-7}$ Вт/м²?

1.66. В центре сферической полости радиусом $R = 1$ м с матовой поверхностью, коэффициент диффузного отражения которой равен 1, подвешен абсолютно черный шарик радиусом $r = 1$ см, обладающий

высокой теплопроводностью. В стенке полости имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см, через которое солнечное излучение попадает точно на шарик. Оценить установившуюся температуру шарика T , предполагая, что в полости устанавливается однородное изотропное излучение. Угловой размер Солнца $\alpha_c = 10^{-2}$, температура его поверхности $T_c = 6000$ К.

1.67. В замкнутом вакуумированном объеме, стенки которого нагреты до температуры $T = 1000$ К, подвешены два черных шарика радиусом $a = 1$ см, охлаждаемые до низких температур. Расстояние между шариками $L = 1$ м. Оценить направление и величину силы, действующей на каждый из шариков. Дифракционными эффектами пренебречь.

1.68. Оценить расстояние от наблюдателя до источника первичных космических лучей (протонов) с энергией $\mathcal{E} = 10^{22}$ эВ, считая, что оно определяется пробегом частиц до взаимодействия с фотонами реликтового излучения с температурой $T = 2,7$ К. Сечение рассеяния $\sigma = 10^{-4}$ барн.

1.69. Полый резонатор электромагнитных волн изготовлен из листа меди и имеет форму куба со стороной $a = 32$ см. Оценить, на каких частотах пропадут его резонансные свойства, т. е. в спектре колебаний уже нельзя будет различить отдельные пики. Добротность резонатора $Q = a/2l_{\text{ск}}$, где $l_{\text{ск}}$ — скинвая глубина проникновения. Проводимость меди во всем диапазоне частот считать постоянной и равной $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с $^{-1}$. Плотность мод колебаний поля в резонаторе считать равной плотности мод в свободном пространстве.

1.70. Зеркальный металлический прямоугольный волновод с поперечным сечением 34×72 мм и длиной $L = 10$ м замкнут накоротко с обоих концов и через малое отверстие соединен с абсолютно черной полостью, нагретой до температуры $T = 600$ К. Оценить плотность электромагнитной энергии в волноводе (в эрг/Гц) в диапазоне длин волн 10 см.

1.71. Как показал в 1974 г. С. Хокинг, «черная дыра» массой M за счет квантовых эффектов и конечных размеров излучает как абсолютно черное тело с температурой $T(M) = \hbar c^3 / (8\pi k_B \gamma M)$. Оценить время жизни черной дыры с массой $M = 10^{15}$ г до ее полного испарения.

1.72. Яркая желто-зеленая линия полярного сияния (аурог borealis) возникает при возбуждении атомов кислорода в верхних слоях атмосферы под действием солнечного ветра (потока быстрых электронов и протонов). Время жизни возбужденного состояния атома кислорода относительно спонтанного перехода составляет $\tau \approx 0,74$ с. Однако столкновения атомов кислорода с молекулами атмосферы могут снять это возбуждение безызлучательным способом. Эффективное сечение этого процесса $\sigma \approx 7 \cdot 10^{-15}$ см 2 . Оценить, на какой высоте над Землей «загорается» эта линия. Атмосферу считать изотермической с $T = 240$ К.

1.73: Рекомбинация ионов и электронов в межзвездной среде приводит к образованию атомов в высоковозбужденных состояниях с главным квантовым числом $n \gg 1$ (ридберговских атомов). При переходах с $\Delta n = 1$ очень высоковозбужденные атомы излучают радиоволны, что было обнаружено в 1964 г радиотелескопом РТ-22 в г. Пушино. В межзвездной среде есть и изотропное магнитотормозное излучение со спектральной интенсивностью в коротковолновом радиодиапазоне $I(\omega) \simeq 2 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}}$. Оценить максимальное возможное n для атома водорода в этих условиях. Спонтанное время жизни высоковозбужденных состояний атома водорода в вакууме (с $n \sim 10^3$) равно $\tau_{\text{сп}}(n) \simeq 6 \cdot 10^{-12} n^5$ с.

1.74: Взаимодействие электрона в атоме водорода с нулевыми колебаниями электромагнитного поля в вакууме, приводящее в частности к расщеплению по энергии состояний $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ («лэмбовский сдвиг») можно в интервале частот (Ry/\hbar , $2mc^2/\hbar$) рассматривать, как взаимодействие свободного электрона с однородным переменным электромагнитным полем, которое приводит к случайным смещениям электрона на орбите. Оценить величину среднеквадратичного смещения электрона.

§ 2. Кристаллическая решетка. Фононы. Теплоемкость. Теплопроводность.

2.1. Рассматривая атомы, из которых построены кристаллические решетки, как твердые шары, найти плотность упаковки (т. е. заполненную часть объема элементарного куба) для простой, гранецентрированной и объемноцентрированной кубических решеток.

2.2. Найти число атомов, приходящихся на примитивную ячейку для лития, кристаллизующегося в объемноцентрированную решетку, и то же самое для кристалла CsCl, когда в вершинах куба находятся атомы Cs, а в центре атом Cl.

2.3. В некоторых металлах при определенной температуре происходит структурный фазовый переход от объемноцентрированной к гранецентрированной кубической решетке, практически не сопровождающийся изменением объема тела. Найти отношение d_1/d_2 , где d_1 , d_2 — кратчайшие расстояния между атомами в гранецентрированной и объемноцентрированной решетках.

2.4. Ионные кристаллы хорошо описываются моделью соприкасающихся шаров. Вычислить на основе этой модели период решетки NaCl (гранецентрированный куб), исходя из его плотности $\rho = 2,17$ г/см³ и молярной массы $\mu = 58,45$ г/моль.

2.5: Для простой кубической решетки, постоянная которой равна a , найти расстояние d_{hkl} между соседними атомными плоскостями с миллеровскими индексами h , k , l .

2.6. Вычислить расстояния d_{100} , d_{110} , d_{111} для 1) простой, 2) объемноцентрированной и 3) гранецентрированной кубических решеток. Ребро элементарного куба равно a .

2.7. Найти длину волны линии L_{α} для вольфрама W, если при падении ее на кристалл NaCl под углом $31^{\circ}32'$ к отражающей плоскости (001) наблюдается спектр четвертого порядка.

2.8. Определить постоянную решетки сильвина (KCl), если K_{α} -линия железа отражается от грани (001) под углом $18^{\circ}3'$ во втором порядке.

2.9* Рентгеновское излучение с частотой $\nu = 1,1 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$, падающее в направлении [100] на монокристалл с гранецентрированной кубической решеткой, испытывает брэгговское отражение первого порядка в направлении [122]. Найти наименьшее межатомное расстояние d_{\min} в кристалле.

2.10. Определить колебательную теплоемкость газообразного азота: а) при комнатной температуре; б) при температуре 1700 К. Частота колебаний атомов в молекуле азота $\nu = 7,08 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

У к а з а н и е. Корнем уравнения $\text{sh}(x/2) = 0,775x$, возникающего при решении задачи, является $x = 3,38$.

2.11. Определить вращательную теплоемкость паров HD: а) вблизи температуры конденсации $T_k = 22 \text{ К}$; б) при температуре 600 К.

Для дейтериевого водорода параметр $\frac{\hbar^2}{2Ik_B} = 64 \text{ К}$, где I — момент инерции молекулы.

2.12* При температуре 17°C показатель адиабаты углекислого газа $\gamma = 1,30$. Молекула CO_2 — линейная. При данной температуре, кроме полностью возбужденных поступательных и вращательных степеней свободы, частично возбуждены две колебательные степени свободы с идентичными спектрами. Оценить длину волны излучения, соответствующего переходам с первого возбужденного колебательного уровня на невозбужденный.

2.13. Кристаллы существуют благодаря тому, что среднее межатомное расстояние a в них велико по сравнению с амплитудой «нулевых колебаний атомов» a_0 , задаваемой соотношением неопределенностей Гейзенберга: $a \gg a_0$. Это неравенство выполняется вследствие малости «адиабатического параметра» $(m/M)^{1/4} \ll 1$, где m и M — массы электрона и атомного ядра. Пользуясь моделью двухатомной молекулы, показать, что: 1) $a_0/a \sim (m/M)^{1/4}$; 2) $\hbar\omega \sim Ry(m/M)^{1/2}$, где ω — частота колебаний атомов, $Ry = 13,6 \text{ эВ}$ — энергия связи электрона в основном состоянии атома водорода; 3) $\Delta\epsilon_{\text{вр}} \sim Ry(m/M)$, где $\Delta\epsilon_{\text{вр}}$ — расстояние между нижними вращательными уровнями молекулы.

2.14* Цепочка из N одинаковых атомов замкнута в кольцо. Подсчитать число возможных (допустимых) бегущих волн и сравнить его с числом степеней свободы системы. Рассмотреть случаи продольных

и поперечных колебаний, когда атомы смещаются вдоль цепочки и перпендикулярно ей.

2.15: Одномерная цепочка состоит из атомов массой m , среднее расстояние между которыми равно a , а жесткость связей между ними γ . Атомы взаимодействуют с ближайшими соседями по закону $\gamma(u_{n\pm 1} - u_n)^2/2$, где u_n — смещение n -го атома относительно положения равновесия. Найти все продольные нормальные колебания и спектр их частот $\omega(K)$, K — волновое число. Найти фазовую и групповую скорости волн как функции волнового числа K . Построить графики полученных зависимостей. Указать область, отвечающую звуковым волнам, и выразить скорость звука s через m и γ .

2.16: Найти импульс одномерной цепочки, состоящей из N одинаковых атомов с массой M , в которой возбуждена волна с волновым вектором \mathbf{K} . Используя периодические граничные условия, показать, что этот импульс равен нулю для всех $K \neq 0$. Пояснить физический смысл полученного результата.

2.17: Оценить температурный коэффициент линейного расширения α кристалла, используя в качестве модели двухатомную молекулу, в которой потенциальная энергия взаимодействия составляющих ее атомов имеет вид $U(x) = \gamma x^2 - \delta x^3 - \beta x^4$, где x — смещение атома относительно положения равновесия при 0 К. Ангармонический член δx^3 описывает асимметрию взаимного отталкивания и отвечает за тепловое расширение, член βx^4 описывает сглаживание колебаний при больших амплитудах. Оценить величины γ и β , а также α , выразив их через фундаментальные физические константы. Считать, что движение ядер подчиняется законам классической механики.

2.18. Потенциальная энергия атома в кристалле хорошо описывается функцией $U(x) = \gamma x^2 - \delta x^3$, причем можно считать, что $U(a) \simeq 0$, где x — отклонение атома от положения равновесия, а a — постоянная решетки. Оценив параметры γ и δ , найти (в эВ) энергию связи атома в кристалле серебра, считая ее примерно равной глубине потенциала. Скорость звука в серебре $s = 2,6 \cdot 10^5$ см/с.

2.19. Как изменится частота колебаний одномерной монокристаллической цепочки, если сдвиг фазы между колебаниями соседних атомов возрастает от $\pi/3$ до π ?

2.20. В одномерной цепочке, построенной из одинаковых атомов, скорость звука равна $s = 2 \cdot 10^5$ см/с, а постоянная решетки $a = 0,3$ нм. При какой частоте колебаний ω сдвиг фаз между двумя атомами, находящимися на расстоянии $10a$, составит $\pi/2$?

2.21. Цепочка, описанная в зад. 2.20, находится в тепловом равновесии при температуре $T = 500$ К. Каково отношение среднего числа фононов с величиной квазиимпульса, соответствующей границе зоны Бриллюэна $p_{\max} = \hbar\pi/a$ к среднему числу фононов с квазиимпульсом $p_{\max}/2$? Каково это отношение при температуре 10 К?

2.22. Каково отношение числа фононов с дебаевской частотой $\omega_D = k_B\theta/\hbar$ к числу фононов с $\omega_D/2$ в кристалле, описываемом моделью Дебая, при температурах $T_1 = \theta$ и $T_2 = \theta/10$?

2.23* Для некоторых металлоорганических соединений индия моделью молекулы может служить одномерная цепочка из $N = 10^5$ одинаковых атомов ^{115}In . Цепочка находится при $T = 0$ К и полностью изолирована от окружающей среды. Ядро одного из атомов, находящееся в возбужденном состоянии, испускает γ -квант с энергией $\epsilon_\gamma = 350$ кэВ. Определить температуру T цепочки после установления теплового равновесия между атомами ^{115}In . Учесть все типы колебаний. Считать усредненное значение скорости звука $s = 1,5 \cdot 10^5$ см/с, межатомное расстояние $a = 3$ Å.

2.24. Найти закон дисперсии $\omega(K)$ для продольных фононов в бесконечной цепочке, содержащей в элементарной ячейке два атома с массами m и M . Расстояние между соседними атомами равно a , а жесткость связей между ними γ . Построить график полученной зависимости. Проследить предельный переход к одноатомной цепочке при $m/M \rightarrow 1$.

2.25. Найти поляризуемость $\alpha(\omega)$ в длинноволновой области спектра (в расчете на одну элементарную ячейку) для цепочки, содержащей в элементарной ячейке два разноименных однозарядных иона. Остальные условия такие же, как и в задаче 2.24. Электрический вектор возбуждающей электромагнитной волны с частотой ω ориентирован вдоль цепочки. Влиянием кулоновских сил, вызванных переменной поляризацией, пренебречь.

2.26. Статические диэлектрические проницаемости $\epsilon(0)$ ионных кристаллов NaF и NaBr, обусловленные поляризацией решетки, равны 5,1 и 6,4, а их плотности — 2,79 и 3,21 г/см³. Полагая, что ϵ обусловлено только поляризуемостью смещения, оценить отношение частот поперечных оптических фононов.

У к а з а н и е: воспользоваться соотношением Клаузиуса—Моссотти.

2.27. Для колебаний плоской квадратной решетки одинаковых атомов, упругие силы между которыми характеризуются постоянной γ , закон дисперсии имеет вид $\omega^2 = \frac{2\gamma}{M} (2 - \cos K_x a - \cos K_y a)$, где оси x и y направлены вдоль сторон квадрата, a — постоянная решетки. Показать, что для длинных волн закон дисперсии изотропен, т.е. ω зависит только от модуля волнового вектора. Используя приближение Дебая, определить граничную дебаевскую частоту ω_D и величину волнового вектора K_D .

2.28* Из экспериментов по неупругому рассеянию нейтронов на кристалле KBr известно, что максимальная частота поперечных акустических фононов, бегущих вдоль ребер элементарного куба, составляет $\omega_{\max} = 7,85 \cdot 10^{12}$ с⁻¹. Оценить в рамках модели одномерной цепочки скорость звука. Плотность кристалла $\rho = 2,75$ г/см³. Решетка

KBr — гранецентрированная кубическая, типа решетки NaCl (см. задачу 2.4).

2.29. Оценить частоту колебаний атомов в кристалле меди, считая ее решетку простой кубической с постоянной $3,6 \text{ \AA}$. Модуль упругости кристалла равен $E = 130 \text{ ГПа}$.

2.30. Оценить, какую долю постоянной решетки $a = 5,8 \text{ \AA}$ твердого криптона составляет амплитуда продольных колебаний атомов вдоль одного из ребер элементарного куба при температуре плавления $T_{\text{пл}} = 117 \text{ К}$. Учесть, что дебаевская температура криптона $\theta = 72 \text{ К}$.

2.31*: Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, рассмотреть в идеальном кристалле неупругое рассеяние нейтронов с рождением и поглощением фононов. Обсудить возможность восстановления закона дисперсии фононов $\omega(K)$ по нейтронному рассеянию.

2.32*: Найти температурную зависимость решеточной теплоемкости одномерных (C_1) и двумерных (C_2) кристаллов в области низких температур. Учитывать только продольные колебания атомов.

2.33. Используя аналогию между фотонами и длинноволновыми фононами, выразить низкотемпературную решеточную теплоемкость кристаллов через скорость поперечного (s_t) и продольного (s_l) звука.

2.34*: Одномерная цепочка состоит из атомов с массами m и $M = 9m$. Оценить относительный вклад в теплоемкость продольных оптических колебаний атомов цепочки при температуре $T = \theta/10$, где θ — температура, соответствующая максимальной энергии реального спектра акустических колебаний. Для оценки можно считать θ равной дебаевской температуре в соответствующей модели.

2.35. Следуя приближениям модели Дебая, определить отношение теплоемкостей образцов бериллия Be и меди Cu одинакового объема при $T = 400 \text{ К}$. Плотности $\rho(\text{Be}) = 1,85 \text{ г/см}^3$, $\rho(\text{Cu}) = 8,96 \text{ г/см}^3$. Температуры Дебая $\theta_{\text{Be}} = 1481 \text{ К}$, $\theta_{\text{Cu}} = 347 \text{ К}$.

2.36. При измерении теплоемкости металла в области низких температур ($T \ll \theta$) получены следующие результаты:

$T, \text{ К}$	1,08	1,24	1,46	1,62	1,91
$C_V, \text{ мДж/град} \cdot \text{ моль}$	2,18	2,62	3,31	3,89	5,10

Оценить величину дебаевской температуры этого металла.

2.37. В кристалле поваренной соли NaCl (ГЦПКР) при температуре $T = 10 \text{ К}$ теплоемкость единицы объема $c = 6,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(К} \cdot \text{см}^3)$. Оценить усредненную скорость звука s в кристалле и его дебаевскую температуру θ . Постоянная решетки $2a = 5,63 \text{ \AA}$. Считать, что дебаевская температура относится ко всему спектру колебаний.

2.38. Найти максимально возможное увеличение ΔT температуры кусочка серебра с исходной температурой T_0 при падении его с высоты $h = 1 \text{ см}$. Рассмотреть два случая 1) $T_0 = 4,2 \text{ К}$ и 2) $T_0 = 300 \text{ К}$. Температура Дебая для серебра $\theta = 227 \text{ К}$. (Теплоемкостью электронов по сравнению с решеточной теплоемкостью можно пренебречь.)

2.39. Железный шарик радиусом $R = 1$ мм находится в центре сосуда, откачанного до высокого вакуума. В начальный момент времени температура шарика $T_0 = 10$ К. Оценить время τ , через которое температура его изменится на $a = 1\%$. Дебаевская температура железа $\theta = 477$ К, концентрация атомов $n = 8,5 \cdot 10^{22}$ см⁻³. Температура стенок $T_c = 80$ К. Поверхности шарика и сосуда считать абсолютно черными.

2.40. Одинаковые массы свинца ²⁰⁸Pb и кремния ²⁸Si охлаждаются с помощью жидкого гелия от температуры $T_1 = 20$ К до $T = 4,2$ К. Оценить отношение масс жидкого гелия, необходимых для охлаждения свинца и кремния, если известно, что дебаевские температуры равны: $\theta(\text{Pb}) = 105$ К и $\theta(\text{Si}) = 645$ К. Теплоемкостью электронов пренебречь.

2.41. После предварительного охлаждения железа ⁵⁶Fe с массой $M = 1$ кг жидким азотом до температуры $T_1 = 77$ К производят дальнейшее понижение температуры до $T_2 = 4,2$ К с помощью жидкого гелия. Определить объем испарившегося при этом гелия, если теплота испарения жидкого гелия $q = 2,6$ Дж/см³ и дебаевская температура железа $\theta = 477$ К. Вкладом электронной теплоемкости железа пренебречь.

2.42. Параметры кристаллических решеток кремния и германия практически одинаковы, также как одинаковы их модули упругости. Оценить, как соотносятся между собой дебаевские температуры этих элементов.

2.43. Вакансией называется дефект кристалла, возникающий при удалении атома из узла кристаллической решетки. При быстром охлаждении кристалла число вакансий, соответствовавших термодинамическому равновесию при высокой температуре, почти не изменяется, т. е. вакансии могут быть «заморожены». После чего при низкой температуре происходит медленный процесс установления нового термодинамического равновесия, как говорят, «отжиг» вакансий. Определить изменение температуры алюминиевого образца при адиабатическом отжиге вакансий, замороженных в результате быстрого охлаждения образца от температуры плавления алюминия $t_1 = 660$ °С до комнатной температуры t_2 . Теплоемкость алюминия можно определить из классической теории. Энергия образования вакансий в алюминии $\epsilon = 0,75$ эВ.

2.44. Ядро ³He имеет спин $I = 1/2$. Найти молярную энтропию S кристаллического ³He при низкой температуре T . Считать, что температура $T \ll \theta$ (θ — дебаевская температура), так что практически все колебательные степени свободы «выморожены», но ядерные спины остаются тем не менее полностью разупорядоченными. При этих же предположениях найти энтропию кристаллического аргона-37; спин ядра аргона равен $I = 3/2$.

2.45. Оценить, при какой температуре энергия тепловых колебаний кристаллической решетки Al равна тепловой энергии жидкого гелия при 1 К (в обоих случаях сравнивается энергия на единицу

объема). Считать все возбуждения акустическими фононами. Скорости звука: $s^{\text{He}} = 240$ м/с, продольного $s_l^{\text{Al}} = 6260$ м/с, поперечного $s_t^{\text{Al}} = 3080$ м/с.

2.46. Энергетический спектр фононов в кристаллах в силу конечных размеров кристаллов является дискретным. Оценить наибольший размер L кристалла поваренной соли, имеющего форму кубика, при котором это обстоятельство сказывается на его удельной теплоемкости при температуре $T = 1$ К. Дебаевская температура кристалла $\theta = 275$ К, плотность $\rho = 2,17$ г/см³, молярная масса $\mu \approx 58,45$ г/моль. Считать, что вкладом поверхностных колебаний можно пренебречь.

2.47*. Оценить, насколько изменится количество теплоты, требуемое для нагрева единицы объема кристаллического кластера, состоящего из нескольких сотен атомов, от $T_1 = 0$ К до температуры $T_2 = \theta/30$, по отношению к количеству теплоты, требуемого для такого же нагрева единицы объема того же вещества бесконечных размеров, если характерный размер кластера $L = 10a$, где a — постоянная решетки, а θ — температура Дебая. Считать, что возбуждаются только объемные фононы, а вкладом поверхностных колебаний можно пренебречь. Кроме того, движение кластера как целого и его вращение не учитывать.

2.48*. На часть плоской поверхности диэлектрического кристалла, граничащего с вакуумом, нанесена металлическая пленка (рис. 71) толщиной $a = 0,1$ мкм. По пленке течет электрический ток с поверхностной плотностью $i = 1$ А/см. Кристалл охлажден до температуры $T \approx 0$ К. Определить температуру пленки, пренебрегая тепловым сопротивлением границы между пленкой и кристаллом и полагая пробег фононов в кристалле много большим поперечного размера пленки. Удельное сопротивление пленки $\rho = 10^{-6}$ Ом·см, усредненная скорость звука в кристалле $s = 3 \cdot 10^5$ см/с.

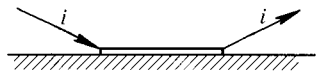


Рис. 71

2.49. Сквозь кристалл диэлектрика, охлажденный до температуры вблизи абсолютного нуля, пропускается луч света диаметром $d = 1$ см. Размеры кристалла $D \gg d$. В кристалле поглощается мощность $W = 100$ Вт/см (на единицу длины луча). Оценить температуру кристалла T внутри пучка. Для оценки считать, что все тепло уносится акустическими фононами с длиной пробега $l_1 \ll d$ внутри нагретой области пучка и $l_2 \gg D$ вне пучка. Дебаевская температура кристалла $\theta = 300$ К, концентрация атомов $n = 10^{23}$ см⁻³.

2.50. Одной из причин нарушения работы сверхпроводящих соленоидов является скачкообразное движение витков под действием ponderомоторных сил, в результате которого происходит тепловыделение и нагрев сверхпроводника выше критической температуры. В современных сверхпроводящих кабелях основную массу кабеля составляет не сам сверхпроводник, а медь, плотность которой $\rho = 8,96$ г/см³, а температура Дебая $\theta = 347$ К. Пренебрегая тепло-

отводом от обмотки, оценить допустимое смещение витка в обмотке такого соленоида, работающего при температуре $T_1 = 4,2$ К, если средняя плотность тока в обмотке $j = 5000$ А/см², магнитное поле на обмотке $B = 40$ кГс, а максимально допустимая температура сверхпроводника равна $T_2 = 8$ К.

Указание: принять, что витки растягиваются, увеличивая свой радиус, а тепловыделение при таком перемещении витка равно работе пондеромоторных сил.

2.51. В обмотках больших сверхпроводящих соленоидов механические напряжения, обусловленные пондеромоторными силами, достигают предела упругости материала. При низких температурах и таких механических нагрузках, как показывают опыты, возможны скачкообразные изменения величины механического напряжения в кабеле, в результате которых происходит тепловыделение, способное нарушить работу сверхпроводящего соленоида. В современных сверхпроводящих кабелях основную массу кабеля составляет не сам сверхпроводник, а медь, плотность которой $\rho = 8,96$ г/см³, модуль Юнга $E \approx 10^7$ Н/см², температура Дебая $\theta = 347$ К. Пренебрегая теплоотводом от обмотки, найти максимально возможное повышение температуры некоторого элемента обмотки сверхпроводящего соленоида, работающего при температуре $T = 4,2$ К, при скачкообразном уменьшении напряжения $\sigma = 10^4$ Н/см² на величину $\delta = 5\%$.

Указание: принять, что освобождающаяся упругая энергия целиком переходит в тепло.

2.52. В ферромагнетиках при низких температурах заметный вклад в тепловые процессы вносят колебания в системе поляризованных спиновых моментов — спиновые волны, для которых закон дисперсии имеет вид $\omega = AK^2$, где A — некоторая константа, \mathbf{K} — волновой вектор, а среднее число квантов — магнонов — в тепловом равновесии определяется той же формулой Планка, что и для фононов. Выяснить характер температурной зависимости вклада магнонов в теплоемкость ферромагнетиков.

2.53. В антиферромагнетиках (спиново упорядоченных магнетиках с антипараллельными магнитными моментами соседних атомов) закон дисперсии длинноволновых магнонов (см. задачу 2.52) имеет вид $\omega = |\mathbf{K}|v$, где фазовая скорость $v = \text{const}$. Отличительным свойством магнонов в антиферромагнетиках является то, что для каждого значения волнового вектора \mathbf{K} возможны два состояния поляризации. Найти отношение вкладов магнонов и фононов в теплоемкость при низких температурах для кристалла с величиной $v = 3,0 \cdot 10^5$ см/с и усредненной скоростью звука $s = 5,0 \cdot 10^5$ см/с.

2.54. Капиллярные волны на поверхности (закон дисперсии $\omega^2 = \sigma K^3/\rho$) могут вносить при низких температурах значительный вклад в теплоемкость жидкого гелия. Какова температурная зависимость «поверхностной» (на единицу площади) теплоемкости гелия при $T \approx 0$ К?

2.55. В ${}^4\text{He}$, который при атмосферном давлении остается жидким при $T \approx 0$ К, колебания в области низких температур целиком описываются продольными акустическими фононами. Получить формулу для низкотемпературной теплоемкости и вычислить ее для гелия при $T = 0,1$ К, приняв для скорости звука значение $s = 240$ м/с.

2.56. На рис. 72 приведена фононная область экспериментально определенного закона дисперсии квазичастичных возбуждений в жидком ${}^4\text{He}$. Энергия квантов выражена в кельвинах: $\mathcal{E} = \hbar\omega/k_B$. Исходя из этих данных, определить скорость нейтронов, для которых при рассеянии в жидком ${}^4\text{He}$ на 180° в результате испускания или поглощения одного фонона происходит максимальное изменение энергии нейтронов.

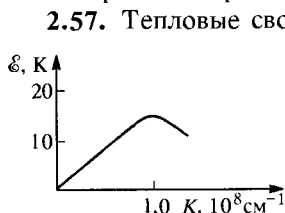


Рис. 72

2.57. Тепловые свойства жидкого ${}^4\text{He}$ при $T < 0,6$ К в основном обусловлены длинноволновыми фононами. Исходя из данных, приведенных на рис. 72, определить теплоемкость жидкого ${}^4\text{He}$ при $T = 0,1$ К. Какова энергия ε_m фононов, возбужденных в наибольшем количестве при этой температуре? Во сколько раз среднее число фононов с энергией ε_m больше средних чисел фононов с энергиями $\varepsilon = 3\varepsilon_m$, $\varepsilon = \varepsilon_m/3$? Температура Дебая 19 К.

У к а з а н и е: Трансцендентное уравнение $xe^x - 2e^x + 2 = 0$ имеет корень $x \approx 1,59$.

2.58. При температурах $T = 0$ К газ фононов в жидком гелии можно считать идеальным. Полагая, что энтропия жидкого гелия определяется фононами, найти ее удельное значение при температуре $T = 0,5$ К, если плотность гелия $\rho = 0,145$ г/см³ и скорость звука $s = 240$ м/с. Температура Дебая 19 К.

2.59. Два сосуда, разделенные теплонепроницаемой перегородкой с отверстием площадью $A = 1$ мм², заполнены жидким гелием и поддерживаются при температурах $T_1 = 4$ К и $T_2 = 0,5$ К. Считая, что при этих температурах фононы являются единственным типом тепловых возбуждений и представляют собой идеальный газ, найти тепловой поток Φ между сосудами, если скорость звука $s = 240$ м/с, а температура Дебая 19 К.

2.60: Получить формулу тонкой структуры линий рэлеевского рассеяния, исходя из представлений о фотонах и фононах.

2.61. Найти максимальную частоту фонона Ω , который может родиться в жидкости под действием света с длиной волны $\lambda = 4000$ Å. Показатель преломления среды $n = 1,5$, скорость звука в жидкости $s = 1,5 \cdot 10^5$ см/с.

2.62. Спектрометром анализируется свет от лазера с длиной волны $\lambda = 6328$ Å, рассеянный под углом $\varphi = 90^\circ$ в воде ($n = 1,33$). Какова должна быть разрешающая способность спектрометра, чтобы различить линию, соответствующую неупругому рассеянию света с рождением фонона? Скорость звука в воде $s = 1,5 \cdot 10^5$ см/с.

2.63. Излучение рубинового лазера рассеивается на звуковых колебаниях в воде. При рассеянии происходит доплеровское смещение частоты света. Оценить число штрихов N дифракционной решетки, с помощью которой в первом дифракционном порядке можно обнаружить смещение частоты в свете, рассеянном под прямым углом. Скорость звука в воде равна $s = 1500$ м/с, показатель преломления $n = 1,33$. Считать, что в воде есть звуковые волны всевозможных направлений.

2.64. Фононы рассеиваются в кристалле на примесных центрах с поперечником рассеяния σ порядка геометрического (10^{-15} см²). Оценить фононную теплопроводность кристалла при температуре $T = 30$ К, если концентрация примесей $n = 10^{15}$ см⁻³, а скорость звука $s = 3 \cdot 10^5$ см/с. Оценить также толщину d кристалла, при которой начнет сказываться рассеяние фононов на границах образца.

2.65. Измерения коэффициента теплопроводности χ кристалла LiF показали, что в области температур, меньших 7 К, величина χ/T^3 не зависит от температуры, а зависит только от толщины образца δ , и для $\delta = 1$ мм величина $\chi/T^3 = 22,5$ мВт/(см \cdot К⁴). Как изменится эта величина при увеличении толщины образца в 4 раза?

2.66. При достаточно высоких температурах (в диапазоне от 30 до 100 К) в твердом аргоне ($\theta_{Ar} = 92$ К) произведение коэффициента теплопроводности χ на температуру T в пределах ошибок принимает постоянное значение, равное примерно 235 мВт/см. Оценить, как изменится длина свободного пробега фононов в твердом аргоне при изменении температуры от 50 до 100 К.

2.67. При $T < 0,6$ К основным типом возбуждений в жидком ⁴He являются фононы, и, как показывают эксперименты, величина теплопроводности прямо пропорциональна диаметру капилляра, в котором проводятся измерения. Чему равен коэффициент теплопроводности χ при $T = 0,3$ К, если при 0,6 К он в таких экспериментах равен 0,2 Вт/(см \cdot К)?

2.68. Оценить максимально возможную величину коэффициента теплопроводности цилиндра диаметром $d = 3$ мм из кристаллического искусственного сапфира при температуре 30 К. Температура Дебая у сапфира $\theta = 1040$ К, скорость звука $s = 10^4$ м/с, а его теплоемкость при $T \ll \theta$ определяется выражением $c_V = 0,1 \cdot T^3$ Дж/(м³ \cdot К).

2.69. Теплопроводность цилиндра из сапфира максимальна при $T = 30$ К. Пользуясь результатом предыдущей задачи, оценить величину χ при температуре жидкого азота $T = 80$ К. В области за максимумом коэффициент теплопроводности хорошо описывается зависимостью $\chi \propto T^3 \exp(\theta/2T)$. Температура Дебая у сапфира $\theta = 1040$ К. (Экспоненциальный множитель в выражении для $\chi(T)$ возникает из-за того, что вклад в теплопроводность дают только процессы переброса).

2.70. При малых (упругих) деформациях сдвига, когда сдвиг χ много меньше постоянной решетки a , выполняется закон Гука

$\sigma \simeq G \frac{x}{d}$, где σ — напряжение сдвига, G — модуль сдвига, d — расстояние между атомными плоскостями, вдоль которых приложено напряжение сдвига. Для идеализированной модели кристалла Я. И. Френкель дал теоретическую оценку критического напряжения сдвига, при котором произойдет необратимая деформация кристалла $\sigma_c \simeq G/6$. Получить эту оценку.

2.71. В одномерной цепочке SnO найти отношение средних квадратов амплитуд нулевых колебаний, соответствующих акустической и оптической ветвям в узком диапазоне волновых векторов вблизи коротковолновой границы первой зоны Бриллюэна.

2.72*: В очень длинной ($N \gg 100$) одномерной цепочке, на один из атомов, расположенный далеко от концов, воздействуют внешним источником с частотой $f = 1,001f_0$, где f_0 — максимальная частота собственных колебаний цепочки. Найти отношение смещения данного атома и атома, отстоящего от него на $N = 100$ межатомных расстояний.

2.73. Титановый шар-зонд (радиусом $R = 1$ м, толщина стенки $d = 1$ мм), нагретый до температуры $T = 1000$ К, выпущен из искусственного спутника, находящегося в тени Земли. За какое время его температура упадет на $\Delta T = 10$ К, и какую энергию при этом потеряет оболочка шара, а какую тепловое излучение внутри шара? Дебаевская температура титана $\theta = 420$ К, плотность $\rho = 4,5$ г/см³, относительная атомная масса $A = 48$. Внутреннюю поверхность шара можно считать абсолютно черной, коэффициент отражения наружной поверхности $r = 0,77$.

2.74. Найти в дебаевском приближении среднеквадратичную амплитуду нулевых колебаний атома в кристалле с плотностью $\rho = 19,2$ г/см³, дебаевской температурой $\theta = 383$ К и усредненной скоростью звука $s = 3,13 \cdot 10^5$ см/с.

2.75. Если отношение среднего квадрата амплитуды нулевых колебаний атомов к квадрату постоянной решетки составит при $T = 0$ К величину $\alpha = 0,01$, то велика вероятность их делокализации (такое состояние называется «квантовый кристалл»). Оценить в дебаевской модели длину одномерной цепочки атомов, при которой наступает делокализация. Масса атома $m = 50$ а. е. м., межатомное расстояние $a = 3 \text{ \AA}$, скорость звука $s = 3 \cdot 10^5$ см/с. Учитывать только продольные колебания. Граничные условия — периодические.

У к а з а н и е. Для оценки считать, что суммирование по всем модам колебаний можно заменить интегралом.

2.76*: Оценить в дебаевской модели размер L двумерной квадратной решетки атомов, при котором отношение среднего квадрата амплитуды колебаний к квадрату постоянной решетки составит при температуре $T = 650$ К величину $\alpha = 0,025$. Относительная масса атома $A = 150$, межатомное расстояние $a = 5 \text{ \AA}$, скорость звука $s = 4 \cdot 10^5$ см/с. Учитывать колебания только в плоскости решетки. Граничные условия — нулевые.

У к а з а н и е. Для оценки считать, что суммирование по всем модам колебаний можно заменить интегралом.

2.77. Нерадиационные переходы для подуровней электронного 1s-состояния атомов парамагнетика в магнитном поле могут происходить за счет передачи энергии фонону, а момента импульса — всему кристаллу (за счет спин-решеточной релаксации). Оценить минимальные линейные размеры кристаллов парамагнетика, при которых такое снятие возбуждения возможно. Усредненная скорость звука в кристалле $s = 3,2$ км/с, индукция магнитного поля $B = 0,1$ Тл, смещение атомов на границах кристалла считать равным нулю.

2.78*. В алмазных наковальнях сжатие твердых образцов осуществляется до мегабарных давлений. Потенциал отталкивания между атомами можно аппроксимировать степенной функцией $U(x) \propto x^{-\beta}$ ($\beta \gg 1$), где x — относительное расстояние между двумя соседними атомами. Определить, во сколько раз изменится температура Дебая такого кристалла при увеличении давления от $P_1 = 200$ кбар до $P_2 = 1,8$ Мбар. Жесткость кристалла в сжатом состоянии определяется второй производной от отталкивательной части потенциала.

§ 3. Электроны в металлах. Ферми-частицы

3.1*. При сближении атомов происходит перекрытие волновых функций внешних валентных электронов, которые получают возможность двигаться по кристаллу благодаря туннельному эффекту. При этом N стационарных атомных уровней расщепляются в полосу (зону), содержащую N квазинепрерывных (при $N \gg 1$) стационарных уровней. Считая, что в атоме электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $a = 2 \text{ \AA}$ на глубине равной энергии ионизации $U_0 = 10$ эВ, а ширина барьера, разделяющего ямы, $d = a$, оценить ширину зоны. Формально ширина зоны может быть оценена, как уширение уровня энергии электрона при туннелировании в соседнюю яму. Учесть, что при слабом перекрытии волновая функция электрона в кристалле является линейной комбинацией атомных волновых функций.

3.2*. Вычислить фермиевские энергию, импульс и скорость при $T = 0$ для металла с изотропным квадратичным законом дисперсии электронов с эффективной массой m^* , равной $0,8$ массы свободного электрона, и концентрацией электронов $n = 10^{23} \text{ см}^{-3}$.

3.3. Для электронов с квадратичным законом дисперсии найти связь между средней энергией $\bar{\epsilon}$ и фермиевской энергией ϵ_F при температуре $T = 0$ К.

3.4. Металлический Na кристаллизуется в кубическую объемно-центрированную решетку с расстоянием между ближайшими атомами $d = 0,37$ нм. Найти среднюю кинетическую энергию электронов, предполагая, что их закон дисперсии является квадратичным.

3.5. Оценить, каково относительное увеличение средней энергии электронов в металле с $\epsilon_F = 5$ эВ при увеличении температуры от $T = 0$ К до комнатной.

3.6. Найти при температуре $T = 0$ К среднюю длину волны де Бройля λ свободного электрона в одновалентном металле с простой кубической решеткой, имеющей постоянную a .

3.7. Найти фермиевский импульс p_F электронов проводимости в Na, если максимальное отклонение угла разлета двух γ -квантов, возникающих при аннигиляции замедленных до тепловых скоростей позитронов с электронами проводимости, от 180° равно $\varphi = 0,20^\circ$. Поверхность Ферми считать сферической.

3.8. При температуре $T \neq 0$ К электроны в металле рассеиваются, испуская или поглощая фононы. Считая, что $T \ll \theta$, где θ — дебаевская температура, оценить средний угол рассеяния φ .

3.9. На какой максимальный угол может отклониться электрон при поглощении или испускании одного фонона в одновалентном металле с простой кубической решеткой, хорошо описываемом моделью Дебая и моделью свободных электронов?

3.10. Свойства электронов в монокристаллических образцах металлов с большими длинами свободного пробега электронов могут изучаться с помощью двух микроконтактов, прижатых к поверхности металла вдоль линии, перпендикулярной напряженности магнитного поля \mathbf{H} (рис. 73). Один из контактов является эмиттером электронов, а второй — зондом (коллектором), регистрирующим приход электронов. Определить максимальное значение H_{\max} , при котором электроны еще могут достичь коллектора. Концентрация электронов проводимости равна $n = 8,5 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$, а расстояние между микроконтактами $d = 1$ мм. Воспользоваться моделью свободных электронов.

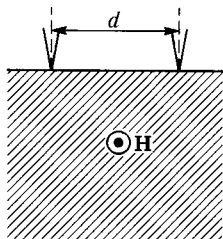


Рис. 73

3.11. Электронный спектр щелочных металлов хорошо описывается моделью свободных электронов с концентрацией один электрон на атом. В магнитном поле напряженностью \mathbf{H} траектории электронов являются спиралями. Определить максимальный диаметр d_{\max} спирали для электронов в калии при $H = 100$ Э. Объем, приходящийся на атом, равен $V = 74 \cdot 10^{-21}$ мм 3 .

3.12. Оценить отношение средней потенциальной энергии U взаимодействия двух электронов к энергии Ферми ϵ_F для одновалентного металла, электроны которого наполовину заполняют зону проводимости. Концентрация атомов $n = 3 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$, эффективную массу электронов считать равной массе свободного электрона.

3.13. Ультрахолодные нейтроны содержатся в ловушке при столь низкой температуре, что газ нейтронов вырожден. Как изменится средняя кинетическая энергия нейтронов при изотермическом включении сильного магнитного поля, полностью поляризующего маг-

нитные моменты нейтронов? Процессами распада нейтронов пренебречь.

3.14. Оценить, сколько ультрахолодных нейтронов может быть накоплено в медной ловушке (рис. 74) объемом $V = 10$ л. Количество поступающих нейтронов компенсирует их убыль за счет распада. Критическая скорость нейтронов для меди $v_{кр} = 5,7$ м/с. Принять, что температура стенок ловушки 0 К, а нейтронный ферми-газ вырожден.

3.15* Рассматривая гипотетическое тяжелое ядро с $Z = N$ и считая распределение нуклонов в ядре однородным, оценить их фермиевскую скорость в модели свободных нуклонов.

3.16. Оценить среднюю энергию на один нуклон в модели нуклонного ферми-газа. Считать $N = Z = A/2$.

3.17* Оценить минимальную энергию ϵ_γ гамма-кванта, необходимую для однонуклонного возбуждения тяжелого ядра с $Z = N$, $A = 238$, рассматривая нуклоны в ядре как ферми-газ. Каким будет по порядку величины эффективное сечение такого процесса?

3.18. Оценить в модели ферми-газа глубину нейтронной потенциальной ямы в ядре ^{238}U , если энергия отделения нейтрона в этом ядре (его энергия связи) равна $\epsilon_{св} = 7,6$ МэВ.

3.19* Для тяжелого ядра с $Z = N$ вычислить кулоновскую энергию атомного ядра и кинетическую энергию нуклонов в модели ферми-газа при равномерном распределении протонов и нейтронов в ядре и в гипотетическом случае, когда протоны полностью вытеснены кулоновским отталкиванием на периферию. Какое состояние является энергетически более выгодным? Ядро считать имеющим жесткую сферическую форму, «объем» нуклонов считать равным объему ядра.

3.20. В некоторых опытах по измерению времени жизни протона используются протоны атомных ядер, например ядер атомов железа. Производится поиск продуктов распада для одной из возможных мод распада $p \rightarrow e^+ + \pi^0$. Оценить наименьший угол θ разлета частиц e^+ и π^0 с учетом фермиевского импульса p_F протона, входящего в состав ядра железа.

3.21. Во сколько раз уменьшается пороговая кинетическая энергия протона при генерации пары протон и антипротон, если в качестве мишени использовать не покоящийся протон жидкого водорода, а протон, входящий в состав тяжелого ядра.

3.22. Давление электронного газа является основным фактором, определяющим сжимаемость металлов при низких температурах. Найти давление P и сжимаемость β_T электронного газа для меди при температуре $T = 0$ К, если концентрация электронов проводимости равна $n = 8,5 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$. Эффективную массу m^* считать равной массе свободного электрона m_e .

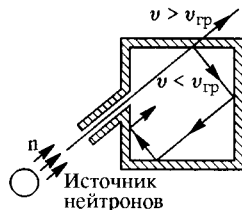


Рис. 74

3.23. Найти скорость звука s в нейтронном газе при температуре $T = 0$ К, если максимальная скорость нейтронов в газе $v = 200$ м/с (см. также задачу 3.86).

3.24. Твердый водород является диэлектриком, плотность которого при нормальном давлении равна $0,076$ г/см³. Чтобы водород стал металлом, энергия Ферми его электронов должна быть равной потенциалу ионизации. При каком давлении возможен переход водорода в металлическое состояние? Какой плотности водорода это соответствует?

3.25.* Оценить температуру в центре «железной» звезды ($A \simeq 60$), представляющей собой полностью ионизованный плазменный шар радиусом $R = 10^6$ км и полностью $\rho = 10$ кг/см³.

У к а з а н и е. Уравнение $7,56x^4 + 0,414x - 140 = 0$ имеет корень $x \approx 2,072$.

3.26.* Показать, что для белых карликов (звезда, состоящая из полностью ионизованных атомов с зарядом Z) из условия равенства гравитационного давления и давления электронного газа следует соотношение $MR^3 = \text{const}$. Электроны считать нерелятивистскими.

3.27. Определить плотность энергии и давление электронного газа, в котором максимальная энергия электронов $\epsilon_F = 1$ ГэВ, температура $T = 0$ К, а кулоновское отталкивание компенсируется однородно распределенными положительными зарядами (идеальный вырожденный ультрарелятивистский газ).

3.28. В плотном холодном веществе звезды (белых карликах) существуют только голые ядра и электроны, образующие вырожденный электронный газ. Найти уравнение состояния этого газа в переменных (P, V) для случая столь сильного сжатия ($\rho \gg 10^6$ г/см³), что энергия Ферми $\epsilon_F \gg m_e c^2$.

3.29.* Пульсары — космические радиоисточники, излучающие периодические последовательности импульсов — представляют собой вращающиеся нейтронные звезды. При радиусе порядка 10 км пульсары обычно имеют массу порядка солнечной (10^{33} г). Почему звезда таких размеров и массы не может состоять из протонов и электронов?

3.30. При всестороннем сжатии металла относительное изменение энергии Ферми электронов составило $0,1\%$. Оценить относительное изменение температуры Дебая решетки. Скорость звука считать постоянной.

3.31. Оценить фермиевскую энергию электронов проводимости некоторого одновалентного металла с простой кубической решеткой, зная усредненную скорость звука $s = 2$ км/с и дебаевскую температуру $\theta = 200$ К. Эффективную массу считать равной массе свободного электрона.

3.32. Вычислить частоту обращения электрона ω_c (циклотронную частоту) в постоянном однородном произвольно ориентированном магнитном поле \mathbf{B} при квадратичном анизотропном законе дисперсии $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = p_x^2/(2m_x^*) + p_y^2/(2m_y^*) + p_z^2/(2m_z^*)$.

3.33. Электрон с законом дисперсии $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p_z)$ движется в магнитном поле \mathbf{B} , параллельном оси x . Решить уравнение движения.

3.34*. В металле, кристаллическая решетка которого обладает осью симметрии z не ниже 3-го порядка, закон дисперсии электронов в простейшем случае может быть представлен в виде $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = (p_x^2 + p_y^2)/(2m^*)$. Считать, что на элементарную ячейку приходится один электрон проводимости, постоянная решетки вдоль оси z равна $a = 0,3$ нм, объем элементарной ячейки $v = 0,85a^3$, а эффективная масса $m^* = m_e$ — массе свободного электрона. Найти фермиевскую скорость электронов v_F и определить частоту обращения электронов ω_c в магнитном поле в зависимости от угла φ между напряженностью магнитного поля \mathbf{H} и осью z .

3.35*. Проводимость высокотемпературных сверхпроводников обусловлена электронами, движущимися по плоской квадратной атомной решетке с периодом a . Закон дисперсии электронов $\mathcal{E}(\mathbf{k}) = -\mathcal{E}_0(\cos k_x a + \cos k_y a)$. Считая, что каждый атом отдает в зону проводимости один электрон, нарисовать, как выглядит область заполненных электронных состояний в k -пространстве (поверхность Ферми) в первой зоне Бриллюэна, и найти ее площадь. Найти также распределение скоростей электронов на ферми-поверхности. Считать, что зона проводимости построена из атомных s -состояний.

3.36*. В металле с одним электроном на элементарную ячейку и квазиодномерным законом дисперсии $\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_0 \cos k_z a$, где $\mathcal{E}_0 = 0,5$ эВ и $a = 0,3$ нм, найти фермиевскую скорость v_F и энергию ϵ_F электронов. Как выглядит в данном случае ферми-поверхность? Считать, что зона проводимости построена из атомных s -состояний.

3.37*. Электрон с законом дисперсии $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos k_x a$ движется в постоянном однородном электрическом поле напряженностью \mathbf{E} , направленном вдоль оси x . Решить уравнение движения и дать физическую интерпретацию результата. Сделать численный расчет для случая тока 10 А, текущего по медному проводу сечением 1 мм²; удельное сопротивление меди равно $1,7 \cdot 10^6$ Ом·см, $a = 3 \text{ \AA}$, ширина зоны проводимости $\Delta\mathcal{E} \simeq 5$ эВ.

3.38. Простейший модельный закон дисперсии электронов в металле с простой кубической решеткой имеет вид $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_0[3 - \cos k_x a - \cos k_y a - \cos k_z a]$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, где a — постоянная решетки. Металл находится в постоянном однородном магнитном поле напряженностью \mathbf{H} , направленном вдоль оси z . Рассматривается электрон, квазиимпульс которого в заданный момент времени направлен вдоль оси x и равен $p = 5\pi\hbar/(6a)$. Найти скорость v и ускорение \dot{v} в этот момент.

Указание. Использовать уравнения движения $\dot{\mathbf{p}} = (e/c)[\mathbf{vH}]$, $\mathbf{v} = \partial\mathcal{E}/\partial\mathbf{p}$.

3.39. В металле, описанном в задаче 3.38, концентрация электронов такова, что фермиевский импульс в направлении оси x $[100]$ ра-

вен $p_F = \pi \hbar / (2a)$. Чему равна энергия Ферми ϵ_F ? Чему равны ферми-евские импульсы в направлениях [110] и [111] (диагональ грани и пространственная диагональ куба)?

3.40. Показать, что в металле, описанном в задаче 3.38, для малых импульсов закон дисперсии электронов проводимости изотропен. Определить эффективную массу электрона m^* .

3.41. В металле, описанном в задаче 3.38, найти скорости находящихся на уровне Ферми электронов, которые движутся в направлениях [100], [110], [111].

3.42. Электроны металла, описанного в задаче 3.38, находятся в постоянном электрическом поле E , направленном вдоль оси y . Рассматривается находящийся на уровне Ферми электрон, который в начальный момент двигался вдоль оси x . Пренебрегая всеми процессами рассеяния, определить время, через которое электрон будет двигаться под углом 45° к первоначальному направлению. Каково ускорение и энергия электрона в этот момент? На какой максимальный угол может отклониться электрон от первоначального направления движения?

З а м е ч а н и е. В действительности электрон, энергия которого превышает энергию Ферми, будет испускать фононы, и такое идеализированное рассмотрение оказывается неверным.

3.43. Оценить ширину зоны проводимости в кристалле с простой кубической решеткой, используя модельный закон дисперсии, приведенный в задаче 3.38 с $\epsilon_0 > 0$. Считать эффективную массу электрона m^* вблизи дна зоны проводимости равной массе свободного электрона. Постоянная решетки $a = 3 \text{ \AA}$.

3.44. Для значений параметров металлов I группы Na ($\epsilon_F = 3,22 \text{ эВ}$, $\theta = 158 \text{ К}$) и Cu ($\epsilon_F = 7 \text{ эВ}$, $\theta = 347 \text{ К}$) найти температуру T^* , при которой электронная и решеточная теплоемкости становятся равными.

3.45. Оценить решеточный и электронный вклады в теплоемкость серебра при температурах 300 и 3 К. Дебаевская температура равна $\theta = 220 \text{ К}$. Электронную теплоемкость считать по модели свободных электронов, концентрация которых равна $n = 5,9 \cdot 10^{22} \text{ см}^3$.

3.46. Для одновалентного металла, описываемого моделью свободных электронов, энергия Ферми $\epsilon_F = 7,0 \text{ эВ}$, а отношение эффективной массы к массе свободного электрона $m^*/m_e = 1,5$. Найти электронный вклад в теплоемкость кристалла при 1 К и величину дебаевского волнового вектора фононов K_D .

3.47. Оценить дебаевскую температуру некоторого одновалентного металла с простой кубической решеткой, если известно, что скорость звука $s = 3000 \text{ м/с}$, а коэффициент пропорциональности γ температурной зависимости электронного вклада в теплоемкости при низких температурах $\gamma = 60 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{град})$. Эффективную массу считать равной массе свободного электрона.

3.48. В модели свободных электронов найти энергию Ферми ϵ_F магния, если его теплоемкость $C_{P1} = 6 \text{ мДж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ при темпера-

туре $T_1 = 4 \text{ К}$ и $C_{p2} = 2,25 \text{ мДж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ при температуре $T_2 = 2 \text{ К}$.

3.49. Кусок серебра с температурой $T_1 = 0,1 \text{ К}$ приводится в тепловой контакт с куском золота той же массы, имеющим температуру $T_2 = 0,2 \text{ К}$. Найти их конечную температуру. Учесть, что металлы имеют одинаковые типы и практически одинаковые параметры кристаллических решеток.

3.50. При измерении теплоемкости металла в области низких температур ($T \ll \theta$) получены следующие результаты:

$T, \text{ К}$	1,41	2	2,45	3
$C_V, 10^{-4} \text{ кал}/\text{град} \cdot \text{моль}$	3,1	6,26	9,8	15,7

Оценить величину температуры Ферми этого металла.

3.51*. Энергетический спектр электронов в кристаллах конечных размеров является дискретным. Используя модель свободных электронов, оценить наименьший линейный размер L кристалла меди, при котором это обстоятельство еще не сказывается на его удельной электронной теплоемкости при температуре $T = 1 \text{ К}$. Решетка меди является гранецентрированной кубической, плотность меди $\rho = 8,96 \text{ г}/\text{см}^3$.

3.52*. В отсутствии электрического тока внешнее статическое электрическое поле, нормальное к поверхности, проникает лишь в тонкий приповерхностный слой металла. Определить закон, по которому потенциал $\varphi(x)$ убывает в глубь металла, считая, что полное падение потенциала $\varphi \ll \varepsilon_F/e$. Оценить глубину проникновения поля (длину экранирования Томаса—Ферми l_{TF}) для обычного металла типа Na ($n_0 \approx 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $\varepsilon_F \approx 5 \text{ эВ}$, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \approx 1$) и полуметалла типа Bi ($n_0 \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $\varepsilon_F \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$, $\varepsilon \approx 100$). Температура $T = 0 \text{ К}$.

Указание. Диэлектрическая проницаемость ε определяется поляризацией электронов внутренних оболочек, не участвующих в электропроводности.

3.53. Образцы натрия и меди, каждый объемом $V = 1 \text{ см}^3$, расположены таким образом, что емкость между ними $C = 1 \text{ пФ}$. Образцы соединили проволокой. Каково относительное изменение числа электронов проводимости в натрии при установлении равновесия? Исходное значение концентрации электронов в Na $n = 2,65 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Работа выхода, т. е. разность энергий электрона в вакууме и внутри металла на уровне Ферми, для Na равна $A_1 = 2,3 \text{ эВ}$, а для Cu равна $A_2 = 4,5 \text{ эВ}$.

Указание. В металлах, находящихся в электрическом контакте, электроны на уровне Ферми должны иметь одинаковую энергию.

3.54. Провести оценку $\Delta n/n$ (см. предыдущую задачу) при непосредственном соприкосновении кусков Na и Cu объемом и размерами $V = 1 \times 1 \times 1 \text{ см}^3$, считая, что контакт осуществляется в нескольких точках, а средняя величина зазора остается равной $d \approx 1 \text{ мкм}$.

3.55: Оценить контактную разность потенциалов между двумя кубиками из одинакового металла с простой кубической кристаллической структурой, если их стороны равны соответственно 1 см и 10^{-6} см.

3.56: Получить закон преломления для электронов, проходящих через плоскую границу раздела двух металлов с концентрацией электронов $n_1 = 1 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $n_2 = 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. В каком из металлов электроны претерпевают полное внутреннее отражение? Закон дисперсии в обоих металлах изотропен. Найти угол полного внутреннего отражения электронов с фермиевской энергией.

3.57. Плоская граница (плоскость xz) отделяет монокристалл металла одной ориентации от кристалла этого же металла, ориентация которого повернута на 90° вокруг оси Oz , перпендикулярной плоскости (рис. 75). Закон дисперсии электронов в одном кристалле

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_x^*} + \frac{p_y^2}{2m_y^*} + \frac{p_z^2}{2m_z^*}.$$

Найти закон дисперсии в другом кристалле и определить закон преломления электронных волн на межкристаллической границе, исходя из закона сохранения энергии и тангенциальной компоненты импульса. Написать закон преломления для случая малых углов падения. Для простоты рассматривать только электроны, движущиеся в плоскости xu .

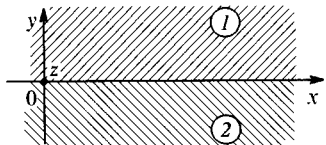


Рис. 75

3.58: Чувствительностью термопары (рассматривается спай различных металлов) называется отношение $\beta = \Delta\phi/\Delta T$ разности потенциалов $\Delta\phi$ на ее концах к разности температур ΔT ее спаев. Оценить, во сколько раз чувствительность β термопары вблизи комнатной температуры T_0 отличается от ее чувствительности при температуре жидкого гелия $T_{\text{He}} = 4,2 \text{ К}$.

3.59. В металле, помещенном в магнитное поле напряженностью H , полная энергия электрона включает зеемановскую энергию $\pm \mu_B H$, где μ_B — магнетон Бора. В условиях термодинамического равновесия энергия Ферми ε_F одинакова для электронов с различным направлением спина. Исходя из этого, определить относительную разность фермиевских импульсов $\delta p/p_F = (p_+ - p_-)/p_F$ и относительную разность концентраций $\delta n/n = (n_+ - n_-)/n$ (где $n = n_+ + n_-$) для электронов с противоположными направлениями спинов, а также удельный магнитный момент M (намагниченность) электронного газа (парамагнетизм Паули). Считать, что $\mu_B H \ll \varepsilon_F$. Вычислить парамагнитную восприимчивость χ_{Na} для натрия, у которого $n = 2,65 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, а отношение эффективной массы к массе свободного электрона $m^*/m_e \approx 0,8$.

3.60. При не слишком высоких давлениях гелий остается жидким вплоть до температуры $T = 0 \text{ К}$. Так как изотоп ^3He имеет полуцелый

спин (см. задачу 2.44), то атомы, составляющие жидкий гелий-3, подчиняются статистике Ферми. Определить температурную зависимость молярной теплоемкости $C(T)$ жидкого гелия-3 при низких температурах и оценить числовое значение коэффициента в этой зависимости, пренебрегая межатомным взаимодействием. Молярный объем жидкого гелия при нормальном давлении $V = 37 \text{ см}^3/\text{моль}$.

3.61. В области температур от 3 до 100 мК жидкий ${}^3\text{He}$ ведет себя во многих отношениях подобно слабозаимодействующему вырожденному газу ферми-частиц. Из экспериментов известно, что при $T = 3 \text{ мК}$ молярная теплоемкость гелия-3 равна $C = 4,5 \cdot 10^5 \text{ эрг}/(\text{К} \cdot \text{моль})$, а его плотность $\rho = 0,115 \text{ г}/\text{см}^3$. Оценить эффективную массу атомов ${}^3\text{He}$ при этой температуре.

3.62* Считая, что электроны в проводниках имеют эффективную массу m^* , а их концентрация равна n , и они находятся в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , найти частоту их собственных длинноволновых продольных колебаний — плазменную частоту ω_p . Диссипацией энергии пренебречь.

3.63. Найти отношение среднего расстояния между электронами в вырожденном электронном газе к классическому радиусу электрона в условиях, когда фермиевская энергия электронов равна энергии кванта плазменных колебаний.

3.64. Найти энергию плазмона (кванта плазменных колебаний) в металле, в котором фермиевская энергия равна $\epsilon_F = 5,5 \text{ эВ}$. Эффективная масса равна массе свободных электронов, диэлектрической восприимчивостью атомных остовов пренебречь.

3.65. Характерная величина удельного сопротивления металлов при комнатной температуре $\rho \approx 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Приняв для постоянной кристаллической решетки значение $a = 3 \text{ \AA}$, оценить длину свободного пробега электрона Λ .

3.66. В тонких металлических проволоках длины свободного пробега электронов при низких температурах обычно лимитируются диаметром проволоки. Исходя из этого, оценить эффективную удельную проводимость σ тонкой металлической проволоки диаметром $d = 0,1 \text{ мм}$, приняв для остальных необходимых параметров значения, типичные для металлов.

3.67* Найти закон растекания объемного заряда в проводниках и характерное время этого процесса — т. н. максвелловское время релаксации τ_M . Определить τ_M для кристалла чистого германия при комнатной температуре ($\sigma = 0,014 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$, $\epsilon = 16$). Считать, что избыточная концентрация электронов, создающих объемный заряд, мала по сравнению со средней концентрацией электронов проводимости.

3.68* Найти частотную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ проводника. Объяснить причину прозрачности металлов в ультрафиолетовой области спектра. Считать, что электроны проводимости описываются эффективной массой m^* и временем свободного пробега τ .

3.69. При прохождении электромагнитной волны через тонкую медную пленку ее интенсивность уменьшается в $\alpha = 20$ раз. Волна распространяется по нормали к поверхности пленки, длина волны в вакууме $\lambda = 4500 \text{ \AA}$. Оценить толщину пленки l , если энергия Ферми электронов в меди $\epsilon_F = 7 \text{ эВ}$, эффективная масса близка к массе свободного электрона. Столкновения электронов с решеткой не учитывать, статическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1$.

3.70. Определить толщину скин-слоя δ , т. е. глубину проникновения касательного к поверхности электромагнитного поля с частотой ω в металл с удельной проводимостью σ . Считать $\omega\tau \ll 1$, где τ — время свободного пробега (время релаксации импульса). Вычислить δ для меди при комнатной температуре ($\sigma = 0,6 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$) на частоте $\nu = 10^{10} \text{ Гц}$. См. задачи 3.66 и 3.67.

3.71. Рассмотреть движение электрона в кристалле в скрещенных электрическом (\mathbf{E}) и магнитном (\mathbf{H}) полях ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$). Эффективная масса электронов равна m^* , а время свободного пробега — τ . Применить полученные результаты к вычислению удельной проводимости как функции магнитного поля $\sigma(H)$ в следующих случаях: ток течет через диск Корбино (в диске Корбино электроды имеют форму концентрических окружностей, а магнитное поле прикладывается перпендикулярно плоскости диска); ток течет по бесконечной пластине, причем \mathbf{E} и \mathbf{H} лежат в плоскости пластины. Пояснить физическую причину возникновения магнитосопротивления (т. е. уменьшения $\sigma(H)$ с ростом H) в диске Корбино и причину отсутствия магнитосопротивления в пластине.

3.72. Вычислить форму кривой циклотронного резонанса (т. е. зависимость проводимости от частоты) для электронов с изотропной эффективной массой m^* и временем свободного пробега τ . Электромагнитная волна циркулярно поляризована в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю.

3.73. Электронная теплопроводность κ тонких металлических проволок, как и их электрическая проводимость (задача 3.66), при низких температурах лимитируется диаметром проволоки. Оценить в этих условиях κ для проволоки диаметром $d = 0,1 \text{ мм}$ при температуре $T = 10 \text{ К}$, приняв для остальных параметров значения, типичные для металлов.

3.74. В тонких проволочках длины свободного пробега лимитируются диаметром проволоки; поэтому длины свободного пробега электронов и фононов практически совпадают. Оценить, при какой температуре в этих условиях сравниваются электронная и решеточная теплопроводности.

3.75. Удельное сопротивление сплава $\text{Ag} + 1\% \text{ Ni}$ при температуре $T \approx 0 \text{ К}$ равно $\rho = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Считая, что это сопротивление определяется только примесными атомами никеля, оценить величину сечения рассеяния электронов на атомах никеля. Постоянная ГЦК решетки серебра $a = 4,1 \text{ \AA}$.

3.76. Оценить удельное сопротивление одновалентного металла с относительной атомной массой $A = 100$ при температуре $T = 300$ К, считая, что эффективный радиус рассеяния электронов на тепловых флуктуациях решетки по порядку величины равен амплитуде тепловых колебаний атомов, фермиевская скорость $v_F = 1,4 \cdot 10^8$ см/с. Считать эффективную массу электрона равной массе свободного электрона. Температура Дебая $\theta = 200$ К.

3.77. Эффективное сечение рассеяния электронов на фононах при $T > \theta$ можно считать равным $\sigma = \pi \bar{\xi}^2$, где $\sqrt{\bar{\xi}^2}$ — амплитуда тепловых колебаний атомов. Оценить для одновалентного металла с концентрацией свободных электронов $n \simeq 5 \cdot 10^{22}$ см⁻³ и постоянной решетки $a \simeq 3$ Å при комнатной температуре среднюю длину свободного пробега электрона Λ , обусловленную электрон-фононным взаимодействием (модуль Юнга считать равным $E = 10^{12}$ дин/см²).

3.78: Оценить скорость звука в металлическом стержне с плотностью $\rho = 9$ г/см³ при комнатной температуре, $T \gg \theta$. Кристаллическую решетку считать простой кубической с постоянной $a \simeq 3$ Å. Амплитуда тепловых колебаний при комнатной температуре $\sqrt{\bar{\xi}^2} \simeq 0,04a$.

3.79: На поверхности металлической пластины толщиной $d = 0,1$ см выделяется некоторая энергия, так что изменение температуры пластины $\Delta T \ll T_0 = 300$ К, T_0 — начальная температура ($T_0 \gg \theta$). Полагая, что длина пробега электрона в металле $\Lambda = 10^{-6}$ см, оценить характерное время, за которое противоположная поверхность пластины «почувствует» это изменение температуры. Считать металл пластины одновалентным с простой кубической решеткой и $a \simeq 3$ Å.

3.80. Оценить эффективное время выравнивания температуры в медном стержне длиной $L = 10$ см в вакууме. Плотность меди $\rho = 8,96$ г/см³, коэффициент теплопроводности $\chi = 3,8$ Вт/(см·К), $T \gg \theta$, где θ — дебаевская температура. Остыванием за счет излучения пренебречь.

3.81. В области температур от 1 до 10 мК растворенные в ⁴Ne атомы ³Ne ведут себя как идеальный ферми-газ. Насколько уменьшится удельная теплопроводность такого раствора в этом диапазоне температур, если концентрацию ³Ne в ⁴Ne уменьшить с 5% до 1,25%? Теплопроводностью атомов ⁴Ne можно пренебречь.

3.82. Термодинамические свойства жидкого ³Ne хорошо описываются ферми-газовой моделью. Определить на основе этой модели насколько уменьшается вязкость ³Ne при уменьшении температуры с 2 до 1 К.

Указание. Учесть, что вероятность перехода частицы из начального состояния в конечное пропорциональна плотности конечных состояний.

3.83. Вычислить плотность тока $j(T)$ термоэлектронной эмиссии с поверхности металла (формула Ричардсона). Считать, что работа выхода $A \gg k_B T$, A — разность между энергией электрона в вакууме и на уровне Ферми металла. Эффективная масса электронов в металле равна m^* .

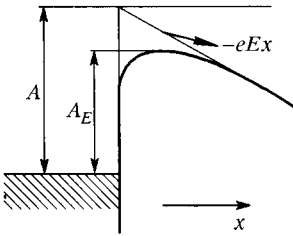


Рис. 76

тока $j(T, E)$ от поля (рис. 76).

3.85. Серебро кристаллизуется в гранцентрированную кубическую решетку с периодом $a = 4,1 \text{ \AA}$. Красная граница фотоэффекта для серебра $\lambda_0 = 2680 \text{ \AA}$. Оценить (в электрон-вольтах) положение дна зоны проводимости серебра относительно вакуума. Эффективную массу электронов принять равной массе свободного электрона.



Рис. 77

3.86. Для описания свойств металлов часто используется так называемая модель «желе», в которой считается, что точечные ионы погружены в электронную жидкость. Найти на основе этой модели скорость звука в металлическом калии, у которого постоянная ОЦК-решетки равна $a = 5,23 \text{ \AA}$. Считать, что упругие свойства калия обусловлены только электронами, которые можно рассматривать как свободный электронный газ. Эффективную массу электронов считать равной массе свободных электронов.

3.87. Электронные и решеточные свойства некоторых типов углеродных нанотрубок можно описать в рамках одномерной модели. Оценить отношение теплоемкостей решетки и электронов в таких нанотрубках при низких температурах. Считать, что скорость звука $s = 10^6 \text{ см/с}$, а скорость Ферми $v_F = 10^8 \text{ см/с}$.

3.88. Согласно А. Ф. Иоффе и А. Р. Регелю (1960 г.) кристалл сохраняет металлические свойства до тех пор, пока длина свободного пробега электронов превышает дебройлевскую длину волны. Исходя из этого, оценить максимальную величину удельного сопротивления разупорядоченного металла (в Омах). Эффективную массу электрона считать равной массе свободного электрона, плотность электронов $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

3.89. С помощью туннельного микроскопа в 1993 г. исследовалось распределение плотности двумерного электронного газа на поверхности монокристалла меди, где есть два точечных дефекта, на которых происходит интерференция волн де Бройля (см. фото — рис. 77). Расстояние между дефектами равно 42 \AA . Оценить поверхностную плотность электронов проводимости этого образца меди.

3.90* В области низких температур от 3 до 100 мК свойства растворов ^3He в ^4He можно описать, рассматривая процесс растворения как обратимое расширение вырожденного ферми-газа ^3He с эффективной массой $m_3 = 2,4m_{^3\text{He}}$ в объеме ^4He . Найти конечную температуру системы при адиабатическом растворении 1 моля ^3He в 19 молях ^4He , если исходная температура компонент $T = 50 \text{ мК}$. Оценку теплоемкости ^4He проводить по дебаевской модели с $\theta = 19 \text{ К}$. Плотность жидкого ^3He равна $\rho_3 = 0,08 \text{ г/см}^3$, а плотность жидкого ^4He — $\rho_4 = 0,14 \text{ г/см}^3$.

3.91. В области низких температур от 3 до 100 мК тепловые свойства растворов ^3He в ^4He можно описать, рассматривая процесс растворения как обратимое расширение вырожденного ферми-газа ^3He с эффективной массой $m_3 = 2,4m_{^3\text{He}}$ в объеме ^4He . Найти количество тепла, которое может поглотить система при растворении одного моля ^3He в 19 молях ^4He при $T = 50 \text{ мК}$. Дебаевская температура ^4He $\theta = 19 \text{ К}$. Плотность жидкого ^3He равна $\rho_3 = 0,08 \text{ г/см}^3$, а жидкого ^4He — $\rho_4 = 0,14 \text{ г/см}^3$.

3.92. С понижением концентрации в электронной ферми-жидкости в металлах может произойти фазовый переход с образованием решетки электронов на фоне однородного «размазанного» положительного заряда ионов — т.н. вигнеровского кристалла. Однако нулевые колебания электронов могут приводить к их делокализации, если отношение амплитуд нулевых колебаний к межэлектронному расстоянию превысит $\alpha = 1/4$. Оценить, при каких концентрациях электронов это произойдет. Кристалл рассматривать как систему сферических элементарных ячеек, суммарный объем которых равен объему кристалла. Ячейки считать невзаимодействующими.

3.93* В металлах основной вклад в энергию связи, т.е. в работу, которую надо совершить для превращения кристалла в совокупность невзаимодействующих атомов, дает понижение средней энергии электронов по сравнению с таковой в свободном атоме. Используя данные по теплотам плавления и парообразования металлической меди $q = 13 \text{ кДж/моль}$ и $\Lambda = 302 \text{ кДж/моль}$, найти

положение дна зоны проводимости, если ее ширина $\Delta\mathcal{E} = 14$ эВ, а энергия ионизации $4s$ -электрона меди $W = 7,7$ эВ. Электроны в металле считать свободными.

3.94. В металлах основной вклад в энергию связи, т.е. в работу, которую надо совершить для превращения кристалла в совокупность невзаимодействующих атомов, дает понижение средней энергии электронов по сравнению с таковой в свободном атоме. Для металлического калия эта величина составляет $\mathcal{E}_{\text{св}} = 0,941$ эВ, а энергия $4s$ -электрона в свободном атоме калия $\mathcal{E}_{4s} = -4,34$ эВ. Найти положение дна зоны проводимости в металлическом калии. Калий кристаллизуется в объемноцентрированную кубическую решетку с периодом $a = 5,22$ Å. Закон дисперсии электронов в зоне проводимости считать квадратичным с эффективной массой, равной массе свободного электрона.

3.95. Длина волны характеристического излучения в газообразном натрии (переход $3s - 2p$) составляет $\lambda = 485$ Å. Оценить относительное уширение $\Delta\lambda/\lambda$ этой линии в металлическом натрии. Натрий кристаллизуется в объемноцентрированную кубическую решетку с постоянной $a = 4,23$ Å. Закон дисперсии электронов считать квадратичным с эффективной массой, равной массе свободного электрона. Образованием зоны из $2p$ -состояний атома натрия пренебречь.

3.96*. Элементы первой группы — щелочные металлы — кристаллизуются в объемноцентрированную кубическую решетку. В приближении сильной связи закон дисперсии электронов в этих металлах может быть представлен в виде:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = -A \cos \frac{k_x a}{2} \cos \frac{k_y a}{2} \cos \frac{k_z a}{2},$$

где $A = \text{const}$, a — постоянная решетки. Определить, какой вид имела бы поверхность Ферми в этом приближении и найти объем первой зоны Бриллюэна для металлического Na с $a = 4,23$ Å.

3.97*. Если ферми-поверхность имеет конгруэнтные участки, которые совмещаются друг с другом (вкладываются друг в друга) при переносе в пространстве квазиимпульсов на некоторый вектор \mathbf{Q} , то такая ситуация носит название «нестинг», а вектор \mathbf{Q} называется вектором нестинга. Реально речь идет о плоских участках поверхности Ферми. Наличие нестинга приводит к ряду особенностей в физических свойствах полупроводников. Определить вектор нестинга в условиях задач 3.35* и 3.96*.

3.98*. При нормальном падении плоской электромагнитной волны частотой $\omega = 3 \cdot 10^{13}$ с⁻¹ на толстый образец из легированного GaAs n -типа наблюдается минимум отражения. Определить концентрацию электронов в зоне проводимости. Эффективная масса электрона $m^* = 0,07m_e$, диэлектрическая проницаемость решетки $\epsilon_l = 11$. Подвижность электронов в GaAs $\mu = 8500$ см²/В·с, влиянием дырок пренебречь.

§ 4. Электроны в полупроводниках и низкоразмерных системах¹⁾

4.1.* В полупроводниках, как и в металлах (см. задачу 3.52), внешнее электрическое поле экранируется электронами проводимости. Отличие состоит в том, что поскольку в полупроводниках концентрация электронов проводимости намного меньше, чем в металлах, то электронный газ обычно является невырожденным, т. е. подчиняется распределению Больцмана. Определить закон, по которому в этих условиях поле, нормальное к поверхности, убывает в глубь невырожденного полупроводника, считая внешнее поле слабым. Оценить глубину проникновения $l_{\text{ДН}}$ (длину экранирования Дебая—Хюккеля) для полупроводника со статической диэлектрической проницаемостью $\epsilon \approx 15$ и концентрацией электронов проводимости $n_0 \approx 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при температуре $T \approx 350 \text{ К}$.

4.2. Используя известные формулы для энергии связи электрона в атоме водорода и боровского радиуса $r_{\text{Б}}$, получить аналогичные формулы для примесного центра большого радиуса в полупроводнике со статической диэлектрической проницаемостью ϵ и эффективной массой электрона m^* . Оценить эти величины для донорных центров в кристалле InSb , где $m^* \approx 0,013m$ — масса свободного электрона, а $\epsilon \approx 16$.

Указание. Радиус центра считать большим, если он значительно превышает постоянную решетки.

4.3. Найти энергию связи $\epsilon_{\text{ЭК}}$, радиус $r_{\text{ЭК}}$ и эффективную массу $M_{\text{ЭК}}$ экситона, т. е. водородоподобного образования, построенного из электрона и дырки. Эффективные массы электрона и дырки равны m_-^* и m_+^* , статическая диэлектрическая проницаемость полупроводника равна ϵ .

4.4.* Толстая пластинка полупроводника находится в вакууме при температуре $T = 300 \text{ К}$. Она помещена во внешнее электрическое поле $E = 10^5 \text{ В/см}$, направленное перпендикулярно к поверхности пластинки. Определить объемную концентрацию носителей тока вблизи поверхности полупроводника. Статическая диэлектрическая проницаемость полупроводника $\epsilon = 10$.

4.5. При какой плотности вырожденного электронного газа в сильнолегированном полупроводнике энергия длинноволновых плазмонов (квантов плазменных колебаний) равна фермиевской энергии при $T = 0 \text{ К}$? Эффективная масса электронов проводимости $m^* = 0,015m$ (m — масса свободного электрона), статическая диэлектрическая проницаемость нелегированного кристалла $\epsilon = 16$. Вклад примесных электронов в ϵ не учитывать.

¹⁾ Во всех задачах этого раздела энергия электронов отсчитывается от дна зоны проводимости.

4.6. Получить формулы, описывающие зависимость концентрации носителей тока n_- и n_+ в невырожденном собственном полупроводнике от температуры T . Эффективные массы электронов и дырок равны m_-^* и m_+^* . Считать химический потенциал системы μ заданным.

4.7. Найти зависимость химического потенциала μ от температуры T в невырожденном собственном полупроводнике с шириной запрещенной зоны Δ . Использовать условие электронейтральности. Параметры носителей тока: n_- , m_-^* и n_+ , m_+^* .

4.8. Спектр носителей тока в валентной зоне многих полупроводников характеризуется несколькими ветвями $\mathcal{E}(k)$, каждой из которых соответствует свой тип дырок. Так, например, в Ge в центре зоны Бриллюэна имеются минимумы энергии двух ветвей с эффективными массами $m_{+1} = 0,04m_e$ и $m_{+2} = 0,34m_e$. Оценить долю легких дырок от общего их числа в Ge.

4.9. При не слишком низких температурах все мелкие донорные примеси, содержащиеся в полупроводнике n -типа, оказываются ионизованными. Найти концентрацию электронов n_- и дырок n_+ , если известна концентрация n_i собственных носителей (т. е. концентрация электронов и дырок в полупроводнике без примесей). Концентрация доноров $n_d = 6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, а $n_i = 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$.

4.10. Исследовать и схематически изобразить на графике температурную зависимость концентрации электронов $n_-(T)$ и дырок $n_+(T)$ в полупроводнике с мелкими донорными уровнями. Энергия связи электрона на донорах $\mathcal{E}_d \ll \Delta$, Δ — ширина запрещенной зоны. Концентрация доноров n_d задана. Спиновые состояния электронов на доноре не учитывать.

4.11. Пластика собственного полупроводника с шириной запрещенной зоны $\Delta = 1$ эВ, площадь боковых поверхностей которой $S = 1 \text{ см}^2$, а толщина — много больше дебаевской длины этого полупроводника, отделена от электродов слоями изоляторов. Толщина слоев $l = 1 \text{ мкм}$, их диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 200$. К системе подводится прямоугольное импульсное напряжение с амплитудой импульсов $U_0 = 100 \text{ В}$ и частотой следования $\nu = 10^3 \text{ Гц}$. В момент приложения импульса в полупроводнике происходит разряд, подобный газовому. В результате ударной ионизации образуются свободные электроны и дырки, которые разведются полем к краям пластины и полностью экранируют от поля внутреннюю часть полупроводника. После снятия импульса электроны и дырки рекомбинируют. Определить полный световой поток Φ данного источника света, считая, что все рекомбинации излучательные и поглощение света отсутствует.

4.12. Полуметаллом называется вещество, в котором имеется слабое перекрытие валентной зоны и зоны проводимости. При этом экстремумы соответствующих законов дисперсии расположены в различных точках зоны Бриллюэна. В результате при $T = 0 \text{ К}$ в одной из них

имеется небольшое число электронов проводимости, в другой — такое же число дырок (рис. 78). Найти концентрацию электронов и дырок n и их энергии Ферми ε_F^- и ε_F^+ , если величина перекрытия зон $\Delta\varepsilon = 0,04$ эВ, эффективная масса электрона $m_-^* = 0,05m$, дырки $m_+^* = 0,03m$, где m — масса свободного электрона.

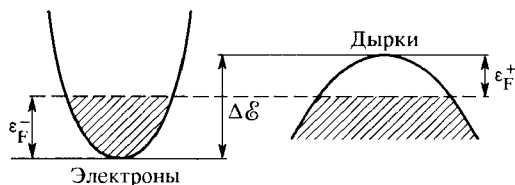


Рис. 78

4.13. При малом содержании примесей других атомов в полупроводниковых материалах энергетические состояния примесных атомов можно описывать аналогично состояниям водородоподобного атома. Исходя из этого, оценить для примесных атомов мышьяка в германии энергию ионизации $\varepsilon_{\text{ион}}$ (вблизи $T = 0$ К), если известно, что эффективная масса электронов проводимости в Ge с внедренными в него атомами As $m_-^* = 0,25m$, где m — масса свободного электрона, а диэлектрическая проницаемость Ge $\varepsilon = 16,3$.

4.14. Используя законы сохранения энергии и импульса, рассмотреть рассеяние медленного электрона в полупроводнике с поглощением или испусканием длинноволнового акустического фона. Найти зависимость угла φ между волновым вектором фона \mathbf{K} и начальным импульсом электрона \mathbf{p} от p и K . Показать, что при $v < s$ (v — скорость электрона, s — скорость звука) электрон не может испустить фотон, а при $v \gg s$ электроны рассеиваются почти упруго, т. е. их энергия при рассеянии меняется мало. Считать, что дисперсионные зависимости для электрона и фона имеют вид $\varepsilon = p^2/(2m_-^*)$ и $\hbar\omega(\mathbf{K}) = \hbar sK$.

4.15. При $T = 0$ К электроны, находящиеся в инверсном слое полупроводника, могут рассматриваться как двумерный вырожденный газ. Найти фермиевский импульс таких электронов, если их концентрация в расчете на единицу поверхности $n_s \approx 10^{13} \text{ см}^{-2}$.

4.16. Вблизи поверхности гетероструктуры GaAs — AlGaAs существует инверсный слой, электроны в котором представляют собой двумерный вырожденный газ с поверхностной плотностью $n_s = 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. В наиболее совершенных образцах при низких температурах сопротивление R_{\square} любого квадратного участка такого слоя имеет порядок 10 Ом. Оценить длину свободного пробега Λ электронов в слое.

4.17. $(p - n)$ -переход изготовлен из материала, характеризующегося при $T = 300$ К концентрацией собственных носителей $n_i = 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Концентрации доноров и акцепторов по обе сто-

роны перехода одинаковы и равны $n = 6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Определить величину потенциального барьера на переходе.

4.18. Как изменится ток насыщения полупроводникового диода при понижении температуры от 20 до 0°C ? За счет какого механизма возникает этот ток? Вследствие какого процесса и примерно при какой температуре T^* эффект выпрямления начнет исчезать? Диод изготовлен из материала с шириной запрещенной зоны $\Delta = 0,7 \text{ эВ}$ и с одинаковыми эффективными массами электронов и дырок $m^* = 0,3m$, m — масса свободного электрона. Концентрация примесей по обе стороны перехода равна $n_{\text{пр}} = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Считать, что время жизни неравновесных носителей тока от температуры не зависит.

4.19. Спротивление ($p - n$)-перехода при небольшом положительном напряжении ($eV/kT \ll 1$) равно $R = 400 \text{ Ом}$, а его площадь $S = 0,5 \text{ см}^2$. Предполагая, что ток переносится главным образом дырками, оценить максимальную плотность обратного тока j_s (тока насыщения) при температуре $T = 300 \text{ К}$.

4.20. В некоторых полупроводниках длина свободного пробега электронов оказывается порядка межатомных расстояний. В такой ситуации движение электронов можно рассматривать как случайные «прыжки» между соседними узлами. Оценить при температуре $T \approx 300 \text{ К}$ удельную проводимость σ такого полупроводника, если концентрация электронов $n \approx 10^{18} \text{ см}^{-3}$, средняя частота прыжков $\nu \approx 10^{13} \text{ с}^{-1}$, а межатомное расстояние $a \approx 3 \text{ \AA}$.

4.21. При освещении электронного полупроводника вблизи его поверхности генерируются дырки, которые затем диффундируют в объем, где рекомбинируют с электронами проводимости. Определить эффективную глубину проникновения $l_{\text{эфф}}$ дырок, если их время жизни равно $\tau = 10^{-3} \text{ с}$, подвижность $\mu = 2000 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Температура полупроводника $T = 300 \text{ К}$.

4.22. В кристалле кремния, легированного донорными примесями с энергией ионизации $\mathcal{E}_n = 0,01 \text{ эВ}$, концентрация носителей в зоне проводимости возрастает в $a = 10$ раз при повышении температуры от 0°C до 100°C . Оценить концентрацию доноров n_d . Принять, что ширина запрещенной зоны в кремнии равна $\Delta = 1,1 \text{ эВ}$, эффективная масса носителей $m_* = 0,2m$.

4.23. Кристалл кремния Si с плотностью $\rho = 2,4 \text{ г/см}^3$ легирован акцепторами с концентрацией $n_a = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и энергией ионизации $\mathcal{E}_n = 0,01 \text{ эВ}$. Облучение нейтронами вызывает реакцию: $p + {}^{28}\text{Si} \rightarrow {}^{28}\text{Al} + p$. Во сколько раз изменится концентрация n_+ дырок в кристалле при комнатной температуре? Сечение реакции $\sigma = 1 \text{ бн}$, плотность потока нейтронов $j = 10^{10} \text{ нейтрон}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$, время облучения $t = 10^6 \text{ с}$.

4.24. Если нанести пленку металла на плоскую поверхность легированного кремния, то получится контакт Шоттки — выпрямляющий переход. При определенной полярности напряжения V между пленкой металла и объемом полупроводника ток через контакт пренебре-

жимо мал. При этом контакт эквивалентен плоскому конденсатору, у которого роль одной из обкладок играет слой ионизованных примесей. Найти толщину H этого слоя объемного заряда Q и дифференциальную емкость $C = (dQ/dV)$ контакта с площадью $S = 1 \text{ см}^2$. Считать, что примеси ионизованы однократно в поле $E \neq 0$ и нейтральны в поле $E = 0$. Концентрация примесей $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, напряжение $V = 5 \text{ В}$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 12$.

4.25. В германий введены примеси золота ($n_{\text{Au}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$), атомы которого могут захватить один (на уровень Au^-) или два (один на уровень Au^- , а второй — на уровень Au^{2-}) электрона, и сурьмы ($n_{\text{Sb}} = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$). Акцепторные уровни атомов золота Au^- и Au^{2-} лежат выше потолка валентной зоны на $\epsilon_1 = 0,15 \text{ эВ}$ и $\epsilon_2 = 0,5 \text{ эВ}$ соответственно. Донорный уровень атомов сурьмы лежит на $\epsilon_3 = 0,01 \text{ эВ}$ ниже дна зоны проводимости (рис. 79). Определить тип проводимости легированного кристалла и оценить концентрацию носителей при температуре $T = 77 \text{ К}$. Ширина запрещенной зоны $\Delta = 0,7 \text{ эВ}$, а эффективные плотности состояний для зоны проводимости и валентной зоны (статфакторы зоны) $Q_- = Q_+ = 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

Указание. Специфика акцепторных уровней Au состоит в том, что уровень с энергией $\epsilon_2 - \Delta$ появляется только после того, как будет заполнен электронами уровень с энергией $\epsilon_1 - \Delta$ (так называемые альтернативные уровни).

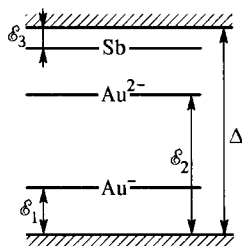


Рис. 79

4.26. Оценить отношение электронной теплоемкости чистого Si к его решеточной теплоемкости при температуре $T = 1000 \text{ К}$. Считать, что концентрация электронов проводимости $n_- = 1,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, ширина запрещенной зоны $\Delta = 0,75 \text{ эВ}$, дебаевская температура $\theta = 540 \text{ К}$, концентрация атомов $N = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

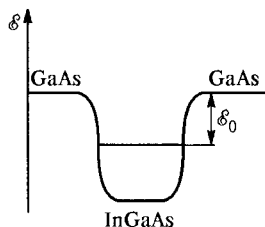


Рис. 80

4.27. Квантоворазмерная структура GaAs — InGaAs — GaAs представляет собой слой InGaAs, расположенный между толстыми слоями GaAs. В такой структуре движение электронов в параллельном к слоям направлении является свободным, а в перпендикулярном к слоям направлении электроны оказываются в одномерной потенциальной яме (рис. 80). В этом потенциале имеется только одно связанное состояние электронов с энергией связи $\epsilon_0 = 50 \text{ мэВ}$. Эффективная масса электронов $m^* = 0,08m$, где m — масса свободного электрона. Какова максимальная поверхностная плотность электронов n_s , которые могут быть локализованы в слое InGaAs при нулевой температуре.

4.28. Современная технология позволяет изготавливать так называемые квантовые проволоки — проводящий канал на полупроводниковой структуре AlGaAs — GaAs — AlGaAs, в котором электроны ведут себя как одномерный газ с эффективной массой $m^* = 0,07m$, где m — масса свободного электрона. При этом в поперечном направлении электроны находятся в потенциальной яме, в которой имеется только один уровень с энергией связи $\epsilon_0 = 50$ мэВ (рис. 81). Какова

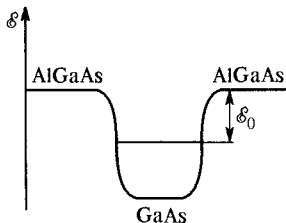


Рис. 81

максимальная погонная плотность электронов n_l (на единицу длины), которые могут быть локализованы в такой структуре при нулевой температуре?

4.29. Нобелевская премия по физике 1985 г. была присуждена фон Клитцингу за открытие квантового эффекта Холла — явления, при котором наблюдается квантование электропроводности двумерного проводящего слоя $\sigma = j\sigma_0$ (j — целое число), сформированного на поверхности полупроводника при очень низких

температурах. Оценить величину кванта проводимости σ_0 , определив его как минимально возможное значение проводимости двумерного металла и выразить его в сименсах (См. задачу 3.88).

4.30. Тонкие пленки характеризуют сопротивлением «на квадрат» R_{\square} , т. е. сопротивлением квадрата произвольного размера $L \times L$. Определить R_{\square} (в омах) для двумерной системы с минимальной металлической проводимостью, в которой длина пробега электронов равна межатомному расстоянию. Решетка кристалла — простая квадратная, концентрация носителей — 1 электрон/атом, температура $T = 0$ К.

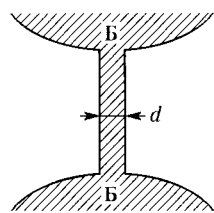


Рис. 82

4.31*. В инверсных слоях на поверхности легированных полупроводников электроны образуют двумерный вырожденный газ ферми-частиц с поверхностной плотностью n_s , определяемой степенью легирования. Методами литографии в таких слоях можно формировать длинные и узкие мостики шириной $d \approx 1$ мкм между широкими «берегами» ББ (рис. 82). При приложении к «берегам» мостика напряжения по обе стороны мостика возникает разность плотностей электронов.

Однако при температуре $T = 0$ К и при малых n_s в силу волновых свойств электронов проводимость мостика равна нулю. Определить при какой величине n_s появится конечная проводимость мостика. Оценить при данном n_s величину сопротивления мостика. Оценку проводить в модели свободных электронов. Считать, что длина свободного пробега электрона много меньше длины мостика.

4.32. В системе с квазидвумерным электронным газом приложенное перпендикулярно к слою магнитное поле называется кван-

тующим, если тепловая энергия электронов \mathcal{E}_T много меньше зеемановского расщепления $\Delta\mathcal{E}$ спиновых подуровней Ландау. Оценить, при какой температуре в поле $B = 10$ Тл зеемановское расщепление в 10 раз больше тепловой энергии электронов.

4.33*: При конечных температурах продольное сопротивление в двумерном электронном газе в условиях целочисленного квантового эффекта Холла оказывается хотя и малым, но конечным. Оценить величину проводимости в кремниевой МОП-структуре с поверхностной плотностью электронов $n_0 = 10^{12}$ см $^{-2}$ при полностью заполненном первом уровне Ландау (фактор заполнения $\nu = 1$, т. е. число квантов потока равно числу электронов) и температуре $T = 1,5$ К. Время релаксации электронов, определяемое примесями, равно $\tau = 10^{-10}$ с. Эффективная масса электронов $m_* = 0,2m$, где m — масса свободного электрона.

4.34. Холловское сопротивление МДП-структуры в магнитном поле $B = 2,5$ Тл равно $R_H = 4,3$ кОм. Какова плотность электронов?

4.35. Для наблюдения дробного квантового эффекта Холла необходимо, чтобы кулоновское взаимодействие U между электронами играло решающую роль, т. е. было существенно больше их кинетической энергии \mathcal{E} . Оценить, насколько надо изменить плотность электронов n_s в двумерном электронном газе, чтобы отношение U/\mathcal{E} увеличилось в 10 раз.

4.36*: Построить зависимость магнитного момента \mathfrak{M} и химического потенциала \mathcal{E}_F единицы площади двумерного металла (см. задачу 4.37) от магнитного поля B при $T = 0$ К. Для упрощения спин электрона не учитывать (см. указание к задаче 4.37).

4.37*: Найти магнитный момент \mathfrak{M} единицы площади двумерного электронного газа с плотностью $n_s = 4,8 \cdot 10^{11}$ см $^{-2}$, образованного на поверхности кремниевой структуры во внешнем магнитном поле $B = 8,28$ Тл. Температуру считать равной $T = 0$ К, эффективную массу $m_* = 0,2m$, где m — масса свободного электрона.

У к а з а н и е: по определению $\mathfrak{M} = -\partial\mathcal{E}/\partial B$, \mathcal{E} — энергия системы.

4.38*: На поверхность длинной кварцевой нити нанесен тонкий слой лития. На рис. 83 приведен результат измерения продольного (вдоль нити) магнитосопротивления этого слоя, т. е. зависимости изменения сопротивления от величины приложенного продольного магнитного поля, при температуре ~ 1 К (Д. Ю. Шарвин, Ю. В. Шарвин, 1981 г). Оценить диаметр нити.

4.39*: В 1986 г. Осакабе с соавторами с целью проверки эффекта Ааронова—Бома провел следующий эксперимент. Монохроматиче-

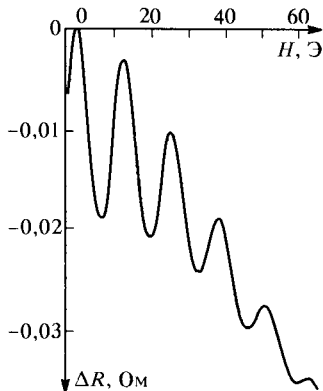


Рис. 83

ские электроны из источника S проходили вне и внутри тороидального магнита, покрытого достаточно толстым слоем сверхпроводника с $T_c = 9,2$ К, и, попадая на экран, создавали интерференционную картину (рис. 84). Эксперимент проводился вначале при $T_1 = 15$ К, и магнитный поток через тороидальный магнитный сердечник, создаваемый внешним источником тока, $\Phi = 2,8\Phi_0 = 2,8hc/e$. Затем при неизменной величине тока через обмотку магнита температура понижалась до $T_2 = 5$ К. На какую часть полосы сдвинулась при этом интерференционная картина? Слой сверхпроводника, которым покрыт магнит, значительно превышает лондоновскую глубину проникновения Λ .

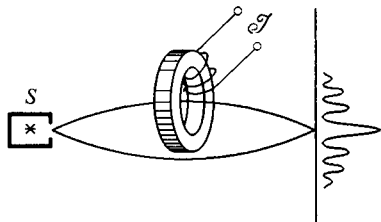


Рис. 84

Указание. Учтите, что квант магнитного потока в сверхпроводниках составляет $\Phi_0^{сп} = \frac{hc}{2e} = \frac{\Phi_0}{2}$.

4.40. На рис. 85 изображены положения химического потенциала μ , дна зоны проводимости и потолка валентной зоны, в собственном полупроводнике типа InSb при температуре $T = 600$ К. Используя данные рис. 85, найти концентрации электронов и дырок при заданной температуре. Эффективные массы электронов и дырок: $m_-^* = 0,05m$, $m_+^* = 0,4m$ (m — масса свободного электрона).

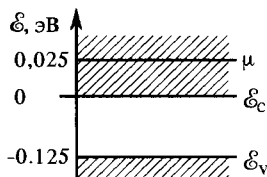


Рис. 85

4.41. Найти отношение ширины зоны проводимости к ширине валентной зоны в кристалле Ge, у которого отношение подвижностей электронов и дырок при низких температурах равно $\mu_-/\mu_+ = 2$. Считать, что закон дисперсии электронов и дырок одномерный, типа $\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}_0 - 2A \cos ka$, и что проводимость определяется рассеянием на нейтральных примесях, причем сечение рассеяния подчиняется закону Бете и обратно пропорционально квадрату эффективной массы носителя (формула Эрджинся).

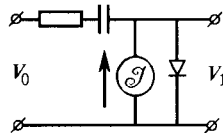


Рис. 86

4.42. Полупроводниковый диод используется в качестве переменного резистора в аттенюаторе (рис. 86). Смещение на диоде задается источником постоянного тока \mathcal{I} , а связь между сигналами осуществляется через конденсатор, реактивное сопротивление которого пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением резистора $R = 10$ кОм. Ток насыщения диода $\mathcal{I}_0 = 1$ мкА, $T = 300$ К. Каково ослабление входного сигнала по напряжению при $\mathcal{I} = 1$ мА в децибеллах ($a(\text{дБ}) = 20 \lg(V_1/V_0)$).

4.43. Спектр фотопоглощения (зависимость коэффициента поглощения от энергии квантов) кремния, легированного бором, при гелиевых температурах и энергии фотонов, меньших 50 эВ, представляет собой серию пиков. При этом пик, соответствующий максимальной энергии поглощаемых квантов, расположен при $\hbar\omega_0 = 43$ эВ. Оценить по этим данным эффективную плотность состояний Q_+ (стат-фактор) в валентной зоне кремния при температуре $T = 4,2$ К. Диэлектрическая проницаемость кремния $\epsilon = 12$, ширина запрещенной зоны в кремнии при данной температуре порядка 1 эВ. Закон дисперсии в валентной зоне считать изотропным и квадратичным.

4.44. Электроны в гетероструктуре AlGaAs/GaAs при низких температурах образуют вырожденный двумерный электронный газ. Если отношение средней потенциальной к средней кинетической энергии на один электрон превышает 50, то возможно образование устойчивого периодического расположения электронов в пространстве — так называемого вигнеровского кристалла. Оценить при какой поверхностной плотности электронов это возможно. Эффективная масса электронов в структуре $m^* = 0,067m_e$, статическая диэлектрическая проницаемость решетки $\epsilon = 12$. Оценку средней потенциальной энергии электрона проводить для ближайших соседей в центрированной гексагональной решетке.

4.45.* Сплав 95% Bi и 5% Sb является полуметаллом, т. е. веществом, у которого потолок (максимум) валентной зоны и дно (минимум) зоны проводимости перекрываются. В квантующем магнитном поле, большем $B_k = 46,5$ Тл, происходит переход металл — диэлектрик и сопротивление сплава резко возрастает. Оценить величину перекрытия зон при $B = 0$. Эффективные массы электронов, дырок и их g -факторы равны: $m_e^* = 0,128m_e$, $m_h^* = 0,21m_e$, $g_e = 5,56$, $g_h = 1,34$.

У к а з а н и е. Рассмотреть смещение экстремумов зон в магнитном поле, учитывая орбитальное и спиновое квантование спектра носителей тока.

4.46. Сплав 91% Bi и 9% Sb является полупроводником, у которого дно (минимум) зоны проводимости и потолок (максимум) валентной зоны не перекрываются. В квантующем магнитном поле, превышающем $B_k = 40,2$ Тл, происходит переход полупроводник — металл и сопротивление сплава резко падает. Оценить ширину запрещенной зоны Δ при $B = 0$. Эффективные массы электронов, дырок и их g -факторы равны: $m_e^* = 0,065m_e$, $m_h^* = 0,064m_e$, $g_e = 18,18$, $g_h = 60,6$.

У к а з а н и е. Рассмотреть смещение экстремумов зон в магнитном поле, учитывая только орбитальное и спиновое квантование спектра носителей тока.

4.47. Полупроводник с шириной запрещенной зоны $\Delta = 0,85$ эВ, помещен в квантующее магнитное поле $B = 40$ кГс. Полупроводник облучается циркулярно поляризованным относительно направления **В** светом. Найти минимально возможные энергии поглощаемых фотонов правой и левой поляризации. Эффективные массы электронов

и дырок, а также их g -факторы равны соответственно: $m_-^* = 0,1m_e$, $m_+^* = 0,35m_e$, $g_e = -2,5$, $g_h = 1,8$.

У к а з а н и е. Рассмотреть смещение экстремумов зон в магнитном поле, учитывая орбитальное и спиновое квантование спектра носителей тока.

4.48. В тонких металлических пленках поперечное движение электрона ограничено, т. е. его волновая функция на граничных поверхностях должна обращаться в ноль, и появляется квантование поперечного импульса. Оценить, какова должна быть длина свободного пробега электрона l вдоль пленки висмута, чтобы в ней можно было наблюдать два первых уровня размерного квантования. Толщина пленки $d = 1,3 \cdot 10^{-5}$ см, энергия Ферми продольного движения $\epsilon_F = 10^{-2}$ эВ. Эффективную массу электрона считать изотропной и равной $m_-^* = 0,01m_e$. Температура пленки много меньше комнатной.

4.49. Из-за большой величины амплитуды нулевых колебаний атомов в кристалле He-4 вакансии (пустые места в узлах решетки) могут туннелировать и превращаться в делокализованные квазичастицы — вакансиионы. В результате образуется вакансионная зона с шириной $\Delta \simeq 10^{-4}$ эВ. Оценить эффективную массу вакансиионы вблизи дна зоны в модели сильной связи для одномерной решетки. Постоянную решетки оценить из молярного объема кристалла $V_\mu = 21$ см³/моль.

4.50. У кристалла InSb статическая диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 17$, усредненное значение эффективной массы электронов $m^* = 0,015m_e$. Оценить, при какой минимальной концентрации донорных атомов начнется образование примесной зоны. Температура $T \simeq 0$ К.

4.51. При изменении внешнего магнитного поля B у металлов наблюдаются осцилляции физических свойств (эффекты де Гааза—ван Альфвена, Шубникова—де Гааза). Это обусловлено периодическим прохождением уровней Ландау через уровень Ферми. Найти период $\Delta(1/B)$ этих осцилляций для одновалентного металла с постоянной ОЦК-решетки $a = 3$ Å. Закон дисперсии электронов считать квадратичным, $T = 0$ К. Спиновое расщепление энергии электрона не учитывать.

4.52.* В молекуле бензола C_6H_6 три валентных электрона атома углерода образуют ковалентные связи с соседними атомами углерода и водорода, а четвертый делокализуется и имеет возможность переходить от одного атома углерода к другому. В результате энергия этого электрона принимает вид $\epsilon(k) = \epsilon_0 - 2A \cos ka$, где ϵ_0 — энергия электрона, локализованного на атоме; $A = 2,8$ эВ; k — волновое число; $a = 1,4$ Å — расстояние между атомами углерода (сторона шестиугольника). Молекула бензола помещена в магнитное поле $H_0 = 10$ кЭ, нормальное к плоскости молекулы. Оценить наведенный диамагнитный ток. Электроны считать невзаимодействующими.

4.53: Оценить относительный сдвиг частоты магнитного резонанса на ядрах водорода в молекуле бензола (см. задачу 4.52) по сравнению со «свободным» протоном. Расстояние между ядрами углерода и водорода равно $d = 1,1 \text{ \AA}$.

4.54: Графеном называется плоская двумерная сетка из атомов углерода, которые расположены в вершинах правильных шестиугольников со стороной $b = 1,42 \text{ \AA}$ (рис. 87). Три валентных электрона атома углерода образуют ковалентные связи с соседними атомами углерода, а четвертый делокализуется и имеет возможность переходить от одного атома углерода к другому. В результате энергия этого электрона (отсчитываемая от уровня энергии локализованного электрона) принимает вид

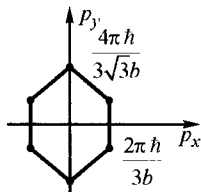


Рис. 87

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 \pm A \sqrt{1 + 4 \cos p_x a \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + 4 \cos^2 \frac{p_y a}{\sqrt{3}}},$$

ε_0 — энергия электрона, локализованного на атоме; верхний знак соответствует зоне проводимости, а нижний — валентной зоне; $A = 2,8 \text{ эВ}$; $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ — вектор квазиимпульса; $a = \frac{3b}{2\hbar}$. Первая зона Бриллюэна решетки графена имеет вид правильного шестиугольника со стороной $\frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}b}$ (рис. 87). Как

выглядит поверхность Ферми графена и чему равна ее площадь? Электроны считать невзаимодействующими.

У к а з а н и е. Примитивная ячейка графена содержит два атома.

4.55: Используя вид спектра и значения параметров для графена из предыдущей задачи, определить вид закона дисперсии элементарных возбуждений в электронной подсистеме вблизи вершин шестиугольников и найти величину плотности состояний в этих точках.

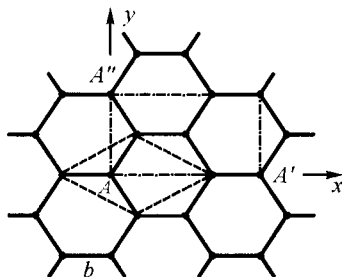


Рис. 88

4.56: Из бесконечного листа графена вырезают полосу для гладкого сворачивания в трубку: один раз параллельно оси x (вдоль прямой AA' на рис. 88), а второй раз — параллельно оси y (вдоль прямой AA'' на рис. 88). При этом закон дисперсии электронов в полосе приобретает вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon_0 \pm A \sqrt{1 \pm 4 \cos p_x a \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + 4 \cos^2 \frac{p_y a}{\sqrt{3}}}$$

Дать качественное объяснение различия законов дисперсии листа и полосы и определить тип проводимости (металлический или полупроводниковый) полученных трубок.

§ 5. Сверхпроводимость

5.1. Из сверхпроводящей проволоки радиусом $r = 1$ мм было свернуто кольцо диаметром $D = 5$ см, а концы проволоки соединены с помощью точечной сварки. Измерения показали, что контакт оказался не очень хорошим, ибо за один час ток в кольце уменьшался на 1%. Каково сопротивление кольца?

5.2. Из широкой сверхпроводящей ленты был свернут длинный цилиндр радиусом $a = 1$ см и края ленты сварены вдоль образующей. Измерения показали, что электрический контакт в месте сварки оказался не очень хорошим, ибо за один час ток в цилиндре уменьшался на 1%. Каково сопротивление R единицы длины сварного шва?

5.3. Используя метод зеркальных изображений, найти распределение поверхностных токов на плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$ см от нее расположен прямолинейный достаточно длинный тонкий провод, параллельный плоскости сверхпроводника. По проводу течет ток силой $\mathcal{I} = 10$ А. Найти также силу f , действующую на единицу длины провода.

5.4. Над сверхпроводящей плоскостью на изолирующем слое высотой $h = 3$ мм лежит проволочное кольцо из тонкой проволоки радиусом $r = 10$ см. Масса кольца $m = 1$ г. По кольцу течет постоянный ток \mathcal{I} . Оценить, при каком значении \mathcal{I} кольцо начнет парить в воздухе (левитировать).

5.5. На расстоянии $a = 9$ см над поверхностью сверхпроводника парит в поле тяжести тонкий постоянный магнит, длина которого мала по сравнению с расстоянием a . Если магнит слегка вывести из равновесия, то он совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Найти период этих колебаний.

5.6. Шар массой $M = 10$ г и радиусом $R = 1$ см, изготовленный из сверхпроводника I рода, покоится в магнитном поле $B = 1$ кГс, меньшем критического, при температуре ниже точки перехода. Температура шара постепенно повышается так, что сверхпроводимость исчезает, а шар начинает вращаться. Найти угловую скорость ω вращения шара.

5.7. В классическом опыте, поставленном И. К. Кикоиным, цилиндр из сверхпроводника I рода массой $M = 80$ г, высотой $h = 20$ см, радиусом $R = 0,5$ см при температуре ниже точки перехода подвешен вертикально на упругой нити в магнитном поле, меньшем критического и направленном вдоль оси цилиндра. Нить подвеса в исходном состоянии не закручена. При постоянной температуре величины магнитного поля постепенно повышают, и при поле $H = 1$ кЭ сверхпроводимость исчезает. В результате этого цилиндр поворачивается, а нить закручивается. Определить максимальный угол закручивания, если модуль кручения нити $\alpha = 1$ эрг/рад.

5.8. Для исключения потерь электроэнергии на джоулево тепло в линиях передачи постоянного тока предложено использовать коаксиальный кабель, внутренняя жила и наружная оболочка которого выполнены из сверхпроводника. Кабель подключен к нагрузке, как этс

показано на рис. 89. Максимально допустимые величины магнитной индукции на поверхности сверхпроводника $B = 500$ Гс и напряженности электрического поля изолирующей прослойки кабеля $E = 30$ кВ/см. При каком соотношении диаметров d/D жилы и оболочки можно передать наибольшую мощность W ? Найти величину W , приняв диаметр наружной оболочки $D = 20$ см.

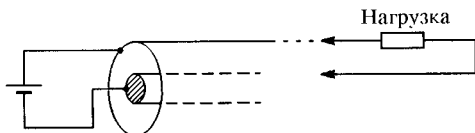


Рис. 89

5.9. На рис. 90 изображена схема магнитного насоса для «накачки» потока в соленоид. Насос представляет собой два сверхпроводящих контура с ключами K_1 и K_2 . Контур 2 включает в себя соленоид с большой самоиндукцией L , в то время как контур 1 обладает малой самоиндукцией $l \ll L$. Работа насоса заключается в том, что при закрытом ключе K_2 и открытом ключе K_1 в контуре 1 с помощью электромагнита создается магнитное поле. Ключ K_1 замыкается, магнит удаляется и после этого размыкается ключ K_2 . Эта операция повторяется много раз. Какого увеличения потока можно достичь в такой системе?

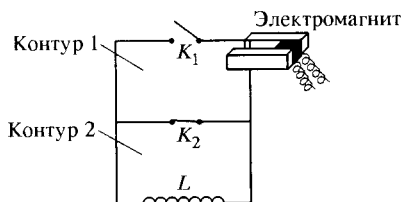


Рис. 90

5.10.* Найти лондоновскую глубину проникновения Λ для типичного сверхпроводника с концентрацией сверхпроводящих электронов $n_{sc} = 10^{22}$ см $^{-3}$.

5.11. Найти распределение поля и тока в бесконечной пластине сверхпроводника толщиной d , помещенной в однородное параллельное пластине магнитное поле B_0 .

5.12. Исходя из соотношения неопределенностей, оценить характерный линейный размер (длину когерентности) электронной пары в сверхпроводнике с энергетической щелью $\Delta = 3$ мэВ в электронном спектре. Учтите, что в образовании пар участвуют электроны вблизи поверхности Ферми, скорость которых принять равной $v_F \sim 10^8$ см/с.

5.13. В сверхпроводнике электроны образуют пары с противоположно направленными спинами. В каком магнитном поле произойдет разрушение таких пар, сопровождаемое изменением направления спина одного из электронов пары, если в нулевом магнитном поле критическая температура сверхпроводника равна $T_c = 92$ К? Считать, что разрушение пары происходит при $T = 0$ К.

5.14.* В 1962 г. Литтлом и Парксом была обнаружена осциллирующая зависимость продольного сопротивления пленки сверхпровод-

ника толщиной d , нанесенной на диэлектрическую нить диаметром $D \gg d$, от внешнего магнитного поля B , направленного вдоль нити. Измерения проводились в области сверхпроводящего перехода при постоянной температуре пленки T_0 . Зависимость сопротивления пленки от температуры в нулевом и конечном внешнем магнитном поле показана на рис. 91а. По результатам измерений была построена зависимость критической температуры пленки от магнитного поля (фазовая диаграмма), изображенная на рис. 91б. Используя обобщенную формулу квантования Бора—Зоммерфельда $\oint (\mathbf{p}_s d\mathbf{l}) = 2\pi n \hbar$ ($\mathbf{p}_s = 2m\mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}$ — обобщенный импульс пары), объяснить полученную зависимость $T_c(B)$ и вычислить диаметр нити. Учтесть, что глубина проникновения $\Lambda(T_0) \gg d$, и поэтому эффектом квантования магнитного потока можно пренебречь.

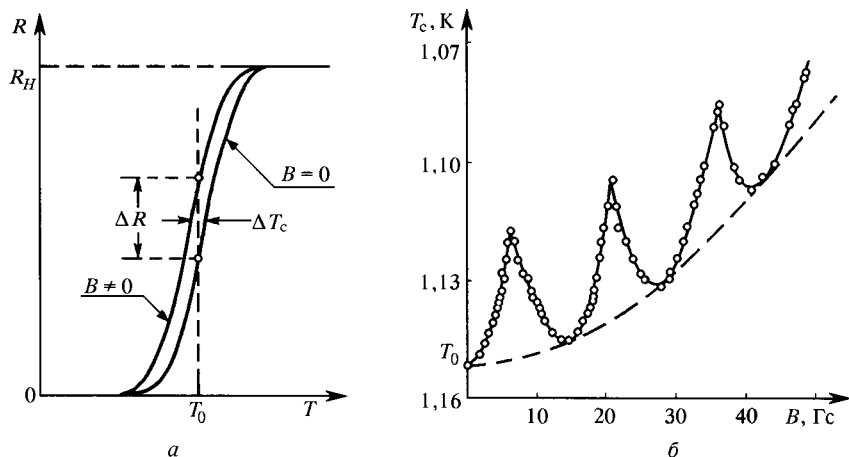


Рис. 91

5.15. Какой максимальный ток течет по поверхности сверхпроводника I рода, находящегося во внешнем касательном магнитном поле, если величина критического магнитного поля $H_c = 400$ А/см, а лондоновская глубина проникновения $\Lambda = 0,5 \cdot 10^{-5}$ см?

5.16: Подлежащий измерению ток \mathcal{I} течет по ниобиевой проволоке диаметром $2r_{\text{Nb}} = 0,1$ мм, образующей точечные контакты A и B в капле припоя из сверхпроводящего металла $\text{Pb} + \text{Sn}$. Из-за присутствия на поверхности ниобия окисной пленки капля смачивает проволоку не полностью, а касается ниобия только в отдельных точках. Пусть таких точек лишь две — A и B с расстоянием между ними $l_{AB} = 5$ мм (рис. 92). Толщину изолирующей пленки на поверхности ниобия можно считать малой по сравнению с глубиной проникновения. Оценить силу тока, при которой через поверхность

капли пройдет один квант магнитного потока. Лондоновские длины для ниобия и припоя равны $\Lambda_{Nb} = 5 \cdot 10^{-6}$ см, $\Lambda_{PbSn} = 10^{-5}$ см.



Рис. 92

5.17: Рассматривается тонкая пленка сверхпроводника I рода толщиной $d \ll \Lambda$, нанесенная на поверхности диэлектрической нити, радиус которой $R \gg d$. Сначала нить вносится в продольное магнитное поле при комнатной температуре, а затем температура нити понижается ниже критической температуры T_c . После этого внешнее магнитное поле выключается. Как квантуется магнитный поток, захваченный нитью с пленкой?

Указание. Воспользоваться условием квантования Бора—Зоммерфельда $\oint (\mathbf{p}_s d\mathbf{l}) = 2\pi n \hbar$, где \mathbf{p}_s — обобщенный импульс пары (см. задачу 5.14).

5.18. Криотрон — это управляющее устройство, изобретенное Баком в 1956 г. (рис. 93). Управляющий ток \mathcal{I} создает поле в соленоиде длиной $L = 2$ мм с числом витков $N = 20$. В соленоид помещена сверхпроводящая танталовая проволока AB диаметром $2a = 0,2$ мм, по которой пропускается ток \mathcal{I}' , критическое поле H_c для тантала при 4,2 К равно 100 Гс. Переводя полем соленоида проволоку из сверхпроводящего в нормальное состояние, можно управлять текущим через проволоку током, и поэтому криотрон может быть использован в логических схемах в качестве активного элемента, а также в качестве запоминающего элемента в вычислительных машинах. Какое усиление по току $G = \mathcal{I}/\mathcal{I}'$ можно достичь в данном устройстве?

5.19: Тантал (Ta) кристаллизуется в объемноцентрированную кубическую решетку с постоянной $a = 3 \text{ \AA}$ и является сверхпроводником I рода ($T_c = 4,4$ К). Считая, что каждый атом Ta отдает в зону проводимости один электрон, эффективная масса которого равна массе свободного электрона, оценить из энергетических соображений величину критического магнитного поля H_c при $T \approx 0$ К, как поля, в котором разрушаются куперовские пары.

5.20. Оценить плотность критического тока распаривания j_c при $T = 0$ К для свинца, у которого $T_c = 7,2$ К, $n_{sc} \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $v_F \approx 10^8 \text{ см/с}$.

5.21: Длинный цилиндр из сверхпроводника II рода, у которого нижнее критическое поле $H_{c1} = 400$ Э, помещен в магнитное поле $H = 500$ Э, параллельно его образующей, и при этом его намагни-

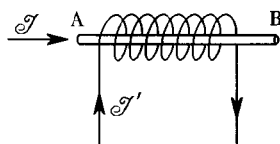


Рис. 93

ченность составила половину того значения, которое было при H_{c1} . Оценить среднее расстояние между вихрями магнитного потока в поле H .

5.22. В 1964 г. Крибье с сотрудниками с помощью упругого рассеяния нейтронов на ниобии экспериментально подтвердил, что в сверхпроводниках II рода в магнитном поле $B > B_{c1}$ образуется треугольная вихревая решетка Абрикосова. В опытах наблюдался максимум первого порядка в отражении нейтронов с длиной волны $\lambda = 5 \text{ \AA}$ под углом $\theta = 20'$ по отношению к падающему пучку от плоскостей, разделенных расстоянием h (высота равностороннего треугольника структуры). В каком магнитном поле проводился эксперимент?

5.23.* Найти выражение для кинетической энергии ϵ электронов на единицу длины вихря магнитного потока, пришедшего в сверхпроводник II рода при $H > H_{c1}$, считая заданными плотность сверхпроводящих электронов n_{sc} , глубину проникновения Λ и длину когерентности $\xi \ll \Lambda$. Считать, что вихрь занимает по радиусу размер от ξ до Λ , а пары обладают минимально возможной проекцией углового момента.

5.24. Найти магнитную энергию единицы длины вихря во внешнем поле $H > H_{c1}$, считая заданными плотность сверхпроводящих электронов n_{sc} и глубину проникновения $\Lambda \gg \xi$ (длины когерентности). Считать, что вихрь занимает по радиусу размер от ξ до Λ , а пары обладают минимально возможной проекцией углового момента. Получить выражение для H_{c1} , используя результат задачи 5.23.

5.25. Для высокотемпературного сверхпроводника $\text{YBaCu}_3\text{O}_{7-\delta}$, где $\delta < 1$, критические поля $H_{c1} = 10^3 \text{ Э}$ и $H_{c2} = 10^6 \text{ Э}$. Оценить глубину проникновения Λ и длину когерентности ξ при $T = 0 \text{ К}$.

5.26. Цилиндр из сверхпроводника II рода массой $M = 25 \text{ г}$ и длиной $l = 10 \text{ см}$ подвешен вдоль оси на тонкой нити. Вдоль оси цилиндра прикладывается такое магнитное поле $H = 10^4 \text{ Э} \gg H_{c1}$, что индукция $B \simeq H$. Вначале температура цилиндра $T < T_c$, цилиндр покоился, а затем температура увеличилась выше критической. Найти установившуюся угловую частоту вращения цилиндра. Глубина проникновения магнитного поля $\Lambda = 10^{-5} \text{ см}$, плотность сверхпроводящих электронов $n_{sc} = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

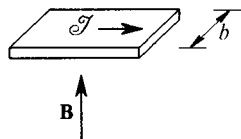


Рис. 94

5.27. Плоская лента шириной $b = 0,5 \text{ см}$ из сверхпроводника II рода в смешанном состоянии помещена в магнитное поле $B = 10 \text{ Тл}$, $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$, перпендикулярное поверхности ленты (рис. 94). По ленте без диссипации течет ток $I = 10 \text{ А}$. При этом вихри неподвижны, удерживаемые структурными дефектами сверхпроводника. Вычислить

силу F , действующую на отдельный вихрь со стороны дефектов кристалла. Считать, что ток I однородно распределен по образцу, а вихревую структуру создают другие, независимые от I токи.

5.28: Пластика из сверхпроводника II рода расположена в магнитном поле \mathbf{H} (при этом $H > H_{c1}$), перпендикулярном ее плоскости. Если вдоль пластины пропустить ток плотностью \mathbf{j} , то в результате взаимодействия с этим током вихри приходят в движение с конечной скоростью v , определяемой силой трения (приходящейся на единицу длины вихря) $F_{\text{тр}} = \eta v$. Такое движение называется вязким течением вихрей. Какое электрическое поле появится в сверхпроводнике?

5.29: Найти эффективную проводимость сверхпроводника II рода в режиме вязкого течения вихрей (См. задачу 5.28).

5.30. В сверхпроводнике, содержащем примеси, электрон упруго рассеивается на примесных атомах без потери фазы. Если среднее расстояние между примесными атомами много меньше длины когерентности ξ , то электрон движется подобно броуновской частице. Исходя из этих соображений, оценить эффективную длину когерентности ξ в сверхпроводнике с постоянной решеткой $a = 3 \text{ \AA}$, средним расстоянием между примесями $b \simeq 30 \text{ \AA}$ и критической температурой $T_c = 25 \text{ K}$.

5.31. Величину верхнего критического поля H_{c2} для сверхпроводников II рода можно оценить из того условия, что разрушение куперовских пар происходит вследствие их закручивания в магнитном поле. Иначе говоря, пара может сохраняться лишь до тех пор, пока ларморовский радиус больше ее размера. Выразить H_{c2} через длину когерентности ξ и квант магнитного потока Φ_0^{cl} .

5.32. При каком напряжении начнет течь ток через туннельный переход нормальный металл—изолятор—сверхпроводник, если $T_c = 92 \text{ K}$, а измерения проводятся при $T \ll T_c$?

5.33: В 1960 г. Гиавер измерил вольт-амперную характеристику сверхпроводящей системы алюминий—свинец при температуре, меньшей критических температур обоих металлов (рис. 95). Она имела максимум при $V_1 = 0,82 \text{ мВ}$ и минимум при $V_2 = 1,4 \text{ мВ}$. Найти величины энергетических щелей (в эВ) и критические температуры свинца и алюминия.

5.34. Оценить радиус эффективного взаимодействия сверхпроводящих электронов, исходя из следующих соображений: проходящий около иона электрон «толкает» его, создавая тем самым поляризацию решетки. Радиус взаимодействия соответствует расстоянию, на которое успел уйти этот электрон за время, равное полупериоду колебаний иона. Оценку провести для одновалентного металла с простой кубической решеткой. Скорость звука $s = 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, эффективную массу электрона считать равной массе свободного электрона.

5.35. Для металла, описываемого моделью свободных электронов, найти отношение предельной длины прозрачности для элект-

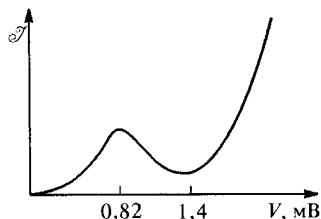


Рис. 95

ромагнитных волн в нормальном состоянии к лондоновской глубине проникновения в сверхпроводящем состоянии.

5.36. В сверхпроводниках II рода, находящихся во внешнем магнитном поле $H_{c2} > H > H_{c1}$, электроны в коре вихрей находятся в нормальном состоянии. Как зависит вклад этих электронов в теплоемкость сверхпроводника от величины внешнего поля и температуры? Считать корреляционную длину не зависящей от температуры.

5.37*. Решетка квантованных вихрей в сверхпроводниках II рода подобна системе вихревых нитей, возникающих во вращающемся сверхтекучем ^4He . Исходя из этой аналогии, оценить на основе критерия сверхтекучести Ландау¹⁾ радиус нормальной сердцевинки (кора) магнитного вихря и соответствующую ему плотность тока. Величина энергетической щели сверхпроводника равна $\Delta(T)$, импульс Ферми p_F , концентрация сверхпроводящих электронов — $n_{sc}(T)$.

5.38. Используя полученное в предыдущей задаче выражение для радиальной зависимости плотности сверхпроводящего тока $j(r)$ в вихре, найти распределение магнитного поля $B(r)$ в вихре и оценить поле в его центре. Ответ выразить через квант магнитного потока Φ_0^n и характерные длины Λ и ξ .

§ 6. Избранные задачи заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике

6.1. Столкновение атома A с двухатомной молекулой BC можно рассматривать как столкновение двух свободных частиц A и B (рис. 96). Показать, что при этом передаваемая энергия перераспределяется поровну между вращательным движением молекулы и поступательным движением ее центра масс. (1996 г)

6.2. Показать, что при лобовом столкновении легкой частицы массой m с неподвижной тяжелой частицей массой M относительная потеря энергии не зависит от скорости. Предполагая, что быстрый нейтрон в среде испытывает только лобовые упругие столкновения, определить, сколько соударений потребуется нейтрону с энергией 1 МэВ, чтобы замедлиться в графите до тепловой скорости. (1996 г)

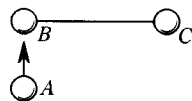


Рис. 96

6.3. В 1932 г. Чадвик, облучая нейтронами малых (по сравнению с энергией покоя) энергий парафин $(\text{CH}_2)_n$ и воздух, обнаружил, что

¹⁾ Критерий сверхтекучести Ландау заключается в том, что жидкий ^4He , текущий при $T < T_c$ ($T_c = 2,19 \text{ K}$) по капилляру с постоянной скоростью $v \ll v_{cr} = \Delta/p$, где Δ — щель в спектре элементарных возбуждений жидкого гелия, не будет испытывать трения, если в гелии не будут появляться элементарные возбуждения — колебания плотности — фононы и ротоны. Для появления сверхтекучести электронной фермижидкости в металлах необходимо, чтобы она состояла из бозонов, т. е. куперовских пар, а также наличие энергетической щели Δ вблизи уровня Ферми. Если Δ — энергия связи электронов в паре, то критерий сверхпроводимости для электронов принимает аналогичный вид $v_{cr} = \Delta(T)/p_F$.

максимальная скорость отдачи протонов равна $3,3 \cdot 10^9$ см/с, а ядер азота — $4,7 \cdot 10^8$ см/с. На основе этих экспериментов Чадвик впервые определил массу нейтрона. Какое отношение массы нейтрона к массе протона он получил? Тогда было известно из масс-спектроскопических измерений, что масса атома азота с точностью порядка 1% в 14 раз больше массы атома водорода. (2000 г)

6.4. Пучок атомов гелия (плотность атомов в пучке $n = 10^{15}$ см⁻³, энергия $\mathcal{E} = 1$ кэВ, сечение пучка $S = 0,1$ см²) падает нормально на движущуюся навстречу зеркальную стенку с начальной скоростью $u_0 = 10$ см/с и массой $M = 1$ г. Через какое время t стенка остановится? (1992 г)

6.5. При какой минимальной кинетической энергии атомов неона ($A = 20$) при столкновении их с атомами кальция ($A = 40$) сможет произойти ионизация последних? Энергия ионизации кальция $W = 6,1$ эВ. (1972 г)

6.6. Может ли произойти ионизация атома цезия ударом атома кислорода с кинетической энергией $\mathcal{E}_k = 4$ эВ? Энергия ионизации атомов цезия $W = 3,9$ эВ, относительная атомная масса $A = 133$. (1972 г)

6.7. С какой скоростью атом аргона должен двигаться навстречу атому неона, обладающему кинетической энергией $\mathcal{E}_k = 1$ эВ, чтобы при их упругом рассеянии под произвольным углом модуль скорости атома неона не изменился? (1975 г)

6.8. В цилиндре может без трения двигаться поршень массой M . Между поршнем и неподвижными стенками колеблются легкие шарики массой $m \ll M$ (рис. 97). В равновесном положении поршня посередине цилиндра частота столкновений каждого шарика с поршнем равна ν [Гц]. Найти частоту $f \ll \nu$ малых медленных колебаний поршня. Движение шариков считать одномерным, удары — абсолютно упругими. (1986 г)

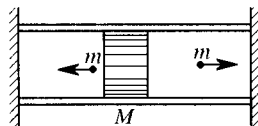


Рис. 97

6.9. Сталкиваются две упругие параллельно ориентированные пластины с одинаковой массой m . Первая пластина имеет скорость V , направленную под углом φ к поверхности, вторая — покоится. Коэффициент трения между их поверхностями равен k . Найти скорость первой пластины после удара и угол φ , при котором работа сил трения при ударе максимальна. (1966 г)

6.10. С каким угловым ускорением $\varepsilon = \dot{\varphi}$ будет вращаться мельничка Крукса (рис. 98), если на центр ее лопасти падает пучок электронов с силой тока $\mathcal{I} = 3,3$ мА, ускоренных потенциалом $V = 900$ В? Колесо мельнички состоит из шести алюминиевых лопастей радиусом $R = 10$ мм, шириной $a = 10$ мм и толщиной $c = 0,05$ мм. Отражением

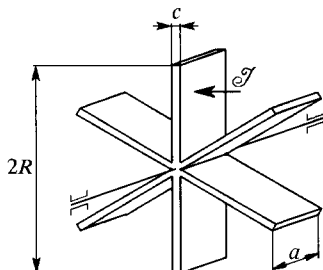


Рис. 98

электронов и вторичной электронной эмиссией из лопастей мельнички и трением в подшипниках пренебречь. (1966 г)

6.11. На горизонтальном столе лежит гибкая нерастяжимая лента длиной $L = 1$ м, сложенная вдвое (рис. 99). Между лентой и столом коэффициент трения $k = 1$, а между поверхностями ленты трения нет. Полагая размеры в области сгиба $R \ll L$, определить время T , за которое лента распрямится. Толщина ленты $H = 1$ мм. (1990 г)

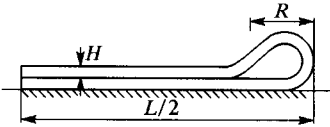


Рис. 99

6.12. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы перетащить мягкую веревку с абсолютно гладкой на шероховатую поверхность, медленно перемещая верхний конец веревки горизонтально на высоте $H = 0,5$ м (рис. 100). Вначале веревка находилась на гладкой поверхности. Масса веревки $m = 0,5$ кг, длина $L = 1$ м, коэффициент трения веревки о шероховатую поверхность $\mu = 0,5$. (2006 г)

Указания. Рассмотреть проекции сил, касательные к элементу длины висящей веревки.

6.13. Получить, например, из соображений размерностей выражение для плотности энергии гравитационного поля вблизи Земли и оценить, во сколько раз ее значение отличается от значения для плотности энергии геомагнитного поля $B \approx 0,5$ Гс. (1974 г)

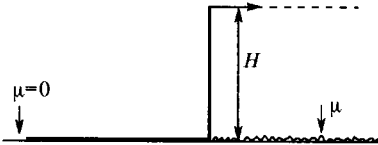


Рис. 100

6.14. Оценить допустимые уровни напряженности внешнего электрического и неоднородности (градиента) магнитного полей, от которых следует экранировать установку, чтобы можно было измерить ускорение свободного падения протона в поле тяжести Земли. (1976 г)

6.15. Можно ли измерить гравитационную постоянную γ с точностью $\delta = 10\%$, подкатывая свинцовый шар к пробному грузу, подвешенному к чашке пружинных аналитических весов с относительной чувствительностью $\eta = 0,1$ мг/кг? (1966 г)

6.16. Существует ли принципиальная возможность определить ускорение ракеты чисто электрическим методом? Провести численные оценки для $a = 10g$ и длины проводника $L = 10$ м. Внешними электрическими и магнитными полями пренебречь. (1966 г)

6.17. На каком расстоянии от Солнца плотность энергии солнечного света станет равной плотности энергии межзвездного магнитного поля $B = 2 \cdot 10^{-10}$ Тл? Солнечная постоянная $J_C \approx 1,4 \cdot 10^3$ Вт/м² (плотность потока энергии солнечного излучения вблизи Земли). (1968 г)

6.18. Межгалактическое пространство, содержащее вещество в количестве 1 протон на м³, пронизано постоянным магнитным полем $2 \cdot 10^{-10}$ Тл и реликтовым тепловым излучением с температурой 3 К.

Определить отношение плотностей энергии реликтового излучения, постоянного магнитного поля и энергии покоя вещества $\omega_{\text{пл}} \cdot \omega_{\text{маг}} \cdot \omega_{\text{вещ}}$. Оценить гравитационный радиус Вселенной с указанной плотностью материи и выразить его в световых годах. (1968 г)

6.19. Самые точные современные гравиметры (приборы для измерения ускорения свободного падения) измеряют g по времени падения пробного тела в вакууме, и при этом достигается точность измерений порядка $0,04 \text{ мкм/с}^2$ на базе $h = 20 \text{ см}$. Какую ошибку при измерении на поверхности Земли вносит неоднородность g ? (2003 г)

6.20. Нефтяные месторождения в России расположены, как правило, в области вечной мерзлоты, где часто на глубине около 5 м появляются плоские слои расплавившегося льда толщиной порядка $h = 3 \text{ м}$. Это создает большие опасности при разведке и бурении скважин. Современный метод обнаружения таких водяных прослоек — картирование местности с помощью гравиметров. Какова должна быть точность этих приборов? Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0,917 \text{ г/см}^3$. (2003 г)

6.21. На поверхности Земли производится измерение ускорения свободного падения с точностью 10^{-8} м/с^2 . Оценить, на сколько должно измениться атмосферное давление (по сравнению с обычным), чтобы это сказалось на точности измерений. Атмосферу считать изотермической, кривизну земной поверхности и изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывать. Изменение давления происходит только за счет изменения локальной плотности атмосферы на поверхности Земли. (2002 г)

6.22. Экспериментально установлено, что период малых колебаний математического маятника в шахте глубиной $h = 500 \text{ м}$ на $\delta = 0,0025\%$ меньше, чем у поверхности Земли. Оценить на основе этих данных среднюю плотность земной коры в пятисотметровом слое, считая Землю шаром с плотностью, зависящей только от расстояния до центра. Средняя плотность Земли $\rho_0 = 5,6 \text{ г/см}^3$. (2007 г)

6.23. При движении в очень разреженных слоях атмосферы метеорит испаряется за счет столкновений с молекулами воздуха, которые передают веществу метеорита всю свою кинетическую энергию, но к поверхности не прилипают. Определить скорость метеорита v при уменьшении его массы в 10 раз. Начальная скорость $v_0 = 40 \text{ км/с}$, энергия, необходимая для нагрева и испарения вещества метеорита, $q = 8 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. (1991 г)

6.24. При движении в верхних слоях атмосферы сферический метеорит испытывает неупругие столкновения с молекулами воздуха, в результате чего он равномерно прогревается до температуры $T = 1000 \text{ К}$. Оценить скорость метеорита v , считая ее постоянной. Давление и температура воздуха: $P = 0,001 \text{ Па}$, $T_0 = 200 \text{ К}$. (2005 г)

6.25. Определить мощность фотонной ракеты, движущейся за пределами Солнечной системы с нерелятивистской скоростью и постоянным ускорением $a = 10 \text{ м/с}^2$. Масса ракеты $M = 1 \text{ т}$. Сравнить

мощность ракеты с мощностью Братской ГЭС (4,5 млн кВт). (1968 г)

6.26. При вертикальном взлете космического корабля кратность перегрузки на старте равнялась $k_0 = (g + a_0)/g = 1,25$. Оценить, чему будет равна кратность перегрузки $k = (g + a)/g$ в момент времени, когда скорость корабля относительно Земли станет равной скорости истечения газов относительно корабля. Расход горючего считать постоянным. (2006 г)

Указание. Учтите, что к интересующему нас моменту времени значительная часть горючего будет израсходована.

6.27. При вертикальном взлете космического корабля космонавт испытывает перегрузку $k_0 = (g + a_0)/g = 1,25$, которая во время взлета возрастает и в некоторый момент становится равной $k = (g + a)/g = 8$. Во сколько раз в этот момент скорость космического корабля относительно Земли больше скорости истечения газов относительно ракеты? Расход горючего считать постоянным. (2006 г)

6.28. Непосредственно под дном океана в районе Бермудского треугольника находится металлический метеорит в виде шара радиусом $R = 2$ км. Глубина океана $H = 6$ км. Оценить прогиб поверхности океана в этом месте. Плотность пород, образующих дно океана, принять $\rho_{\text{п}} = 2,5$ г/см³, плотность вещества метеорита $\rho_{\text{м}} = 7,5$ г/см³. (1977 г)

6.29. Старые айсберги иногда опрокидываются, поворачиваясь на 90°. Оценить, через какое время айсберг в форме параллелепипеда с начальными размерами $L \times L \times H = 3 \times 3 \times 2$ км³, потеряет устойчивость. При таянии размеры айсберга меняются, но он всегда сохраняет форму параллелепипеда. Считать, что айсберг обменивается теплом с водой океана, а вода, образовавшаяся в результате таяния, быстро удаляется. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг, скорость теплообмена считать пропорциональной разности температур воды и льда $\Delta T = 5$ К с коэффициентом пропорциональности $\alpha = 250$ Вт/(м²·К). (2007 г)

6.30. В течении своей «жизни» айсберги несколько раз опрокидываются, поворачиваясь на 90°. Для моделирования этого процесса был проделан следующий опыт: тающий кусок льда в форме параллелепипеда размером $a \times b \times h = 10 \times 10 \times 8$ см³ опускался в ванну с водой при температуре $t_0 = 20$ °С. В процессе таяния такой «айсберг», оставаясь параллелепипедом, изменялся в размерах, и через $\tau_0 = 20$ мин опрокидывается. Оценить на основе этого опыта время опрокидывания айсберга с размерами $500 \times 500 \times 300$ м³ в океане с температурой воды $t = 5$ °С. Считать, что теплоподвод происходит только по воде и скорость таяния пропорциональна разности температур льда и воды. (2007 г)

6.31. Предельная высота гор на Венере $H_{\text{в}} = 10$ км, на Земле $H_{\text{з}} = 9$ км, отношение радиусов Венеры и Земли $R_{\text{в}}/R_{\text{з}} = 0,949$. Оценить массу Венеры и средние плотности планет, считая, что плотность горного вещества каждой из планет постоянна и что мак-

симальная высота гор определяется пределом упругости пород. (1994 г)

6.32. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелящуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью $u = 4$ км/с относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы должно составить израсходованное горючее? Оценить температуру горения, если удельная теплосмкость выбрасываемых газов c_p составляет $2,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). (1966 г)

6.33. Орбита космической станции массой $m = 100$ т расположена в верхних слоях атмосферы на высоте $h = 250$ км. Если орбиту не корректировать, то за счет торможения станция снижается на величину $\Delta h = 100$ м в сутки. Оценить, какой требуется расход топлива (кг/сутки), чтобы поддерживать высоту орбиты станции. Скорость истечения отработанных газов относительно станции при работе двигателей $u = 3$ км/с. (2001 г)

6.34. Найти минимальную скорость удара о поверхность Луны неуправляемого космического аппарата, выпущенного с Земли по траектории, соединяющей центры Земли и Луны. (1966 г)

6.35. Крупный метеорит массой $m = 10^6$ тонн летит по направлению к центру Земли. Чтобы избежать катастрофы, запускается ракета с водородной бомбой, которая попадает в метеорит по нормали к его траектории и взрывается. Предполагая, что при взрыве из метеорита вылетает $\alpha = 10^{-3}$ часть его массы перпендикулярно траектории и вся энергия бомбы перешла в кинетическую энергию отброшенного вещества, оценить, на каком расстоянии R_0 от Земли ракета должна встретить метеорит, чтобы он пролетел на расстоянии радиуса Земли $R_3 = 6400$ км от ее поверхности. Скорость метеорита на бесконечности равна нулю, удар центральный, тротиловый эквивалент бомбы $W = 10$ Мт, энергия взрыва 1 кг тротила равна 4,2 МДж. (1995 г)

6.36. Сейсмический датчик, установленный советским космическим аппаратом на Луне, зарегистрировал временную вариацию плотности налетающего на нее метеоритного облака. Было выдвинуто предположение, что вызвано это гигантским спутником Юпитера Ио, мимо которого пролетал стационарный метеоритный поток. Оценить, какой период временной вариации показаний сейсмодатчика зарегистрирован? Масса Юпитера $M = 1,9 \cdot 10^{27}$ кг, расстояние Ио от Юпитера $L = 422\,000$ км. (2003 г)

6.37. Известно, что для сбивания спутника с орбиты достаточно приложить к нему импульс, много меньший собственного импульса, если правильно выбрать направление воздействия. Существует проект сбивания спутников за счет отдачи, возникающей при испарении материала спутника под действием мощного лазерного излучения. Найти минимальную энергию лазерного излучения, необходимую для перевода спутника массой $m = 100$ кг с круговой орбиты на высоте $H = 200$ км на орбиту, касающуюся поверхности Земли. Импульс отдачи спутника, возникающий при воздействии излучения

мощностью 1 Дж, равен $\alpha = 3 \text{ дин} \cdot \text{с} / \text{Дж}$. Изменением массы спутника пренебречь. (2000 г)

6.38. Как показали спектроскопические исследования, спутник Сатурна — Титан — содержит атмосферу, состоящую из метана и аммиака. Вычислить и сравнить вторые космические скорости для Луны и Титана и оценить температуру поверхности Титана. Объяснить, почему Луна лишена атмосферы, а Титан еще сохранил ее. Радиус Титана $R_T = 2570 \text{ км}$, радиус Луны $R_L = 1740 \text{ км}$. Масса Титана равна $1/45$, а Луны — $1/81$ массы Земли. Радиус орбиты Сатурна превосходит радиус земной орбиты в 9,54 раза. (1969 г)

6.39. Земля ближе всего подходит к Солнцу 1 января, причем расстояние между ними $R_1 = 147 \text{ млн. км}$, а 1 июля это расстояние $R_2 = 152 \text{ млн. км}$. Угол наклона земной оси к плоскости эклиптики $\theta = 66,5^\circ$. Определить разницу δT в длительности солнечных суток в указанные дни. Их отличием от дней зимнего и летнего солнцестояния (22 декабря и 22 июня) можно пренебречь. (1990 г)

6.40. Дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) делят год пополам, а летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия T_L (с 21 марта по 23 сентября) продолжительнее зимнего T_3 на 7 дней. Оценить эксцентриситет земной орбиты. (2004 г)

6.41. В романе А. Толстого «Аэлита» полет на Марс начинается в момент противостояния, когда Солнце, Земля и Марс находятся на прямой. При каком угле Земля—Солнце—Марс (рис. 101) следует на самом деле стартовать с Земли, чтобы расход топлива был минимальным при кратковременной работе двигателя? Считать орбиты Земли и Марса круговыми, лежащими в одной плоскости, притяжением между ракетой и планетами в межпланетном перелете пренебречь. Период обращения Марса равен 1,88 года. (1988 г)

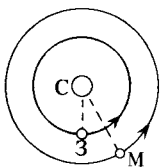


Рис. 101

6.42. Каким должен быть угол Марс—Солнце—Земля (рис. 101), при котором становится энергетически выгодным перелет с Марса на Землю при кратковременной работе стартового двигателя? Для

упрощения расчетов считать орбиты планет Земля и Марс круговыми, лежащими в одной плоскости, притяжением между ракетой и планетами при перелете пренебречь. Радиус орбиты Марса принять равным $1,5$ радиуса земной орбиты. (1988 г)

6.43. Звезда 51 в созвездии Пегас практически является двойником нашего Солнца. Изучение ее оптических спектров показало регулярное изменение скорости звезды по закону $u = u_0 \sin(2\pi t/T)$ (сплошная линия на рис. 102) с периодом $T = 4,23$ суток и амплитудой $u_0 = 56 \text{ м/с}$. Предполагается, что эти временные вариации излучения обусловлены вращением вокруг нее намного более легкой планеты. По какой траектории движется планета и какова должна быть ее масса? (2002 г)

6.44. Ледяная комета движется в Солнечной системе в плоскости орбиты Юпитера с периодом T_k . Если она пролетает близко от Юпитера, она разрушается за счет приливных сил (из-за градиента гравитационного поля). Оценить число оборотов вокруг Солнца, которое может совершить комета размером $r_0 = 10$ км, не разрушаясь. Прочность ядра ледяной кометы $\sigma_0 = 10^5$ дин/см², период обращения Юпитера вокруг Солнца $T_{Ю} = 12$ лет $\ll T_k$, его масса составляет $\eta = 10^{-3}$ массы Солнца. (2000 г)

6.45. Космонавт А. Леонов, выйдя из корабля в открытый космос, бросил крышку фотоаппарата по направлению к центру Земли со скоростью $v_0 = 0,5$ м/с относительно корабля. Спустя некоторое время он с удивлением обнаружил, что крышка возвращается к кораблю. Описать периодическое движение крышки относительно корабля, определив период и параметры ее относительного движения. Считать, что корабль движется по круговой орбите с радиусом $R_0 = 7000$ км. (1982 г)

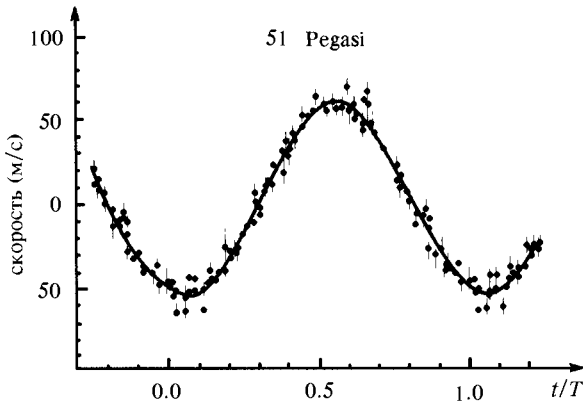


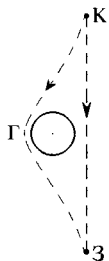
Рис. 102

6.46. Спутник массой $m = 200$ кг, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Сила трения $F = Cv^3$, ($C = 3 \cdot 10^{-16}$ кг·с/м²). С какой радиальной скоростью спускается спутник? (1999 г)

6.47. Космический корабль сферической формы движется равномерно со скоростью v в области космической пыли плотностью ρ , которая прилипает к кораблю. КПД реактивного двигателя корабля η . Оценить установившуюся температуру обшивки корабля T , считая ее черным телом. Изменением массы корабля вследствие налипания пыли и расхода топлива пренебречь. (1999 г)

6.48. В 1979 г. открыли два квазара-«близнеца» с абсолютно одинаковыми спектральными характеристиками. Предполагается, что это сам квазар и его изображение — мираж, создаваемый удаленной галактикой, расположенной между квазаром и Землей (рис. 103). Уг-

ловое расстояние между квазарами-«близнецами» равно $6''$. Принимая во внимание, что отклонение луча света вблизи Солнца равно $1,75''$, оценить массу галактики в единицах массы Солнца. Считать,



что радиус галактики $2 \cdot 10^5$ свет. лет, радиус Солнца равен $7 \cdot 10^5$ км. (1988 г)

6.49. Согласно одной из гипотез, пульсар является нейтронной звездой, образующейся в результате гравитационного сжатия (коллапса). Оценить по порядку величины, с каким периодом будет вращаться Солнце, если оно превратится в нейтронную звезду. Масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус $R = 7 \cdot 10^5$ км, период вращения $T = 2,2 \cdot 10^6$ с. (1971 г)

6.50* Оценить время τ , за которое нейтронная звезда может потерять свое магнитное поле.

У к а з а н и е. Рассмотреть следующую модель: нейтронная звезда — металлический шар с радиусом $R \sim 10^6$ км, удельная проводимость вещества звезды $\sigma \sim 10^{30}$ с $^{-1}$. (1966 г)

6.51. Звезда с массой Солнца $m = 2 \cdot 10^{33}$ г и начальным радиусом $r_0 = 7 \cdot 10^{10}$ см сжимается и в результате превращается в белый карлик со средней плотностью $\rho \approx 10^7$ г/см 3 , а затем в нейтронную звезду с $\rho \approx 10^{14}$ г/см 3 . Характерное магнитное поле звезды (например, поле у полюса) в начальном состоянии $B_0 \approx 1$ Гс. Найти характерное магнитное поле белого карлика и нейтронной звезды. (1979 г)

6.52. Оценить, какую величину магнитного поля звезды типа Солнца (период вращения $T = 10^6$ с, радиус $R = 10^{10}$ см, температура поверхности $T = 6 \cdot 10^3$ К) можно обнаружить в оптической области спектра ($\omega = 10^{15}$ с $^{-1}$) на основании измерения эффекта Зеемана. (1974 г)

6.53* Для звездного скопления определить среднее время между столкновениями двух звезд типа Солнца ($M_C \approx 2 \cdot 10^{33}$ г), если их средняя относительная скорость $u = 60$ км/с, а число звезд в кубическом световом годе $N \sim 10$. Уточнить понятие столкновения, которым вы пользуетесь. (1968 г)

6.54. Астероиды — малые планеты с радиусом $r \approx 5$ км в количестве $N \approx 10^4$, их возраст 4,5 млрд. лет. Они движутся между орбитами Юпитера и Марса, образуя пояс астероидов толщиной $h \approx 10^6$ км, простирающийся от $R_1 = 2,5 \cdot 10^8$ км до $R_2 = 7 \cdot 10^8$ км. В результате возмущения их орбит планетами они все время изменяют траектории и могут сталкиваться, что приводит к их дроблению и возникновению метеоритов. Относительная скорость астероидов $v = 5$ км/с. Оценить, сколько раз за свою историю астероиды сталкиваются между собой. (2005 г)

6.55. Согласно астрономическим наблюдениям мы живем в расширяющейся Вселенной, причем скорость расширения v пропорциональна ее текущему радиусу R : $v(R) = HR$, где постоянная $H = 2,4 \cdot 10^{-18}$ с $^{-1}$ называется постоянной Хаббла. Оценить критиче-

скую плотность сферически симметричной Вселенной, при которой расширение никогда не сменится сжатием. (1996 г)

6.56. Для «черной» дыры гравитационное притяжение столь велико, что ни луч света и ни одна частица не могут вырваться за ее пределы. Оценить радиус «черной» дыры, имеющей массу Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г. См. также задачу 1.71 этого раздела. (1982 г)

6.57. По современным представлениям звезды могут переходить в гравитационно неустойчивые состояния, в которых силы тяготения при стремлении радиуса звезды к определенному пределу (называемому гравитационным радиусом) стремятся к бесконечности, в то время как давление внутри звезды остается конечным. Это приводит к катастрофическому сжатию (релятивистскому коллапсу) звезды. Для полного описания такого процесса закон всемирного тяготения Ньютона неприменим. Пользуясь формулой Эйнштейна для энергии покоя $\mathcal{E} = Mc^2$, найти условие применимости ньютонова закона тяготения. Сделать численную оценку для звезды, масса которой равна массе Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г. (1969 г)

6.58. Оценить размер пылинки, при котором она будет выдуваться из солнечной системы световым давлением Солнца. (1984 г)

6.59. В космическом излучении из источника Лебедь-X3, находящегося от нас на расстоянии $L = 40\,000$ свет. лет, с интервалом в $T = 1$ с было зарегистрировано несколько событий, обусловленных частицами с энергией $\mathcal{E} = 10^{16}$ эВ. Это можно интерпретировать как излучение из вращающегося там объекта. Оценить верхнее значение энергии покоя этих частиц и размер излучающей области, при которых такая временная структура излучения может наблюдаться на Земле, считая, что разброс по энергии рождающихся частиц $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} = 0,1$. (1993 г)

6.60. При взрыве сверхновой 27 февраля 1987 г. в Малом Магеллановом облаке, находящемся от Земли на расстоянии $L = 180\,000$ свет. лет, были зарегистрированы две группы нейтрино с интервалом в $\Delta t = 1$ час. Согласно одной из гипотез, эти две группы нейтрино родились одновременно, но обусловлены разными процессами и соответственно имеют нулевую и ненулевую (около 20 эВ) энергию покоя. Оценить энергию второй группы нейтрино, при которой такое объяснение возможно. (1993 г)

6.61. Согласно некоторым прогнозам, тенденция к общему потеплению нашей планеты грозит таянием приполярных льдов в Арктике и Антарктиде. Оценить, насколько изменится продолжительность земных суток, если подъем уровня мирового океана составит 40 м. (1992 г)

6.62. Из точки A (рис. 104) на спутник, летящий со скоростью v , падает лазерный луч с частотой ω_0 . Отраженный луч регистрируется в точке B . Чему будет равна частота принимаемого света? Оценить разрешающую способность регистрирующего спектрального прибора, необходимую для обнаружения релятивистской поправки к смещению частоты. (1966 г)

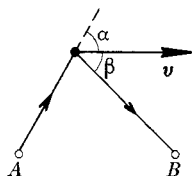


Рис. 104

6.63. Луч света от импульсного лазера попадает на зеркало массой $m = 1$ г, расположенное под углом $\varphi = 30^\circ$ к лучу (угол между направлением луча и нормалью к поверхности зеркала). Коэффициент отражения зеркала (по энергии) $R = 0,5$. Зеркало полностью непрозрачно. Определить скорость зеркала после облучения его импульсом лазера с энергией $\mathcal{E} = 300$ Дж. (1972 г)

6.64: На плоскую поверхность стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ из вакуума падает перпендикулярно к поверхности световой пучок интенсивностью $\mathcal{I} = 10$ Вт/см². Найти величину и направление силы, действующей на единицу площади поверхности раздела сред. (1995 г)

6.65. Линейно поляризованная световая волна с направлением электрического вектора в плоскости падения и с интенсивностью $\mathcal{I} = 1$ Вт/см² падает из вакуума под углом Брюстера на круглую плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 3$ мм и диаметром $D = 10$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти момент сил, действующий на пластинку. В какую сторону будет разворачиваться пластинка? (1995 г)

6.66. На четвертьволновую кварцевую пластинку падает нормально пучок плоско-поляризованного света с длиной волны $\lambda = 6280$ Å мощностью $W = 3$ Вт. При каких условиях пластинка будет испытывать крутящий момент и какова его величина и направление? (1966 г)

6.67. Горизонтальный диск радиусом R и массой m подвешен в атмосфере некоторого газа на упругой нити с модулем кручения f на расстоянии h ($h \ll R$) от горизонтальной неподвижной поверхности. Найти коэффициент внутреннего трения η в газе по результатам измерения логарифмического декремента затухания d крутильных колебаний. Движение воздуха между диском и неподвижной поверхностью считать ламинарным; краевыми эффектами пренебречь. (1966 г)

6.68. Оценить частоту, затухание и добротность малых колебаний ртути в U – образной трубке с площадью поперечного сечения $S = 1$ см² и высотой столба $L = 50$ см. Вязкость ртути $\eta = 0,0155$ П, краевыми эффектами пренебречь. (1995 г)

6.69. Два цилиндра, оси которых параллельны друг другу, находятся в водном потоке, скорость которого $v = 10$ см/с перпендикулярна осям цилиндров. Оценить, с какой силой притягиваются цилиндры радиусом $R = 1$ см и длиной $L = 10$ см, если зазор между ними $a = R$. (1993 г)

6.70: В бассейне испытывается модель корабля в $1/100$ натуральной величины. Проектная скорость корабля равна 36 км/час. С какой скоростью u надо буксировать модель, чтобы картина гравитационных волн была подобна натуре? (1966 г)

6.71: Оценить методом размерностей фазовую скорость гравитационных волн на поверхности жидкости, пренебрегая влиянием поверхностного натяжения и конечной глубины. Найти соотношение между фазовой и групповой скоростями этих волн. (1967 г)

6.72. Морские волны при подходе к берегу выстраиваются вдоль береговой линии. Рассчитать, под каким углом к нормали к прямолинейному берегу подойдут волны, если далеко в море на большой глубине, где длина волн $\lambda = 50$ м, а фазовая скорость $v_0 = (g\lambda/2\pi)^{1/2}$, они движутся под углом $\alpha_0 = 15^\circ$. Глубина моря постепенно уменьшается до $h \approx 0,5$ м, где скорость волн $v = \sqrt{gh}$. (2008 г)

6.73* Если глубина H и ширина l ($l \gg H$) канала много меньше длины гравитационных волн на поверхности жидкости в нем, то скорость этих (длинных) гравитационных волн $v = \sqrt{gH}$. Рассмотреть отражение и прохождение волн при резком изменении глубины канала. Как изменится амплитуда проходящей волны при изменении глубины в 4 раза? (1966 г)

6.74. В воздухе при нормальных условиях распространяется очень сильная звуковая волна, вызывающая боль в ушах. Ее относительная интенсивность $B = I/I_0 = 150$ дБ, где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² — минимальная интенсивность звука, которую слышит человек. Оценить отношение удельной звуковой энергии к плотности тепловой энергии воздуха. (2006 г)

6.75. Для создания подземного нефтехранилища в полости с начальным объемом V_0 производят взрыв, при котором высвобождается энергия $Q = 4,2$ ГДж. Образовавшиеся газообразные продукты взрыва, расширяясь адиабатически, в доли секунды образуют хранилище. При каком начальном объеме полости увеличение ее объема будет максимальным? Взрыв производится на глубине $H = 100$ м, плотность грунта $\rho = 3$ г/см³. Для оценки считать грунт несжимаемой жидкостью, а продукты взрыва — двухатомным газом. (1985 г)

6.76. Идеальный газ, поляризуемость молекул которого $\alpha = 10^{-24}$ см³, находится в большом сосуде при температуре 300 К. В сосуде находится плоский конденсатор с напряженностью поля $E = 3 \cdot 10^4$ В/см. Найти относительные разности концентраций n и давлений P в конденсаторе и вне его. Где давление больше? (1968 г)

6.77. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный газ — водород — происходит нагревание газа до температуры T . Оценить величину T , предполагая, что вся энергия разряда пошла на нагревание газа. Напряжение на конденсаторе $U = 30$ кВ, емкость $C = 18$ мкФ, газ занимал объем 10 л при давлении 10^{-2} мм рт. ст. и температуре до разряда $T_0 = 293$ К. (1971 г)

6.78. В холодильнике сломался выключатель и внутренняя лампочка продолжала гореть при закрытой дверце. Считая, что вся мощность лампочки ($N = 25$ Вт) переходит в тепло, определить, на сколько изменилась потребляемая холодильником мощность. Обычно при комнатной температуре $T_2 = 295$ К внутри холодильника поддерживается температура $T_1 = 275$ К. Холодильник считать идеальным. (2000 г)

6.79. Найти максимальную мощность тепловой машины, у которой нагреватель — пластина площадью $S = 1$ м², одна из его поверхностей зеркальная, а другая полностью поглощающая. Холо-

дильником служит корпус орбитальной станции с фиксированной температурой $T_x = 300$ К. Солнце считать абсолютно черным телом с $T_C = 6000$ К и угловым диаметром $\alpha = 0,01$ рад. Теплопроводность рабочего тела считать очень большой.

Указание. Уравнение для нахождения оптимальной температуры решать методом подбора. (2007 г)

6.80. Найти максимальную мощность тепловой машины, у которой нагревателем является корпус орбитальной станции с фиксированной температурой $T_H = 500$ К, а холодильником — полностью поглощающая пластина площадью $S = 1$ м². Теплопроводность рабочего тела считать очень большой. (2007 г)

6.81. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами с температурами T и T_1 . Теплообмен между рабочим веществом и холодильником при температуре $T_2 = 200$ К < T осуществляется вследствие теплопроводности по закону $a(T - T_2)$, где $a = 1$ кВт/К. Теплообмен рабочего вещества с нагревателем происходит при температуре $T_1 = 800$ К. Полагая, что длительности изотермических процессов одинаковы, а адиабатических весьма малы,

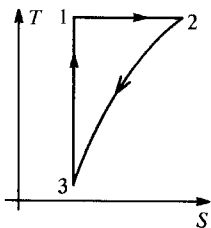


Рис. 105

найти температуру T , при которой мощность N , развиваемая тепловой машиной, максимальна. Найти также величину $N_{\text{макс}}$. (1987 г)

6.82. Измерение теплоемкости серебра осуществляется путем проведения показанного на рис. 105 термодинамического цикла. Какова величина удельной теплоемкости при температуре $T_0 = 15$ К, если образцу массой $m = 0,1$ г на изотермическом участке подводится тепловая энергия $Q_{12} = 4,75$ мДж, $T_1 = 24$ К, а температура в конце второго участка $T_3 = 11$ К? (2001 г)

6.83. В одном из двух теплоизолированных сосудов находится 1 кг льда при температуре $t_{\text{л}} = 0$ °С, а в другом — 1 кг воды при 0 °С. В воду опущен нагреватель, замыкающий цепь термопары

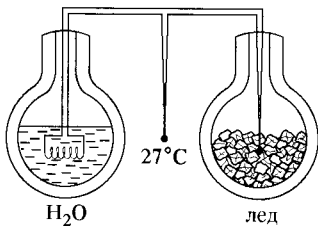


Рис. 106

(рис. 106), один спай которой опущен в лед, а другой поддерживается при температуре $t_{\text{к}} = 27$ °С. Пренебрегая сопротивлением проводов и спаев по сравнению с сопротивлением нагревателя и теплопроводностью проводов, определить, на сколько градусов нагреется вода, когда в другом сосуде полностью растает лед. Теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·град), и теплоту плавления льда $q = 80$ ккал/кг считать не

зависящими от температуры. (1981 г)

6.84. В холодильной машине Клода газ поступает при температуре $T_1 = 300$ К и под постоянным давлением в цилиндр с поршнем (детандер), где он адиабатически расширяется до фиксированного

конечного давления. При этом газ совершает работу и охлаждается на ΔT . Во сколько раз уменьшится ΔT , т. е. насколько менее эффективным оказывается этот способ охлаждения, если при том же давлении начальная температура будет равна $T_2 = 50$ К? Теплоемкость газа считать постоянной. (1996 г)

6.85. Одноатомный идеальный газ находится под поршнем в адиабатически изолированном цилиндре. Масса груза на поршне, определяющая давление газа, внезапно увеличилась вдвое. Насколько возросла энтропия, приходящаяся на одну молекулу газа, после установления нового равновесия? (1983 г)

6.86. Определить максимальную работу, которую можно получить от двух находящихся в адиабатической оболочке сосудов с одинаковыми одноатомными идеальными газами. Начальные давления и числа частиц N в сосудах одинаковы, но у них разные объемы и температуры T_1 и T_2 . (2002 г)

6.87. Одним из геологических процессов является просачивание воды сквозь пористые породы из областей с высоким давлением $P = 1000$ атм в полости, находящиеся при атмосферном давлении P_0 . Оценить долю x испарившейся при этом воды, если начальная ее температура $t_0 = 90^\circ\text{C}$. Теплообменом с горными породами пренебречь, удельную теплоту парообразования λ принять равной 2260 Дж/г. (1986 г)

6.88. В стальной оболочке находится вода при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$ и давлении $P = 1000$ атм. Оболочка внезапно теряет жесткость, и давление воды адиабатически быстро падает до 1 атм. Найти конечную температуру t_k воды. Теплоемкостью оболочки пренебречь. Плотность воды имеет максимум при температуре $t_M = 4^\circ\text{C}$, причем разность плотностей при 4°C и 0°C $\Delta\rho = 0,13$ мг/см³. (1989 г)

6.89. Определить тремя разными методами удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V для этилового спирта при температуре $T = 300$ К, используя а) закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, б) соотношение Майера, в) точное термодинамическое соотношение. Считать известными $c_P = 2,42$ Дж/(г·К), а также термодинамические коэффициенты: объемного расширения $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, изотермическую сжимаемость $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 7,6 \cdot 10^{-10} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$ и плотность этилового спирта $\rho = 0,79$ г/см³. Сопоставить полученные результаты. (1966 г)

6.90. Неон вытекает в вакуум из теплоизолированного сосуда через отверстие, размер которого мал по сравнению с длиной свободного пробега неона. Определить его температуру, когда в сосуде останется половина количества газа. Начальные его условия нормальные. Теплоемкостью стенок пренебречь. (1987 г)

6.91. Современная полупроводниковая технология требует для изготовления полупроводниковых микросхем очень чистых поверхностей кристаллов. Какой должен быть создан вакуум в системе,

чтобы можно было работать с атомно-чистыми поверхностями, т. е. за время изготовления микросхемы $t = 1$ час на поверхности «наростет» лишь монокристаллический слой газа? Считать, что все молекулы газа, достигающие поверхности, прилипают к ней в виде отдельных атомов, $T = 300$ К. (2001 г)

6.92. Одноатомный идеальный газ находится между двумя непроницаемыми стенками, причем дебройлевская длина волны молекул газа много больше расстояния между ними. Газ адиабатически сжимают, так что объем газа уменьшается вдвое. Найти конечную температуру, если начальная температура газа $T_0 = 300$ К. (1997 г)

6.93. Во сколько раз отличаются средние свободные пробеги атома водорода в основном и возбужденном состояниях (главное квантовое число возбужденного состояния $n = 10$) в разреженном одноатомном газе при одинаковой концентрации? (1967 г)

6.94. Для получения свободных молекул при низкой температуре широко применяется их охлаждение при адиабатическом истечении газа через небольшое отверстие в вакуум. Оценить конечную температуру струи молекулярного водорода $T_{\text{пред}}$, если газ первоначально находился при нормальных условиях. Диаметр отверстия $d = 0,3$ мм, сечение столкновения молекул водорода друг с другом $\sigma = 2,4 \cdot 10^{-15}$ см². Для оценки принять, что на расстоянии x от отверстия диаметр струи $d \approx x$, скорость струи считать постоянной. (2001 г)

6.95. По распространению радиоактивных газов после ядерных взрывов известно, что благодаря турбулентности время перемешивания по всей земной атмосфере составляет около одного года. Во сколько раз быстрее происходит процесс турбулентного перемешивания в условиях земной атмосферы по сравнению с молекулярной диффузией? (1967 г)

6.96. При наблюдении за поведением капли жидкости, несущей на себе единичный электрический заряд q , в камере, наполненной водородом, было обнаружено, что сила тяжести, действующая на каплю, может быть уравновешена электрическим полем с напряженностью $E = 10^4$ В/см. Наблюдение за каплей при включенном поле показало, что за время $t = 100$ с она передвигалась по сложной траектории и отошла от своего первоначального положения на расстояние $R = 10^{-2}$ см. Найти скорость установившегося падения капли при выключенном поле. Давление водорода в камере $P = 1$ атм, плотность $\rho = 0,09$ г/л. (1966 г)

6.97. Оценить температуру T электронов,двигающихся под действием электрического поля напряженностью $E = 100$ В/см в воздухе при нормальных условиях. Концентрация электронов мала, сечение столкновения их с молекулами воздуха $\sigma = 10^{-15}$ см². (1989 г)

6.98. В ультрафиолетовых лучах ($\lambda = 1000 \text{ \AA}$) производится фотোগрафирование биомолекул, находящейся в растворе. Оценить максимальное время экспозиции, при которой еще может быть получено на фотографии предельное разрешение? Температура раствора $T = 300$ К, подвижность молекулы $B = 10^4$ см/(с · дин). (1999 г)

6.99. Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в некотором газе равна 10^{-5} см, оценить среднюю скорость дрейфа v иона в этом газе под действием однородного электрического поля $E = 300$ В/см. Температура газа комнатная. (1972 г)

6.100. При прохождении быстрых заряженных частиц через камеру Вильсона, наполненную аргоном при давлении $P = 1$ атм и насыщенными парами воды, происходит образование ионов аргона, являющихся центрами конденсации паров воды. Считая, что движение ионов обусловлено только диффузией, оценить ширину следа частиц, если конденсация наступает через $\tau = 0,01$ с после пролета частиц. Эффективное сечение рассеяния ионов аргона на атомах $\sigma = 10^{-15}$ см². Температура газа $T = 300$ К. (1981 г)

6.101. Оценить размер алюминиевой частицы, взвешенной в жидкости с плотностью $\rho_0 = 1$ г/см³ и вязкостью $\eta = 1$ П, для которой скорость вязкого падения сравнивается со скоростью теплового движения при комнатной температуре. Будут ли такие частицы выпадать в осадок в алюминиевой краске? (1968 г)

6.102. Оценить максимальный размер водяной капли, падение которой в воздухе может быть еще описано законом Стокса. (2005 г)

6.103. Какова наибольшая скорость u сферических частиц радиусом $r = 50$ мкм, выносимых топочным газом из дымовой трубы? Скорость газа на оси трубы $v = 30,5$ см/с, коэффициент динамической вязкости $\eta = 2,6 \cdot 10^{-5}$ Па·с, плотность газа $\rho_r = 7,2 \cdot 10^{-4}$ г/см³, частиц — $\rho_c = 1,2$ г/см³. Найти число Рейнольдса для движущихся частиц. (2008 г)

6.104. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами $d = 1$ см подключен к батарее и заполнен азотом. Вблизи одной пластины создаются ионы азота N^+ , которые движутся к другой пластине и увлекают молекулы газа, что приводит к появлению разности давлений $\Delta P = 0,01$ мм рт. ст. при плотности тока ионов $j = 1$ мкА/см². Определить подвижность μ ионов, которую измеряют обычно в см²/(В·с). (1984 г)

6.105. Пучок атомов аргона ⁴⁰Ag из сосуда, находящегося при комнатной температуре, попадает в пары гелия ³He, имеющие температуру $T = 0,4$ К и давление $P = 0,03$ мм рт. ст. Найти расстояние R , на котором атомы аргона отдадут $a = 0,9$ своей энергии. Длина свободного пробега атомов аргона-40 в парах гелия-3 при нормальных условиях $l = 1$ мкм. (1989 г)

6.106. В сосуде с гелием (радиус атома гелия $r = 1,2$ Å, энергия ионизации $W_{II} = 24,5$ эВ) при давлении $P = 2$ мм рт. ст. находится проволочная катушка, состоящая из $N = 10$ витков радиусом $R = 5$ см и длиной $l = 5$ см, по которой протекает переменный ток с частотой $\nu = 10$ МГц. Оценить, при какой силе тока \mathcal{I}_0 в катушке наступит пробой газа. Считать, что для пробоя электрон должен набрать на длине свободного пробега энергию, достаточную для ионизации атомов. (1984 г)

6.107. Для защиты от газообразных радиоактивных продуктов распада ториевую руду засыпают песком. При этом радиоактивный газ торон ${}^{220}_{88}\text{Rn}$, выделяемый рудой, во время прохождения через песок в значительной мере распадается. Вычислить расстояние, на котором концентрация торона падает в 10^5 раз. Период полураспада торона $T = 54,5$ с, коэффициент диффузии его в песке $D = 0,04$ $\text{см}^2/\text{с}$. Диффузию можно считать одномерной. (1975 г)

6.108. По теплоизолированной трубке, разность давлений на концах которой равна 100 атм, течет вода. Температура воды на входе $t_1 = 20^\circ\text{C}$. На сколько градусов повысится ее температура на выходе? (1995 г)

6.109. Чтобы уменьшить поток тепла в криостат по механической подвеске, экспериментатор решил сделать тепловой замок в виде утоньшения на высокотемпературном конце (рис. 107а). Однако затем ему посоветовали перевернуть подвес, то есть утоньшение сделать на низкотемпературном конце, где меньше коэффициент теплопроводности (рис. 107б). Показать, что на самом деле теплопритоки в обоих случаях одинаковы. Зависимость коэффициента теплопроводности χ от температуры считать известной, длины и площади поперечного сечения тонкой и толстой частей

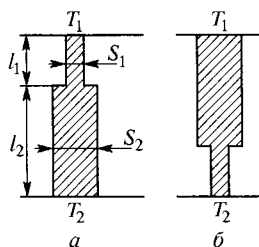


Рис. 107

соответственно равны l_1, S_1 и l_2, S_2 , температуры равны T_1, T_2 . (1995 г)

6.110. Небольшая уединенная планета покрыта тонким слоем льда с температурой наружной поверхности $T_s = 60$ К. Тепло подводится к поверхности льда из недр планеты за счет теплопроводности льда. Считая теплоту плавления и коэффициент теплопроводности $\chi = 2 \cdot 10^5$ эрг/($\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}$) не зависящими от температуры и коэффициент серо-

сти льда $\epsilon = 0,75$, оценить максимально возможную толщину ледяной корки такой планеты. (1998 г)

6.111. Внутри Земли вследствие радиоактивных превращений выделяется тепло со скоростью Q [эрг/($\text{г} \cdot \text{с}$)] в результате чего ниже глубины h от поверхности земные породы плавятся. Оценить величины Q и h , считая Землю однородным шаром. Средняя плотность Земли $\rho = 5,5$ $\text{г}/\text{см}^3$, коэффициент теплопроводности пород $\chi = 3,5 \cdot 10^5$ эрг/($\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}$) не зависит от температуры, температура плавления пород $T_{\text{пл}} = 2000$ К при давлении $P = 1,2 \cdot 10^{12}$ $\text{дин}/\text{см}^2$. (2000 г)

6.112. Внутри сферы радиусом R помещен шарик из плутония радиусом r_0 ($r_0 \ll R$). Вследствие радиоактивного распада Pu температура поверхности шарика постоянна и равна $T_0 = 300$ К. Температура сферы также поддерживается постоянной и равной $T_R = 290$ К. Коэффициент теплопроводности воздуха, заполняющего пространство между шариком и сферой, $\chi = 2500$ эрг/($\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}$). Считая поверхности шарика и сферы абсолютно черными, оценить величину ради-

уса шарика r_0 , при котором поток тепла от него за счет излучения будет равен потоку тепла за счет теплопроводности. (2000 г)

6.113. Температура поверхности шарика из плутония вследствие радиоактивного распада Pu поддерживается постоянной при $T_0 = 350$ К. На большом расстоянии от шарика температура воздуха $T_\infty = 300$ К, при $T = 300$ К коэффициент теплопроводности воздуха $\kappa_\infty = 2500$ эрг/(см \cdot с \cdot К). Считая поверхность шарика абсолютно черной, оценить минимальный радиус шарика r_0 , при котором поток тепла от шарика за счет излучения оказывается равным потоку тепла за счет теплопроводности. При решении учесть зависимость κ от температуры. (2000 г)

6.114. На длинный сапфировый стержень радиусом $r = 1$ см, находящийся в космосе вдали от каких-либо тел, нанесена тонкая пленка толщиной $a = 0,2$ мм с удельным сопротивлением $\rho = 1$ мкОм \cdot см, а затем слой диэлектрика толщиной $b = 0,2$ мм, его коэффициент теплопроводности $\kappa = 2 \cdot 10^3$ эрг/(с \cdot см \cdot К). По пленке пропускается ток плотностью $j = 100$ А/см 2 . Считая диэлектрический слой абсолютно черным телом, оценить температуру внешней и внутренней поверхностей диэлектрической пленки. (1998 г)

6.115. Тонкая проволока, охватывающая петлей брусок льда, под действием нагрузки способна пройти сквозь лед. Полагая, что скорость движения проволоки v определяется скоростью подвода тепла через проволоку от области над проволокой, где вода замерзает, к области под проволокой, где плавится лед, оценить величину скорости v . Теплопроводностью льда пренебречь. Температура льда 0°C ; теплота плавления $q = 335$ Дж/г; плотность льда $\rho = 0,917$ г/см 3 . Диаметр проволоки $d = 0,1$ мм; коэффициент теплопроводности $\kappa = 130$ Вт/(м \cdot К); давление P , создаваемое под проволокой, принять равным 10 атм. (1986 г)

6.116. Оценить максимальное давление, при котором водяной пар может оставаться пересыщенным при температуре 100°C , находясь в сосуде с несмачиваемыми стенками. Принять, что минимальная устойчивая капля воды содержит 10^5 молекул, а коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 70$ дин/см. (1985 г)

6.117. Переохлажденный водяной пар находится при давлении $P_0 = 1$ атм и температуре $t_0 = 99^\circ\text{C}$ в сосуде с несмачиваемыми стенками. Каков минимальный размер капли, которая должна образоваться, чтобы произошла конденсация пара? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять $\sigma = 70$ дин/см, удельная теплота испарения $\lambda = 2,3$ кДж/г. (1985 г)

6.118. Под действием внешних звуковых волн в воде рождаются пузырьки из растворенного в ней воздуха радиусом $r = 10$ мкм с концентрацией $N = 10^6$ см $^{-3}$. Найти скорость звука в воде с пузырьками, если в воде она равна $s_0 = 1500$ м/с. (2008 г)

6.119. Небольшое облако, состоящее из водяных капель диаметром $d = 0,1$ мкм, постепенно сконденсировалось в одну каплю массой $M = 1$ г. Считая процесс адиабатическим, вычислить изме-

нение энтропии и температуру капли. Температура облака $t = 27^\circ\text{C}$, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 70$ дин/см, а $d\sigma/dT = -0,15$ дин/(см·К). (1986 г)

6.120. Растяжение нитевидного бездефектного кристалла Ni (висера) приводит к образованию гладкой поверхности разрыва при натяжении $T = 3 \cdot 10^{10}$ дн/см². Оценить удельную поверхностную энергию U этого материала. (2005 г)

6.121: Известно, что точка кипения неоднородной системы, помещенной в стакане (рис. 108) и состоящей из слоев несмешивающихся жидкостей: «четыреххлорки» CCl_4 и воды H_2O — равна $t = 66^\circ\text{C}$, что ниже точки кипения воды, равной $t_1 = 100^\circ\text{C}$, и чистой «четыреххлорки», равной $t_2 = 76,7^\circ\text{C}$. Эти данные относятся к нормальному давлению. Как изменится точка кипения такой системы, если внешнее давление возрастет на 10%? Теплота парообразования воды равна $\Lambda_1 = 40,5$ кДж/моль, «четыреххлорки» — $\Lambda_2 = 29$ кДж/моль. (1990 г)

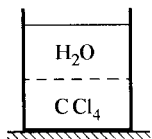


Рис. 108

6.122. Определить теплоту испарения жидкого гелия при $T \rightarrow 0$, считая, что гелий подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Известно, что для гелия критическая температура $T_{кр} = 5,2$ К. (1991 г)

6.123. В 1911 г. Г. Камерлинг—Оннес при измерении сопротивления ртути, охлаждаемой жидким гелием, обнаружил, что при откачке паров гелия из криостата сопротивление ртути исчезает, и так было открыто явление сверхпроводимости. Вычислить, до какого давления надо было откачивать пары гелия, если температура кипения He при давлении 1 атм $T_{кип} = 4,22$ К, молярная теплота испарения при этом давлении $\Lambda = 84$ Дж/моль, а критическая температура сверхпроводящего перехода ртути $T_c = 4,15$ К. (1997 г)

6.124. Газообразный азот, находящийся при температуре $T_1 = 100$ К в объеме $V_1 = 1$ л при давлении $P_1 = 10$ атм, однократно адиабатически расширяется до давления $P_2 = 1$ атм. Какое максимальное количество жидкого азота (в см³) может быть получено при этом? Теплота испарения азота $\lambda = 160$ Дж/см³, температура кипения $T_2 = 77$ К. (1997 г)

6.125. Кривая плавления изотопа ³He при очень низких температурах имеет минимум и далее — отрицательный наклон $dP/dT < 0$. При увеличении внешнего давления в камере, содержащей жидкий и твердый ³He, часть жидкости затвердевает с поглощением тепла, что используется иногда для получения еще более низких температур. Определить конечную температуру смеси и долю x затвердевшего ³He при адиабатическом увеличении давления на $\Delta P = 1$ атм. Начальная температура $T_0 = 0,04$ К, давление $P_0 = 33$ атм. Разность молярных объемов жидкой и твердой фаз $V_{ж} - V_{т} = 1,31$ см³/моль можно считать постоянной. Теплоемкость жидкого ³He в нужном диапазоне линейно растет с температурой $C_{ж} = 4,6RT$. Энтропия твер-

дого ${}^3\text{He}$ обусловлена лишь наличием спина $1/2$ у ядра ${}^3\text{He}$ и равна постоянной величине $R \ln 2$. Теплоемкостью стенок и возможным тепловыделением при сдавливании пренебречь. Считать, что в начальный момент в камере находится только жидкий ${}^3\text{He}$. (1975 г)

6.126. При конечной температуре в результате флуктуаций могут самопроизвольно возникнуть колебания математического маятника. Каково при этом изменение энтропии маятника (температура поддерживается неизменной)? (1999 г)

6.127. За какое время электрон притянется к бесконечной пластине из металла? Вначале он покоился на расстоянии $a = 1$ мм. Потерями энергии из-за токов проводимости в металле пренебречь. (1987 г)

6.128. Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E = 30$ кВ/см, диаметр проводов $d = 1$ см и расстояние между проводами $L = 5$ м. (1977 г)

6.129. На высоте $H = 1$ см над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиусом $R = 1$ см с полным зарядом $Q = 10^{-9}$ Кл. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на поверхности листа непосредственно под центром диска. (1982 г)

6.130. Для измерения напряженности электрического поля у поверхности Земли используют две проводящие пластины, расположенные горизонтально с небольшим зазором между ними (рис. 109). Верхняя пластина заземлена и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через край пластины, делая $n = 1200$ об/мин и периодически закрывая нижнюю пластину. При этом перезарядка нижней пластины вызывает падение напряжения на сопротивлении $R = 10^7$ Ом, соединяющем нижнюю пластину с Землей. Найти среднее по модулю значение V , если напряженность электрического поля у поверхности Земли $E = 1,5$ В/см. Считать, что нижняя пластина успевает полностью перезарядиться за один цикл вращения. Площадь пластины $S = 600$ см². (1978 г)

6.131. В танталовых электролитических конденсаторах роль одной из обкладок играет пористый тантал, поверхность которого можно представить как совокупность спеченных шариков с суммарной площадью $S = 1$ м² (в объеме 1 см³). Для получения диэлектрического слоя всю поверхность окисляют, а поры заполняют проводящим диоксидом марганца, который играет роль второй обкладки. Толщина окисла $d = 0,1$ мкм, $\epsilon = 27$. Какого размера L должен быть такой конденсатор в форме куба, чтобы его емкость равнялась 1 Ф? Оценить также радиус шариков. (2008 г)

6.132. Оценить силу, действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 200$ Å от поверхности острого металлического иглы с ради-

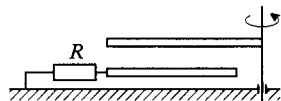


Рис. 109

усом закругления $R = 100 \text{ \AA}$. Потенциал на игле равен $V = 10 \text{ кВ}$. Поляризуемость атома α — порядка его объема. (1973 г)

6.133. На фотокатод K электронно-оптического преобразователя (рис. 110), имеющего работу выхода $A = 2 \text{ эВ}$, падает излучение аргонного лазера $\lambda \approx 0,5 \text{ мкм}$. Диаметр светового пятна на фотокатодe $d = 0,1 \text{ мм}$. На ускоряющий плоский анод A преобразователя, расположенный на расстоянии $L = 30 \text{ мм}$, подано напряжение $V_a = 4 \text{ кВ}$. Определить диаметр пятна на экране \mathcal{E} , расположенном вблизи анода. (1973 г)

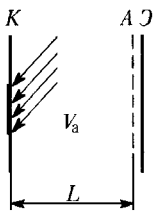


Рис. 110

6.134. Действие времяпролетного масс-спектрометра основано на разделении ионов по времени пролета ими определенного расстояния. Но из-за разброса Δv начальных скоростей даже одинаковые ионы должны

приходить к приемнику с некоторым разбросом Δt по времени. Для устранения этого недостатка используется электростатический отражатель, на выходе которого указанный разброс компенсируется (рис. 111). Оценить напряженность E поля отражателя, необходимую для точной регистрации однозарядных ионов, прошедших путь $L \approx 10 \text{ см}$ с начальной энергией $\mathcal{E} \approx 1 \text{ кэВ}$. Угол отражения считать малым. (1984 г)

6.135. Поверхностное натяжение сферического мыльного пузыря $\sigma = 50 \text{ дин/см}$, радиус $r = 1 \text{ см}$, наружное атмосферное давление $P = 10^6 \text{ дин/см}^2$. Какой заряд Q надо сообщить пузырю, чтобы его радиус увеличился вдвое? При каких размерах пузыря поверхностное натяжение практически не влияет на результат и при каких оно является определяющим? (1969 г)



Рис. 111

6.136. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых квадратных пластин, расположенных в вакууме вертикально на расстоянии $d = 1 \text{ мм}$ друг от друга. Одна из пластин закреплена, а другая может двигаться без трения по гладким вертикальным направляющим. При какой разности потенциалов V между пластинами подвижная пластина не упадет вниз? Масса подвижной пластины $M = 1 \text{ г}$, сторона квадрата $a = 10 \text{ см}$. (1986 г)

6.137. В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц образует объемную ионизацию. Оценить время собирания ионов τ в таком счетчике, наполненном аргоном при нормальном давлении. Радиус катода $R = 1 \text{ см}$, радиус анода $r = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, разность потенциалов между анодом и катодом $V = 2500 \text{ В}$, подвижность положительных ионов аргона $\mu = 1,4 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. (1974 г)

6.138. В пространстве между пластинами плоского конденсатора, заполненного газом и подсоединенного к батарее, образуется пара ионов с зарядами $\pm e$ (e — заряд электрона). Какой заряд протечет в

цепи в результате движения ионов? Дать график зависимости тока от времени. Считать подвижность ионов в газе постоянной. (1983 г)

6.139. Основная трудность в методе коллективного ускорения тяжелых положительно заряженных частиц заключается в создании плотных электронных сгустков. Рассмотрите сферически симметричный сгусток радиусом $r_0 = 1$ см, содержащий $N = 10^{13}$ электронов; в начальный момент электроны неподвижны. Под действием сил кулоновского отталкивания сгусток начинает расширяться. Найти кинетическую энергию T и скорость внешних электронов v при увеличении радиуса сгустка в два раза. Оценить время расширения сгустка. (1977 г)

6.140. Электронный пучок линейного ускорителя представляет собой последовательность сгустков, следующих друг за другом с периодом $T = 3 \cdot 10^{-10}$ с. Для измерения электрического тока ускоренных частиц используется цилиндр Фарадея (рис. 112), полностью поглощающий пучок. Цилиндр Фарадея заземлен через сопротивление $R = 100$ Ом, сигнал с которого подается через кабель на вход регистрирующего прибора с большим входным сопротивлением ($R_{вх} \gg R$), который шунтируется емкостью кабеля $C = 200$ пФ (эквивалентная схема измерительной цепи дана на рисунке). Определить число электронов в сгустке, если показание регистрирующего прибора $U = 1$ В. При решении воспользоваться тем, что регистрирующий прибор является инерционным ($R_{вх}C \gg RC \gg T$). (1974 г)

6.141. В опытах А. Д. Сахарова сверхсильные магнитные поля получались взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создавалось начальное магнитное поле B_0 . Определить магнитное поле B в момент максимального сжатия трубы. Начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, а в момент максимального сжатия $r = 0,5$ см, начальное магнитное поле $B_0 = 50\,000$ Гс. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление P , необходимое для получения такого сжатия. (1969 г)

6.142. Сверхсильные магнитные поля получают взрывным сжатием отрезка проводящей трубы, в которой заключено начальное магнитное поле. Найти индукции полей до и после взрыва, если известно, что радиус трубы уменьшился в 10 раз при давлении от взрыва в 10^6 атм. (1971 г)

6.143. Тонкое металлическое кольцо быстро вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его диаметр и перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 100$ Гс. Пренебрегая трением в оси, найти время t , за которое угловая скорость

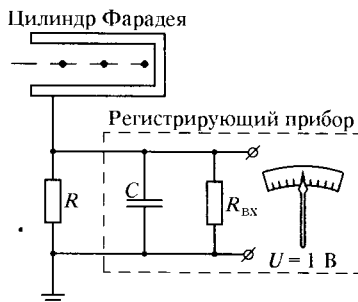


Рис. 112

вращения уменьшается в e раз. Плотность материала кольца $\rho = 9 \text{ г/см}^3$, проводимость $\sigma = 5 \cdot 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Потери энергии за один оборот считать малыми. (1980 г)

6.144. Однородно заряженное зарядом q непроводящее тонкое кольцо массой m быстро вращается вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле B (рис. 113). Найти угловую скорость прецессии Ω . (1971 г)

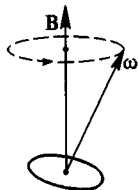


Рис. 113

6.145. Электрический диполь движется в однородном магнитном поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} , перпендикулярной \mathbf{B} . Дипольный момент \mathbf{p} составляет малый угол с направлением $[\mathbf{vB}]$ (рис. 114). Найти угловую частоту малых колебаний диполя ω_0 , считая известными его момент инерции I_0 , скорость \mathbf{v} , дипольный момент \mathbf{p} и напряженность поля \mathbf{B} . (1971 г)

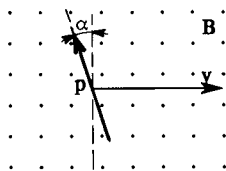


Рис. 114

6.146. Тонкостенный металлический стакан радиусом $R_2 = 1 \text{ см}$, длиной $l = 10 \text{ см}$ и массой $M = 1 \text{ г}$ и расположенный внутри такой же длины и массы цилиндр радиусом $R_1 = 1,5 \text{ см}$ подвешены в вакууме на тонкой нити в направленном вдоль их осей магнитном поле $B = 10^4 \text{ Гс}$ (рис. 115). Цилиндр и стакан заряжены разноименными и одинаковыми по величине зарядами до разности потенциалов $V = 3000 \text{ В}$ и в какой-то момент внутренний цилиндр касается дна наружного стакана, и разность потенциалов падает до нуля. На сколько градусов повернется система в результате за 1 час? (1997 г)

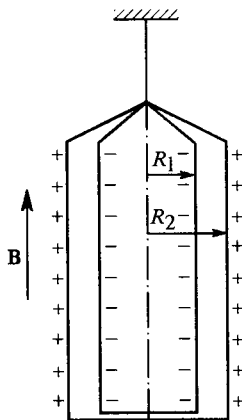


Рис. 115

6.147. По двум горизонтальным параллельным проводам, находящимся на расстоянии $2a = 1 \text{ см}$ друг от друга, текут одинаковые по величине, но противоположно направленные токи силой $\mathcal{I} = 10^3 \text{ А}$. Точно посередине между проводами находится шарик с диамагнитной восприимчивостью $\chi = -10^{-5}$ и плотностью $\rho = 2,0 \text{ г/см}^3$. Найти период T малых колебаний шарика в горизонтальной плоскости. Считать, что вертикальное движение шарика отсутствует, трения при его движении нет. (1986 г)

6.148*. Чтобы заставить левитировать каплю воды в атмосфере кислорода эту систему помещали в неоднородное магнитное поле с градиентом $\frac{1}{2} \frac{dB^2}{dz} = B \frac{dB}{dz} = 4,2 \cdot 10^8 \text{ (Гс)}^2/\text{см}$ (Я. Икезоз, Н. Хирота, Дж. Накагава и К. Китазава — 1998 г). Найти, при каком давлении P_x кислорода возможна левитация. Кислород является парамагнетиком с магнитной восприимчивостью

$\chi(\text{O})_2 = 1,54 \cdot 10^{-7}$ при давлении $P_0 = 1$ атм и температуре 20°C , а вода — диамагнетиком с восприимчивостью $\chi(\text{H}_2\text{O}) = -0,72 \cdot 10^{-6}$. Плотность кислорода при этих условиях $\rho(\text{O}_2) = 1,43 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Температуру считать постоянной, размагничивающие поля (влияние формы) не учитывать. (2004 г)

6.149. На оси кругового витка радиусом $r = 1$ см на расстоянии $L = 10$ см от него в некоторый момент времени оказывается точечный магнитный диполь, параллельный оси витка и движущийся вдоль нее со скоростью $v = 1$ км/с. Оценить силу тока \mathcal{I} в витке, если его сопротивление $R = 0,001$ Ом и величина магнитного момента диполя $\mu = 0,1$ Гс·см³. (1986 г)

6.150. Найти относительное изменение частоты регулярной прецессии намагниченного тяжелого гироскопа в поле тяжести, если приложить магнитное поле с индукцией $B = 1$ кГс, направленное вертикально вверх. Намагниченность \mathbf{I} считать постоянной, однородной и направленной по оси гироскопа, причем величина $4\pi\mathbf{I} = 2$ кГс, плотность материала гироскопа $\rho = 8$ г/см³ и расстояние от точки опоры до центра масс гироскопа $l = 2$ см. (1980 г)

6.151. Некоторый ферромагнитный материал имеет остаточную намагниченность $I_0 = 500$ Гс, а коэрцитивную силу $H_0 = 500$ Э, причем кривая намагниченности $I(H)$ представляет собой четверть окружности (рис. 116). Из этого материала изготовлен постоянный магнит, представляющий собой тор квадратного сечения с поперечным разрезом. Внутренний радиус тора $r_1 = 1,5$ см, внешний — $r_2 = 2,5$ см, ширина разреза $d = 5$ мм. Определить величину магнитного поля в зазоре. Рассеянием магнитного поля пренебречь. (1972 г)

6.152. В торцевых плоскостях на оси длинного соленоида помещают одинаковые магнетики объемом $V = 1$ см³ и намагниченностью $4\pi\mathbf{I} = 12,5$ кГс, повернутые друг к другу разноименными полюсами, магнетики отпускают, и они затем слипаются в центре соленоида, замкнутого на сопротивление $R = 1$ Ом. Какой заряд Q протечет при этом в цепи соленоида, витки которого намотаны с плотностью $n = 10^3$ см⁻¹? (1990 г)

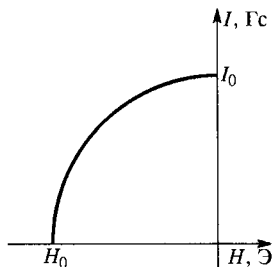


Рис. 116

6.153. Определить период малых крутильных колебаний магнитного бруска ($S = 1$ мм², $l = 10$ см), подвешенного горизонтально за середину на неупругом подвесе в магнитном поле Земли (горизонтальная составляющая $B_0 = 0,2$ Гс). Плотность стали $\rho = 7,8$ г/см³, остаточная индукция $B = 10$ кГс. (1968 г)

6.154. Компас располагают под проводом, по которому течет постоянный ток, на расстоянии $R = 10$ см от оси провода. Найти ток, при котором стрелка приподнимется над своей опорой. Остаточная индукция стали стрелки равна индукции насыщения $B = 20$ кГс. Плотность стали $\rho = 7,8$ г/см³. (1968 г)

6.155. Одним из методов обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда — монополя Дирака, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = hc/(2e)$, может быть регистрация электрического тока, возникающего в сверхпроводящем кольце после прохождения сквозь него монополя. Оценить величину тока в кольце индуктивностью $L = 0,1$ мкГн.

Указание. Гипотеза П. Дирака приводит к симметризации уравнений Максвелла, так что одно из них преобразуется к виду:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_M,$$

где \mathcal{E} — ЭДС, возникающая в контуре, Φ — поток магнитной индукции, \mathcal{J}_M — магнитный ток монополя или магнитный заряд, протекающий в единицу времени через площадку, ограниченную контуром. (1983 г)

6.156. Монополь Дирака (элементарная частица массой M , обладающая магнитным зарядом b) находится строго посередине зазора между пластинами незаряженного разомкнутого плоского конденсатора, изготовленными из идеального сверхпроводника. Оценить частоту малых колебаний монополя в направлении нормали к плоскостям. При каком расстоянии между пластинами d эти колебания будут затухающими? Все размеры конденсатора много больше расстояния между пластинами. (1993 г)

6.157. Над сверхпроводящей плоскостью параллельно ей на расстоянии $h = 40$ см находится сверхпроводящий длинный провод диаметром $d = 2$ см, по которому течет ток $\mathcal{I} = 2$ А. Провод находится под напряжением $V = 1$ кВ относительно плоскости. Вычислить силу взаимодействия единицы длины провода с плоскостью. Силой тяжести пренебречь. (2007 г)

6.158. Точечный магнитный диполь с магнитным моментом $\mathfrak{M} = 1000$ Гс·см³ висит над поверхностью сверхпроводника 1-го рода (температура $T \approx 0$ К), у которого критическое магнитное поле $H_c = 500$ Э. Каков максимально допустимый вес диполя? Ось диполя перпендикулярна плоскости сверхпроводника. (1999 г)

6.159. Частичка пыли радиусом $r = 10^{-5}$ см взвешена в воздухе при комнатной температуре. Оценить магнитный момент частички (в ядерных магнетонах Бора), который возникает в результате «броуновского» вращательного движения. Заряд частички $q = 10e$, плотность $\rho = 2$ г/см³. (2004 г)

6.160. Сепаратор частиц устроен следующим образом: на вход цилиндрического конденсатора с внешним и внутренним радиусами r_2 и r_1 попадают ионы разных масс и, двигаясь по окружности, попадают затем в магнитное поле B (рис. 117). Каково отношение M/q массы иона к его заряду, если он прошел этот сепаратор при напряжении на конденсаторе V , а радиус его траектории в магнитном поле равен R_T ? (1996 г)

6.161. В омегатроне (приборе для исследования газового состава в каком-либо объеме) ион остаточного газа раскручивается по спира-

ди в скрещенных переменном электрическом поле с амплитудой $E = 1$ В/см и постоянном магнитном поле $B = 3$ кГс (рис. 118). Найти частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора. При этой частоте радиус спирали будет возрастать до тех пор, пока ион не достигнет коллектора на радиусе $R = 1$ см. Если частоту немного изменить, то ион будет некоторое время раскручиваться, а потом начнет скручиваться обратно к источнику. Оценить, насколько надо изменить частоту, чтобы ток на коллектор прекратился. (1968 г)

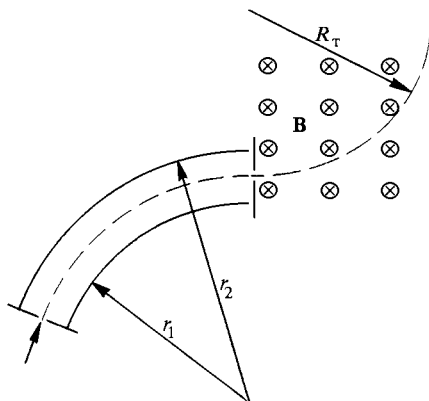


Рис. 117

6.162. По цилиндрическому проводнику протекает ток, плотность которого j однородна по сечению. Концентрация электронов проводимости n . Пренебрегая сопротивлением и учитывая поле Холла, определить величину и направление вектора Пойнтинга в проводнике в зависимости от расстояния r до оси. Величины $\epsilon = \mu = 1$. (1991 г)

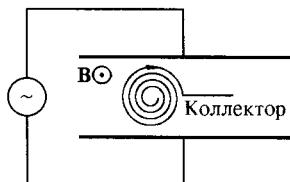


Рис. 118

6.163. Одна из металлических пластин плоского конденсатора соединена с жесткой стенкой через пружину (рис. 119), а к другой (неподвижной) подводится переменное напряжение $V \sim = V_0 \cos(\omega t/2)$, где $\omega = 100$ с⁻¹ — резонансная частота механических колебаний пластины добротностью $Q = 100$. Найти амплитуду x_0 колебаний пластины конденсатора. Расстояние между пластинами $d = 1$ мм, площадь пластины $S = 5$ см², ее масса $M = 1$ г, а $V_0 = 100$ В. (1997 г)

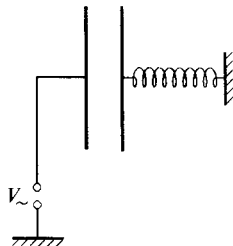


Рис. 119

6.164. При измерении добротности Q резонансного контура из параллельно включенных катушки с индуктивностью $L = 0,1$ Гн и сопротивлением $r = 30$ Ом и конденсатора с емко-

стью $C = 30$ пФ поступили следующим образом. Контур подключили к клеммам осциллографа и, включая и выключая ЭДС постоянного тока, наблюдали затухающие электрические колебания в контуре (рис. 120). Сравнить добротности контура при разомкнутой цепи батареи в случае, когда входное сопротивление R осциллографа очень

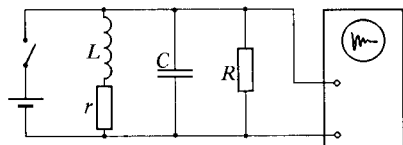


Рис. 120

велико и когда оно конечно и равно 100 кОм. (1977 г)

6.165. Конденсатор, заполненный сегнетоэлектриком, подключен к розетке переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В. Через конденсатор с сопротивлением утечки $R = 10$ кОм течет ток $I = 1$ А. Зависимость электрического смещения D от напряженности E электрического поля в сегнетоэлектрике, объем которого $V = 100$ см³, представляет собой петлю гистерезиса с площадью $S = 12,5$ мДж/см³. Найти активное сопротивление r_C и емкость C конденсатора. (1988 г)

6.166. Дроссель подключен к розетке сети переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В. Через обмотку с омическим сопротивлением $r = 1$ Ом течет ток $I = 1$ А. Мощность, выделяемая токами Фуко в пластинах сердечника, равна $N = 10$ Вт. Зависимость индукции B от напряженности H магнитного поля в ферромагнетике сердечника, объем которого $V = 100$ см³, представляет собой петлю гистерезиса с площадью $S = 25$ кГс·Э. Найти активное сопротивление R и индуктивность L дросселя. Считать, что сердечник набран из тонких пластин и поле внутри сердечника однородное. (1988 г)

6.167. Сердечник трансформатора изготовлен из пермаллоя (магнитомягкий сплав Ni с Fe, средняя атомная масса $A \approx 57$), его гистерезисная кривая, показанная на рис. 121, хорошо аппроксимируется прямоугольной петлей. Плотность пермаллоя $\rho = 8$ г/см³, обмотка создает в сердечнике поле $H = H_0 \sin 2\pi ft$ с амплитудой $H_0 = 3$ Э, частота $f = 50$ Гц. Считая теплоемкость материала классической, оцените скорость нагрева сердечника, пренебрегая тепловыми потерями. (1999 г)

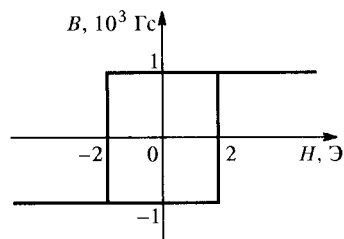


Рис. 121

6.168. Тонкая серебряная трубка с толщиной стенки $h = 0,1$ мм помещена в однородное высокочастотное ($f = 1,5$ ГГц) поле СВЧ-печки с амплитудой $B_0 = 10$ Гс. Ось трубки направлена вдоль линий магнитного поля. Оценить время, через которое температура трубки достигнет температуры плавления серебра $t_{пл} = 961$ °С. Удельное сопротивление серебра $\rho = 1,6 \cdot 10^{-6}$ Ом·см и его удельную теплоемкость

температуры плавления серебра $t_{пл} = 961$ °С. Удельное сопротивление серебра $\rho = 1,6 \cdot 10^{-6}$ Ом·см и его удельную теплоемкость

$c = 0,235 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$ считать независимыми от температуры. Плотность серебра $\rho_{\text{Ag}} = 10,5 \text{ г}/\text{см}^3$. (2007 г)

6.169. Определить добротность катушки, намотанной на тонкостенную медную трубку с внешним диаметром $D = 2 \text{ см}$ и толщиной стенок $\delta = 0,05 \text{ см}$. Удельное сопротивление меди равно $\rho = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Катушка подключена к цепи переменного тока с частотой $f = 50 \text{ Гц}$. Длины трубки и катушки считать одинаковыми и гораздо большими диаметра. (1974 г)

6.170. Индуктивностью резонансного контура ($f_0 = 10 \text{ МГц}$) служит длинная однослойная катушка диаметром $D = 10 \text{ мм}$. На сколько изменится резонансная частота контура, если внутрь катушки вставить на всю длину латунный цилиндр диаметром $D/2$? Сопротивление латуни $\rho = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. (1993 г)

6.171. По оси длинного короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида пролетает с постоянной скоростью $v = 10^5 \text{ см}/\text{с}$ намагниченный ($M = 800 \text{ Гс}$) стальной цилиндр. Оценить максимальную силу тока \mathcal{I}_M в соленоиде. Внутренний диаметр соленоида $D_c = 10,4 \text{ см}$, его длина $l_c = 50 \text{ см}$, число витков $N = 100$. Диаметр стального цилиндра $D_{\text{ц}} = 10 \text{ см}$, длина $l_{\text{ц}} = 60 \text{ см}$, проводимость стали $\sigma = 0,8 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$. Учесть, что на частотах, больших 10^3 Гц , магнитная проницаемость железа в полях, больших 10^4 Э , практически равна единице. (2002 г)

6.172. По оси длинного короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида с током $\mathcal{I}_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ А}$ пролетает медный цилиндр с постоянной скоростью $v = 10^5 \text{ см}/\text{с}$. Оценить максимальную силу тока \mathcal{I}_M в соленоиде. Внутренний диаметр соленоида $D_c = 10,4 \text{ см}$, его длина $l_c = 50 \text{ см}$, число витков $N = 100$. Диаметр медного цилиндра $D_{\text{ц}} = 10 \text{ см}$, длина $l_{\text{ц}} = 60 \text{ см}$, проводимость меди $\sigma = 5,1 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$. (2002 г)

6.173. Катушка колебательного контура имеет добротность $Q = 100$. Если один виток катушки замкнуть накоротко, то ее индуктивность почти не меняется, а добротность уменьшится вдвое. Определить по этим данным число витков N катушки. (1985 г)

6.174. Параллельный колебательный контур подключен, как показано на рис. 122, через сопротивление $R = 10 \text{ кОм}$ к источнику переменного напряжения. Активное сопротивление катушки $r = 5 \text{ Ом}$. Для измерения добротности колебательного контура к сопротивлению R подключили параллельно такое же сопротивление (замкнув ключ K). При этом амплитуда колебаний напряжения на контуре при резонансе токов увеличилась в 1,5 раза. Чему оказалась равной добротность контура, если известно соотношение между параметрами контура $\frac{L}{C} \gg r^2$. (2001 г)

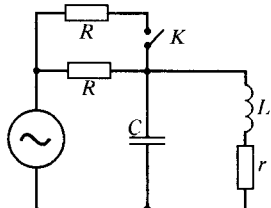


Рис. 122

6.175. Для поддержания незатухающих колебаний в LCR -контуре ($L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6,4 \cdot 10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC . (1993 г)

6.176: Через конденсатор колебательного контура с резонансной частотой $\omega_0 = 10^7$ с $^{-1}$ параллельно пластинам пропускается электронный пучок, полностью заполняющий пространство между ними (ток $\mathcal{I} = 1$ мА, энергия $\mathcal{E} = 1$ кэВ, сечение пучка $S = 100$ см 2). На сколько изменится резонансная частота? (1992 г)

6.177: Телезритель, желая дать возможность супруге спокойно смотреть нескончаемый мексиканский сериал, купил второй телевизор и подключил его с помощью кабеля к разрезу такого же кабеля, идущего от антенны к первому телевизору. Оба телевизора оказались включенными параллельно. Считая, что до переделки кабель был согласован как с телевизором, так и с антенной (отраженных волн в кабеле не было), найти, во сколько раз уменьшилась после переделки амплитуда сигнала на входе телевизора. (1997 г)

6.178. Генератор электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 8$ мм и мощностью $N = 1$ Вт настроен на основную моду прямоугольного резонатора с металлическими стенками, объем которого $V = 0,2$ см 3 и добротность $Q = 10^3$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность электрического поля в резонаторе. (1988 г)

6.179. Прямоугольный сверхпроводящий резонатор высотой $h = 3$ см имеет в плане форму квадрата со стороной $a = 10$ см. Изнутри резонатор покрыт сверхпроводником, критическое магнитное поле H_c которого в условиях опыта равно 1 кЭ. Во избежание пробоя напряженность E электрического поля всюду не должна быть больше $E_0 = 30$ кВ/см. Измеренная на низшей резонансной частоте добротность резонатора Q оказалась равной 10^6 . Какую мощность N можно

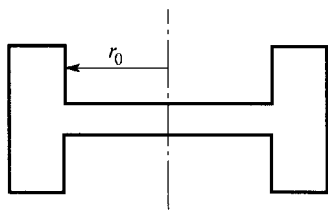


Рис. 123

подводить непрерывно к резонатору на этой частоте, чтобы поддерживать колебания с максимально допустимой амплитудой? (1990 г)

6.180. Тороидальный квазистационарный СВЧ-резонатор, показанный на рис. 123, изготовлен из сверхпроводника I рода, критическое магнитное поле которого равно $H_c = 500$ Э. Какая максимальная напряженность электрического поля может быть получена

между его емкостными обкладками радиусом $r_0 = 3$ см? Резонансная частота $\omega_0 = 6 \cdot 10^9$ с $^{-1}$. (1999 г)

6.181. В качестве dilatометра — прибора для измерения смещений — В. М. Пудалов и М. С. Хайкин в 1968 г. использовали ко-

аксиальный резонатор ($\lambda = 3$ см), являвшийся частью автогенератора. Нижняя стенка резонатора может легко перемещаться. Оценить, какое минимальное смещение может быть зарегистрировано, если величина зазора между подвижной стенкой резонатора и центральным стержнем $d = 2$ мкм, а нестабильность частоты автогенератора $\Delta f = 500$ Гц. Радиус внутреннего стержня $r \gg d$ (рис. 124). (2005 г)

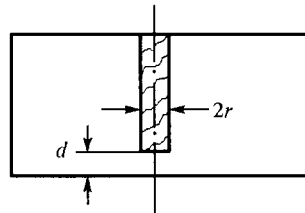


Рис. 124

6.182. В 1963 г. П. Л. Капица осуществил измерение амплитуды электромагнитного поля в объемном резонаторе при помощи полого металлического шарика радиусом $a = 10$ мм и массой $m = 1$ г, подвешенного на нити длиной $h = 125$ мм. Подвес вместе с шариком можно было перемещать вдоль оси резонатора длиной $2l = 20$ см. Возбуждались колебания Е-типа, при которых амплитуда аксиального поля на оси резонатора изменялась по закону $E_z(z, t) = E_0 \cos(\pi z/2l) \cos \omega t$, $E_0 = 3000$ В/см, $H = 0$. Найти максимальное отклонение шарика, координата z здесь отсчитывается от левого торца резонатора (рис. 125). (2006 г)

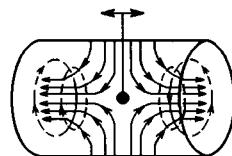


Рис. 125

6.183. В 1963 г. П. Л. Капица осуществил измерение амплитуды электромагнитного поля в объемном резонаторе при помощи полого металлического шарика радиусом $a = 10$ мм и массой $m = 1$ г, подвешенного на нити длиной $h = 125$ мм. Шарик можно было перемещать вдоль оси резонатора длиной $2l = 20$ см. В резонаторе возбуждались колебания Н-типа, при которых амплитуда аксиального поля на оси резонатора изменялась по закону $H_z(z, t) = H_0 \sin(\pi z/2l) \cos \omega t$, а $E = 0$. Найти H_0 , если максимальное отклонение шарика было равно $\Delta = 0,5$ мм. Считать, что толщина скин-слоя много меньше толщины стенки шарика. Координата z здесь отсчитывается от левого торца резонатора (рис. 126). (2006 г)

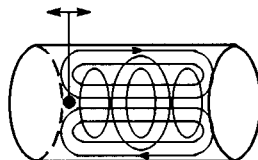


Рис. 126

6.184. Подводная лодка, находящаяся на глубине $L = 50$ м, принимает сигнал на частоте $f = 1$ кГц. Чувствительность приемника $E = 1$ мкВ/см. Найти амплитуду сигнала в воде у поверхности моря. В объеме $V = 1$ л морской воды содержится $m = 35$ г NaCl. Степень диссоциации соли равна $\eta = 0,5$, подвижность ионов: $u(\text{Na}^+) = 5,2 \cdot 10^{-4}$ см²/(В·с) и $u(\text{Cl}^-) = 8 \cdot 10^{-4}$ см²/(В·с). (2006 г)

6.185. Непрерывное лазерное излучение ($\hbar\omega = 10$ эВ) фокусируется на плоскую поверхность металла в вакууме. Работа выхода металла $A = 4$ эВ. В результате фотоэффекта вблизи поверхности металла образуется стационарное облако фотоэлектронов, а сама поверхность заряжается положительно, т. е. возникает двойной

слой. Толщина двойного слоя $a \ll r_f = 1$ см — радиуса пятна в фокусе. Определить дипольный момент d двойного слоя. (1994 г)

6.186. Непрерывное лазерное излучение ($\hbar\omega = 10$ эВ) с плотностью потока $j = 10^6$ Вт/см² падает на плоскую поверхность металла в вакууме. Работа выхода металла $A = 4$ эВ. В результате фотоэффекта вблизи поверхности металла образуется стационарное облако фотоэлектронов, а сама поверхность заряжается положительно, т. е. возникает двойной слой. Считая, что электроны вырываются из металла с одинаковой скоростью и что скорость фотоэлектронов в каждой точке облака направлена перпендикулярно поверхности, найти концентрацию электронов в точке, где потенциал двойного слоя уменьшается вдвое. Вероятность поглощения фотона электроном металла $\alpha = 10^{-3}$. (1994 г)

6.187. Непрерывное лазерное излучение ($\hbar\omega = 10$ эВ) фокусируется на плоскую поверхность металла в вакууме. Работа выхода металла $A < \hbar\omega$, поэтому в результате фотоэффекта вблизи поверхности металла образуется стационарное облако фотоэлектронов, а сама поверхность заряжается положительно, т. е. возникает двойной слой. Полагая, что радиус пятна в фокусе $r_f = 1$ см $\gg a$ — толщины двойного слоя, найти работу выхода A , если дипольный момент двойного слоя $d = 1,5$ В·см². (1994 г)

6.188. Оценить, с какого расстояния можно видеть раздельно свет от двух фар автомобиля. (1981 г)

6.189. Фотографирование пейзажа во время снегопада производилось с фотовспышкой. На фотографии (рис. 127) оказались видны многочисленные резко очерченные круги различного диаметра. На каком расстоянии от объектива с фокусным расстоянием $f = 38$ мм находилась снежинка, которая на фотографии 10×15 см выглядит в виде круга диаметром $D = 5$ мм? Фотоаппарат считать однолинзовым, диаметр зрачка фотоаппарата $d = 5$ мм, размер фотокадра 24×36 мм. (2005 г)



Рис. 127

6.190. Излучение фтористо-водородного лазера, работающего в одномодовом режиме на длине волны $\lambda = 3$ мкм, формируется зеркалами диаметром $D = 3$ м. На каком максимальном расстоянии L может находиться мишень, чтобы плотность потока энергии на ней была практически равна плотности потока на зеркале? (1986 г)

6.191. Положение летящего самолета определяется радиолокатором, излучающим импульсы длительностью 3 мкс.

Диаметр антенны $D = 4$ м. С какой точностью можно определить высоту полета самолета, если расстояние до самолета $L = 100$ км, длина волны радиоизлучения $\lambda = 10$ см. При каком размере антенны достигается минимальная погрешность в определении высоты и чему она равна? (2004г)

6.192. Для подавления систем управления в космосе посредством электромагнитного индукционного воздействия на полупроводниковые приборы средняя напряженность E электрической компоненты поля излучения должна быть, по оценкам, $E \approx 100$ В/см. Оценить мощность источника миллиметрового излучения (длина волны $\lambda \approx 1$ мм), проходящего сквозь атмосферу практически без поглощения, чтобы с поверхности Земли можно было нарушить работу системы управления на расстоянии $L \approx 1000$ км, если излучение направляется антенной с зеркалом диаметром $D \approx 10$ м. (1989 г)

6.193. Источником света является торец газоразрядной трубки диаметром $d = 6$ мм, средняя длина волны $\lambda = 0,6$ мкм, ширина доплеровского контура линии излучения $\Delta f = 1,5$ ГГц. Оценить расстояние от торца трубки, при котором длина когерентности излучения сравнима с радиусом поперечной когерентности.

Указание. Если за источником света поместить экран с двумя малыми отверстиями, то интерференционная картина за экраном пропадает, когда расстояние между отверстиями равно радиусу поперечной когерентности света. (1999 г)

6.194. Оценить объем когерентности видимой части спектра солнечного света вблизи поверхности Земли. Угловой диаметр Солнца $\psi = 10^{-2}$ рад. (2002 г)

6.195. Для записи голограммы Френеля предмета используется плоская монохроматическая волна с $\lambda = 7000$ Å. Восстановление изображения производится вначале той же волной, а затем волной с $\lambda = 3500$ Å. Как изменится при этом минимально разрешимый поперечный размер деталей изображения?

Указание. Масштабные изменения удобно анализировать на примере голограммы точечного источника. (2002 г)

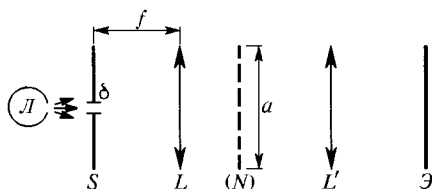


Рис. 128

6.196. Радиолокационная станция принимает сигнал, отраженный от Луны, поднимающейся из-за горизонта. После усиления сигнал смешивается в детекторе с опорным сигналом излучаемой частоты 10 ГГц, а затем с детектора подается на вход усилителя низкой частоты. Какая частота может наблюдаться на выходе этого усилителя? Считать, что станция установлена на экваторе, плоскость орбиты Луны совпадает с плоскостью экватора. (1988 г)

6.197. Дифракционная решетка шириной $a = 3$ см с числом штрихов $N = 10^4$ освещается параллельным пучком света от натриевой лампы L . Пучок формируется с помощью щели S шириной

$\delta = 0,05$ мм, помещенной в фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f = 10$ см (рис. 128). Далее следует стандартное френгоферово расположение. В каком порядке спектра на экране \mathcal{E} может быть разрешен желтый дублет натрия (588,996 и 589,593 нм)? (1992 г)

6.198. Дифракционная решетка шириной a освещается параллельным пучком света от натриевой лампы, при этом $a \delta\lambda \gg \lambda^2$, где λ — средняя длина волны, а $\delta\lambda$ — расстояние между линиями дублета. Далее на расстоянии l помещена линза L диаметром D , а в ее фокальной плоскости — экран \mathcal{E} наблюдения (рис. 129). Какому условию должно удовлетворять расстояние l , чтобы желтый дублет натрия (588,996 и 589,593 нм) разрешался на экране? (1992 г)

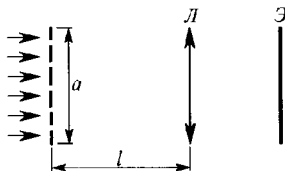


Рис. 129

6.199. Электрон движется в вакууме со скоростью v вблизи поверхности дифракционной решетки с периодом d . Скорость электрона параллельна поверхности решетки и перпендикулярна к ее штрихам. Какие длины волн могут излучаться под углом θ к нормали решетки в

результате взаимодействия электрона с решеткой (Эффект Смита—Парселла)? (1969 г)

6.200. Монохроматический источник света заданной частоты движется равномерно по нормали к дифракционной решетке длиной $L = 5$ см и периодом $d = 10^{-3}$ см. Какую минимальную нерелятивистскую скорость источника можно обнаружить, наблюдая дифракцию первого порядка? (2007 г)

6.201. Наблюдается френгоферова дифракция монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм на плоской амплитудной решетке. Как изменятся расстояние между дифракционными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если каждую вторую щель закрыть полимерной пленкой толщиной $d = 13,5$ мкм, показатель преломления которой $n = 1,1$? Отражением света от пленки пренебречь. (1985 г)

6.202. Параллельный пучок импульсного лазера с длительностью импульсов 1 пс падает нормально на дифракционную решетку с высоким разрешением. Излучение, дифрагированное под углом 45° к оси падающего пучка, регистрируется быстродействующим фотоприемником, установленным в фокусе удаленного от решетки объектива диаметром $D = 3$ см. Оценить длительность импульсов, регистрируемых фотоприемником. Считать, что оптическая плоскость объектива установлена перпендикулярно оси дифрагированного пучка, разрешение определяется дифракцией на объективе. (1988 г)

6.203. Лазер испускает световые импульсы с центральной длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм, длительностью $\tau_1 = 1$ пс и скважностью (отношение периода повторения импульсов к длительности каждого из них) $Q_1 = 10^3$. Это излучение пропускается через монохроматор с разрешающей способностью $R = 5 \cdot 10^4$. Оценить скважность импульсов Q по выходе из монохроматора. (1988 г)

6.204. Для дифракционной решетки с числом штрихов $N = 500$ штрих/мм предел разрешения в спектре первого порядка отвечает линиям с разностью длин волн $\delta\lambda = 1 \text{ \AA}$ при средней длине волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Изображение спектра получается на экране с помощью линзы. Определить минимальный допустимый диаметр линзы D , при котором изображение спектра может быть разрешено. (1979 г)

6.205. На дифракционную решетку с $N = 10^5$ числом щелей, ширина которых равна половине периода, нормально падает плоская волна. Дифракционная картина фокусируется линзой на фотопластинку. Оценить допустимые изменения атмосферного давления в лаборатории во время экспозиции, чтобы можно было полностью использовать разрешающую способность решетки. Показатель преломления воздуха n связан с атмосферным давлением P (в паскалях) соотношением $n - 1 = 3 \cdot 10^{-9}P$. (1996 г)

6.206. При измерении угловых размеров удаленных источников методом Физо перед объективом телескопа, имеющего фокусное расстояние F , устанавливается экран с двумя параллельными щелями шириной D , расположенными на расстоянии d друг от друга. Рассчитать распределение интенсивности $\mathcal{I}(x)$ в фокальной плоскости объектива для случая точечного источника, испускающего свет длиной волны λ , и определить, сколько интерференционных полос можно наблюдать в пределах главного интерференционного максимума. (1996 г)

6.207. С помощью интерферометра Фабри—Перо исследуется выделенный системой фильтров участок спектра шириной $\Delta\lambda = 2 \text{ \AA}$. Минимальная разность длин волн соседних спектральных линий $\delta\lambda = 0,01 \text{ \AA}$. Оценить максимальное значение коэффициента пропускания $\tau = 1 - \rho$ (где ρ — коэффициент отражения зеркал по энергии), при котором разрешаются соседние линии. (1979 г)

6.208. Полупроводниковый лазер на длину волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$ представляет собой кристалл полупроводника, на грани которого нанесены зеркала, образующие резонатор Фабри—Перо. Определить расстояние между модами колебаний лазера $\Delta\lambda$. Длина резонатора $L = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, показатель преломления полупроводника в рабочей области длин волн $n = 3,1$, а дисперсия $dn/d\lambda = -1,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. (2001 г)

6.209. В одно из плеч радиоинтерферометра Майкельсона вместо отражающего зеркала помещена непоглощающая пластина с полупрозрачной передней и зеркальной задней стенками (рис. 130). Толщина пластины $d = 2 \text{ мм}$, показатель преломления $n = 5$, спектр падающего излучения простирается от 0 до 110 ГГц. При перемещении зеркала во втором плече детектор регистрирует ряд пиков интенсивности излучения. Каково расстояние между пиками в единицах длины перемещения зеркала? (1993 г)

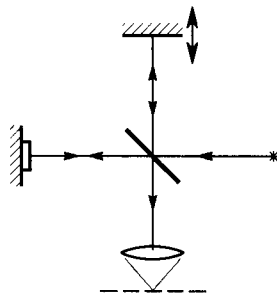


Рис. 130

6.210. Кварцевая пластинка $\lambda/2$ используется как анализатор степени поляризации лазерных импульсов. Оценить минимальную длительность лазерных импульсов, для которых еще можно пользоваться таким анализатором, если длина волны света $\lambda = 0,63$ мкм, а коэффициенты преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в кварце $n_o = 1,5442$ и $n_e = 1,5533$ соответственно. Дисперсией показателей преломления пренебречь. (1986 г)

6.211. В опытах Р. Бета (R.Beth, 1936) впервые был измерен угловой момент фотона. В этих экспериментах (рис. 131) линейно поляризованный свет, направление поляризации которого показано стрелкой, интенсивностью $I_0 = 1$ Вт/см² и длиной волны $\lambda = 5000$ Å проходил снизу вверх через нижнюю пластинку $\lambda/4$, затем через подвешенную на торсионном маятнике пластинку $\lambda/2$, у которой оси повернуты на 90° , попадал на пластинку $\lambda/4$ с посеребренным верхом, отражался и проходил в обратном направлении.

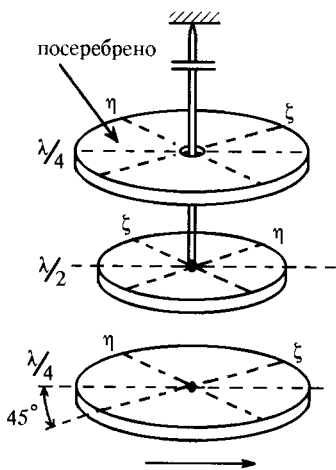


Рис. 131

Какой вращательный момент передавался пластинке $\lambda/2$ площадью $S = 5$ см²? Поглощением света пренебречь. (2001 г)

6.212. Параллельный монохроматический пучок света проходит через диафрагму, а затем фокусируется линзой. Во сколько раз увеличится напряженность поля электромагнитной волны в фокальной плоскости линзы, если площадь диафрагмы увеличить вдвое? (2007 г)

6.213. Луч лазера фокусируется идеальной оптической системой со светосилой $F/D = 1$. Оценить мощность лазера W , при которой в электрическом поле фокуса системы электроны смогут приобретать энергию $\sim mc^2$. Как W зависит от длины волны λ ? Какова будет при этом величина магнитного поля в фокусе? (1968 г)

6.214. Солнечное излучение фокусируется линзой диаметром $D = 5$ см и фокусным расстоянием $F = 10$ см. Оценить напряженность электрического поля в фокусе. Солнечная постоянная $J_C = 1,37$ кВт/м², угловой диаметр Солнца $\alpha_C = 10^{-2}$ рад. (1997 г)

6.215. Лазерный пучок ($\lambda = 0,532$ мкм) диаметром $D = 2,5$ мм фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 25$ см. Оценить продольные и поперечные размеры области фокальной перетяжки пучка. В качестве длины перетяжки считать расстояние, на котором в приближении геометрической оптики радиус пятна равен радиусу перетяжки. (2005 г)

6.216. Для защиты от механических повреждений стекла современных очков покрывают алмазной пленкой. Какая часть падающе-

го светового потока отражается от пленки на длине волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, если толщина пленки равна $d = 625 \text{ \AA}$, показатель преломления стекла $n_2 = 1,7$, алмазной пленки $n_1 = 2,4$? (1997 г)

6.217. На поверхность стеклянной пластинки нанесена просветляющая в желтой области спектра ($\lambda_{\text{ж}} = 6000 \text{ \AA}$) пленка минимальной толщины с коэффициентом преломления $n_{\text{п}} = 1,3$. Какая доля падающего по нормали к пластинке фиолетового света ($\lambda_{\text{ф}} = 4000 \text{ \AA}$) отразится? Коэффициенты преломления не зависят от длины волны. (2006 г)

6.218. На тонкую плосковыпуклую линзу с фокусным расстоянием $f = 10 \text{ см}$ со стороны плоской части с радиусом $R = 2 \text{ см}$ нормально падает параллельный поток монохроматического излучения с интенсивностью $I = 10 \text{ кВт/см}^2$. На линзу нанесено просветляющее покрытие. Найти силу, действующую на линзу. Стекло считать идеальным (без потерь). (2004 г)

6.219. На плоскопараллельную прозрачную пластинку с показателем преломления n падает нормально плоская монохроматическая электромагнитная волна. Толщина пластинки равна длине волны в пластинке. Найти амплитудный коэффициент отражения r от пластинки. (1966 г)

6.220. Импульс излучения неодимового лазера ($\lambda = 1,05 \text{ мкм}$) с длительностью $\tau = 10^{-8} \text{ с}$ и диаметром лазерного пучка $D = 0,5 \text{ см}$ фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$ на поверхность образца из алюминия. Оценить энергию лазерного импульса, необходимую для нагрева алюминия до температуры плавления. Коэффициент теплопроводности алюминия $\kappa = 2,1 \text{ Вт/(см} \cdot \text{К)}$, температура плавления $t_{\text{пл}} = 2200 \text{ }^\circ\text{C}$, плотность $\rho = 2,7 \text{ г/см}^3$, коэффициент поглощения $\alpha = 10\%$. (1996 г)

6.221. Для увеличения производительности установки для лазерной резки, в которой излучение фокусируется линзой на поверхность металла, используются лазерные сборки — устройства, объединяющие группу лазерных трубок, излучающих синхронизированные (когерентные) между собой световые пучки. Оценить, во сколько раз изменится производительность установки при переходе от одной лазерной трубки диаметром d к сборке с общим диаметром $D = 10d$. Коэффициент заполнения (отношение суммарной площади лазерных трубок к общей площади сборки) $k = 0,8$, распределение интенсивности в поперечном сечении лазерных пучков считать однородным. Считать, что все падающее на металл излучение поглощается. (2002 г)

6.222. Параллельный пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$ падает на тонкую двояковыпуклую линзу из бериллия (плотность материала $\rho = 1,85 \text{ г/см}^3$) с поверхностями одинакового радиуса $R = 40 \text{ см}$. Диаметр линзы считать равным $D = 9 \text{ см}$. Найти угол расхождения φ пучка после линзы. (1981 г)

6.223. Зеркало в виде сильно вытянутого параболоида вращения фокусирует мягкие рентгеновские лучи благодаря полному внутрен-

нему отражению при скользящих углах падения на далекие от вершины части параболоида (рис. 132). Оценить угол схождения параллельного пучка лучей φ в фокусе параболоида для рентгеновских лучей с энергией $\mathcal{E} = 2$ кэВ, если зеркало изготовлено из бериллия (плотность бериллия $\rho = 1,85$ г/см³). (1970 г)

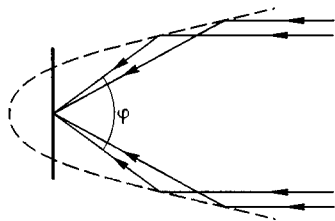


Рис. 132

6.224. Импульсное излучение пульсара CP 1919 + 21 на частоте $\nu_1 = 80$ МГц достигает Земли на $\Delta t = 7$ с позже, чем соответствующий импульс на частоте $\nu_2 = 2000$ МГц. Оценить расстояние L до пульсара, если известно, что средняя плотность электронов в межзвездном пространстве

$N \approx 0,05$ см⁻³. (1975 г)

6.225. С какой точностью должна быть стабилизирована температура одномодового лазерного резонатора, установленного на платформе из инвара, чтобы за счет флуктуации немонохроматичность излучения была порядка теоретической ширины лазерной линии $\Delta\omega/\omega = 10^{-14}$? Температурный коэффициент расширения инвара $\alpha = 10^{-6}$ К⁻¹. (2000 г)

6.226. Лазер на CO₂ излучает две близкие частоты ν_1 и ν_2 (средняя длина волны $\lambda = 10,6$ мкм). Излучение такого лазера смешивают в нелинейном кристалле с излучением лазера на Nd ($\lambda_3 = 1,06$ мкм). Анализ излучения на комбинационных частотах ($\nu_1 + \nu_3$ и $\nu_2 + \nu_3$) показал, что соответствующие им длины волн отличаются на $\delta\lambda = 5$ Å. Определить разность длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ излучения лазера на CO₂. (1978 г)

6.227. Найти время распространения электромагнитного импульса заданной частоты вдоль основания стеклянной призмы с разрешающей силой $R = 10^4$. Длина волны в веществе $\lambda = 9,35 \cdot 10^{-5}$ см. «Оптическая длина» основания призмы составляет $L = 17$ см. (2003 г)

6.228. При прохождении света через среду наряду с упругим происходит и неупругое рассеяние фотонов, связанное, в частности, с их взаимодействием с колебательными степенями свободы молекул — комбинационное рассеяние. Оценить отношение интенсивностей фиолетового и красного спутников в спектре рассеянного монохроматического излучения от молекул четыреххлористого углерода CCl₄ при температуре $t = 27$ °С, если известно, что для соответствующих гармонических колебаний величина $1/\lambda = 217$ см⁻¹. (1993 г)

6.229. В методе внутррезонаторной лазерной спектроскопии (ВРЛС), предложенном и реализованным в 1970 г. А. Ф. Сучковым и Э. А. Свириденковым, непосредственно в резонатор широкополосного лазера вносится кювета с поглощающим веществом. Отношение длинны кюветы к длине резонатора $\alpha = 0,9$. Спектр поглощения исследуемых линий проявляется в виде провалов глубиной ΔI в спектре выходного излучения I_0 . Оценить минимальное значение коэффициен-

та поглощения χ , которое возможно зарегистрировать методом ВРЛС при длительности генерации $\tau = 200$ мс. Считать, что минимально регистрируемое поглощение $\Delta I/I_0$ составляет 5%. (2004 г)

6.230. Резонансное поглощение света было обнаружено впервые Р. Вудом в 1904 г. Может ли наблюдаться резонансное поглощение атомами ^{39}K оптического излучения от ^{41}K ? Температура паров калия равна $t = 200$ °С. (1999 г)

6.231. Лазерное разделение изотопов основано на селективном возбуждении изотопов одного сорта. Для эффективного разделения необходимо, чтобы изотопический сдвиг линии поглощения был не менее полуширины линии. Оценить максимальную температуру паров натрия, чтобы можно было таким способом выделить изотоп ^{22}Na из смеси изотопов ^{22}Na и ^{23}Na . (1999 г)

6.232. Энергия возбуждения ядра может быть измерена по изомерному сдвигу частоты спектральной линии атома за счет утяжеления возбужденного ядра на величину $\Delta M = \epsilon_{\text{яд}}/c^2$ (В. С. Летохов, 1972). При измерении частоты спектральной линии паров атомов при температуре T для этого необходимо, чтобы изомерный сдвиг был больше доплеровского уширения. При какой температуре это условие будет выполнено для атома с $A = 100$ и энергии изомерного уровня ядра $\epsilon_{\text{яд}} = 0,3$ МэВ. (1999 г)

6.233. В ионосфере Земли (на высоте ~ 100 км), где концентрация свободных электронов $N = 10^5$ см $^{-3}$ и постоянное магнитное поле $B = 0,5$ Гс, вдоль силовых линий магнитного поля могут распространяться электромагнитные волны (так называемые геликоны или свистящие атмосферика) с законом дисперсии вида: $k^2 = (4\pi N e \omega)/(cB)$, где k — волновое число, ω — угловая частота. Найти фазовую и групповую скорости таких волн, если $\omega = 10^6$ см $^{-1}$. (1990 г)

6.234. Коэффициент преломления n для электромагнитных волн с частотой ν , распространяющихся в чистых полупроводниках вдоль магнитного поля \mathbf{B} , выражается формулой: $n^2 = (2Nec)/(\nu B)$, где N — концентрация электронов. Оказалось, что на частоте $\nu = 33$ ГГц при изменении поля B следующие друг за другом резонансы стоячих волн в пластине полупроводника толщиной $d = 1$ мм наблюдаются при $B_1 = 3,6$ кГс и $B_2 = 8,1$ кГс. Найти концентрацию электронов. (1990 г)

6.235. Плазма заполняет полупространство $x > 0$, причем концентрация электронов растет вглубь по закону $N(x) = \mu x$; $\mu = \text{const}$. Перпендикулярно границе $x = 0$ падает электромагнитный волновой пакет со средней частотой ω , уходит в плазму, отражается от зоны критической плотности и через некоторое время τ регистрируется при $x = 0$. Определить время τ . (1992 г)

6.236. При изучении прохождения плоской электромагнитной волны с частотой $\nu = 8$ МГц через плоские однородные слои плазмы с концентрацией свободных электронов $N = 10^6$ см $^{-3}$ найдено, что энергетические коэффициенты пропускания волны отличаются в 10 раз для слоев плазмы, толщины которых отличаются в два раза. Пре-

небрегая интенсивностью волны, отраженной от задней границы каждого слоя, найти их толщины d_1 и d_2 . (1980 г)

6.237. Ракета-зонд, на борту которой установлен передатчик радиосигналов с частотой $f_0 = 10$ МГц, движется вертикально вверх со скоростью $v = 0,6$ км/с. При прохождении верхних слоев атмосферы принимаемый на Земле сигнал оказался смещенным по частоте на $\Delta f = 10$ Гц. Оценить плотность электронов в верхних слоях атмосферы. (2005 г)

6.238. Плоский слой плазмы толщиной d нагревается мощным лазерным излучением (рис. 133). Длина свободного пробега фотона (по отношению к поглощению) $l_\infty \propto \omega^3 T^{1/2} / n^2$, где ω — частота лазерного излучения, n и T — концентрация и температура плазмы. Определить зависимость установившейся температуры плазмы от n , d , ω , если в процессе нагрева слой не разлетается, $\hbar\omega \ll kT$, продольный размер слоя много больше d . Нагрев плазмы в установившемся состоянии компенсируется потерями. (1994 г)

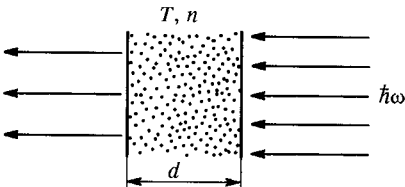


Рис. 133

6.239. Найти проводимость плазмы а с концентрацией электронов n_e и числом столкновений в единицу времени ν_e , предполагая, что электрон при столкновении с ионом полностью теряет направление своего импульса. (1996 г)

6.240. Плазменный шнур удерживается с помощью магнитного поля, параллельного оси шнура, вследствие того, что поле не проникает внутрь плазмы. Оценить величину магнитного поля, необходимого для удержания плазмы, если концентрация частиц плазмы $n = 10^{16}$ см $^{-3}$, а ее температура $T = 10^8$ К. (1973 г)

6.241. Z-пинч представляет собой плазменный шнур, вдоль оси которого течет ток \mathcal{I} . В равновесии давление его собственного магнитного поля уравнивает газокINETическое давление плазмы. В одной из моделей плазма считается нейтральной с однородным распределением плотностей частиц и тока по поперечному сечению шнура. Оценить температуру T плазмы на оси шнура. Принять, что внешний радиус шнура $R = 5$ см, сила тока $\mathcal{I} = 400$ кА, плотность частиц $n = 10^{16}$ см $^{-3}$, магнитная проницаемость плазмы $\mu = 1$. (1987 г)

6.242. Рельсотроном называют два параллельных проводника, закороченных свободно лежащей на них медной проволокой. При пропускании по системе импульса тока со средней силой $\mathcal{I} = 1$ МА, проволока испаряется, а образующаяся проводящая плазма разгоняется магнитным полем тока, толкая перед собой непроводящий снаряд массой $M = 1$ г. Оценить его конечную скорость v . Длина рельсотрона $l = 1$ м, линейные размеры снаряда равны примерно расстоянию между проводниками. (1989 г)

6.243. Плазменной пушкой Бостика называют систему коаксиальных проводников, между которыми приложено высокое напряжение. При впрыскивании в один из концов системы порции водорода возникает разряд и образуется проводящая плазма, которая разгоняется магнитным полем тока. Оценить конечную скорость v облака плазмы. Длина пушки $l = 1$ м, внешний диаметр $D_1 = 5$ см, внутренний $D_2 = 2,5$ см, средняя сила тока в импульсе $\mathcal{I} = 0,1$ МА, плотность водорода $\rho = 0,1$ мг/см³. Линейные размеры облака плазмы равны примерно внутреннему диаметру пушки. (1989 г)

6.244. Оценить показатель преломления неполярного диэлектрика со статической диэлектрической проницаемостью $\epsilon(0) = 1,5$ на частоте, равной удвоенной частоте собственных колебаний электронов. Считать поле, действующее на атом, равным внешнему. (1984 г)

6.245. Пучок электронов, проходя через воздух, порождает черенковское излучение под углом $\alpha = 3^\circ$ к направлению движения электронов. Считая показатель преломления воздуха при нормальных условиях равным 1,0003, оценить минимальное давление воздуха (при нормальной температуре), для которого возможен указанный процесс. (2005 г)

6.246. Пучок протонов, полная энергия которых $\mathcal{E} = 5$ ГэВ, направляется в контейнер с углекислым газом. При каком давлении газа возникнет черенковское излучение? Известно, что при нормальном давлении $n_0 - 1 = 0,00045$ (n_0 — показатель преломления газа). (1983 г)

6.247. Определить кинетическую энергию T протона, если при движении в азоте он вызывает свечение Вавилова—Черенкова при давлении $P = 50$ атм и выше. Показатель преломления азота при нормальном давлении равен $n = 1,0003$. (1973 г)

6.248. Пи-мезоны и мюоны с импульсами $p = 140$ МэВ/с проходят через прозрачное вещество. Найти диапазон показателей преломления этого вещества, при которых только мюоны будут создавать свечение Вавилова—Черенкова. Энергии покоя пионов и мюонов равны соответственно $m_\pi c^2 \approx 140$ МэВ, $m_\mu c^2 \approx 106$ МэВ. (1970 г)

6.249. На плоскую границу раздела двух сред падает под некоторым углом ψ световой импульс из плоских волн (рис. 134). Он образует на плоскости раздела бегущий световой «зайчик». Показать, что направления преломленной и отраженной волн совпадают с направлениями образующих конуса черенковского излучения электрона, движущегося вдоль поверхности раздела с той же скоростью, что и световой «зайчик». (1977 г)

6.250*. В жидком гелии вокруг электрически заряженной частицы, например, иона He^+ , образуется область повышенного давления и в непосредственной близости от заряда гелий затвердевает. Причиной повышения давления является притяжение атомов гелия к

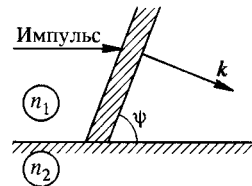


Рис. 134

электрическому заряду за счет поляризуемости их электронной оболочки. Найти радиус R образовавшегося шарика из твердого гелия, если плотность твердого гелия $\rho = 0,145 \text{ г/см}^3$, молярная поляризуемость $\alpha N_A = 0,125 \text{ см}^3/\text{моль}$, а давление затвердевания $P_{\text{ТВ}} = 25 \text{ атм}$. Пренебречь сжимаемостью гелия. Внешнее давление отсутствует. Считать, что размер шарика значительно превышает атомный размер. (1966 г)

6.251. Определить, на какую высоту втянется в магнитное поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$ жидкий кислород при $T = 80 \text{ К}$. На внешней оболочке молекулы O_2 находятся два электрона в состоянии с нулевым орбитальным моментом и параллельными спинами. (1967 г)

6.252. В Серпуховском протонном ускорителе частицы ускоряются до энергии 76 ГэВ , двигаясь в течение двух секунд в нарастающем магнитном поле по замкнутой кольцевой орбите радиусом $R = 194 \text{ м}$. Оценить минимальную мощность генераторов, необходимую для питания магнитов ускорителя, если площадь между полюсами магнитов составляет $S = 16 \times 40 \text{ см}^2$. (1979 г)

6.253. Рассмотрим эксперимент по измерению круговой поляризации γ -излучения. Ожидаемая степень поляризации равна 10^{-7} . (Такое слабополяризованное γ -излучение получается, например, в результате реакции $n + p = {}^2\text{d} + \gamma$ вследствие несохранения пространственной четности при слабых взаимодействиях). Измерение производится с помощью поляриметра, в котором разделяются потоки γ -квантов с разным знаком круговой поляризации. Какое минимальное время потребуется для измерения примеси круговой поляризации с точностью 10% , если имеется источник излучения с интенсивностью 10^{12} квантов/с? (1970 г)

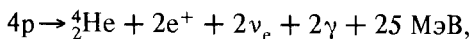
6.254. При поглощении поляризованного пучка электронов веществом происходит их полная деполяризация. Найти изменение энтропии вследствие деориентации спинов пучка, содержащего 10^6 электронов. (1970 г)

6.255. Оценить, при какой плотности потока лазерного излучения может произойти пробой вакуума, т. е. разрыв виртуальных электрон-позитронных пар? (1992 г)

6.256. Оценить, какую минимальную энергию должен иметь импульсный лазер ($\lambda = 1,25 \text{ мкм}$, $\tau = 100 \text{ фс}$), чтобы движение электрона в поле излучения было релятивистским. (2005 г)

6.257. Оценить отношение потоков нейтрино и фотонов на поверхности звезды, в которой происходит превращение водорода в гелий. Нейтрино образуется в реакции: $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Остальная энергия, выделяющаяся при синтезе ${}^4\text{He}$ из водорода, в конечном счете переходит в энергию электромагнитного излучения. Считать горение звезды стационарным, а температуру на поверхности звезды $T = 5000 \text{ К}$. (1980 г)

6.258. Считая, что основным источником энергии Солнца являются термоядерные реакции водородного цикла в конечном виде:



оценить плотность потока нейтрино j_ν вблизи Земли. Принять, что температура поверхности Солнца $T = 6000 \text{ К}$, угловой диаметр его, видимый с поверхности Земли, $\alpha = 0,01 \text{ рад}$. (1989 г)

6.259. Согласно П. Дираку энергия электрона в вакууме может принимать значения как от mc^2 до $+\infty$, так и от $-\infty$ до $-mc^2$, однако все состояния с отрицательной энергией заняты, и это «море Дирака» реально не проявляется в физических процессах. При переходе электрона из «моря» отрицательных значений в состояние с $\mathcal{E} > mc^2$ рождается пара электрон + «дырка», т. е. электрон-позитронная пара, точно так же, как это происходит в собственном полупроводнике. Используя эту аналогию, оценить равновесные концентрации электронов и позитронов при температуре $T = 10^8 \text{ К}$. (2000 г)

6.260: Согласно П. Дираку энергия электрона в вакууме может принимать значения как от mc^2 до $+\infty$, так и от $-\infty$ до $-mc^2$, однако все состояния с отрицательной энергией заполнены, и это «море Дирака» реально не проявляется в физических процессах. При переходе электрона из «моря» отрицательных значений в состояние с $\mathcal{E} > mc^2$ рождается пара электрон + «дырка», т. е. электрон-позитронная пара (см. задачу 6.259). Оценить в квазиклассическом приближении вероятность такого процесса в однородном статическом электрическом поле с напряженностью $E \approx 10^{15} \text{ В/см}$ (такое поле имеется у поверхности тяжелых ядер). (2000 г)

6.261: Советский физик Г. А. Аскарьян предложил использовать в качестве сверхмощных импульсных источников нейтронов ядерные микровзрывы миллиграммовых количеств делящихся веществ. Для перевода делящегося вещества в критическое состояние он предлагал сжимать такие микродозы импульсным лазерным излучением. Оценить, во сколько раз нужно уменьшить радиус шарика из ${}^{235}\text{U}$ массой 50 мг, чтобы началось размножение нейтронов. Какое давление развивается в веществе непосредственно перед началом цепной реакции, если процесс сжатия считать адиабатическим? Валентность урана принять равной 2. Для быстрых нейтронов деления $\sigma(n, f) = 2 \text{ бн}$, $\sigma(n, \gamma) = 0,1 \text{ бн}$, плотность урана $\rho = 18,7 \text{ г/см}^3$. (2000 г)

6.262: В сверхпроводниках II рода с большим количеством примесей эффективная длина пространственной когерентности электронов ξ равна среднему геометрическому между ξ и средним расстоянием между примесными атомами. Оценка полей, до которых сохраняется сверхпроводимость в таких веществах, может быть получена из следующего условия: ларморовский радиус закручивания пары как целого в магнитном поле не должен быть меньше ее размеров. Оценить на основе этих соображений величину H_{c2} при $T = 0 \text{ К}$ для «одновалентного» сверхпроводника с $T_c = 10 \text{ К}$, периодом решетки $a = 1 \text{ \AA}$ и с количеством примесей $N \sim 10^{21} \text{ см}^{-3}$. (1992 г)

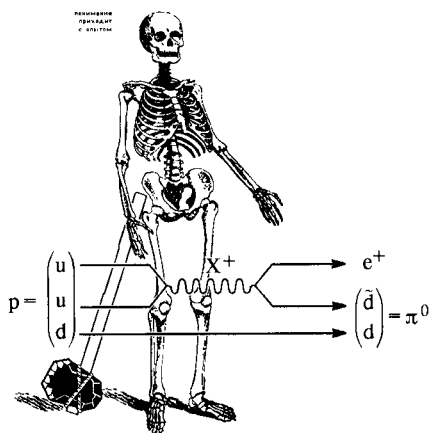
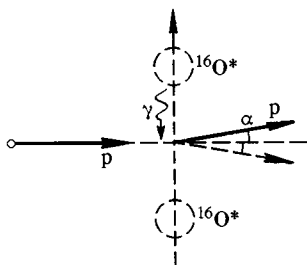
6.263. На расстоянии $L = 20 \pm 0,01$ м от полихроматического импульсного источника нейтронов расположен поликристаллический образец. Упруго рассеянные нейтроны регистрируются через время t , намного большее длительности нейтронной вспышки, после нейтронной вспышки детектором, расположенным под углом $\theta = 60^\circ$, и по этому событию восстанавливается межплоскостное расстояние в кристалле. Какова должна быть точность измерения времени прихода нейтронов t , чтобы обеспечить относительную точность измерений межплоскостных расстояний 10^{-3} ? Угловое разрешение детектора $\Delta\theta = 0,06^\circ$. (2003 г)

6.264. Воздух при условиях, близких к нормальным, медленно течет по закрытой с одной стороны стеклянным окном нагретой трубе диаметром $D = 1$ см и длиной $L = 10$ м, так что у стенок трубы температура на $\delta T = 10$ К больше, чем на оси. Для света, распространяющегося в трубе вдоль ее оси и выходящего через окно, система представляет собой линзу. Определить форму волнового фронта на выходе трубы и оценить фокусное расстояние такой линзы. При нормальных условиях коэффициент преломления воздуха равен $n_0 = 1,0003$. Преломлением света на выходе из трубы пренебречь. (2003 г)

6.265. На нелинейную среду толщиной $L = 1$ см с показателем преломления n , зависящим от интенсивности I проходящего света как $n = n_0 - \chi I$ ($\chi = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см²/Вт), падает пучок света $\lambda = 452$ нм с плоским волновым фронтом и распределением интенсивности в поперечном сечении $I(r) = I_0 \exp(-r^2/\omega^2)$, где $I_0 = 5 \cdot 10^3$ Вт/см², $\omega = 1 \cdot 10^{-3}$ см. В результате взаимодействия света со средой в дальней зоне возникает устойчивая интерференционная картина в виде системы колец. Определить число интерференционных колец в наблюдаемой картине. (2003 г)

6.266. На нелинейную среду толщиной $L = 1$ см с показателем преломления n , зависящим от интенсивности I проходящего света как $n = n_0 - \chi I$ ($\chi = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см²/Вт), падает пучок света с плоским волновым фронтом и распределением интенсивности в поперечном сечении $I(r) = I_0 \exp(-r^2/\omega^2)$, где $I_0 = 5 \cdot 10^3$ Вт/см², $\omega = 1 \cdot 10^{-3}$ см. В дальней зоне возникает устойчивая интерференционная картина в виде системы колец. Определить форму волнового фронта непосредственно за образцом и максимальную угловую расходимость наблюдаемой картины. (2003 г)

6.267. В магнитных компьютерных дисках запись информации происходит за счет намагничивания мелких ферромагнитных частиц. Для поворота вектора магнитного момента такой частицы необходимо преодолевать энергетический барьер, величина которого $\Delta\mathcal{E} \simeq \alpha V$, где $\alpha = 10^7$ эрг/см³ — постоянная анизотропии, V — объем частицы. Оценить предельное значение поверхностной плотности записи информации (в бит/см²), которое ограничивается тепловыми флуктуациями ориентации магнитного момента. (2001 г)



ОТВЕТЫ
и избранные решения

§ 1. Фотоны. Фотоэффект. Эффект Комптона

1.1. Импульс фотона $p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \approx 1,3 \cdot 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см/с}$. Среднеквадратичный импульс молекулы водорода $p = \sqrt{3kTM} \approx 5,4 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}$.

1.2. $\lambda \approx 0,12 \text{ нм}$.

1.3. $j = \frac{2W\lambda}{\hbar c \pi^2 d^2} \approx 1,7 \cdot 10^{16} \frac{\text{фотон}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$.

1.4. Решение. Рассмотрим атом (ядро) в статическом гравитационном поле. Согласно условию задачи разность энергий $\Delta \mathcal{E}$ между основным и возбужденным состоянием зависит от положения атома (ядра) в гравитационном поле Земли

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = (\mathcal{E}_2^0 - \mathcal{E}_1^0) \left[1 + \frac{\varphi(r)}{c^2} \right]^{-1/2}, \quad (1)$$

где \mathcal{E}_2^0 и \mathcal{E}_1^0 — энергии уровней в «пустом» пространстве. Таким образом, наблюдатель на поверхности Земли обнаружит, что энергия излучения атома (ядра), находящегося на высоте H над поверхностью Земли (радиус R_3), не совпадает с таковой у поверхности, и наоборот. Именно это и было обнаружено в экспериментах Паунда и Ребки. При этом

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}(R_3 + H) &= \Delta \mathcal{E}(R_3) \sqrt{\frac{1 + 2\varphi(R_3)/c^2}{1 + 2\varphi(R_3 + H)/c^2}} \approx \\ &\approx \Delta \mathcal{E}(R_3) \left[1 + \frac{\varphi(R_3) - \varphi(R_3 + H)}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь мы учли, что гравитационный потенциал Земли слабый:

$$\frac{2\varphi(R_3)}{c^2} = \frac{2\gamma M_3}{R_3 c^2} = 2 \cdot 10^{-9} \ll 1.$$

Наивное (но неверное, хотя и часто используемое) объяснение наблюдаемого эффекта смещения уровней состоит в том, что γ -кванту с энергией \mathcal{E} приписывается гравитационная масса $m_\gamma = \mathcal{E}/c^2$, после чего для фотона применяется нерелятивистская формула $\Delta \mathcal{E} = -m_\gamma \Delta \varphi$ (так же, как для какого-нибудь камня). Фотон (как и камень) ускоряется; относительное изменение его энергии

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta \varphi}{c^2}. \quad (3)$$

Это полностью совпадает с результатом (2):

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx \frac{\Delta \varphi}{c^2} = \frac{\gamma M_3}{c^2 R_3} H = \frac{gH}{c^2}.$$

Следует подчеркнуть, что согласно ОТО ход времени зависит от величины гравитационного потенциала. Иначе говоря, если ввести мировое время τ_0 , измеряемое часами в отсутствии гравитационных полей, то в точке с потенциалом $\varphi(r)$ ход часов меняется:

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{2\varphi(r)}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Это означает, что наблюдатель в точке с нулевым потенциалом видит, что частота света в любом месте одинакова, а скорость света меняется, и статическое гравитационное поле эквивалентно среде с показателем преломления n (см. задачу 1.5). Для наблюдателя, находящегося в ненулевом потенциале, частота (т.е. прошедшее мимо него за единицу времени число «горбов», являющееся инвариантом) изменилась. Однако скорость света в его системе равна c .

Отметим, что можно говорить о «красном смещении» фотона по отношению к наблюдателю в точке с нулевым гравитационным потенциалом, если относить это не к частоте, а к длине волны (импульсу) фотона.

$$1.5. \delta = \frac{4\gamma M}{Rc^2} \approx 0,84 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 1,75''.$$

Гравитационный потенциал Солнца на расстоянии r от него $\varphi(r) = -\gamma M/r$. Если обозначить через α угол падения луча света, т.е. угол между лучом света, упавшим на слой «среды» толщиной dr , и радиальным направлением к центру Солнца, то согласно закону Снеллиуса

$$\frac{\sin(\alpha - d\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{n(r - dr)}{n(r)},$$

где $\alpha - d\alpha$ — угол преломления луча света гравитационным полем. Отсюда

следует, что $\text{ctg } \alpha \, d\alpha = \frac{d}{dr} \ln n(r)$. В силу того, что гравитационный потенциал

Солнца мал, легко установить, что $\ln n(r) \approx \frac{2\gamma M}{c^2 r}$ и $dr = -\frac{R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha$. Та-

ким образом, искомый угол поворота луча света δ равен удвоенному углу отклонения на пути из бесконечности ($\alpha = \pi/2$) до R ($\alpha = 0$) (в силу обратимости световых лучей):

$$\delta = -\frac{4\gamma M}{c^2 R} \int_{\pi/2}^0 \sin \alpha \, d\alpha,$$

откуда и следует ответ.

$$1.7. \mathcal{E} = \hbar(\omega + \Omega) - \mathcal{E}_H \approx 0,9 \text{ эВ}.$$

$$1.8. V = 60 \text{ кВ}.$$

$$1.9. \lambda = 0,154 \text{ нм}.$$

$$1.10. v_{\max} = \sqrt{2e(V + V_K)}/m_e = 784 \text{ км/с}.$$

$$1.11. V = \frac{(hc/\lambda) - A}{e} = 1,23 \text{ В}.$$

$$1.12. \lambda > 2\pi\hbar c/A \approx 331 \text{ нм}.$$

1.13. $V_k = \frac{(2\pi\hbar c/\lambda) - A}{e} - V \approx -0,79$ В. Отрицательный знак означает, что при контакте цинка с материалом второго электрода фотоэлемента потенциал цинка окажется ниже.

1.14. $\alpha = \sqrt{\frac{e}{WkI}} = 10^{-2}$, где e — заряд электрона.

1.15. Решение. При «сухом» контакте потери на отражение от границы сцинтиллятор-фотокатод составляют несколько процентов, и ими можно пренебречь. Гораздо большую величину составляют потери на полное отражение при выходе из сцинтиллятора.

При «сухом» контакте на фотокатод попадают фотоны, идущие под углами $\theta_1 < \arcsin(1/n)$. Когда оптический контакт заполнен маслом — под углом $\theta_2 < \arctg(D/2h)$. Поскольку в сцинтилляторе фотоны испускаются изотропно, то отношение потоков равно

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\int_0^{\theta_2} d\Omega}{\int_0^{\theta_1} d\Omega} = \frac{2\pi \int_0^{\theta_2} I_0 \sin \theta d\theta}{2\pi \int_0^{\theta_1} I_0 \sin \theta d\theta} = \frac{1 - \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1} \approx 3.$$

1.16. Решение. Рассмотрим сначала случай поглощения фотона нерелятивистским электроном. Выберем такую систему отсчета, в которой электрон сначала покоился. Законы сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2}; \quad \frac{\hbar\omega}{c} = mv.$$

Из написанных равенств следует $v = 2c$, что невозможно. Релятивистское рассмотрение приводит к следующей системе уравнений:

$$\hbar\omega + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда следует $\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1$, т. е. либо $\beta = 0$, либо $\beta = 1$. Первое условие означает, что поглощения не произошло, а второе — нереализуемо для массивной частицы. Таким образом показано, что свободный электрон не способен поглотить квант энергии. На частном случае показано, что трехчастичные реакции, т.е. реакции типа $a + b \rightleftharpoons c$ невозможны (смотрите также задачу 8.13). Лишь при участии в реакции четвертой частицы законы сохранения могут быть соблюдены.

Так как процессы поглощения и испускания обратимы по времени, то из невозможности прямого процесса следует невозможность обратного. Конечно, невозможность такого процесса можно показать и прямым вычислением, как это было сделано выше для случая поглощения.

1.17. Длительность импульса определяется разбросом времени пролета электронов, вылетевших из фотокатода в направлении к аноду с различными направлениями начальной скорости, т. е. с величиной продольной составля-

ющей скорости от нуля до максимально возможной. Если обозначить времена движения до анода t_1 и t_2 , то

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{1}{eE} \sqrt{2mhc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{кр}} \right)} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

1.18. $t \geq 16 \frac{A}{N} \frac{L^2}{d^2} = 455 \text{ с}$, где N — мощность лампочки.

1.19* Решение. Пусть M — масса источника, а v — его скорость (рис. 135). Энергия источника складывается из кинетической энергии $Mv^2/2$ и внутренней энергии \mathcal{E} возбужденных атомов. При испускании одного фотона внутренняя энергия \mathcal{E} изменяется на вполне определенную величину (энергия квантуется!) $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = h\nu_0$, где ν_0 — частота фотона, испускаемого неподвижным источником. При испускании фотона тело испытывает отдачу, и его скорость меняется. По закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \mathcal{E} = \frac{1}{2} Mv'^2 + \mathcal{E}' + h\nu,$$

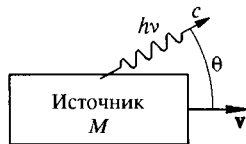


Рис. 135

где ν — частота фотона, излучаемого движущимся источником. Написав закон сохранения импульса и спроектировав его на направление скорости \mathbf{v} и на перпендикулярное направление, получим

$$Mv = Mv' \cos \alpha + \frac{h\nu}{c} \cos \theta, \quad 0 = Mv' \sin \alpha - \frac{h\nu}{c} \sin \theta,$$

где θ и α — углы между направлением скорости v и направлениями импульсов испущенного фотона и источника после испускания. Исключая v' и α , найдем

$$2Mh(\nu - \nu_0) - 2Mv \frac{h\nu}{c} \cos \theta + \frac{h^2 \nu^2}{c^2} = 0.$$

Если масса источника M достаточно велика, то можно пренебречь последним членом, и мы получим, учитывая, что по условию $v/c \ll 1$,

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right).$$

1.20* Решение. Пусть \mathcal{E} и \mathcal{E}' — полные энергии тела до и после излучения. Соответственно \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}'_0 — энергия покоя, а \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы. Обозначим также энергию и импульс излученного фотона как ϵ и \mathbf{q} и запишем законы сохранения

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \epsilon; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{q}.$$

Возведем эти уравнения в квадрат и вычтем, предварительно домножив второе соотношение на c^2 . Учитывая, что $\epsilon = qc$, а $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \mathcal{E}_0^2$ и $\mathcal{E}'^2 - p'^2 c^2 = \mathcal{E}'_0^2$, получим

$$\mathcal{E}'_0^2 = \mathcal{E}_0^2 - 2\mathcal{E}\epsilon + 2c^2 pq.$$

Релятивистский импульс тела $p = \mathcal{E}\beta/c$, где $\beta = v/c$. Подставляя это в полученное уравнение, находим

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 = \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}'_0} \varepsilon (1 - \beta \cos \theta),$$

где θ — угол между импульсом тела \mathbf{p} и направлением вылета фотона (рис. 135).

Для массивного тела $Mc^2 \gg h\nu$, откуда $\mathcal{E}'_0 \approx \mathcal{E}_0$, и тогда

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 \approx \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \varepsilon (1 - \beta \cos \theta), \text{ или } (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0) \sqrt{1 - \beta^2} = \varepsilon (1 - \beta \cos \theta).$$

Поскольку $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 = h\nu$, а $\varepsilon = hv'$, то получим искомую связь частот неподвижного и движущегося источников

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}.$$

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ смещение частоты $\Delta\nu = v_0 \frac{v^2}{2c^2}$, а при $\beta \ll 1$ принимаемая частота $\nu \approx v_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right)$ и $\Delta\nu = \frac{v}{c} \cos \theta$.

1.21.* Решение. При $\theta = 0$ $\nu(0) = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}$. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ эта частота $\nu(\pi/2) = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Если $\beta \rightarrow 1$, то $\nu(0) \gg \nu(\pi/2)$. Отсюда ясно, что в узкой окрестности угла $\theta = 0$ частоты излучаемого света особенно велики. Найдем угол θ , для которого $\nu(\theta) = \alpha\nu(0)$, где $\alpha < 1$. Для этого угла нетрудно получить

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 - (1 - \beta)/\alpha}{1 - (1 - \beta)} \approx 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \beta),$$

откуда

$$\theta^2 = 2 \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \beta).$$

Так как $\sqrt{1 - \beta^2} = mc^2/\mathcal{E}$, где \mathcal{E} — полная энергия частицы, то $1 - \beta \approx \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2$. Это дает

$$\theta = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}}.$$

При $\alpha = 1/2$ получаем $\theta = mc^2/\mathcal{E}$, иначе говоря, частота излучения падает вдвое под углом $\theta = mc^2/\mathcal{E} = \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma^{-1}$.

1.22. $\Delta\lambda = \Lambda_e(1 - \cos \theta) = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ нм.

1.23. $T_e = \frac{2hc}{\lambda} \frac{\Lambda_e \sin^2(\theta/2)}{\lambda + 2\Lambda_e \sin^2(\theta/2)}$, $(p_{ec})^2 = T_e^2 + 2m_e c^2 T_e$.

Здесь $\Lambda_e = 2,4263 \cdot 10^{-3}$ нм — комптоновская длина волны электрона. При $\theta = 90^\circ$

$$T_e = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Lambda_e}{\lambda + \Lambda_e} = 0,108 \frac{hc}{\lambda} = 0,67 \cdot 10^4 \text{ эВ}, \quad cp_e = 8,3 \cdot 10^4 \text{ эВ},$$

т. е. фотон передал электрону около 10% своей энергии, а импульс электрона отдачи по абсолютной величине оказался больше импульса первичного фотона.

1.24* Решение. Как видно из рис. 136, из закона сохранения импульса следует

$$p_e \cos \varphi = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \theta, \quad p_e \sin \varphi = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta.$$

Почленным делением находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\nu/\nu' - \cos \theta}.$$

Отсюда с учетом соотношения $\frac{\nu}{\nu'} - 1 = \frac{2h\nu}{m_e c^2} \sin^2 \theta$ легко получить

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}}.$$

При $\theta = 90^\circ$ $\operatorname{tg} \varphi = 0,8916$, $\varphi = 41^\circ 43'$.

1.25. $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{h}{m_e c} = 2,4263 \cdot 10^{-3} \text{ нм}.$

1.26: $0 \leq \varphi < \arccos \left(\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} - \frac{mc}{p} \right).$

Решение. Запишем закон сохранения импульса в соответствии с рис. 2: $\mathbf{p}'_\gamma = \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}$, откуда по теореме косинусов

$$\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \frac{2h\nu}{c} p \cos \varphi + p^2.$$

Закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E}_\gamma - T = \mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E} + mc^2, \text{ т. е.}$$

$$h\nu' = h\nu - \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} + mc^2.$$

Исключая $h\nu'$, получим

$$h\nu = \frac{(pc)^2 - T^2}{2(pc \cos \varphi - T)}.$$

Определим знак числителя:

$$(pc)^2 - T^2 =$$

$$\begin{aligned} &= (pc)^2 - [(pc)^2 + (mc^2)^2 - 2\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \cdot mc^2 + (mc^2)^2] = \\ &= 2mc^2(\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2) > 0 \end{aligned}$$

всегда. Так как $h\nu > 0$, то и знаменатель полученной дроби тоже положителен: $pc \cos \varphi - T > 0$, откуда $\cos \varphi > \frac{T}{pc} = \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} - \frac{mc}{p}$. Таким обра-

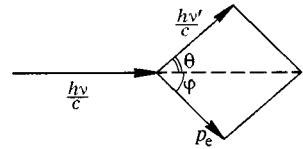


Рис. 136

зом, диапазон углов, под которым мог вылететь электрон с заданным импульсом, лежит в пределах

$$0 \leq \varphi < \arccos \left(\sqrt{1 + \frac{m^2 c^4}{p^2}} - \frac{mc}{p} \right).$$

1.27. $T < 2mc^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0,34 \text{ МэВ}$.

1.28. $0 \leq \varphi < 45^\circ$.

1.29. $p_0 = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx 6 \cdot 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см/с}$.

1.30. $\alpha = 90^\circ$.

1.31. $\mathcal{E}_\gamma = 2m_p c^2 \approx 1,9 \text{ ГэВ}$, где m_p — масса протона.

1.32. $v = \frac{c}{\sqrt{1 + \lambda/\Lambda_e}} \approx \frac{c}{\sqrt{2}}$, где $\Lambda_e = \frac{h}{mc} = 0,0024 \text{ нм}$ — комптоновская

длина волны электрона.

1.33. $\hbar\omega' = \hbar\omega_0 \frac{\left(\frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2}\right)^2}{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2}}$, где p — импульс электрона.

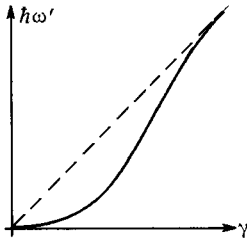


Рис. 137

Случай а) $\hbar\omega' = \frac{\mathcal{E} + pc}{2} \approx \mathcal{E}$.

Ультрарелятивистский электрон ($\mathcal{E} \approx pc$) передает фотону всю свою энергию (пунктир на рис. 137).

Случай б) $\hbar\omega' = \hbar\omega_0 \left(\frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2}\right)^2 \approx 4\gamma^2 \hbar\omega_0$, где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, в этом случае $\hbar\omega' \propto \gamma^2$ (рис. 137).

1.34. $h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{m_e c^2}{2h\nu}}$. Если $h\nu \gg m_e c^2$, то

$$h\nu' \approx m_e c^2/2.$$

1.35. При условии $T \gg \hbar\omega_0$ ответ имеет вид $\mathcal{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \frac{2T}{(m_e c^2)^2/(2T) + 2\hbar\omega_0}$

(кинетическая энергия электрона $T \gg m_e c^2$, поэтому полная его энергия $\mathcal{E}_0 \approx T$). Здесь возможны два случая:

1) $\hbar\omega_0 \ll m_e c^2 \frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathcal{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \left(\frac{2T}{m_e c^2}\right)^2 \approx 7,2 \text{ МэВ}$ (этот случай и реализуется в задаче).

2) $\hbar\omega_0 \gg m_e c^2 \frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathcal{E}_\gamma = \hbar\omega \approx T$. В задаче этот случай не выполняется.

У к а з а н и е: рассмотреть два последовательных преобразования частоты из-за эффекта Доплера.

1.36. $\lambda = 2,4 \text{ пм}$.

$$1.37. \Delta \mathcal{E} = \hbar \omega = \left(\frac{2\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \frac{\hbar \omega_0}{1 + 4\mathcal{E}\hbar \omega_0 / (m^2 c^4)}.$$

Если $\mathcal{E}_0 \ll mc^2 (mc^2 / 4\hbar \omega_0)$, то $\hbar \omega \approx (2\mathcal{E}/mc^2)^2 \hbar \omega_0 \ll \mathcal{E}_0$. В противоположном предельном случае $\hbar \omega \approx \mathcal{E}_0$. В приведенном примере $\hbar \omega = 10^8$ эВ.

1.38. По формуле для эффекта Доплера

$$\omega_0 = \frac{\omega \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}$$

(фотон и электрон считаются движущимися навстречу друг другу, причем скорость электрона равна v). В ультрарелятивистском случае отсюда следует, что $\omega_0 = \omega mc^2 / 2\mathcal{E}_0$, и условие $\hbar \omega \ll mc^2$ принимает вид

$$\mathcal{E}_0 \ll \frac{(mc^2)^2}{2\hbar \omega_0}.$$

$$1.39. \frac{\Delta T}{T_{\text{ф}}} = \left(1 + \frac{2\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^{-1} = 0,05, \text{ где } T_{\text{ф}} \text{ и } T_{\text{к}} \text{ — кинетические энергии}$$

электронов фотоэффекта и эффекта Комптона, $\Delta T = T_{\text{ф}} - T_{\text{к}}$.

Решение. Запишем закон Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = \mathcal{E}_{\text{ион}} + A + T_{\text{ф}},$$

где $T_{\text{ф}}$ — кинетическая энергия фотоэлектрона, A — работа выхода вещества, $\mathcal{E}_{\text{ион}}$ — энергия ионизации электрона атома. Поскольку для самых глубоких K -электронов $\mathcal{E}_{\text{ион}} \lesssim 13,6 \cdot Z^2$ [эВ], где Z — заряд ядра, то даже для $Z \sim 10^2$ $\mathcal{E}_{\text{ион}} \lesssim 0,136$ МэВ $\ll h\nu$. Величина работы выхода, как правило, не превышает 10 эВ, поэтому под действием γ -квантов (высокэнергетичных фотонов) при фотоэффекте $T_{\text{ф}} \approx \mathcal{E}_{\gamma}$.

При Комpton-эффекте $\mathcal{E}_{\gamma} + m_e c^2 = \mathcal{E}'_{\gamma} + m_e c^2 + \mathcal{E}_{\text{ион}} + T_{\text{к}}$. Следовательно,

$$T_{\text{к}} \approx \mathcal{E}_{\gamma} - \mathcal{E}'_{\gamma} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Энергия электрона в эффекте Комптона максимальна, когда фотон рассеивается назад, т. е.

$$\Delta\lambda = \Lambda_e (1 - \cos \varphi); \quad \Delta\lambda_{\text{max}} = 2\Lambda_e = 2 \frac{h}{m_e c}.$$

Таким образом,

$$T_{\text{к}} = \frac{hc}{\lambda} \frac{2h}{m_e c \lambda} \frac{1}{1 + \frac{2h}{m_e c \lambda}} = \mathcal{E}_{\gamma} \frac{2\mathcal{E}_{\gamma}}{m_e c^2} \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{E}_{\gamma}}{m_e c^2}}.$$

Введем разрешение аппаратуры по энергии как $\Delta T = T_{\text{ф}} - T_{\text{к}}$. Тогда

$$\frac{\Delta T}{T_{\text{ф}}} \approx \frac{\mathcal{E}_{\gamma} - T_{\text{к}}}{\mathcal{E}_{\gamma}} = \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{E}_{\gamma}}{m_e c^2}} \approx 0,05 \text{ (5\%)}.$$

$$1.40. D = \frac{\lambda d m_e c}{2\pi \hbar \sin^2(\varphi/2)} = 11,4 \text{ нм.}$$

Решение. Требуемая разрешающая способность спектрографа

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm,$$

где N — число отражающих слоев, m — порядок интерференции. По формуле Брэгга—Вульфа $m = \frac{2d \sin \theta}{\lambda}$, где θ — угол скольжения; по условию $m = 1$, откуда

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d}.$$

Изменение длины волны (комптоновское смещение)

$$\Delta\lambda = 2\pi\Lambda_e(1 - \cos \varphi) = 4\pi\Lambda_e \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где } \Lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

Таким образом,

$$R = Nm = \frac{D}{d} \frac{2d \cos \theta}{\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi\Lambda_e \sin^2(\varphi/2)}.$$

Отсюда

$$D = \frac{\lambda^2}{4\pi\Lambda_e \sin^2(\varphi/2) \sin \theta} = \frac{\lambda d m_e c}{2\pi\hbar \sin^2(\varphi/2)} = 11,4 \text{ нм.}$$

$$1.41. D_{\min} = \frac{\lambda^2}{4\Lambda_e \sin^2(\theta/2) \sin \varphi} = 2 \text{ нм, } \Lambda_e = 0,0024 \text{ нм — комптоновская}$$

длина волны электрона.

1.42. Решение. Перейдем в систему центра масс пары. На пороге рождения скорость продуктов реакции равна нулю. Но γ -квант и в этой системе движется со скоростью света, что противоречит закону сохранения импульса. Раз процесс невозможен в системе центра масс, то он невозможен и в других инерциальных системах, т. е. невозможен вообще.

$$1.44. \theta_{\max} = 60^\circ.$$

$$1.45. \theta_{12} = 90^\circ; \theta_{13} = \pi - \arctg \frac{4}{3} \approx 127^\circ; \theta_{23} = \pi - \arctg \frac{3}{4} \approx 143^\circ.$$

$$1.46. \mathcal{E}_1 = 0,85\mathcal{E}_0 = 432 \text{ кэВ; } \mathcal{E}_2 = \frac{2}{3+\sqrt{3}} \mathcal{E}_0 \approx 216 \text{ кэВ; } \mathcal{E}_3 = \sqrt{3}\mathcal{E}_2 \approx 374 \text{ кэВ.}$$

1.47. Решение. Преобразование Лоренца для энергии частицы \mathcal{E} , импульс которой p ,

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - vp \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где v — скорость штрихованной (движущейся) системы отсчета, а θ — угол в неподвижной системе между направлением движения фотона и скоростью источника. Энергия фотона $\mathcal{E} = h\nu = pc$, тогда

$$\nu' = \nu \frac{1 - (v/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Здесь ν — частота света в неподвижной системе отсчета, ν' — в движущейся вместе с источником. Переписывая ее в общепринятом виде, получим

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta}.$$

$$1.48. \cos \theta = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2\sqrt{2}m_{\text{яд}}c^2} = 0,116, \theta = 83,3^\circ; \text{ где } m_{\text{яд}}c^2 = A \cdot 931,5 \text{ МэВ.}$$

$$1.49. \frac{\hbar}{\lambda} \leq \left(\frac{nv}{c} - 1 \right) \frac{2\gamma}{n^2 - 1} < \frac{2\gamma}{n^2 - 1}.$$

$$1.50. T_e^{\max} = \mathcal{E}_v \frac{\Delta\lambda^{\max}}{\lambda + \Delta\lambda^{\max}} = 663 \text{ кэВ}, \text{ где } \Delta\lambda^{\max} = \lambda' - \lambda = 2\Lambda_e; \lambda = \frac{\hbar c}{\mathcal{E}_v}$$

(комpton-эффект нейтрино на электронах).

1.51* Длина волны гамма-квантов от источника равна $\lambda = 1,88 \cdot 10^{-10} \text{ см} \gg R_{\text{яд}}$, поэтому комптоновское рассеяние идет не на нуклонах ядра, а на ядре в целом (но не на молекуле, т. к. $\lambda \ll R_{\text{мол}} \approx 3 \text{ \AA}$ для H_2O). Комpton-эффект на протоне $\Delta\lambda_{\text{H}}$ отличается от соответствующего эффекта на дейтроне $\Delta\lambda_{\text{D}}$. Таким образом,

$$\left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = \frac{|\Delta\lambda_{\text{H}} - \Delta\lambda_{\text{D}}|}{\lambda} = \frac{\mathcal{E}}{2m_p c^2} = 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

$$1.52* H = \frac{R_3}{2} \approx 3200 \text{ км}.$$

Решение. Если считать Землю шаром, то гравитационный потенциал на поверхности Земли $\varphi_1 = -\gamma \frac{M}{R_3} = -v_1^2$, где v_1 — первая космическая скорость. На расстоянии r от центра Земли гравитационный потенциал $\varphi_2 = -\gamma \frac{M}{r}$.

Фотон, испущенный на спутнике, имеет энергию

$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\varphi_2}{c^2}} \approx \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2} \right),$$

где ω_0 — частота генератора в нулевом поле.

Из-за движения спутника (вследствие поперечного эффекта Доплера) на Земле этот сигнал будет иметь частоту

$$\omega'_2 = \omega_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right),$$

где $v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$ — скорость спутника. Расстояние между энергетическими уровнями приемника на Земле

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\varphi_1}{c^2}} \approx \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{\varphi_1}{c^2} \right).$$

Сдвига частоты не будет, если $\omega_1 = \omega'_2$, откуда

$$\frac{\varphi_2}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} = \frac{\varphi_1}{c^2} \text{ или } \frac{\varphi_2}{c^2} - \frac{\varphi_1}{c^2} = \frac{v^2}{2c^2}.$$

Подставляя значения, получим $-\gamma \frac{M}{r} + \gamma \frac{M}{R_3} = \gamma \frac{M}{2r}$, откуда $r = \frac{3}{2} R_3$.

§ 2. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

2.1. $T_p \approx 880$ МэВ; $T_e \approx pc \approx 1550$ МэВ.

2.2. $T = mc^2(\sqrt{2} - 1) = 0,212$ МэВ.

2.3. $\lambda' = \sqrt{5/3}\lambda = 0,00129$ нм.

2.4: $m_\gamma \leq 2 \cdot 10^{-43}$ г; $m_\gamma c^2 \leq 1,1 \cdot 10^{-10}$ эВ.

Решение. Допустим, что фотон (квант электромагнитной энергии) имеет энергию покоя $m_\gamma c^2$. Тогда согласно релятивистской формуле его полная энергия

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4},$$

где p — релятивистский импульс фотона. Скорость фотона

$$u = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_\gamma^2 c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_\gamma c \lambda / h)^2}}; \quad \frac{u}{c} = \left[1 + \left(\frac{m_\gamma c \lambda}{h} \right)^2 \right]^{-1/2} \geq 1 - \delta.$$

В этом выражении $\lambda = h/p$ — дебройлевская длина волны фотона. Заметим что скорость фотона, в вакууме зависит от длины волны λ , т. е. в этом случае должна наблюдаться дисперсия электромагнитных волн в вакууме.

По условию задачи $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$, поэтому $m_\gamma \approx \frac{2h^2 \delta}{c^2 \lambda^2}$.

2.5. Как следует из решения задачи 2.4, если у фотона ненулевая масса, то его энергия покоя $m_\gamma c^2 \leq \frac{2hc}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\Delta L}{L}} \approx 0,6 \cdot 10^{-8}$ эВ.

2.6. $n = \frac{\lambda_0}{\lambda'} = \sqrt{\frac{\mathcal{E} + A_0}{\mathcal{E}}} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}$ (\mathcal{E} и V соответственно энергия электрона в вакууме и разность потенциалов, пройденная им).

2.8. $2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} = m\lambda_0$, где λ_0 — длина волны в вакууме, n — показатель преломления волн де Бройля, θ — угол скольжения.

2.9. $n = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}} = 1,05$.

2.10: $n = \sqrt{\frac{T + |e|V_1}{T}} = 1,17$; $V_2 = -\frac{3}{4} \frac{T}{|e|} = -75$ В, где e — заряд электрона.

Решение. Очевидно, что полная энергия электрона, преодолевающего потенциальный барьер, сохраняется: $\mathcal{E} = T + U = \text{const}$, откуда $T = T_1 + eV_1$, где T и T_1 — кинетическая энергия до и после барьера. При этом

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_\perp^2 + p_\parallel^2}{2m},$$

p_\perp и p_\parallel — нормальная и касательная к границе раздела компоненты импульса. Поскольку скачок U связан с силами, действующими перпендикулярно к границе (электрического поля), то $p_\parallel = \text{const}$. Откуда $p \sin \varphi = p_1 \sin \varphi_1$. Относительным коэффициентом преломления сред является величина

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{h/p}{h/p_1} = \frac{p_1}{p} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} = \sqrt{\frac{T - eV_1}{T}} = \sqrt{1 + \frac{|e|V_1}{T}}.$$

Полное отражение электронов произойдет, когда $\sin \varphi_1 = 1$ (при этом разность потенциалов равна V_2), т. е.

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + (|e|V_2)/T}} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} = 1 + \frac{|e|V_2}{T},$$

откуда и следует второй ответ.

$$2.11. \mathcal{E} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{L}{Ra} \right)^2 \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ эВ.}$$

2.12* Решение. Для нерелятивистского электрона $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2}$. Поэтому искомую некогерентность электронов $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ легко оценить по числу наблюдаемых отражений $m_{\max} = 12$, откуда следует

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} \approx \frac{\lambda}{12}. \quad \text{И далее} \quad \left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = 2 \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{6}.$$

Вне металла скорость электрона $v_1 \propto \sqrt{V}$, внутри металла $v_2 \propto \sqrt{V_0 + V}$, где V_0 — внутренний потенциал металла. Таким образом, показатель преломления металла

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

Эквидистантное расположение максимумов интенсивности отраженных электронов наблюдается, когда внутренний потенциал металла $V_0 \ll V$. Это соответствует показателю преломления кристалла $n = 1$ (для $m \geq 6$). В этом случае в соответствии с формулой Брэгга—Вульфа (рис. 138)

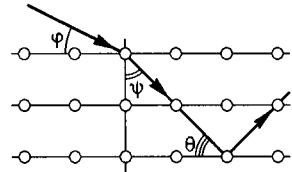


Рис. 138

$$2d \sin \varphi = m\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meV}}; \quad \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}}.$$

Последнее соотношение обычно записывают так

$$\sqrt{V} = \frac{12,26}{\lambda[\text{Å}]} = \frac{12,26m}{2d \sin \varphi},$$

где d следует подставлять в ангстремах [Å], а результат \sqrt{V} получается в $\text{В}^{1/2}$. В нашем случае при $m = 1$ $\sqrt{V} = 3,06 \text{ В}^{1/2}$, и поэтому межплоскостное расстояние $d = 2,03 \text{ Å}$. Из рис. 5 и условия задачи следует, что при $m < 6$ максимумы интенсивности неэквидистантны. Это означает, что при соответствующих энергиях показатель преломления отличается от 1.

Закон преломления волн де Бройля идентичен классическому закону Снеллиуса:

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \psi} = n; \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}.$$

По формуле Брэгга—Вульфа $n \cdot 2d \sin \theta = m\lambda$ или $n \cdot 2d \cos \psi = m\lambda$, откуда следует

$$2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi} = m\lambda.$$

Обозначим через V' ускоряющий потенциал, соответствующий энергиям электронов, когда $n \neq 1$. Тогда

$$\sqrt{V'} = \frac{12,26}{\lambda [\text{Å}]} = \frac{12,26m}{2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}}.$$

Из соотношения $\sqrt{\frac{V'}{V}}$ мы и определим n : $\sqrt{\frac{V'}{V}} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi}$, откуда

$$n = \left(\frac{V'}{V} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right)^{1/2}.$$

Для $m = 5$; $\sqrt{V'} = 14,68 \text{ В}^{1/2}$; $\sqrt{V} = 15,3 \text{ В}^{1/2}$; $n = 1,04$.

Для $m = 4$; $\sqrt{V'} = 11,42 \text{ В}^{1/2}$; $\sqrt{V} = 12,24 \text{ В}^{1/2}$; $n = 1,07$.

Для $m = 3$; $\sqrt{V'} = 8,16 \text{ В}^{1/2}$; $\sqrt{V} = 9,18 \text{ В}^{1/2}$; $n = 1,12$.

2.13. $\sin \theta = \sin \theta_0 \pm (u/v)$, где знак \pm определяет направление движения кристалла («+» — вниз, «-» — вверх). Отражение возможно при скоростях u , удовлетворяющих соотношению $|\sin \theta_0 \pm (u/v)| \leq 1$.

2.14. $T = \frac{h^2}{3mk\lambda^2} = 14 \text{ К}$, $d = \frac{\lambda}{2} = 0,335 \text{ нм}$.

2.15* $D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} = 82 \text{ Å}$.

Решение. Согласно условию Брэгга—Вульфа первый порядок ($m = 1$) отражения соответствуют углу

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

Длина волны, соответствующая энергии нейтрона $\mathcal{E} = 1 \text{ эВ}$, равна $0,287 \text{ Å}$, поэтому $\lambda/(2d) \approx 0,06$. Это означает, что $\sin \varphi \approx \varphi \approx 0,06$. Очевидно, что $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Дебройлевская длина волны $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} \propto \mathcal{E}^{-1/2}$. Поэтому

$$\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right|. \text{ Откуда}$$

$$\Delta\mathcal{E} = 2\mathcal{E} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\mathcal{E} \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \approx 0,58 \text{ эВ}.$$

Толщину кристалла D выберем из тех соображений, что разрешающая способность такой системы $R = mN \geq \lambda/\Delta\lambda$, т. е. при $m = 1$ и числе интерферирующих пучков, равном числу слоев, $N = D/d$:

$$\frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi},$$

откуда

$$D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82 \text{ Å}.$$

Приведем другое решение этой задачи. Рассмотрим бесконечную решетку в направлении оси X (рис. 139). Волновая функция всей решетки представляет собой плоскую волну $Ae^{i\frac{p_x x}{\hbar}}$, где p_x — импульс решетки в направ-

лении оси X . При смещении всей решетки вдоль X на период d волновая функция умножается на $\exp\left(i \frac{p_x d}{\hbar}\right)$ и переходит сама в себя. Отсюда $p_x d = 2\pi m \hbar$, т. е. импульс, передаваемый решетке, квантован! При упругом отражении $p_x = 2p \sin \varphi$, откуда следует $2d \sin \varphi = m(h/p) = m\lambda$. Таким образом, мы получили условие Брэгга—Вульфа.

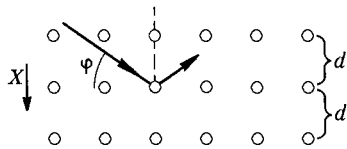


Рис. 139

Если же решетка ограничена по x , то передаваемый по X решетке импульс приобретает неопределенность $\delta p_x \approx h/D$. С другой стороны, $\delta p_x = 2p \delta(\sin \varphi) = 2p \cos \varphi \delta \varphi$. Поскольку $\cos \varphi \approx 1$, то

$$\delta \varphi = \frac{\delta p_x}{2p} \geq \frac{h}{D2p} \approx \frac{\lambda}{2D}.$$

Таким образом, искомая толщина кристалла $D \geq \frac{\lambda}{2\delta \varphi}$. Полагая $\delta \varphi \approx \Delta \varphi = 0,1^\circ$, получим ответ.

$$2.16^* \quad T \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{5kmd^2 \theta^2} \approx 470 \text{ К.}$$

Решение. Под интенсивностью пучка молекул понимается плотность потока молекул с размерностью $[1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})]$. Плотность потока молекул, если считать их распределение по скоростям максвелловским, в интервале скоростей от v до $v + dv$ с точностью до известных констант равна

$$dj(v) \propto v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv. \quad (*)$$

Далее пучок молекул испытывает рассеяние на кристаллических плоскостях LiCl. По условию Брэгга—Вульфа $2d \sin \theta = \lambda = 2\pi \hbar / (mv)$, где согласно графику порядок интерференции равен 1, а m — масса молекулы водорода. Отсюда следует $v = \frac{\pi \hbar}{md \sin \theta}$. Из пучка шириной $d\theta$ дифракционное рассеяние испытывают молекулы из интервала скоростей dv , при этом

$$2d \cos \theta d\theta = -\frac{2\pi \hbar}{mv^2} dv,$$

откуда $dv \propto v^2 \cos \theta(v) d\theta$ с точностью до очевидных констант. Подставляя dv в (*), получим выражение для полного числа актов рассеяния молекул (плотность потока) в угол $d\theta$, имеющих скорость из заданного интервала скоростей, с точностью до известных констант

$$dN_{v, \theta} \propto v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) m v^2 \cos \theta(v) d\theta.$$

Полагая, что $\cos \theta \approx 1$ (около 10°), $d\theta = \text{const}$, найдем экстремум этой функции:

$$\frac{d}{dv} \left[v^5 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \right] = 0, \quad \text{откуда} \quad mv_{\text{max}}^2 = 5kT.$$

Таким образом,

$$T = \frac{m}{5k} \left(\frac{\pi \hbar}{md \sin \theta} \right)^2 \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{5kmd^2 \theta^2} \approx 470 \text{ К.}$$

При вычислениях из графика взято $\theta \approx 11^\circ$.

$$2.17. \lambda = \frac{h\varphi}{m\Omega R} = 0,92 \text{ нм}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{a}{l\varphi} = 0,072.$$

2.18. $\frac{\hbar\varphi}{mLn} = 0,6 \text{ нм}; \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{b}{R\varphi} = 0,2; \quad b_{\text{оптм}} = \sqrt{\lambda L} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ (заметьте, что этот численный ответ зависит от того, в какой форме взять соотношение неопределенностей: $\Delta p b \approx \hbar$ или h).

$$2.19. q < \frac{\Delta\varphi \hbar v_0}{Vl} \approx 5 \cdot 10^{-23} \text{ ед. СГСЭ.}$$

2.20*. $d < \frac{\Delta\varphi \hbar v_0}{lE} \approx 5 \cdot 10^{-25} \text{ ед. СГСЭ}$ или $d < e \cdot 10^{-15} \text{ см}$, где e — заряд электрона в ед. СГСЭ.

Решение. Без поля сдвиг фаз на участке длиной l (разность хода!) $\varphi_0 2\pi l/h = lp_0/\hbar$, где p_0 — импульс частицы. При включенном поле импульс нейтрона должен измениться на Δp , и появится сдвиг фаз $\varphi_1 = l(p_0 + \Delta p)/\hbar$. Разность сдвигов фаз $\varphi_1 - \varphi_0 = \Delta\varphi = l\Delta p/\hbar$. Изменение импульса найдем из закона сохранения энергии: работа поля равна изменению кинетической энергии —

$$\frac{(p_0 + \Delta p)^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = Ed.$$

Из этого уравнения следует, что $\Delta p > Ed/v_0$. Отсюда получим $\Delta\varphi > \frac{l}{h} \frac{Ed}{v_0}$ и

дипольный момент $d < \frac{\Delta\varphi \hbar v_0}{lE}$.

$$2.21^*. \theta \approx m \frac{2h}{\sqrt{2m_e T} \lambda} \approx m \cdot 10^{-4} \text{ рад, где } m = 1, 2, 3, \dots$$

Решение. В резонаторе лазера устанавливается стоячая волна типа $E(x, t) \propto \sin kx e^{-i\omega t}$ (рис. 140). Электронная дебройлевская волна рассеивается на пучностях поля E стоячей волны, которые отстоят друг от друга на $\lambda/2$. Это и есть период структуры. От этих «плоскостей» происходит зеркальное отражение. Условие Брэгга—Вульфа (рис. 141) $2d \sin \varphi = m\lambda_{\text{дБ}}$;

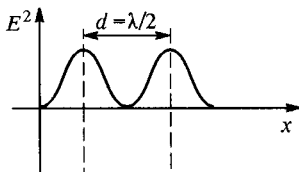


Рис. 140

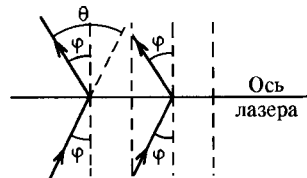


Рис. 141

$\lambda_{\text{дБ}} = h/p$. Поскольку кинетическая энергия электронов $T \ll m_e c^2$, то их можно считать нерелятивистскими. Поэтому $T = p^2/(2m_e)$ и $p = \sqrt{2m_e T}$. По усло-

вию угол скольжения $\varphi \ll 1$, таким образом,

$$\varphi \approx m \frac{\lambda_{дБ}}{2d} = m \frac{h}{\lambda\sqrt{2}m_e T}.$$

Искомые углы отклонения

$$\theta = 2\varphi = m \frac{2h}{\lambda\sqrt{2}m_e T} \approx m \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

2.22* $w = \frac{v}{2} + \frac{\text{const}}{v}$, $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + \text{const}$.

Решение. По формуле Рэлея групповая скорость $u = w - \lambda dw/d\lambda$. Полагая здесь $\lambda = h/p = h/(mv)$, $u = v$ и рассматривая движение с нерелятивистскими скоростями, получим

$$v = w + v \frac{dw}{dv} = \frac{d}{dv}(wv),$$

откуда

$$wv = \frac{v^2}{2} + \text{const}, \quad w = \frac{v}{2} + \frac{\text{const}}{v}.$$

Далее,

$$\nu = \frac{w}{\lambda} = \frac{v/2 + \text{const}/v}{h/(mv)} = \frac{mv^2/2 + \text{const}}{h}.$$

Во всех явлениях произвольные постоянные, входящие в выражения для v и w , не играют роли. Их можно положить равными нулю.

Разумеется, решение можно распространить и на движения с релятивистскими скоростями. Тогда, если отбросить не играющие роли постоянные интегрирования, формулы примут вид

$$w = \frac{c^2}{v}, \quad h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

2.23* Решение. Если электрон прошел через щель, то в плоскости самой щели координата x будет фиксирована с точностью $\Delta x \sim d$, где d — ширина щели. Однако в результате дифракции на щели волновая функция электрона ψ будет иметь максимумы и минимумы. Электрон может быть обнаружен в любом месте, где $\psi \neq 0$. Наиболее интенсивным получится максимум нулевого порядка. Его угловая ширина равна 2θ , причем $d \sin \theta = \lambda$. Практически достаточно принять во внимание именно такой максимум. В этом приближении после прохождения через щель неопределенность Δp_x импульса электрона получится порядка $\Delta p_x = p \sin \theta = (h/\lambda) \sin \theta = h/d$. Таким образом, $\Delta x \Delta p_x \sim h$. Более определенное неравенство, которому должны удовлетворять Δx и Δp_x , с помощью этих соображений указать нельзя, поскольку не указан точный смысл самих величин Δx и Δp_x .

2.24* При рассеянии фотона на электроне рассеянный фотон может попасть в любую точку плоскости изображения. Дифракционная картина в этой плоскости состоит из концентрических светлых и темных колец с центральным светлым кружком, называемым кружком Эйри, радиус которого равен $R \approx \lambda/\beta$ (рис. 142). Практически, рассеянный фотон может быть зафиксирован только внутри кружка, поскольку интенсивность там наибольшая. В этом приближении положение точки попадания фотона в плоскости

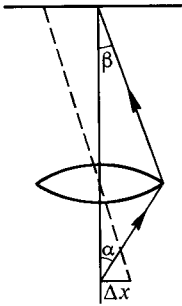


Рис. 142

изображения может быть определено с точностью порядка R . Неточность положения Δx электрона в предметной плоскости найдется из условия синусов Аббе $R\beta = \Delta x \sin \alpha$, т. е. $\lambda = \Delta x \sin \alpha$. При рассеянии фотона на электроне последний испытывает отдачу, в результате чего импульс электрона получает неконтролируемое приращение $\Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$. Таким образом, $\Delta x \Delta p_x \sim h$.

2.25* Решение. Пусть телом является идеально отражающее зеркало, а свет падает нормально на его поверхность. На основании законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega_0 + \frac{1}{2} Mv_0^2 = \hbar\omega + \frac{1}{2} Mv^2, \quad \frac{\hbar\omega_0}{c} + Mv_0 = -\frac{\hbar\omega}{c} + Mv,$$

где M — масса тела, v_0 и v — его скорости до и после отражения света, ω_0 и ω — частоты падающего и отраженного фотонов. Переписав эти уравнения в виде

$$M(v^2 - v_0^2) = 2\hbar(\omega - \omega_0), \quad M(v - v_0) = \frac{\hbar}{c}(\omega + \omega_0), \quad (*)$$

почленным делением находим

$$v + v_0 = 2c \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}. \quad (**)$$

Для массивного зеркала $Mv^2/2 \gg \hbar\omega$. Поэтому $v \simeq v_0$, и тогда

$$v \simeq v_0 = c \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}.$$

Измерив частоты ω_0 и ω , можно по этой формуле вычислить скорость зеркала v . Частоту ω_0 можно считать измеренной точно. Тогда ошибка Δv в значении скорости будет определяться неточностью измерения частоты ω . Чтобы измерить ω с точностью $\Delta\omega$, надо производить измерение в течение времени Δt , удовлетворяющего условию $\Delta\omega\Delta t \sim 2\pi$. На основании (**)

$$\Delta v = -c \frac{2\omega_0\Delta\omega}{(\omega_0 + \omega)^2} \approx -c \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}.$$

Так как моменты отражения фотона известны с ошибкой Δt , то неточность в значении скорости v поведет к ошибке Δx в определении координаты зеркала:

$$\Delta x \sim |\Delta v \Delta t| \sim \frac{c}{2\omega_0} |\Delta\omega \Delta t| \sim \frac{\pi c}{\omega_0}.$$

Согласно (*) при взаимодействии с фотоном зеркало получает неконтролируемое изменение импульса $\Delta p \sim 2\omega_0\hbar/c$. Следовательно, $\Delta x \Delta p \sim 2\pi\hbar/c$ и $\Delta x \Delta p \sim 2\pi\hbar = h$.

2.26. $T > mv^2 \sqrt{1 + (\Lambda/l)^2} - mc^2$, где $\Lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона).

Для электрона $T > m_e c^2 \Lambda_e / l_{эл} \approx 720$ МэВ или 7200 ГэВ во втором случае.

Для протона $T > m_p c^2 \sqrt{1 + (\Lambda_p / l)^2} - m_p c^2 \approx 600$ МэВ или 8,2 ГэВ во втором случае.

$$2.27. d_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2Lh}{\sqrt{2m_p \mathcal{E}}}} \approx 8,5 \text{ мкм.}$$

$$2.28. b = d + \frac{2hcl}{derB}, \text{ откуда } b_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2hcl}{erB}} \approx 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

$$2.29. d_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2h\tau}{m_e}} = 7,6 \text{ мкм.}$$

$$2.30. d \approx 2 \sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{3mkT}}} \approx 7,5 \text{ мкм.}$$

$$2.31^* \Delta r \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Решение. Обмен «виртуальными» частицами — основной язык описания взаимодействия между реальными частицами в квантовой теории поля. Виртуальная частица — это частица, время жизни которой определяется соотношением неопределенностей, а не какими-либо другими физическими процессами. У виртуальной частицы есть энергия \mathcal{E} , импульс p , масса m . Однако для нее не выполняется обычное релятивистское соотношение, и поэтому $\mathcal{E} \neq \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$. Например, виртуальный фотон может обладать энергией и покоиться! Одна и та же частица, в зависимости от ситуации, может быть либо реальной, либо виртуальной. В связи с возникновением такой частицы в системе возникает неопределенность энергии $\Delta \mathcal{E}$, которая и определяет время жизни частицы $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta \mathcal{E}}$. Через время $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta \mathcal{E}}$ поглощается либо самой испустившей ее реальной частицей или другой реальной частицей, и энергетический баланс в системе восстанавливается. В процессах испускания и поглощения выполняется закон сохранения импульса (хотя и направление импульса может и не совпадать с классическим).

При рассмотрении низкоэнергетических процессов, когда $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 \ll (mc^2)^2$, можно считать, что $\Delta \mathcal{E} \approx mc^2$, и тогда $\tau \sim \frac{\hbar}{mc^2}$. За это время ча-

стица может пройти расстояние $l \approx c\tau \sim \frac{\hbar}{mc} = \Lambda_K$ — т. е. расстояние, равное комптоновской длине волны частицы. Это и есть радиус взаимодействия, обусловленный обменом виртуальными квантами.

2.32. $\mathcal{E} \geq \hbar^2 / 8mr^2$. Для электрона в атоме $\mathcal{E} \geq 1$ эВ, для электрона в атомном ядре $\mathcal{E} \geq 10^{10}$ эВ = 10^4 МэВ. Электрон, будучи лептоном, может быть удержан в ядре только кулоновскими силами. Однако энергия взаимодействия $\sim Ze^2 / R_{яд} \sim 1$ МэВ $\ll \mathcal{E} \sim 10^4$ МэВ.

2.33* **Решение.** В полях такой напряженности из-за рождения виртуальных пар вакуум становится «поляризованной средой», а уравнения Максвелла теряют свойство линейности. Виртуальная пара живет время $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta \mathcal{E}} \sim \frac{\hbar}{2mc^2}$. Чтобы виртуальные частицы стали реальными, на длине $c\tau$ (на комптоновской длине волны) за счет работы электрического поля E дол-

жна набираться энергия, большая, чем $2mc^2$, т. е. $2mc^2 \approx eEct \sim \frac{eE\hbar}{2mc}$, откуда

$$E \sim \frac{4m^2 c^3}{e\hbar} \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГСЭ} = 6 \cdot 10^{16} \text{ В/см.}$$

$$2.34. d = 0,61 \frac{h}{A\sqrt{2meV}} = 0,024 \text{ нм.}$$

2.35. $A = 0,83$ (в нерелятивистском приближении, $A = 1,73$). Числовая апертура A определяется из соотношения для минимально разрешаемого микроскопом расстояния $l \geq 0,61 \frac{\lambda_e}{A}$, где $l = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ — размер мезоатома,

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(eV)^2 - (m_e c^2)^2}} \text{ — дебройлевская длина волны электрона.}$$

$$2.36. A \approx \frac{h}{d\sqrt{2meV}} = 1,37 \cdot 10^{-2}.$$

$$2.37. V = \frac{h^2}{2m_e e} \frac{1}{\lambda_{\text{отт}}^2} \left(\frac{\sin u_{\text{отт}}}{\sin u_{\text{эл}}} \right)^2 \approx 450 \text{ В, где } u \text{ — угловая апертура.}$$

2.38. $\bar{x} \approx \frac{4(\varepsilon+1)}{\varepsilon-1} r_1 \approx 76 \text{ \AA}$, где $r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода. Энергия связи

$$\mathcal{E}_{\text{св}} \approx -\frac{me^4}{32\hbar^2} \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^2 = \mathcal{E}_{\text{ион}} \frac{1}{16} \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^2 \approx -6,5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ,}$$

где $\mathcal{E}_{\text{ион}} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}$ — энергия ионизации атома водорода.

$$2.39. \mathcal{E}_0 \approx 1,5 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}, l \approx \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{km}}.$$

Решение. В n -м стационарном состоянии квантовой системы, как следует из уравнений Шредингера, средние значения кинетической и потенциальной энергии удовлетворяют соотношению

$$\langle \hat{T}_n \rangle + \langle \hat{U}_n \rangle = \mathcal{E}_n,$$

где $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$; $\hat{U} = U(x)$; \mathcal{E}_n — полная энергия системы, а угловые скобки означают квантово-механическое среднее. Таким образом, $\frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2m} + k\langle x \rangle = \mathcal{E}_n$. Для оценки энергии основного состояния воспользуемся тем, что в основном состоянии ($n = 0$) неопределенность координаты $\delta x \sim \langle x \rangle$, а неопределенность импульса $\delta p \sim \langle \hat{p} \rangle$ и $\langle \hat{p} \rangle^2 \sim \langle \hat{p}^2 \rangle$. Согласно соотношению неопределенностей получаем $\langle \hat{p} \rangle \langle x \rangle \sim \hbar$, откуда выражая, например $\langle x \rangle$ через $\langle \hat{p} \rangle$, получим

$$\frac{\langle \hat{p} \rangle^2}{2m} + \frac{k\hbar}{\langle \hat{p} \rangle} = \mathcal{E}_0.$$

В основном состоянии энергия системы минимальна. Поэтому $\partial \mathcal{E}_0 / \partial \langle \hat{p} \rangle = 0$, т. е.

$$\frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} - \frac{k\hbar}{\langle \hat{p} \rangle^2} = 0,$$

откуда $\langle \hat{p} \rangle = p_0 = \sqrt[3]{km\hbar}$, а размер области локализации частицы в данной яме $l = \langle x \rangle = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{km}}$. Для энергии основного состояния получаем

$$\mathcal{E}_0 = \frac{3}{2m} (km\hbar)^{2/3} = 1,5 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}.$$

Приведем для сравнения точный результат, полученный из решения уравнения Шредингера для данного потенциала $\mathcal{E}_0 = 1,856 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}$. Видно, что точность нашего приближенного подхода составляет примерно 20%.

2.40* Решение. Угол φ между направлением полета частиц и направлением излучения определяется из равенства

$$\cos \varphi = \frac{c}{nv}.$$

Дифференцируем это выражение и заменяем дифференциалы конечными приращениями

$$\sin \varphi \Delta \varphi = \frac{c}{nv^2} \Delta v = \frac{c}{nm_e v^2} \Delta p.$$

Электрон, находясь в слое вещества толщиной d , имеет неопределенность импульса $\Delta p \approx \hbar/d$, откуда следует неопределенность угла

$$\Delta \varphi \approx \frac{c\hbar}{dnm_e v^2 \sin \varphi}.$$

2.41* Решение. Чтобы имело смысл представление о классическом движении электрона по первой боровской орбите, необходимо выполнение соотношения $\Delta r \ll r_1$, где $r_1 = \hbar^2/me^2$ — радиус этой орбиты, а Δr — неопределенность положения электрона по радиусу. Но тогда по соотношению неопределенностей соответствующая неопределенность в импульсе будет

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta r} \gg \frac{\hbar}{r_1} = \frac{me^2}{\hbar},$$

т. е. равна самому импульсу электрона $p = me^2/\hbar$. Однако по мере увеличения орбиты (увеличения квантового числа n), движение становится все более «классическим», что и постулируется принципом соответствия Бора.

$$\mathbf{2.42.} \quad \frac{l_n}{\lambda} = n, \quad \lambda = \frac{\hbar^2 n}{2\pi m e^2 Z} = 3,32 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{n}{Z} \text{ см.}$$

2.43* Решение. В стационарном состоянии квантово-механические средние значения кинетической и потенциальной энергий системы связаны соотношением

$$\langle T \rangle + \langle U \rangle = \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — полная энергия системы.

$$\text{В случае атома водорода } U = -\frac{e^2}{r}, \quad T = \frac{p^2}{2\mu}.$$

Если атом находится в основном состоянии, то $\Delta p \sim p$; $\Delta r \sim r$. Т. к. $\Delta p \Delta r \sim \hbar$, то $\mathcal{E} \geq \frac{\hbar}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}$. Правая часть достигает минимума при

$$r = \frac{\hbar^2}{\mu e^2},$$

чем и определяется порядок величины размера атома водорода в основном состоянии. Соответствующая энергия

$$\mathcal{E} \geq -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}.$$

В случае двухатомной молекулы (если не учитывать ее вращения)

$$\langle T \rangle = \frac{\overline{p_x^2}}{2\mu}, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \overline{x^2},$$

причем в силу соотношения неопределенностей в форме Вейля

$$(\overline{p_x^2} - \overline{p_x})^2 (\overline{x^2} - \overline{x})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

В силу симметрии потенциальной ямы $\overline{p_x} = \overline{x} = 0$ и тогда

$$\overline{p_x^2} \overline{x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \overline{x^2} + \frac{\hbar^2}{8\mu \overline{x^2}} \leq \mathcal{E}.$$

Левая часть достигает минимума при $\overline{x^2} = \hbar / (2\mu\omega_0)$. Следовательно,

$$\mathcal{E} \geq \frac{1}{2} \hbar \omega_0.$$

Основное состояние — это состояние с минимально возможной энергией, и для него

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0, \quad \overline{x^2} = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}.$$

Размер молекулы порядка $\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}}$.

$$2.44^* \quad F \geq \sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau^3}}.$$

Решение. Минимальная сила, действие которой может быть определено по отклику свободной частицы (пробного тела) определяется квантово-механическими особенностями пробного тела и временем действия силы. При обнаружении малого внешнего воздействия на пробную квантово-механическую частицу требуется как минимум два измерения: начальной координаты и конечной (через время τ). При этом мы не рассматриваем «снос» частицы $x = v_0\tau$, где v_0 — скорость свободной частицы, поскольку он не влияет на ответ.

Под действием силы частица движется с ускорением a , и за время τ переместится на расстояние $l = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{F\tau^2}{2m}$. Этот результат справедлив и в квантовой механике. Зная координату частицы $x(0)$, т. е. в момент $t = 0$, мы могли бы знать положение частицы в момент $t = \tau$: $x(\tau) = x(0) + l$. Следовательно, по крайней мере одно измерение координаты нам было бы необходимо.

Согласно основным представлениям квантовой механики при измерении вносится неконтролируемая неопределенность $\langle \Delta x_0^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. В результате после измерения координаты возникает разброс в значении импульса $\langle \Delta p_x^2 \rangle$, который можно найти из соотношения неопределенностей в форме Вейля

$$\langle \Delta x_0^2 \rangle \langle \Delta p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \text{откуда} \quad \langle \Delta p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4 \langle \Delta x_0^2 \rangle}.$$

Через время τ это приводит к неопределенности в пройденном расстоянии (конечную координату мы можем измерить сколь угодно точно).

$$\langle \Delta x_\tau^2 \rangle = \frac{\langle \Delta p_x^2 \rangle \tau^2}{m^2} \geq \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 \langle \Delta x_0^2 \rangle}.$$

Складывая обе дисперсии, в силу их статистической независимости получим

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta x_0^2 \rangle + \langle \Delta x_\tau^2 \rangle \geq \langle \Delta x_0^2 \rangle + \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 \langle \Delta x_0^2 \rangle}.$$

Минимизируя полученное выражение по $\langle \Delta x_0^2 \rangle$, определяем неопределенность первого измерения координаты, которая обеспечит минимальную неопределенность пройденного за время τ пути $\langle \Delta x_0^2 \rangle_{\min} = \hbar\tau/2m$. Это соответствует $\langle \Delta x^2 \rangle_{\min} = \hbar\tau/m$.

Силу можно будет зарегистрировать, если смещение l под действием силы окажется больше неопределенности пути

$$\frac{F\tau}{2m} \geq \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}},$$

откуда

$$F_{\min} = \frac{2m}{\tau} \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}} = \sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau^3}}.$$

$$\mathbf{2.45^*} \quad F_{\min} = \sqrt{\frac{8\hbar^2 m}{\epsilon_0 \tau^4}}.$$

Решение. В этом случае мы измеряем энергию частицы до действия силы и после. Первое измерение дает значение начальной энергии. Точность $\Delta \mathcal{E}$ такого измерения зависит от длительности измерения τ_1 , т. е. $\Delta \mathcal{E} = \hbar/\tau_1$ (в принципе при достаточно большом τ_1 она может быть сделана сколь угодно малой). Поскольку полное время наблюдения ограничено величиной τ , то часть этого времени должна быть затрачена на измерение начальной энергии, а в оставшуюся часть времени $\tau - \tau_1$ будет происходить изменение энергии за счет работы силы F .

За время $\tau - \tau_1$ при условии $F\tau_1 \ll p_0$ изменение энергии

$$\Delta \mathcal{E}_0 = \frac{p_0 \Delta p}{m} = p_0 \frac{F(\tau - \tau_1)}{m}.$$

Это изменение энергии можно обнаружить, если $\Delta \mathcal{E}_0 > \Delta \mathcal{E} = \hbar/\tau_1$, откуда

$$F \geq \frac{\hbar m}{p_0 \tau_1 (\tau - \tau_1)}.$$

Вводя $\epsilon_0 = \frac{p_0^2}{2m}$ и минимизируя по τ_1 , получаем

$$\tau_1 = \frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad F_{\min} = \frac{\hbar}{\tau^2} \sqrt{\frac{8m}{\epsilon_0}}.$$

Заметим, что при подобных измерениях необходимо уменьшить все флуктуации энергии некантовой природы (например, тепловые) до уровня меньше квантовых.

2.46* Пороговая энергия рождения пары $\epsilon_{\Pi} = 2m_e c^2$. Эта энергия «появляется» при попытке локализовать электрон

в размере $\Lambda_e/2$, где Λ_e — комптоновская длина волны электрона. Действительно, при $\Delta x \simeq \frac{\Lambda_e}{2} = \frac{\hbar}{2m_e c}$ возникает неопределенность в энергии $\Delta \epsilon = \frac{\hbar^2}{2m_e (\Delta x)^2}$, которая равна $2m_e c^2$. Таким образом в области $\sim \Lambda_e/2$ электрон не может рассматриваться как «точечный» объект.

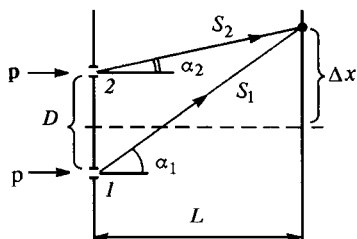


Рис. 143

2.47. $t_{\text{изм}} \approx \frac{\hbar}{\epsilon_{\gamma}} = 4 \cdot 10^{-20}$ с; $\Delta \epsilon \approx \frac{\hbar}{t_{\text{изм}}} = 15$ кэВ.

2.48* Решение. Условие возникновения первого максимума $S_1 - S_2 = \lambda_{\text{дБ}}$. Из геометрии разность хода (рис. 143)

$$S_1 - S_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2} + \Delta x\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\Delta x - \frac{D}{2}\right)^2 + L^2} \approx \frac{D\Delta x}{L},$$

где использовано обычное условие эксперимента $L \gg D, \Delta x$.

Если электрон прошел через щель 1, то изменение импульса экрана

$$|\Delta p_{x1}| = p \frac{\Delta x + D/2}{\sqrt{(\Delta x + D/2)^2 + L^2}},$$

а если через щель 2, то

$$|\Delta p_{x2}| = p \frac{\Delta x - D/2}{\sqrt{(\Delta x - D/2)^2 + L^2}}.$$

Чтобы определить по измерению импульса, через которую щель прошел электрон, нужно суметь различить по величине $|\Delta p_{x1}|$ и $|\Delta p_{x2}|$, т. е. точность измерений импульса должна быть лучше, чем

$$\Delta p_x = |\Delta p_{x1}| - |\Delta p_{x2}| \approx p \frac{\Delta x + D/2}{L} - p \frac{\Delta x - D/2}{2} = p \frac{D}{L}.$$

Согласно соотношению неопределенностей

$$\delta x \delta p_x \sim \hbar, \quad \text{откуда} \quad \delta x \sim \frac{\hbar}{\delta p_x} \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar L}{pD} = \frac{\lambda_{\text{дБ}} L}{D}.$$

Так как $\lambda_{дБ} = \frac{D\Delta x}{L}$, то $\delta x \geq \Delta x$. Тем самым неопределенность в положении щелей (обе щели смещаются как целое вместе с экраном) будет больше, чем масштаб интерференционного расщепления, и картина размоется.

2.49* Решение. Пока расстояние d между расщепленными пучками меньше $0,61\lambda_{\phi}$ (результат, хорошо известный в оптике как предельное разрешение двух светящихся точек), определить, каким путем движется атом, невозможно. Поэтому первое размытие картины произойдет при $d = 0,61\lambda_{\phi}$. Так как угол дифракции мал, то, как следует из рис. 144, размытие интерференционной картины произойдет при расстоянии между пучками

$$d \approx z\theta = z \frac{\lambda_{дБ}}{a} = \frac{z}{a} \frac{h}{p}$$

Поэтому

$$z = 0,61\lambda_{\phi} \frac{a}{\lambda_{дБ}} = \frac{0,61\lambda_{\phi} a M v}{h} = 6 \text{ мм.}$$

Следует отметить, что при таком способе измерения координат атомов из-за их большой массы Δp_{\perp} , возникающее из соотношения неопределенностей, очень мало.

2.50. $F = \frac{n_0 \hbar}{4d^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \approx 5 \cdot 10^{-21}$ дин, где $\lambda_2 = 4 \text{ \AA}$ и $\lambda_1 = 2 \text{ \AA}$ (упруго рассеиваться будут все нейтроны с длиной волны $\lambda \leq 4 \text{ \AA}$).

2.51. $v = \frac{h}{M\lambda} = 2,77 \cdot 10^4$ см/с, где $\lambda = \frac{d\Delta}{l}$ — длина волны фуллеренов.

2.52. Скорость тримеров и димеров одинакова: $v = \frac{h}{\theta M N d} = 1,8 \cdot 10^6$ см/с, где N — число атомов гелия в кластере.

2.53. $\Delta\varphi \approx \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{m^2 l^3 g}}$; $\Delta L \approx (\hbar^2 m^2 g l^3)^{1/4}$. Легко проверить, что $\Delta\varphi \Delta L \approx \hbar$.

2.54* Решение. Флуктуация энергии в системе осцилляторов $\Delta\mathcal{E} = \Delta N \hbar\omega$; в свою очередь, $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$. Поэтому $\frac{\Delta\mathcal{E} \Delta t}{\hbar} = \Delta N \Delta\varphi = 1$.

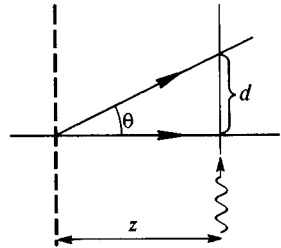


Рис. 144

§ 3. Уравнение Шредингера. Квантование. Потенциальные барьеры.

3.1* Решение. Плотность потока вероятности вычисляется по формуле

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi),$$

или в одномерном случае

$$j_z = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (*)$$

а) В случае плоской волны $\psi(z) = e^{ikz}$ плотность потока вероятности определим прямой подстановкой волновой функции в (*):

$$j_z = \frac{\hbar k}{m} = v,$$

т. е. равна скорости частицы v .

б) В случае сферической расходящейся волны $\psi(r) = \frac{1}{kr} e^{ikr}$, очевидно, вектор плотности потока вероятности \mathbf{j} направлен по радиусу-вектору \mathbf{r} . Кроме того будем считать $kr \gg 1$. Поэтому

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{(kr)^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{v}{(kr)^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{v}}{(kr)^2}.$$

В последнем равенстве учтено, что $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$. Можно было бы воспользоваться декартовыми координатами, направив ось z по радиусу-вектору. Естественно, ответ получился бы таким же:

$$j_z = \frac{v_z}{(kr)^2}.$$

в) Для суммы сходящейся и расходящейся волновых функций приведем только ответ:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{(2kr)^2} (|s|^2 - 1).$$

3.2. $U(x) = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m} x^2$ (гармонический осциллятор), $\mathcal{E} = \frac{\alpha \hbar^2}{m}$.

Указание: в задачах 3.2, 3.3, 3.4 предпочтительнее не интегрировать по частям, а наоборот — дифференцировать по параметру α определенный

интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$.

3.3. $\langle T \rangle \approx \frac{\hbar^2}{32ma^2}$ (точное значение $\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{6ma^2}$); $U(x) = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{ax} \right)$;

$\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (см. указание к задаче 3.2).

3.4. $\langle T \rangle \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}$ (точное значение $\langle T \rangle = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$); $\langle x \rangle = \frac{3}{2}a$; $U(x) = -\frac{\hbar^2}{max}$;

$\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (см. указание к задаче 3.2).

3.5. $\mathcal{E}_0 \approx \left(\frac{9}{4} \frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)^{1/3}$, параметр $a = \left(\frac{3mk}{2\hbar^2} \right)^{1/3}$. См. также задачу 2.39.

Полученный ответ совпадает с точным решением с точностью 6%.

3.6. $\mathcal{E}_n = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{k^2 \pi^2 \hbar^2}{m}} n^{2/3}$.

3.7. $\mathcal{E} = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2} = -1,36 \text{ кэВ}$; $a = \frac{\hbar^2}{Zme^2} = 0,053 \text{ \AA}$.

3.8.* $a = \hbar \sqrt{\frac{(1+a)^3}{2\mu U_0 \alpha (\alpha + 3)}} \approx 1,54 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

Решение. Учитывая сферическую симметрию задачи, запишем

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle T + U \rangle = \int_0^{\infty} \psi^* \left[\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + U(r) \right] \psi dV,$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$; $\mu = m_N/2$ — приведенная масса дейтрона. Оператор

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta_r = -\hbar^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right).$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8\mu a^2} - U_0 \frac{a^3}{(1+\alpha)^2}.$$

Основное состояние соответствует минимуму энергии:

$$\frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{d\alpha} = 0, \text{ откуда } \frac{(1+\alpha)^3}{\alpha(3+\alpha)} = \frac{2\mu a^2 U_0}{\hbar^2}.$$

Далее находим

$$\mathcal{E}_0 = \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\alpha^3(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3} \frac{U_0}{4} \text{ или } \frac{\alpha^3(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3} = 0,108.$$

Используя указание к задаче, находим, что $\alpha = 1,5$. Таким образом,

$$a = \hbar \sqrt{\frac{(1+\alpha)^3}{2\mu U_0 \alpha (\alpha+3)}} \approx 1,54 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

3.9. $\langle E(\alpha) \rangle = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8\mu a^2} - U_0 \frac{a^3}{(1+\alpha)^3} \approx -2,2 \text{ МэВ, где } \alpha = 1,35.$

3.10* 1) $\alpha = -\frac{2}{3} \frac{\mu\omega}{\hbar}$; $\beta = \frac{\mu\omega}{2\hbar}$; $\mathcal{E} = \frac{7}{2} \hbar\omega$, поскольку $\mathcal{E}_N = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right)$, то $N = 2$.

2) $\alpha = 0$; $E = \frac{3}{2} \hbar\omega$, $N = 0$.

Решение. В трехмерном случае в сферических координатах (r, θ, φ) лапласиан Δ имеет вид

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}.$$

Поскольку ψ -функция не зависит от углов (сферически симметричный случай, изотропный осциллятор), то лапласиан в нашей задаче сводится к радиальной части Δ_r

$$\Delta = \Delta_r \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}.$$

Дифференцируя исходную ψ -функцию, получим

$$\frac{d\psi}{dr} = 2Ae^{-\beta r^2} [(\alpha - \beta)r - \alpha\beta r^3];$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = 2Ae^{-\beta r^2} [2\alpha\beta^2 r^4 - \beta(5\alpha - 2\beta)r^2 + (\alpha - \beta)].$$

Таким образом, уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{\mu\omega^2}{2} r^2\psi = \mathcal{E}\psi, \text{ или}$$

$$-6\beta + 4\beta^2 r^2 - 14\alpha\beta r^2 + 4\alpha\beta^2 r^4 + 6\alpha - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} r^4 \alpha = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \mathcal{E} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \mathcal{E} \alpha r^2.$$

Поскольку энергия $\mathcal{E} = \text{const}$ и не может зависеть от r , то сумма коэффициентов при всех степенях r должна давать 0.

$$r^0: \quad 6(\alpha - \beta) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \mathcal{E} = 0,$$

$$r^2: \quad -14\alpha\beta + 4\beta^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} + \frac{2\mu\mathcal{E}}{\hbar^2} \alpha = 0,$$

$$r^4: \quad 4\alpha\beta^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} \alpha = 0.$$

Из этой системы и следуют искомые значения α , β , \mathcal{E} и N , приведенные в ответе.

$$3.11. \quad \psi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} & (n = 1, 3, 5, \dots), \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} & (n = 2, 4, 6, \dots), \end{cases} \quad \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2 \text{ в обоих случаях.}$$

Вследствие симметричности потенциала решения подразделяются на четные и нечетные. В силу граничных условий ($\psi(\pm a) = 0$) на ширине ямы должно укладываться целое число полувольт де Бройля, как это имеет место для электромагнитных волн в случае интерферометра Фабри—Перо или волновода с металлическими стенками.

3.12. Решение. Примем за начало координат центр дна ямы O (см. рис. 19 к условию задачи). Тогда уравнение Шредингера для связанных состояний внутри ямы будет

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{1}$$

а вне ямы

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0, \tag{2}$$

где введены обозначения

$$k = \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}}. \tag{3}$$

Внутри ямы общее решение имеет вид

$$\psi = A \cos kx + B \sin kx.$$

Вне ямы решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности $\psi(\pm \infty) \rightarrow 0$, будет

$$\psi = Ce^{-\alpha x} \quad \text{при } x > a,$$

$$\psi = De^{\alpha x} \quad \text{при } x < -a.$$

Из соображений симметрии следует, что плотность вероятности $|\psi|^2$ должна быть симметричной функцией x относительно начала координат. Следовательно, должно быть $C^2 = D^2$, т. е. возможны два случая: $C = D$ и $C = -D$. Постоянные A, B, C, D надо выбрать так, чтобы на краях ямы функция ψ и ее производная $d\psi/dx$ были непрерывны. На границе $x = +a$ это дает

$$\begin{aligned} A \cos ka + B \sin ka &= Ce^{-\alpha a}, \\ -kA \sin ka + kB \cos ka &= -\alpha Ce^{-\alpha a}, \end{aligned}$$

а на границе $x = -a$

$$\begin{aligned} A \cos ka - B \sin ka &= De^{-\alpha a}, \\ kA \sin ka + kB \cos ka &= \alpha De^{-\alpha a}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2A \cos ka &= (C + D)e^{-\alpha a}, & 2kA \sin ka &= \alpha(C + D)e^{-\alpha a}, \\ 2B \sin ka &= (C - D)e^{-\alpha a}, & 2kB \cos ka &= -\alpha(C - D)e^{-\alpha a}. \end{aligned}$$

Если $A \neq 0$ и $C = D$, то

$$k \operatorname{tg} ka = \alpha. \quad (4)$$

Если же $B \neq 0$ и $C = -D$, то

$$k \operatorname{ctg} ka = -\alpha. \quad (5)$$

Эти условия не могут быть удовлетворены одновременно, так как в противном случае получилось бы $k^2 = -\alpha^2$, а это невозможно ввиду вещественности k и α . Решение, когда все коэффициенты A, B, C, D равны нулю, физического смысла не имеет. Таким образом, все возможные решения разделяются на два класса: решения с четной волновой функцией, когда $A \neq 0, B = 0, C = D$ и решения с нечетной волновой функцией, когда $A = 0, B \neq 0, C = -D$.

Уровни энергии найдутся путем графического или численного решения уравнения (4) или уравнения (5), в которых положительные величины k и α определяются выражениями (3). Для графического решения удобно ввести безразмерные величины

$$\xi = ak, \quad \eta = \alpha a. \quad (6)$$

Тогда

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2}, \quad (7)$$

причем для решений с четной волновой функцией

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \xi, \quad (4a)$$

а для решений с нечетной волновой функцией

$$\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi. \quad (5a)$$

На рис. 145а построены кривые $\eta = \xi \operatorname{tg} \xi$, на рис. 145б — кривые $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$. Вертикальными штриховыми линиями изображены асимптоты этих кривых. Ввиду положительности ξ и η нужны только участки этих кривых, расположенные в положительном квадранте ($\xi > 0, \eta > 0$). Пересечем эти кривые окружностью (7), радиус которой $\sqrt{2mU_0} a/\hbar$ должен

считаться известным. Координаты точек пересечения этой окружности с кривыми (4а) и (5а) дадут возможные значения ξ и η . После этого по фор-

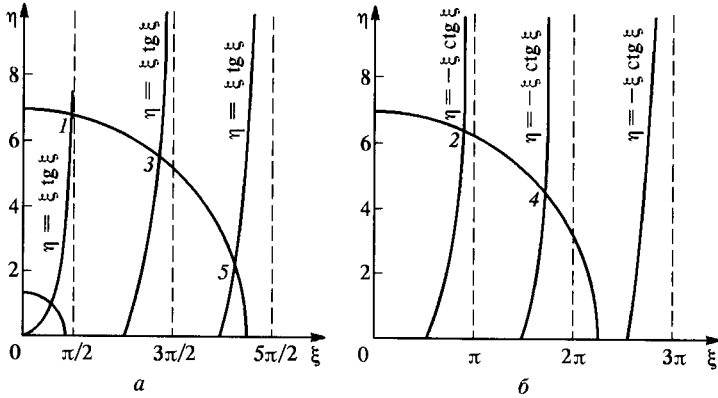


Рис. 145

мулам (3) легко найти значения ξ . Число уровней всегда конечно и определяется глубиной U_0 и шириной $2a$ потенциальной ямы. Например, если

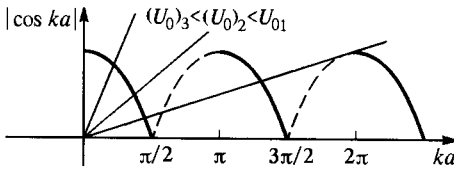


Рис. 146

Следует еще раз подчеркнуть, что в симметричной одномерной яме при любой ее глубине и ширине всегда есть хотя бы один уровень, отвечающий

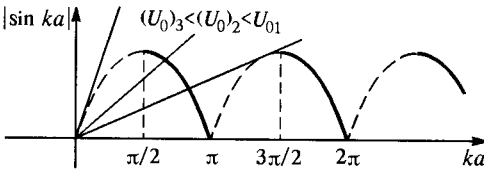


Рис. 147

четной ψ -функции. Аналогично обстоит дело в двумерном случае. Принципиально по-другому обстоит дело в случае трехмерной потенциальной прямоугольной ямы

радиус окружности равен 7, то получается пять уровней. Точкам пересечения 1, 3, 5 соответствуют четные, а точкам 2, 4 — нечетные волновые функции. Если $0 \leq U_0 a^2 \leq \hbar^2 \pi^2 / 8m$, то имеется только одна точка пересечения, которой соответствует четная волновая функция.

(задача 3.16*), где уровень есть не всегда.

Дадим также другой способ

решения уравнений (4) и (5). Рассмотрим четное решение $k \operatorname{tg} ka = \alpha$, откуда $1 + \operatorname{tg}^2 ka = \frac{\alpha^2 + k^2}{k^2}$;

$$\frac{1}{\cos^2 ka} = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2} \frac{1}{(ka)^2}; \quad |\cos ka| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}} ka.$$

При этом (т. к. $\operatorname{tg} ka > 0$) годятся те четверти, где $\sin ka$ и $\cos ka$ имеют одинаковые знаки.

Для нечетного решения получаем

$$|\sin ka| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} ka, \quad \text{и т. к.}$$

$\operatorname{ctg} ka < 0$, то годятся те четверти, где $\sin ka$ и $\cos ka$ имеют разные знаки. Графическое решение полученных уравнений изображено на рис. 146 и 147.

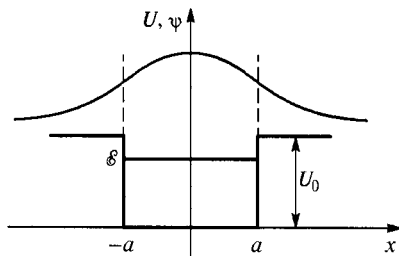


Рис. 148

Видно, что в зависимости от величины U_0 (при данном a) или a (при данном U_0) в случае четной ψ -функции хотя бы одно решение есть всегда! Это будет иметь место при

$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} > \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$, или $U_0a > \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}$. При дальнейшем уменьшении U_0 уровень поднимается к потолку ямы, но частица из ямы не вылетает (рис. 148)!

$$3.13. \quad \mathcal{E}_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{4mb^2} \frac{N(N+2)(N+1)}{6}; \quad F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^3} \frac{N(N+2)(N+1)}{6}.$$

$$3.14. \quad \text{Вообще } v > \frac{\pi\hbar}{mdl} \sqrt{d^2 + l^2}. \quad \text{При } d \ll l \quad v_{\min} = \frac{\pi\hbar}{md} \approx 2 \text{ см/с.}$$

При $d = l$ (квадратное сечение канала) $v_{\min} = \frac{\sqrt{2}\pi\hbar}{md} \approx 2,8 \text{ см/с.}$

$$3.15. \quad t = 0,065 \text{ с.}$$

3.16. Решение. В сферической системе координат уравнение Шредингера для стационарных состояний с волновыми функциями, зависящими только от r , имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} [\mathcal{E} - U(r)] \psi = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения должно быть конечным при $r = 0$ и достаточно быстро убывать при $r \rightarrow \infty$ (чтобы $\int |\psi|^2 dV$ сходилась). Введем новую функцию $\chi = r\psi$. Тогда

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [\mathcal{E} - U(r)] \chi = 0. \quad (2)$$

Надо найти решения этого уравнения, убывающие при $r \rightarrow +\infty$ и обращаемые в нуль при $r = 0$. Это будут

$$\chi = B \sin kr \quad \text{при } r \leq a,$$

$$\chi = Ce^{-\alpha r} \quad \text{при } r \geq a,$$

где

$$k = +\sqrt{\frac{2m(\mathcal{E} + U_0)}{\hbar^2}}, \quad \alpha = +\sqrt{-\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}. \quad (3)$$

Задача свелась к задаче об одномерной потенциальной яме — уровни энергии определяются точно так же, надо только отбросить состояния с четными и сохранить состояния лишь с нечетными волновыми функциями.

3.17. Решение задачи сводится к решению трансцендентного уравнения

$$|\sin ka| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} ka, \text{ где } k^2 = \frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}, \text{ (см. рис. 149).}$$

Минимальная «мощность» $U_0 a^2$ ямы, при которой появляется первый уровень, $U_0 a^2 = \pi^2 \hbar^2 / (8m)$. При этом энергия уровня ($ka = \pi/2$) равна $\mathcal{E} = 0$, т. е. уровень лежит на «потолке» ямы. При увеличении U_0 или a уровень опускается в яму. Из рис. 149 видно, что второй уровень появится при $\alpha = \frac{2}{3\pi}$; третий — при $\text{tg } \alpha = \frac{2}{5\pi}$ и т. д. Итак, $U_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$.

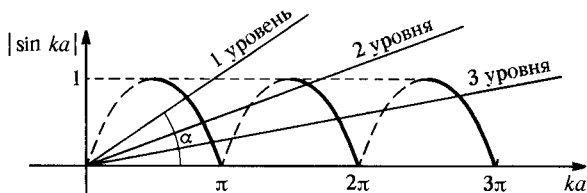


Рис. 149

3.18. $U_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu a^2} + \mathcal{E} \approx 42 \text{ МэВ}$, где $\mu = \frac{m_p}{2}$. Это довольно грубая оценка.

Точное решение трансцендентного уравнения дает $U_0 \approx 53 \text{ МэВ}$. Смотрите задачу 3.17.

3.19. $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^4}{8m^2 a^2 U_0^2}$; $\langle p^2 \rangle = \frac{4m^2 a^2 U_0^2}{\hbar^2}$; $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^4}{2}$.

3.20* $\langle z \rangle \approx \frac{2a}{\pi^2 \delta} \approx 20a = 100 \text{ \AA}$, где $\delta = 0,01$ (точное значение $\langle z \rangle = \frac{4a}{\sqrt{2}\pi^2 \delta} \approx 140 \text{ \AA}$).

Решение. Разобьем область нахождения атома гелия на две части: *I* — внутри потенциальной ямы ($0 < z \leq a$) и *II* — вне ее при $z > a$. В области *I*:

$$\psi_I'' + k^2 \psi_I = 0, \text{ где } k = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar}. \quad (1)$$

Решение этого дифференциального уравнения очевидно:

$$\psi_I(z) = \sin kz, \text{ поскольку при } z = 0 \text{ должно быть } \psi_I(0) = 0.$$

В области *II*:

$$\psi_{II}'' - \kappa^2 \psi_{II} = 0, \text{ где } \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - \mathcal{E})}. \quad (2)$$

Решение последнего уравнения

$$\psi_{II}(z) = Ae^{-\kappa z},$$

где A — нормировочная константа. Заметим, что формальным решением этого уравнения могла бы быть положительная экспонента $\propto \exp(\kappa z)$. Но тогда при $z \rightarrow \infty$, $\psi(z) \rightarrow \infty$, что не имело бы физического смысла.

На границе областей, т. е. при $z = a$ необходима гладкая сшивка ψ -функций:

$$\psi_I(a) = \psi_{II}(a), \text{ т. е. } \sin ka = Ae^{-\kappa a};$$

$$\psi'_I(a) = \psi'_{II}(a), \text{ т. е. } k \cos ka = -A\kappa e^{-\kappa a}.$$

Откуда следует

$$\operatorname{ctg} ka = -\frac{\kappa}{k}. \quad (3)$$

По условию волновая функция адсорбированного атома в основном состоянии достигает максимума при $z = z^* = 0,99a = (1 - \delta)a$, где $\delta = 0,01$. Максимум лежит в области I , т. е.

$$\psi_I(z^*) = \sin kz^* = 1, \text{ откуда } kz^* = \frac{\pi}{2},$$

и откуда определим k :

$$k = \frac{\pi}{2z^*} = \frac{\pi}{2(1-\delta)a} \approx \frac{\pi}{2a} (1 + \delta).$$

Вычислим

$$\operatorname{ctg} ka = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\delta}{2}\right)} = -\sin\frac{\pi\delta}{2} \approx -\frac{\pi\delta}{2}.$$

Из соотношения (3) определим κ :

$$\kappa = -k \operatorname{ctg} ka \approx k \frac{\pi\delta}{2} = \frac{\pi^2}{4a} \delta \approx 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}.$$

По определению

$$\langle z \rangle = \frac{\int_0^a z \sin^2 kz \, dz + \int_a^\infty A^2 e^{-2\kappa z} z \, dz}{\int_0^a \sin^2 kz \, dz + \int_a^\infty A^2 e^{-2\kappa z} \, dz}.$$

Но интегралами по области I можно пренебречь в силу их малого вклада, одновременно расширив область интегрирования в области II до 0. Действительно,

$$\frac{\int_0^\infty z e^{-2\kappa z} \, dz}{\int_0^\infty e^{-2\kappa z} \, dz} = \frac{1}{2\kappa}, \text{ но } \frac{\int_a^\infty z e^{-2\kappa z} \, dz}{\int_a^\infty e^{-2\kappa z} \, dz} = \frac{1 + 2\kappa a}{2\kappa}. \text{ Так как } 2\kappa a \approx 10^{-2}, \text{ то}$$

это очень близкие выражения. Поэтому

$$\langle z \rangle \approx \frac{\int_0^\infty z e^{-2\kappa z} \, dz}{\int_0^\infty e^{-2\kappa z} \, dz} = \frac{1}{2\kappa} = \frac{2a}{\pi^2 \delta} \approx 20a = 100 \text{ \AA}.$$

На рис. 150 приведен график зависимости $|\psi(z)|^2$. Хотя максимум ψ -функции и лежит внутри потенциальной ямы, но среднее значение координаты $\langle z \rangle$ — далеко за ее пределами, поскольку ψ -функция крайне медленно спадает при $z > a$. Точное интегрирование дает

$$\langle z \rangle = \frac{2\sqrt{2}a}{\pi^2 \delta} \approx 140 \text{ \AA}.$$

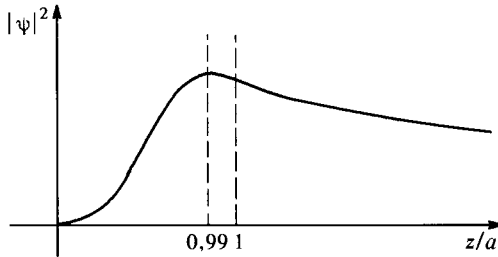


Рис. 150

3.21. $U_0 = 4 \text{ К}$, $\langle z \rangle \approx \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{2\kappa} \approx 7 \text{ \AA}$.

Здесь $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}_1}$; $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - \mathcal{E}_1)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}$; $\mathcal{E}_1 = U_0 - \mathcal{E}$. Расчет показывает, что $\langle z \rangle \approx 5,4 \text{ \AA}$, т. е. «в среднем» атом находится не вне ямы, а все-таки внутри нее.

3.22. $U_0 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{9ma^2} = 16,6 \text{ эВ}$; $\mathcal{E} = \frac{\pi^2\hbar^2}{6ma^2} = 12,45 \text{ эВ}$.

3.23. $U_0 = \frac{8\pi^2\hbar^2}{27ma^2} = 5,53 \text{ эВ}$; $\mathcal{E} = \frac{U_0}{4} = 1,38 \text{ эВ}$.

3.24*. Решение. Энергия частицы m , находящейся в одномерной потенциальной яме шириной a , квантуется

$$\mathcal{E}_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2.$$

При переходе частицы из состояния $n + 1$ в состояние n излучается квант энергии с частотой

$$\omega_{n+1, n} = \frac{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n}{\hbar} = \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2} (2n + 1).$$

Классическая частица колеблется в яме с частотой $\omega_{\text{кл}} = 2\pi/T$, где $T = 2a/v$, где в свою очередь v — скорость частицы при движении от стенки к стенке — определяется ее энергией. Для сравнения примем значение энергии равным E_n . Тогда

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_n}{m}} = \frac{\pi\hbar n}{ma}; \quad \omega_{\text{кл}} = \frac{\pi v}{a} = \frac{\pi^2\hbar n}{ma^2}.$$

Теперь сравним $\omega_{n+1, n}$ с $\omega_{\text{кл}}$:

$$\frac{\omega_{n+1, n}}{\omega_{\text{кл}}} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Эта задача является иллюстрацией принципа соответствия Бора. При больших значениях квантовых чисел квантово-механическое поведение системы переходит в классическое.

3.25. Решение. Запишем уравнение Шредингера в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad (1)$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} - U). \quad (2)$$

В области *I* волновая функция частицы состоит из падающей волны

$$\psi_1 = e^{i(k_1x - \omega t)}$$

и отраженной

$$\psi'_1 = r e^{-i(k_1x + \omega t)},$$

а в области *II* — из прошедшей волны

$$\psi_2 = d e^{i(k_2x - \omega t)},$$

где индексами 1 и 2 отмечены волновые векторы в областях *I* и *II* соответственно. Амплитуда падающей волны принята равной единице, что, очевидно, не нарушает общности получаемых ниже результатов. Волновая функция и ее производная по *x* на границе раздела должны быть непрерывны. Это приводит к соотношениям

$$1 + r = d, \quad k_1 - k_1 r = k_2 d,$$

из которых находим

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad d = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (3)$$

1) Если $\mathcal{E} > U_2$, то волна ψ_2 однородна, так же как падающая волна ψ_1 и отраженная ψ'_1 . Вычислим плотности потоков вероятностей для отраженной волны

$$j_r = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi'_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} - \psi_1^* \frac{d\psi'_1}{dx} \right] = \frac{i\hbar}{2m} [r^2 i k_1 + r^2 i k_1] = -r^2 \frac{\hbar k_1}{m}$$

и для прошедшей волны

$$j_d = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi_2 \frac{d\psi_2^*}{dx} - \psi_2^* \frac{d\psi_2}{dx} \right] = d^2 \frac{\hbar k_2}{m}.$$

Плотность потока вероятностей для падающей волны $j_e = \hbar k_1 / m = v_1$ (равна скорости частицы, налетающей на барьер). Вычислим энергетические коэффициенты отражения *R* и прохождения *D*:

$$R = \left| \frac{j_r}{j_e} \right| = |-r^2| = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2;$$

$$D = \left| \frac{j_d}{j_e} \right| = \frac{k_2}{k_1} d^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (4)$$

Величины этих коэффициентов находятся в согласии с законом сохранения энергии: $R + D = 1$.

2) Если $\mathcal{E} < U_2$, то k_2 — чисто мнимое, т. е. волна во второй области неоднородна. В этом случае $R = 1$, т. е. отражение полное. Полагая $k_2 = i\alpha$, для волны во второй области получим

$$\psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-\alpha x} e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

т. е. амплитуда волны в области II экспоненциально затухает при удалении от границы раздела областей.

Глубина проникновения l определяется как расстояние, на котором плотность потока энергии убывает в e раз. Для нее получаем

$$l = \frac{1}{2} \alpha = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_2 - \mathcal{E})}}, \quad (6)$$

3.26. $N \approx \frac{1}{D} \approx \frac{1}{4} \sqrt{\frac{v_0}{v - v_0}} = 2,5$, где D — коэффициент прохождения.

Примечание. Видно, что число ударов очень мало, т. е. здесь состояние «слабо стационарное», и обычно используемое выражение для числа ударов через коэффициент отражения плоской волны от барьера в данном случае является очень грубой оценкой, дающей представление лишь о порядке величины числа отражений.

3.27. $\tau \approx (nD)^{-1} \approx \frac{a}{4} \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \sim 10^{-15}$ с, где $n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$ — частота ударов о стенки ямы; $D = 4 \frac{\sqrt{\mathcal{E}(U_0 + \mathcal{E})}}{(\sqrt{U_0 + \mathcal{E}} + \sqrt{\mathcal{E}})^2} \approx 4 \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{U_0}}$ — коэффициент прохождения. См. также примечание к ответу предыдущей задачи.

3.28. $R \approx \sqrt{\frac{\pi \hbar^2}{8\sigma m}} \approx 20 \text{ \AA}$, см. также решение задачи 3.16.

3.29. $l = 0,56 \text{ нм}$.

3.30. Решение. В области I ($x < 0$) $\psi_I = e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x}$, где $k_1^2 = 2m(\mathcal{E} - U_1)/\hbar^2$. В области барьера ($0 < x < l$) $\psi = a e^{ikx} + b e^{-ikx}$, где $k^2 = 2m(\mathcal{E} - U)/\hbar^2$. В области II ($x > l$) $\psi_{II} = d e^{ik_2 x}$, где $k_2^2 = 2m(\mathcal{E} - U_2)/\hbar^2$.

Сшивая волновые функции и их производные в точках $x = 0$ и $x = l$, получим систему уравнений относительно r , d , a и b :

$$\begin{aligned} 1 + r &= a + b; & a e^{ikl} + b e^{-ikl} &= d e^{ik_2 l}; \\ k_1 - k_1 r &= ka - kb; & ka e^{ikl} - kb e^{-ikl} &= k_2 d e^{ik_2 l}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} r &= \frac{(k_1 - k)(k + k_2) + (k_1 + k)(k - k_2) e^{2ikl}}{(k_1 + k)(k + k_2) + (k_1 - k)(k - k_2) e^{2ikl}}, \\ d &= \frac{4k_1 k e^{-i(k_2 - k)l}}{(k_1 + k)(k + k_2) + (k_1 - k)(k - k_2) e^{2ikl}}. \end{aligned}$$

В случае, когда энергия частицы ниже высоты барьера, т.е. $\mathcal{E} < U$, волновая функция в области барьера имеет вид $\psi = ae^{-\kappa x} + be^{\kappa x}$, где $\kappa^2 = 2m(U - \mathcal{E})/\hbar^2$, и в этом случае в формулах для r и d нужно провести замену $k \rightarrow i\kappa$. Таким образом, поскольку в области II мы по-прежнему имеем прошедшую плоскую волну, то получаем важный вывод — квантово-механическая частица может проходить сквозь барьер даже в том случае, когда ее энергия меньше высоты барьера («туннельный эффект»).

3.31. Полная энергия \mathcal{E} должна быть больше потенциальной энергии U частицы внутри барьера (ямы). Толщина барьера (ямы) должна быть $l = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, 2\lambda, 5\lambda/2, \dots$, где $\lambda = h/\sqrt{2m(\mathcal{E} - U)}$ — длина волны де Бройля частицы в области барьера (ямы), или, иначе, $l = \pi\hbar p/\sqrt{2m(\mathcal{E} - U)}$ и одновременно $\mathcal{E} = U + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} p^2$, где $p = 1, 2, \dots$, т.е. энергия частицы должна совпадать с одним из собственных значений энергии в бесконечно глубокой потенциальной яме, дно которой расположено на высоте барьера.

$$\mathbf{3.32.} \quad \mathcal{E}_n = U + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{или в числах} \quad \mathcal{E}_n = (5 + 37,62n^2) \text{ эВ.}$$

$$\mathbf{3.33.} \quad R \approx \frac{h}{4\sqrt{2m(\mathcal{E} + U)}} \approx 1,7 \text{ \AA. (Табличное значение } R = 1,98 \text{ \AA).}$$

$$\mathbf{3.34.} \quad U = \frac{\mathcal{E}}{\sin^2 kd} = 1,64 \text{ эВ, где } k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}} = 6,22 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}.$$

$$D \approx \exp(-18\kappa d) \approx 3,2 \cdot 10^{-5}, \text{ где } \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - \mathcal{E})} \approx 1,9 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1};$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{nD} \approx 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ с, где } n = \frac{1}{2d} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} \approx 1,22 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

$$\mathbf{3.35.} \quad \tau = \frac{1}{nD} \approx 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ с, где } D \approx \exp(-598a\kappa) \approx 8,3 \cdot 10^{-5}, \quad \kappa = \sqrt{2m(U - \mathcal{E})}/\hbar \approx 5,08 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}, \quad a = 3 \text{ \AA}.$$

3.36. Решение. На рис. 151 обозначен подбарьерный переход α -частицы с энергией \mathcal{E} . Так как заряд α -частицы $Z_\alpha = 2$, то оставшаяся часть ядра имеет заряд $Z' = Z - Z_\alpha = Z - 2$. $U(r) = Z'Z_\alpha e^2/r$. По условию $\mathcal{E} \ll U(R)$. Вычислим коэффициент прозрачности барьера по известной формуле

$$D \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{2m \left(\frac{Z'Z_\alpha e^2}{r} - \mathcal{E} \right)} dr \right\}.$$

В подынтегральном выражении можно пренебречь \mathcal{E} в силу указанного в условии неравенства. Вычислим этот интеграл

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{2m \frac{Z'Z_\alpha e^2}{r}} dr = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mZ'Z_\alpha e^2} \int_R^{R_1} r^{-1/2} dr = \\ &= -\frac{4}{\hbar} \sqrt{2mZ'Z_\alpha e^2} R_1 \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R}} \right). \end{aligned}$$

Из рис. 151 видно, что $\frac{Z'Z_\alpha e^2}{R_1} = \mathcal{E}$, откуда $R_1 = \frac{Z'Z_\alpha e^2}{\mathcal{E}}$.

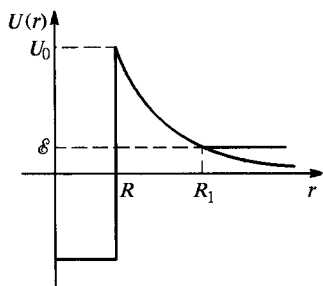


Рис. 151

Подставляя это в формулу для I , получаем

$$I \approx -\frac{4}{\hbar} Z'Z_\alpha e^2 \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}}},$$

где использовано очевидное неравенство $R_1 \gg R$, справедливое в силу заданного условия $\mathcal{E} \ll U(R)$. Таким образом,

$$D \approx \exp\left(-\frac{4}{\hbar} Z'Z_\alpha e^2 \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}}}\right) = \exp\left(-\frac{A}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right).$$

Для приближенной оценки вероятности распада в единицу времени (постоянной распада) λ необходимо прежде всего оценить число столкновений α -частицы с потенциальной стенкой за 1 с: $n \approx v/(2R)$, где v — скорость α -частицы внутри ядра, которую оценим из соотношения неопределенностей:

$$v = \frac{p}{m_\alpha} \approx \frac{\hbar}{m_\alpha R}; \quad n \approx \frac{v}{2R} \approx \frac{\hbar}{2m_\alpha R^2}.$$

Вероятность распада в единицу времени

$$\lambda \approx nD \approx \frac{\hbar D}{2m_\alpha R^2}.$$

Период полураспада T ядра, как известно, равен

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{2m_\alpha R^2 \ln 2}{\hbar D} \approx a \exp\left(-\frac{b}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right),$$

где a и b — очевидные константы. Прологарифмировав это выражение, получим закон Гейгера — Неттола

$$\lg T \approx A + \frac{B}{\sqrt{\mathcal{E}}}.$$

3.37* Решение. Оценка изменения туннельного тока может быть проведена при рассмотрении одномерной задачи (рис. 152). Обратим внимание, что на такой энергетической диаграмме потенциальная энергия электронов возрастает снизу вверх, а потенциал поля — наоборот.

Очевидно, что туннельный ток пропорционален прозрачности барьера, изображенного на рис. 152.

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \sqrt{2m(A_2 + eEx)} dx\right],$$

где напряженность электрического поля $E = (A_1 - A_2 - eV)/d$. Интеграл в показателе экспоненты легко вычисляется:

$$\frac{2}{\hbar} \int_0^d \sqrt{2m(A_2 + eEx)} dx = \frac{4}{3\hbar} \frac{\sqrt{2m}}{eE} [(A_2 + eEd)^{3/2} - A_2^{3/2}].$$

Следовательно, прозрачность барьера

$$D = D_0 \exp \left\{ -\frac{4}{3\hbar} \frac{\sqrt{2m}d}{(A_1 - A_2 - eV)} [(A_1 - eV)^{3/2} - A_2^{3/2}] \right\}.$$

При перемещении иглы над ступенькой высотой b в полученном выражении следует заменить d на $d - b$. Таким образом, ток \mathcal{J} возрастет в

$$\frac{\mathcal{J}(d-b)}{\mathcal{J}(d)} = \exp \left\{ \frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar(A_1 - A_2 - eV)} [(A_1 - eV)^{3/2} - A_2^{3/2}]b \right\} = e^{2,08} \approx 8 \text{ раз.}$$

3.38. Ток уменьшится: $\frac{\mathcal{J}'}{\mathcal{J}} = e^{-0,82} \approx 0,44$.

3.39. $\delta\mathcal{J} = 0,27 \text{ нА}$.

3.40. $D \approx \exp \left(-\frac{4e}{\hbar} \sqrt{2\mu} R_2 \right) \approx e^{-234,7} \approx 10^{-102}$, где $\mu = \frac{m_D}{2} = m_p$ — приведенная масса системы из двух дейтронов.

3.41. $D \approx \exp \left(-\frac{\pi a \sqrt{2m}(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar \sqrt{U_0}} \right) = \exp \left(-2\pi \frac{U_0 - \mathcal{E}}{\hbar \omega} \right)$, где \mathcal{E} — энергия возбуждения ядра, a — координата классической точки поворота.

3.42. $f = \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^2 = \frac{1}{1 + (U_0/\mathcal{E}) \cos^2 k_1 a}$, где $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} + U_0)$, A_1 — максимальное значение ψ -функции в области $0 < x \leq a$; A_2 — в области $a \leq x < b$.

При $U_0 \gg \mathcal{E}$ величина $f \rightarrow 0$ при всех \mathcal{E} , кроме «резонансных» значений (когда $\cos k_1 a = 0$). При этом $\mathcal{E}_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - U_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $f = 1$.

3.43. Решение. Атом гелия участвует во вращательном движении. Момент импульса этого движения квантуется

$$m_{\text{He}} v r = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

По условию, если v — скорость атомов гелия в вихре, то $v r = K$ — интенсивность вихря. Откуда

$$K = \frac{\hbar}{m_{\text{He}}} n; \quad K_{\min} = \frac{\hbar}{m_{\text{He}}} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с.}$$

3.44. $v(r) = \frac{n\hbar}{m_{\text{He}} r}$.

3.45. $L_{\min} = \lambda/4$.

3.46. $L_{\min} = \lambda/4$.

3.47. Энергия связи $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 a^2}{8ma^2} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$, $U - \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 a^2}{4ma^2} = 7,63 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Глубина потенциальной ямы $U = (U - \mathcal{E}) + \mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{4ma^2} \left(a + \frac{a^2}{2} \right) = 8 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$.

3.48. $\mathcal{E}_{\text{св}} = U_0 - \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 a^2}{2ma^2} = 123 \text{ кэВ}$.

3.49. $\frac{a}{a'} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \approx 1,54$, где a' — ширина «сжатой» ямы.

3.50. $\frac{U_0}{U'_0} = \frac{9}{2} = 4,5$, где U'_0 — измененная высота ямы.

3.51. $\Gamma \approx \frac{\hbar D}{2a} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} = 3,6 \cdot 10^{-5}$ эВ, где проникаемость возникающего барьера треугольной формы (рис. 153). $D \approx \exp \left[-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}}{\hbar e E} (U_0 - \varepsilon) \right] \approx 7,8 \cdot 10^{-5}$.

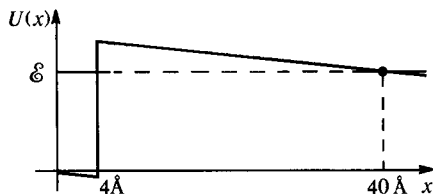


Рис. 153

Параметры задачи подобраны так, что в яме есть только один уровень: $\sin ka = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}} ka = 0,488ka$, откуда $ka = 1,92$. Величина $eEa = 0,012$ эВ $\ll U_0 - \varepsilon = 0,12$ эВ.

3.52. $\tau \approx \frac{4a}{vD} = \frac{4a}{D} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \approx 10^{-6}$ с, где проникаемость возникающего барьера треугольной формы $D \approx \exp \left[-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}}{\hbar e E} (U_0 - \varepsilon) \right] \approx 1,45 \cdot 10^{-9}$.

Параметры задачи подобраны так, что в яме есть только один четный уровень: $\cos ka = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2}} ka = 1,94ka$, откуда $ka = 0,46$.

§ 4. Атом водорода и водородоподобные атомы

4.1* Решение. Пусть частица локализована вблизи силового центра внутри сферы, радиус которой r . Ее потенциальная энергия будет порядка $-C/r^s$. Неопределенность координаты будет порядка r , а, следовательно, неопределенность импульса — порядка \hbar/r . Такого же порядка будет и сам импульс. Следовательно, средняя кинетическая энергия будет порядка \hbar^2/mr^2 , а полная энергия

$$\mathcal{E} \sim \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{C}{r^s}.$$

Если $s > 2$, то \mathcal{E} может принимать сколь угодно большие отрицательные значения. Но в таком случае должны существовать и уровни энергии со

сколь угодно большими по абсолютной величине отрицательными значениями \mathcal{E} — произойдет падение частицы на силовой центр. Если же $s < 2$, то сколь угодно большие по абсолютной величине значения \mathcal{E} невозможны, поэтому невозможно падение на силовой центр и возможно образование связанного состояния с $\mathcal{E} < 0$.

4.3. $\frac{r^3}{T^2} = \frac{e^2}{4\pi^2 m} = \text{const.}$ (Классический закон Кеплера в системе Солнце—Земля $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M_C}{4\pi^2} = \text{const.}$).

4.4. $\psi \propto e^{-\alpha r}$, где $\alpha = \frac{mZe^2}{\hbar^2} = \frac{1}{r_1}$, r_1 — радиус первой боровской орбиты водородоподобного атома, а функция ψ — с точностью до нормировочной константы — описывает основное состояние водородоподобного атома ($\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$). $\mathcal{E}_1 = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2}$.

4.5. $|\psi|^2 = \frac{q^2}{4\pi} e^{-qr}$, где $q = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}$.

4.6. $4\pi r^2 |\psi|^2 = q^3 r^2 e^{-qr}$, где $q = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}$. Эта величина максимальна при $r = \frac{2}{q} = \frac{\hbar^2}{mZe^2} = r_1$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.7. $\langle r \rangle = \frac{3}{2} r_1$.

4.8. $\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{1}{r_1}$.

Примечание. Здесь можно обойтись без интегралов. Достаточно использовать теорему вириала для кулоновского поля

$$2\langle T \rangle = -\langle U \rangle, \text{ откуда:}$$

$$\mathcal{E}_n = \langle T \rangle + \langle U \rangle, \text{ и при } n = 1$$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{e^2}{2r_1} = -\frac{1}{2} \langle U \rangle = e^2 \langle \frac{1}{r} \rangle.$$

Таким образом,

$$\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{1}{r_1}.$$

4.9. $\langle U \rangle = -\frac{Ze^2}{r_1}$; $\langle T \rangle = \frac{Ze^2}{2r_1} = -\frac{\langle U \rangle}{2}$. (См. примечание к ответу задачи 4.8.)

4.10. $\alpha = -\frac{me^2}{2\hbar^2}$; $\beta = \frac{me^2}{2\hbar^2}$; $\mathcal{E} = -\frac{me^4}{8\hbar^2}$, откуда $n = 2$.

Поскольку $\psi = \psi(r)$, то $l = 0$. Это $2s$ — состояние. Если $\alpha = 0$, то это основное состояние $1s$; при этом $\beta = \frac{1}{r_1} = \frac{me^2}{\hbar^2}$; $n = 1$; $\mathcal{E} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$. См. также решение задачи 3.10.

4.11. $R > 2 \frac{m_H}{m_e} \approx 3700$; $b > \frac{R}{dn/d\lambda} \approx 3,7$ см.

4.12. Разрешающая способность должна быть не меньше $\frac{3}{2} \frac{m_p}{m_e} \approx 2800$. Она одинакова для всех линий спектральных серий смеси. Разрешающая способность призмы $b \frac{dn}{d\lambda} = 1000$, т. е. недостаточна для разрешения. Для интерферометра Фабри—Перо должны выполняться неравенства:

$$m < \frac{3}{2} \frac{m_p}{m_e} < N_{\text{эфф}} m.$$

4.13. Требуемая разрешающая способность $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{2m_p}{m_e} \approx 3700$. Она одинакова для всех линий серии, $N > \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1850$.

4.14. $N \approx \frac{m^3}{8} \approx 3400$ штрихов.

4.15. $d_{\min} = \frac{\lambda_H \lambda_D}{2(\lambda_D - \lambda_H)} \frac{1}{n_e - n_o} \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \frac{1}{n_e - n_o} = 13,24 \text{ см}, \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx \frac{2m_p}{m_e} \approx 3700$.

4.16. $L_{\min} = \frac{M_1 M_2}{(M_2 - M_1)m_e} \frac{\hbar c}{W} \frac{1-r}{\sqrt{r}} = 1,37 \text{ см}.$

4.17. $r_1 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_\mu Z} \approx \frac{1}{Z} \cdot 0,0026 \cdot 10^{-8} \text{ см},$ что примерно в 200 раз меньше

соответствующего значения r_1 для водородоподобного иона с тем же значением заряда ядра Z . Результат получен в предположении, что K -орбита мюона проходит вне ядра. Электронная оболочка практически не оказывает влияния на этот результат, так как из-за сферической симметрии электронного облака создаваемое им электрическое поле в месте нахождения мюона считается равным нулю. В том же предположении

$$\mathcal{E}_n = - \frac{m_\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \approx -2810 \frac{Z^2}{n^2} \text{ эВ}.$$

Отсюда видно, что излучение, возникающее при переходе мюона на K -орбиту с более высоких орбит, будет расположено в рентгеновской области спектра, а при больших Z — в области γ -лучей. При больших Z K -орбита мюона проходит внутри ядра атома. В этом случае приведенные выше формулы становятся неприменимыми. Результаты сильно зависят от распределения электрического заряда в ядре, с чем и связана возможность использования мезоатомов для изучения распределения электрического заряда в атомном ядре.

4.18. $\mathcal{E}_n = - \frac{\hbar c}{2n^2} R_\infty, \mathcal{E}_\text{и} = -\mathcal{E}_1 = \frac{\hbar c}{2} R_\infty = 6,80 \text{ эВ}, \lambda_{\text{рез}} = \frac{8}{3R_\infty} =$
 $= 243,0045 \text{ нм},$ где постоянная Ридберга $R_\infty = 109737,3 \text{ см}^{-1}$.

4.19. $\mathcal{E}_\text{и} = 6,8 \text{ эВ}$ (для позитрония); $\mathcal{E}_\text{и} = 2,6 \text{ кэВ}$ (для мюония).

4.20. $\Delta\mathcal{E} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) \approx 125 \text{ эВ},$ где $\mu = \frac{m_\mu m_p}{m_\mu + m_p}$ — приведенная масса мезоатома; $r_\mu = \frac{m_e}{m_\mu} r_1 = 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ см},$ где $r_1 = 0,53 \text{ \AA}$ — радиус первой бортовой орбиты в атоме водорода.

$$4.21. v_{\mu} \approx \frac{Ze^2}{\hbar} = Z\alpha c = 2,3 \cdot 10^9 \text{ см/с}; \quad r_{\mu} = \frac{m_e}{Z(m_{\mu})_{\text{прив}}} r_1 \approx 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ см},$$

где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры.

$$4.22. \mu_{\pi} c^2 \approx 137 \text{ МэВ}, \text{ где } \mu_{\pi} = \frac{m_{\pi} m_{\text{я}}}{m_{\pi} + m_{\text{я}}} \approx m_{\pi} \text{ — приведенная масса мезоатома, } m_{\pi} \text{ — масса пиона, } m_{\text{я}} \text{ — масса ядра. } r_{\pi 3} \approx \frac{9m_e}{m_{\pi} Z} r_1 \approx 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

$$4.23. |\mathcal{E}_1| = \frac{\gamma^2 m_n^2}{4\hbar^2} \sim 10^{-83} \text{ эрг}; \quad r_1 = \frac{2\hbar^2}{\gamma m_n^3} \sim 10^{28} \text{ см.}$$

Размер «бинейтронного атома» так велик, что неучет действия других масс Вселенной, очевидно, совершенно недопустим.

$$4.24. r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e \gamma m_n}; \quad r_2 \approx 4 \cdot 10^{31} \text{ см, где } n = 1, 2, 3, \dots \text{ — главное квантовое число.}$$

$$4.25. V_{\text{He}} = 4V_{\text{H}} = 54,4 \text{ В}; \quad V_{\text{Li}} = 9V_{\text{H}} = 122,4 \text{ В.}$$

$$4.26. \mathcal{E}_{\text{Be}} = Z^2 eV_{\text{H}} = 217,6 \text{ эВ.}$$

$$4.27. \mathcal{E} = 78,9 \text{ эВ.}$$

$$4.28. \langle \mathcal{E}_2 \rangle = \langle T \rangle + \langle U_2 \rangle = -40,8 \text{ эВ, где } \langle T \rangle = 13,6 \text{ эВ, } \langle U_2 \rangle = -\left\langle \frac{2e^2}{r} \right\rangle = -\frac{2e^2}{r_{\text{Б}}} = -54,4 \text{ эВ. Здесь усреднение идет по волновой функции атома трития.}$$

$$4.29^*. \text{ Вклад сильного взаимодействия } \Delta \mathcal{E} = 0,7 \text{ кэВ.}$$

Решение. Прежде всего, определим энергию излучения протонииума, определяемую исключительно кулоновским взаимодействием, возникающим между протоном p и антипротоном \bar{p} . Связанная система $(p\bar{p})$ аналогична позитронику. Поэтому для расчета кулоновского взаимодействия можно использовать результат задачи 4.18 с заменой массы электрона на массу протона. Это дает уровни энергии протонииума

$$\mathcal{E}_n = -\frac{m_p e^4}{2\hbar^2 n^2} = -Ry \frac{m_p}{m_e} \frac{1}{n^2} \approx -12,5 \frac{1}{n^2} \text{ кэВ.}$$

Следовательно, вклад кулоновского взаимодействия в энергию перехода $2p \rightarrow 1s$ в атоме протонииума составляет

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = 12,5 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 9,4 \text{ кэВ.}$$

Расхождение с экспериментальным значением обусловлено вкладом сильного взаимодействия. Таким образом,

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{сил}} = \Delta \mathcal{E}_{\text{экс}} - \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = 10,1 - 9,4 \approx 0,7 \text{ кэВ.}$$

В силу короткодействия ядерных сил их влияние на положение $2p$ -состояния незначительно по сравнению с $1s$ -состоянием, поскольку в кулоновском потенциале вероятность частице в $2p$ -состоянии попасть в окрестность начала координат близка к нулю.

$$4.30. \frac{g^2}{\hbar c} = \frac{r_B^3 |\delta \mathcal{E}|}{4\hbar c r_0^2} \approx 0,27. \text{ Сравните с 10.59 и 10.60.}$$

$$4.31. T = 2\mathcal{E}_H = 27,2 \text{ эВ, где } \mathcal{E}_H \text{ — энергия ионизации атома водорода.}$$

$$4.32. \frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{h v_0}{2m_{ат} c^2} = \frac{3}{16} \frac{m_e}{m_{ат}} \alpha^2 = 5,44 \cdot 10^{-9}; \quad v = \frac{3}{8} \frac{m_e}{m_{ат}} \alpha^2 c = 326 \text{ см/с,}$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

4.33. Водородная лампа должна удаляться от дейтериевой со скоростью $v \approx 82$ км/с.

4.34. Угол конуса разлета γ -квантов отличается от развернутого на $\alpha \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$ рад.

$$4.35. v_e = v_e^- = \frac{e^2}{2\sqrt{2} \hbar} \approx 8 \cdot 10^7 \text{ см/с (угол разлета } \approx 180^\circ).$$

$$4.36^*. \Delta\varphi = \frac{m_e e^2 \lambda}{4\pi \hbar^2} \approx 0,15 \text{ рад } \approx 10^\circ.$$

Решение. Разброс в углах разлета электронов происходит из-за наличия перпендикулярно направленной импульсу фотона составляющей импульса электрона; ее наличие связано с движением электронов в атоме. Полный импульс электрона $p = \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}$.

Перпендикулярную составляющую p_{\perp} , обеспечивающую максимальное отклонение, легко оценить из соотношения неопределенностей:

$$\Delta p \Delta r \sim \hbar, \quad \text{где } \Delta p \approx p_{\perp}, \quad \Delta r = r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e^2}.$$

Таким образом,

$$p_{\perp} \approx \frac{m_e^2}{\hbar} = m\alpha c,$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры. Для нахождения составляющей импульса p_{\parallel} , направленной вдоль движения электрона, достаточно написать закон сохранения импульса:

$$\frac{h}{\lambda} = p_{\parallel} - \frac{h}{\lambda + \delta\lambda}.$$

Величина комптоновского смещения $\delta\lambda$ определяется по известной формуле

$$\delta\lambda = 4\pi A_e \approx 0,0485 \text{ \AA} \ll \lambda = 1 \text{ \AA}.$$

Таким образом,

$$p_{\parallel} \approx \frac{2h}{\lambda}.$$

Максимальный угол отклонения электрона

$$\text{tg } \varphi = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \approx \frac{m\alpha c}{2h/\lambda} = \frac{m e^2 \lambda}{4\pi \hbar^2} = 0,15, \quad \text{т. е. } \varphi \approx 0,15 \text{ рад } \approx 8,6^\circ.$$

Заметим, что для получения ответа можно было бы воспользоваться и законом сохранения энергии.

$$\frac{hc}{\lambda} + \mathcal{E}_{эл} = \frac{hc}{\lambda + \delta\lambda} + \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Энергия электрона $\mathcal{E}_{\text{эл}} = mc^2 - |\mathcal{E}_{\text{св}}|$. Для водорода очевидно, что $|\mathcal{E}_{\text{св}}| \ll mc^2$, т. е. $\mathcal{E}_{\text{эл}} \approx mc^2$. Энергия рентгеновского кванта $hc/\lambda = 12,4$ кэВ. Поэтому

$$mc^2 \gg \frac{hc}{\lambda} \gg |\mathcal{E}_{\text{св}}|.$$

Кроме того, $p_{\perp} \ll p_{\parallel}$, что выясняется простым подсчетом. Поэтому

$$\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \approx \sqrt{m^2c^4 + p_{\parallel}^2c^2} \approx mc^2 + \frac{p_{\parallel}^2}{2m}.$$

Подставив все это в закон сохранения энергии, получим

$$\frac{hc}{\lambda} \approx \frac{hc}{\lambda + \delta\lambda} + \frac{p_{\parallel}^2}{2m}, \text{ откуда } p_{\parallel} \approx \sqrt{\frac{2mhc\delta\lambda}{\lambda^2}} = \frac{2h}{\lambda}, \text{ где } \delta\lambda = \frac{2h}{mc}.$$

$$4.37. \Delta\varphi = \frac{Zm_e e^2 \lambda}{2\pi\hbar^2} \approx 0,25 \text{ рад} \approx 14^\circ.$$

$$4.38^* T_e = 10,2 \text{ кэВ}.$$

Решение. Согласно закону Мозли энергия кванта, излученного при переходе электрона с уровня n_2 на уровень n_1 (заряд ядра Z , а σ — поправка на экранирование заряда ядра электронами K -оболочки)

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = Ry(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Для линии K_{α} $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Поскольку энергия такого кванта в спектре излучения серебра известна и равна $\mathcal{E} = 21,6$ кэВ, то из приведенной формулы найдем поправку σ на экранирование заряда ядра электронами на K -оболочке (в обоих случаях $Z < 50$)

$$\sigma = Z_{\text{Ag}} - \sqrt{\frac{4\mathcal{E}}{3Ry}} \approx 1.$$

Энергия, необходимая для освобождения электрона из K -оболочки атома ${}_{30}\text{Zn}$ (переход с $n = 1$ в $n = \infty$), равна

$$(\hbar\omega)_{\text{Zn}} = Ry(Z_{\text{Zn}} - 1)^2 = 13,6 \cdot 29^2 = 11,4 \text{ кэВ},$$

а значит, кинетическая энергия T_e вылетевшего оттуда электрона равна

$$T_e = \mathcal{E} - (\hbar\omega)_{\text{Zn}} = 21,6 - 11,4 = 10,2 \text{ кэВ}.$$

$$4.39. \text{Отличие в } n^4 = 10^4 \text{ раз.}$$

$$4.40. E = \frac{Ry^2}{4e^3 n^4} \approx 32 \text{ кВ/см.}$$

$$4.41^* \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_{\mu 1}} \right)^2 = 2,53 \cdot 10^{-2} \text{ (ядро — заряженная сфера),} \\ \frac{4}{5} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_{\mu 1}} \right)^2 = 1,52 \cdot 10^{-2} \text{ (ядро — однородно заряженный шар),} \end{cases}$$

$$\text{где } r_{\mu 1} = \frac{\hbar^2}{m_{\mu} Z e^2}.$$

Решение. Считаем, что решение задачи об уровнях энергии в кулоновском поле точечного заряда известно: $\hat{H}\psi = \mathcal{E}\psi$, где $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$,

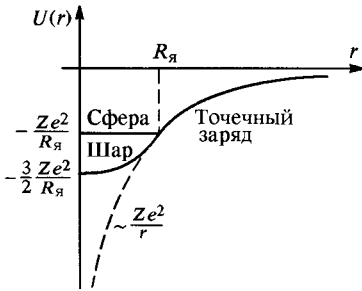


Рис. 154

$\mathcal{E} = -\frac{Z^2 m e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим $n = 1$, тогда $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$. Истинный потенциал при $r \geq R_я$ совпадает с потенциалом точечного ядра и отличается от него при $r < R_я$. Если считать ядро равномерно заряженной по поверхности сферой, то

$$U(r < R_я) = -\frac{Ze^2}{R_я}; \text{ если равномерно заряженным шаром, то } U(r < R_я) = -\frac{3Ze^2}{2R_я} \left(1 - \frac{r^2}{3R_я^2}\right), \text{ (рис. 154).}$$

Представим истинный гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \delta U,$$

где для шара

$$\delta U = \begin{cases} 0, & r \geq R_я, \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{3Ze^2}{2R_я} \left(1 - \frac{r^2}{3R_я^2}\right), & r < R_я \end{cases}$$

и для сферы

$$\delta U = \begin{cases} 0, & r \geq R_я, \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R_я}, & r < R_я. \end{cases}$$

Так как все отличие происходит при $r < R_я \ll r_1$, то рассматриваем δU как поправку. Среднее значение δU в основном состоянии и есть сдвиг уровня:

$$\langle \psi_1 | \hat{H} | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} | \psi_1 \rangle + \langle \psi_1 | \delta U | \psi_1 \rangle = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2} + \Delta \mathcal{E},$$

$$\Delta \mathcal{E} = \int dV \psi_1^* \delta U \psi_1 = \frac{1}{\pi r_1^3} 4\pi \int_0^{R_я} e^{-2r/r_1} \left\{ \frac{Ze^2}{r} - \frac{3Ze^2}{2R_я} \left(1 - \frac{r^2}{3R_я^2}\right) \right\} r^2 dr,$$

т. к. $\frac{R_я}{r_1} \leq \frac{3,5 \cdot 10^{-13}}{25,6 \cdot 10^{-13}} \sim 0,1$, то $e^{-2r/r_1} \simeq 1$. Тогда

$$\Delta \mathcal{E} \approx \frac{4}{r_1^3} \int_0^{R_я} \left\{ Ze^2 \left[r - \frac{r^2}{R_я} \right] \right\} dr = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{Ze^2}{r_1} \left(\frac{R_я}{r_1} \right)^2 & \text{— сфера,} \\ \frac{2}{5} \frac{Ze^2}{r_1} \left(\frac{R_я}{r_1} \right)^2 & \text{— шар.} \end{cases}$$

Видно, что поправка положительна, следовательно, уровни сдвигаются вверх. Относительная поправка

$$\delta = \left| \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_1} \right| = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\frac{Z e^2}{2 r_1}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 & \text{— сфера,} \\ \frac{4}{5} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 & \text{— шар.} \end{cases}$$

Сделаем вычисления:

$$R_{\text{я}} = 3,53 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad r_1 = r_{\mu_1} = \frac{\hbar^2}{m_{\mu} Z e^2} = \frac{m_e}{m_{\mu}} \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 25,6 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} 2,53 \cdot 10^{-2} & \text{— сфера,} \\ 1,52 \cdot 10^{-2} & \text{— шар.} \end{cases}$$

$$4.42. \quad \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{R_{\text{я}}}{a_{\text{Ne}}} \right)^2 = 5,94 \cdot 10^{-7} & \text{(ядро — заряженная сфера),} \\ \frac{4}{5} \left(\frac{R_{\text{я}}}{a_{\text{Ne}}} \right)^2 = 3,56 \cdot 10^{-7} & \text{(ядро — однородно заряженный шар),} \end{cases}$$

где $a_{\text{Ne}} = \frac{r_1}{Z}$.

$$4.43. \quad \langle T \rangle = \frac{e^2}{2 r_1^*} \approx 14,5 \text{ эВ, где } r_1^* = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

$$4.44. \quad \langle T \rangle = \frac{e^2}{8 r_1^*} \approx 3,4 \text{ эВ, где } r_1^* = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

$$4.45. \quad \text{Так как радиус мюонной орбиты } r_{\mu} = \frac{\hbar^2}{Z e^2 m_{\mu}} \approx 10^{-11} \text{ см} \ll r_{\text{Б}} \text{ —}$$

боровского радиуса (0,53 Å), то оставшийся электрон фактически движется в поле с зарядом $Z = 1$ (водородоподобный атом). Энергия перехода между уровнями $n = 3$ и $n = 2$ равна (это линия H_{α})

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R_{\infty} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R_{\infty} \approx 1,52 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}; \quad \lambda_{32} = 656 \text{ нм,}$$

где $R_{\infty} = 109737,3 \text{ см}^{-1}$.

$$4.46. \quad \text{Энергия } 3p\text{-состояния находится из условия } \mathcal{E}_{3p} = \mathcal{E}_{3s} + \frac{\hbar c}{\lambda} = \\ = -U_0 + \frac{\hbar c}{\lambda} = -3,0 \text{ эВ. Поскольку } \mathcal{E}_{3p} = -R_{\infty} \frac{Z_{\text{эфф}}^2}{3^2}, \text{ то получаем } Z_{\text{эфф}}^2 \approx 2; \\ Z_{\text{эфф}} \approx 1,4.$$

$$4.47. \quad v = \frac{3}{4} \frac{Z^2 a}{\hbar} R_{\infty} = 9 \cdot 10^8 \text{ см/с.}$$

$$4.48^*. \quad \mathcal{E}_{\text{осн}} \approx -\frac{e^2}{r_{\text{Б}}} Z \left(Z - \frac{5}{8} \right) = -74,8 \text{ эВ; где обозначено } r_{\text{Б}} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \\ = 0,529 \text{ Å; } \mathcal{E}_{\text{ион}} \approx \frac{m_e^4}{2 \hbar^2} Z \left(Z - \frac{5}{4} \right) \approx 20,4 \text{ эВ, где } Z = 2.$$

Решение. Вычислим энергию кулоновского расталкивания электронов в атоме гелия. Это интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кул}} &= e^2 \iint_0^\infty \Psi^*(r_1, r_2) \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \Psi(r_1, r_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = \\ &= e^2 \iint_0^\infty |\Psi_0(\mathbf{r}_1)|^2 \cdot |\Psi_0(\mathbf{r}_2)|^2 \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \end{aligned}$$

Введем плотности зарядов

$$\rho(\mathbf{r}_1) = e |\Psi_0(\mathbf{r}_1)|^2 \quad \text{и} \quad \rho(\mathbf{r}_2) = e |\Psi_0(\mathbf{r}_2)|^2.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \iint_0^\infty \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$

где $\varphi(\mathbf{r}_1) = \int_0^\infty \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_2$ — потенциал, создаваемый в точке \mathbf{r}_1 распределением заряда $\rho(\mathbf{r}_2)$ — аналог формулы $\frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$ (в силу симметрии можно

было бы написать $\mathcal{E}_{\text{кул}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2$).

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \int_0^\infty \frac{\rho(r_2) 4\pi r_2^2 dr_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Разобьем область интегрирования на две части $\int_0^\infty = \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^\infty$. Тогда первый

интеграл есть потенциал, создаваемый сферически симметричным распределением заряда при $r_2 < r_1$. По теореме Гаусса он равен потенциалу точечного заряда, находящегося в центре сферы. То есть

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} \frac{\rho(r_2) 4\pi r_2^2 dr}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \rho(r_2) 4\pi r_2^2 dr = \frac{4Z^3}{r_B^3} \frac{e}{r_1} \int_0^{r_1} \exp\left(-\frac{2Zr_2}{r_B}\right) r_2^2 dr_2 = \\ &= \frac{4e}{r_1} \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 \exp\left[-\frac{r_2^2 r_B}{2Z} - \frac{2r_2 r_B^2}{(2Z)^2} - \frac{r_B^3}{(2Z)^3}\right] \exp\left(-\frac{2Zr_2}{r_B}\right) \Big|_0^{r_1} = \\ &= 4e \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 \frac{(-1)}{r_1} \left\{ \left[\frac{r_1^2 r_B}{2Z} + \frac{r_1 r_B^2}{4Z^2} + \frac{r_B^3}{8Z^3} \right] \exp\left(-\frac{2Zr_1}{r_B}\right) - \frac{r_B^3}{8Z^3} \right\} = \\ &= -4e \left\{ \left[\frac{r_1 Z^2}{2r_B^2} + \frac{Z}{4r_B} + \frac{1}{8r_1} \right] \exp\left(-\frac{2Zr_1}{r_B}\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{r_1} \right\} \end{aligned}$$

Для вычисления поля, создаваемого распределением заряда при $r_2 > r_1$, разбиваем всю область на вложенные друг в друга сферы толщиной dr с зарядом $dQ = \rho(r_2) \cdot 4\pi r_2^2 dr_2$ (рис. 155). По теореме Гаусса потенциал внут-

ри сферы равен потенциалу ее поверхности. Таким образом, $\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \rightarrow \frac{1}{r_2}$

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{\infty} &\rightarrow \int_{r_1}^{\infty} \frac{\rho(r_2) 4\pi r_2^2 dr_2}{r_2} = 4 \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 e \int_{r_1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_2\right) r_2 dr_2 = \\ &= 4 \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 e \cdot \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_2\right) \frac{r_B^2}{(2Z)^2} \left(-\frac{2Z}{r_B} r_2 - 1\right) \Big|_{r_1}^{\infty} = \\ &= \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 \cdot e \cdot \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_1\right) \left(\frac{r_B}{Z}\right)^2 \left(2 \frac{Z}{r_B} r_1 + 1\right) = \\ &= \frac{Z}{r_B} \cdot e \cdot \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_1\right) \left(2 \frac{Z}{r_B} r_1 + 1\right). \end{aligned}$$

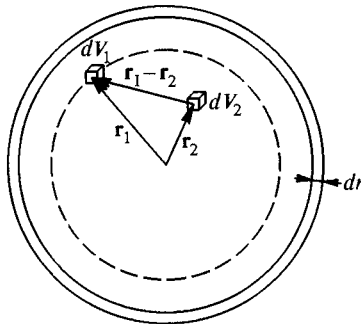


Рис. 155

Складывая, получаем

$$\varphi(r_1) = \frac{e}{r_1} - e \left(\frac{Z}{r_B} + \frac{1}{r_1}\right) \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_1\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кул}} &= \int_0^{\infty} \rho(r_1) \varphi(r_1) dr_1 = \frac{4\pi Z^3}{\pi r_B^3} e^2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_1\right) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{r_1} - \left(\frac{Z}{r_B} + \frac{1}{r_1}\right) \exp\left(-\frac{2Z}{r_B} r_1\right) \right\} r_1^2 dr_1 = \\ &= 4 \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 e^2 \left\{ \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2Z r_1}{r_B}\right) dr_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z}{r_B} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{4Z}{r_B} r_1\right) r_1^2 dr_1 - \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{4Z}{r_B} r_1\right) r_1 dr_1 \right\} = \\ &= 4 \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 e^2 \left\{ \left(\frac{r_B}{2Z}\right)^2 \int_0^{\infty} e^{-y} dy - \frac{Z}{r_B} \left(\frac{r_B}{4Z}\right)^3 \int_0^{\infty} e^{-y} y^2 dy - \left(\frac{r_B}{4Z}\right)^2 \int_0^{\infty} e^{-y} y dy \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\int_0^{\infty} e^{-y} y^n dy = \Gamma(n+1) = n!$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кул}} &= 4e^2 \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 \left\{ \left(\frac{r_B}{2Z}\right)^2 \cdot 1! - \frac{1}{4^3} \left(\frac{r_B}{Z}\right)^2 \cdot 2! - \frac{r_B}{4^2 Z^2} \cdot 1! \right\} = \\ &= 4e^2 \frac{Z}{r_B} \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{64} - \frac{1}{16} \right] = 4e^2 \frac{Z}{r_B} \frac{16-2-4}{64} = \frac{5}{8} \frac{Ze^2}{r_B}, \\ \mathcal{E}_{\text{осн}} &= -2Ry + E_{\text{кул}} = -2 \frac{Z^2 e^2}{2r_B} + \frac{5}{8} \frac{Z}{r_B} = -Z \left(Z - \frac{5}{8} \right) \frac{e^2}{r_B} = -74,8 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

После ионизации, т. е. отрыва одного электрона, останется водородоподобный ион с зарядом $+2$. Энергия связи оставшегося электрона есть

$$\mathcal{E}_{\text{св}} = -Z^2 Ry = -Z^2 \frac{e^2}{2r_B}.$$

$$\mathcal{E}_{\text{ион}} = \mathcal{E}_{\text{св}} - \mathcal{E}_{\text{осн}} = Z \left(Z - \frac{5}{8} \right) \frac{e^2}{r_B} - Z^2 \frac{e^2}{2r_B} = Z \left(Z - \frac{5}{4} \right) \frac{e^2}{2r_B} = 20,4 \text{ эВ}.$$

4.49. $3d$ -состояние.

4.50. $2s$ -состояние.

4.51*. $\lambda' = 3,7 \text{ нм}$; $T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \approx 11,6 \text{ ГэВ}$.

Решение. Частота лазерного излучения в ЛСО $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$. В системе отсчета ионов (где они неподвижны) эта же частота

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \text{ где } \beta = \frac{v}{c}.$$

Энергия перехода иона гелия из основного состояния в первое возбужденное $\mathcal{E}_{12} = Ry Z^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 3Ry = \hbar\omega'$. Поскольку $\frac{(\hbar\omega')^2}{(\hbar\omega)^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$, то $\beta = \frac{(\mathcal{E}_{12}/\hbar\omega_0)^2 - 1}{(\mathcal{E}_{12}/\hbar\omega_0)^2 + 1} \approx 0,97$. Здесь $\hbar\omega_0 = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda_0} = 5 \text{ эВ}$.

Частота излучения в ЛСО (см. задачу 1.35)

$$\omega'' = \omega' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \omega_0 \frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{\mathcal{E}_{12}}{\hbar\omega_0} \right)^2 \omega_0 \approx 66,6\omega_0.$$

Эта частота соответствует длине волны

$$\lambda'' = \frac{\lambda_0}{66,6} \approx 3,7 \text{ нм}.$$

Кинетическая энергия ионов

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \approx 11,6 \text{ ГэВ}.$$

4.52. $\tau \approx \frac{\hbar\omega}{I} = \frac{3}{2} \frac{Z^2}{n^4} a\hbar \frac{(mc^2)^2}{(\hbar\omega)^3} = 6,6 \cdot 10^{-12} \text{ с}$, где $\hbar\omega = \frac{3}{4} Ry Z^2 = 40,8 \text{ эВ}$,

$$Z = 2, n = 2, a = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

$$4.53. \tau \approx \frac{\hbar\omega}{I} = \frac{3}{2} \frac{Z^2}{n^4} \alpha \hbar \frac{(mc^2)^2}{(\hbar\omega)^3} = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ с, где } \hbar\omega = Ry Z^2 \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \right) = 0,51 \text{ эВ.}$$

$$4.54. \left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right)_{Pb} = \left(\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right)_{Ne} \frac{(Z^2 R_{яд}^2)_{Pb}}{(Z^2 R_{яд}^2)_{Ne}} = 1,92 \cdot 10^{-4}.$$

$$4.55. R \leq 512 \frac{\gamma M}{c^2} \left(\frac{Br_1^2}{e} \right)^2 \approx 6500 \text{ км, где } r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{e^2}{2Ry} \approx 0,53 \text{ \AA} — \text{ боровский радиус (см. задачу 4.40).}$$

§ 5. Ширина линий. Спектры молекул. Рентгеновское излучение

$$5.1. \Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{c \Delta t} \sim 10^{-4} \text{ нм, } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{\lambda}{c \Delta t} \sim 10^{-7}.$$

$$5.2. \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\hbar}{\tau E_{21}} \approx 1,4 \cdot 10^{-11}, \text{ где } E_{21} = \frac{3}{8} \mu c^2 \alpha^2; \mu = \frac{m_\pi m_p}{m_\pi + m_p}; \alpha — \text{ постоянная тонкой структуры.}$$

$$5.3. L_{\min} = c\tau = 3 \text{ см.}$$

$$5.4. \Delta\nu \approx \tau^{-1} = 10 \text{ МГц, где } \tau = - \frac{\Delta x}{v \Delta(\ln \mathcal{I}/\mathcal{I}_1)}.$$

$$5.5. T \approx \frac{m_p \lambda^2 (\Delta\nu)^2}{4k} \approx 33 \text{ К.}$$

$$5.6. T = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\mu c^2}{4R} = 8 \cdot 10^5 \text{ К, где } R — \text{ универсальная газовая постоянная, } \Delta\lambda — \text{ ширина на половине высоты резонансной кривой.}$$

$$5.7. \frac{\Delta\lambda_d}{\Delta\lambda_{ст}} = \frac{2l}{\lambda} \approx 3,6.$$

$$5.8. \frac{\delta \mathcal{E}}{\hbar\omega - \mathcal{E}_{ион}} \approx \frac{\hbar/\tau}{2\pi\hbar c/\lambda - \mathcal{E}_{ион}} \approx 6 \cdot 10^{-8}.$$

$$5.9. \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{kT\lambda}{m_{Ne} Dc} \approx 3,5 \cdot 10^{-8}.$$

$$5.10^*. P \approx \frac{2\pi c \Delta q}{\sigma} \sqrt{\frac{MkT}{3}} \approx 440 \text{ атм.}$$

Решение. Ударное уширение спектральных линий связано с тем, что при определенных давлениях газа время жизни атомов в возбужденном состоянии определяется временем между столкновениями молекул

$$\tau \sim \frac{l}{v_\tau} \approx \frac{1}{n\sigma v_\tau},$$

где l — длина свободного пробега молекул, v_τ — среднеквадратичная скорость молекул, соответствующая температуре T , т. е. $v_\tau = \sqrt{3kT/M}$, n — концентрация, σ — сечение столкновений. Таким образом, необходимое давление

$$P = nkT \approx \frac{kT}{\sigma v_\tau} = \frac{1}{\sigma\tau} \sqrt{\frac{MkT}{3}}.$$

С другой стороны, время жизни атомов в возбужденном состоянии, определяемое столкновениями атомов, и уширение спектральных линий связаны соотношением неопределенностей: $\Delta\nu_{\text{ст}} \approx 1$ (или $\Delta\omega_{\text{ст}} \tau \approx 2\pi$).

Если расстояние между спектральными линиями (в обратных сантиметрах) Δq станет равным ударному уширению, то произойдет слияние этих линий, т. е.

$$\Delta\nu_{\text{ст}} \geq \Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = 2\pi c \Delta q, \quad \text{где } q = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \Delta q.$$

Отсюда искомое время жизни $\tau^{-1} \approx 2\pi c \Delta q$. Окончательно необходимое для слияния линий давление

$$P = \frac{1}{\sigma \tau} \sqrt{\frac{MkT}{3}} \approx \frac{2\pi c \Delta q}{\sigma} \sqrt{\frac{MkT}{3}} \approx 440 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2 \approx 440 \text{ атм.}$$

5.11. а) $l = 0, 1, 2$; $I = 6,9 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

б) $l = 1, 2, 3$; $I = 13,8 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

5.12. $x = \sqrt{\alpha \frac{\mu_{\text{H}}}{\mu_{\text{НСI}}}} \approx 1,01\sqrt{\alpha}$, где μ — приведенная масса молекулы.

5.13. $\lambda_{\text{max}} = \frac{\pi c A m_p a^2}{\hbar} \approx 2,1 \text{ см.}$

5.14. $\frac{\omega_{35}}{\omega_{37}} = \frac{I_{37}}{I_{35}} = 1,0015$, где индексы 35 и 37 относятся к изотопам хлора ^{35}Cl и ^{37}Cl , I — моменты инерции молекул относительно центра масс.

5.15. $\mathcal{E}_{\text{H}_2} : \mathcal{E}_{\text{HD}} : \mathcal{E}_{\text{D}_2} = 2 : \frac{3}{2} : 1$.

5.16. $r = \left(\frac{\hbar}{2\pi\mu_{\text{HBr}}c\Delta}\right)^{1/2} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, где $\mu_{\text{HBr}} \approx m_p$ — приведенная масса молекулы HBr.

5.17. $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\omega}{\Delta\omega} \approx \frac{2\pi c l}{\hbar \lambda} \approx 140$, т. е. требуемая разрешающая способность $R > 140$. Такое разрешение может быть получено в спектрометре, использующем призму.

5.18. $T \geq \frac{\rho a^5}{\hbar} \approx 500 \text{ с.}$

5.19. Решение. Теплоемкость молекулярного водорода $C = C_{\text{пост}} + C_{\text{вр}} + C_{\text{кол}}$. Поскольку расстояния между колебательными уровнями велики ($\Delta\mathcal{E}_{\text{кол}} \sim \sqrt{\frac{M}{m}} \Delta\mathcal{E}_{\text{вр}} \approx 40 \Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}$), то при комнатных температурах колебательные уровни не возбуждены, а вращательные уровни возбуждены все, поскольку по условию $C_{\text{вр}} = (5/2)R$. При $T = 100 \text{ К}$ вращательные уровни не возбуждены вовсе. Таким образом,

$$kT \lesssim \Delta\mathcal{E}_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{I}, \quad \text{откуда } I \lesssim \frac{\hbar^2}{kT} \sim 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2,$$

где k — постоянная Больцмана. Следовательно,

$$h\nu = \frac{\hbar^2}{2I} 2(l+1) \approx kT(l+1); \quad \nu = \frac{kT}{h} (l+1), \quad \text{где } l = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_{\min} \approx \frac{kT}{h} \approx 2,1 \cdot 10^{12} \text{ Гц}, \quad \lambda_{\max} \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ см} = 0,15 \text{ мм}.$$

Соответствующая линия лежит в далекой инфракрасной области спектра.

5.20. Количество вращательных уровней $l_{\max} \simeq 4$.

$$\mathbf{5.22^*} \quad \mathcal{E}_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение. Запишем уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора в электрическом поле E

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} - eEx \right) \psi.$$

Перепишем его в таком виде:

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{m\omega^2}{2} \left(x^2 - \frac{2eE}{m\omega^2} x \right) \psi.$$

Полученное уравнение можно свести к уравнению колебаний осциллятора со смещенным положением равновесия, если выделить полный квадрат в выражении в скобках в правой части уравнения

$$x^2 - \frac{2eE}{m\omega^2} x = \left(x - \frac{eE}{m\omega^2} \right)^2 - \frac{E^2 e^2}{m^2 \omega^4} = (x^*)^2 - \frac{e^2 E^2}{m^2 \omega^4}.$$

Тогда уравнение Шредингера примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{m\omega^2}{2} \left(x - \frac{eE}{m\omega^2} \right)^2 \psi = \left(\hat{H} + \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2} \right) \psi,$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + \frac{m\omega^2}{2} x^{*2} \psi = \mathcal{E}^* \psi.$$

Уровни энергии в этом случае, очевидно, следующие:

$$\mathcal{E}_n^* = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

5.23* $\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3 = \Omega = 0,32 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1} = \sqrt{k/\mu}$, откуда вычисляем $k \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ дин/см}$.

Решение. Найдем частоты, соответствующие заданным переходам (рис. 156),

$$\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1} = 5,59 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_2} = 5,27 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi c}{\lambda_3} = 4,95 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

При вычислении мы сделаем округление в третьем знаке. Это дает точность $(0,01/5) \cdot 100\% = 0,2\%$, что укладывается в интервал измерений $(0,2\% - \text{ по условию})$. Вычислим разности частот

$$\omega_1 - \omega_2 = 0,32 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 - \omega_3 = 0,32 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Такое совпадение указывает на эквидистантность уровней 1, 2, 3. Следовательно, они могут быть связаны с колебательными уровнями молекулы

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3 = \Omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

где k — жесткость упругой связи, μ — приведенная масса молекулы N_2 . Таким образом, искомая жесткость

$$k = \mu \Omega^2 = 1,2 \cdot 10^6 \text{ дин/см, где } \mu = 11,69 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Заметим, что найденный колебательный квант молекулы азота $\Delta \mathcal{E} = \hbar \Omega = 0,21$ эВ. Табличное значение 0,29 эВ.

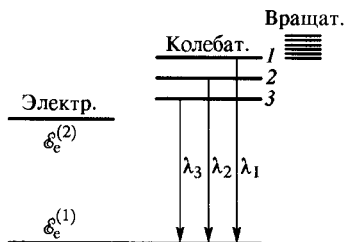


Рис. 156

$$5.24^* \frac{\hbar \omega_0}{\mathcal{E}_e} \approx 2 \sqrt{\frac{2m_e}{M}}; \quad A \approx a \sqrt{\frac{4m_e}{M}}, \quad \text{где}$$

M — масса атома.

Решение. Двухатомную молекулу можно рассматривать как квантовый гармонический осциллятор. На рис. 157 изображен потенциал взаимодействия атомов в такой молекуле. Вблизи положения равновесия форма ямы приближенно параболическая. Однако из-за соотношения неопределенностей квантово-механическая система не может находиться в этом положении — на дне потенциальной ямы. В результате возникают нулевые колебания с полной энергией $\mathcal{E}_0 = \hbar \omega_0/2$. Далее идут эквидистантные уровни возбужденных состояний двухатомной молекулы с $\Delta \mathcal{E} = \hbar \omega_0$, где ω_0 — частота колебаний двухатомной молекулы $\omega_0 = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{2k/M}$, где k — коэффициент упругой молекулярной связи, μ — приведенная масса молекулы, M — масса атома в молекуле типа H_2 или O_2 .

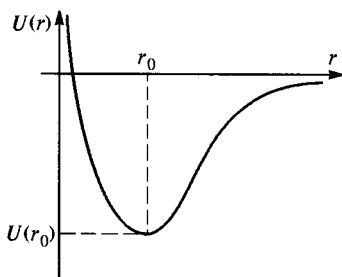


Рис. 157

Согласно соотношению неопределенностей и теореме вириала для осциллятора можно записать $\mathcal{E}_e \sim 2 \frac{p^2}{2m_e} \sim \frac{\hbar^2}{m_e a^2}$ (счи-

таем, что область локализации электрона порядка межатомного расстояния). Отсюда искомое отношение

$$\frac{\hbar \omega}{\mathcal{E}_e} = \frac{\hbar \sqrt{2k/M}}{\mathcal{E}_e} = \sqrt{2 \frac{\hbar^2}{a^2 m_e M} \frac{m_e}{\mathcal{E}_e}} \sim \sqrt{\frac{2m_e}{M}} \approx \begin{cases} 0,035 \text{ для } H_2, \\ 0,01 \text{ для } O_2. \end{cases}$$

Для оценки амплитуды нулевых колебаний воспользуемся приведенной в условии соотношением $k = \mathcal{E}_e/a^2$. Как указывалось выше, энергия нулевых колебаний

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2} = \frac{k A^2}{2}, \quad \text{откуда } A^2 = \frac{\hbar \omega_0 a^2}{\mathcal{E}_e}.$$

Подстановкой найдем

$$A \approx a \sqrt[4]{\frac{m_e}{M}} \approx \begin{cases} 0,15a & \text{для } \text{H}_2, \\ 0,08a & \text{для } \text{O}_2. \end{cases}$$

Величина $K = \sqrt[4]{\frac{m_e}{M}}$ носит название параметра неадиабатичности (см. задачу 5.29).

$$5.25. A_0 = \sqrt{\frac{\hbar \lambda}{2\pi c \mu}} \approx 4,74 \cdot 10^{-10} \text{ см}; T \geq 3100 \text{ К}.$$

5.26. Молекула O_2 находится в основном состоянии, так как $kT = 0,025 \text{ эВ} \ll \Delta \mathcal{E}$. Поэтому $A_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{\mu \Delta \mathcal{E}}} = 0,058 \text{ \AA}$, где μ — приведенная масса O_2 .

5.27. $\frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{кол}}}{\Delta \mathcal{E}_{\text{вр}}} = \frac{\mu r_0^2 \omega}{\hbar} \approx 180$, где μ — приведенная масса молекулы азота, r_0 — положение минимума кривой, берется из графика.

$$5.28. \lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{4l r p}{3\mathcal{E}}} \approx 31 \text{ см}; \hbar \omega = 4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}; A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi r^2} \sqrt{\frac{3}{\mathcal{E}}}} \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

$$5.29. \mathcal{E}_{\text{OH}} = \frac{\hbar \omega_{\text{H}}}{2} = \frac{\sqrt{2} \Delta \mathcal{E}}{\sqrt{2-1}} = 0,27 \text{ эВ}; \mathcal{E}_{\text{OD}} = \frac{\hbar \omega_{\text{D}}}{2} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\sqrt{2-1}} = 0,19 \text{ эВ}.$$

Решение. Поскольку масса электрона много меньше массы ядер, то скорости движения последних малы по сравнению со скоростями электронов. Тогда в первом приближении можно найти энергию электронов при неподвижных ядрах, а затем учесть движение ядер. Такой подход носит название адиабатического приближения.

Энергия молекулы с учетом движения ядер может быть записана как

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R) + \mathcal{E}_{\text{яд}}^{\text{кин}} + \mathcal{E}.$$

При этом энергия электронов зависит от межъядерного расстояния как от параметра. В энергию $\mathcal{E}_{\text{эл}}(R)$ включена также энергия электростатического отталкивания ядер, поэтому $\mathcal{E}_{\text{эл}}(R)$ фактически является полной энергией молекулы при фиксированном положении ядер. Полагая далее, что $R = R_0 + \delta R$, где R_0 — равновесное расстояние между ядрами, а δR — отклонение от него вследствие движения ядер, запишем $\mathcal{E}_{\text{эл}}(R) \approx$

$$\approx \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\text{эл}}(R)}{\partial R^2} \right|_{R=R_0} (\delta R)^2. \text{ Второй член представляет собой потен-}$$

циальную энергию ядер $U_{\text{яд}}^{\text{пот}}$, т. е. усредненный потенциал, создаваемый электронами. Вместе с кинетической энергией они образуют энергию колебаний $\mathcal{E}_{\text{яд}}^{\text{кин}} + U_{\text{яд}}^{\text{пот}} = \mathcal{E}_{\text{кол}}$. Если сюда добавить энергию вращения молекулы как целого $\mathcal{E}_{\text{вр}}$, то получим энергию молекулы в адиабатическом приближении $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \mathcal{E}_{\text{кол}} + \mathcal{E}_{\text{вр}}$. Заменяя по принципу соответствия классические выражения двух последних членов их квантовыми аналогами, получим

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \hbar \omega_{\text{кол}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + Bl(l+1),$$

где $B = \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}$ — постоянная вращения, μ — приведенная масса ядер,

$\omega_{\text{кол}}^2 = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}(R)}{\partial R^2} \right|_{R=R_0}$ — квадрат частоты колебаний ядер. Можно показать,

что $\mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) : \hbar\omega_{\text{кол}} : B = 1 : K^2 : K^4$ (см. задачу 5.24).

Энергия диссоциации — это разница между энергиями основного состояния молекулы и энергии двух удаленных атомов водорода (дейтерия), принимаемую равной нулю. Т. о. $I = \mathcal{E}_0$. Энергия основного состояния молекулы

$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \frac{1}{2} \hbar\omega_{\text{кол}}$. Разность энергий диссоциаций молекул D_2 и H_2

$$\Delta \mathcal{E} = I_{D_2} - I_{H_2} = 2\mathcal{E}_D - 2\mathcal{E}_{\text{эл. D}}(R_0) - \frac{\hbar\omega_D}{2} - 2\mathcal{E}_H + 2\mathcal{E}_{\text{эл. H}}(R_0) + \frac{\hbar\omega_H}{2}.$$

Поскольку

$$\mathcal{E}_D - \mathcal{E}_H = \frac{e^4}{2\hbar^2} (\mu_D - \mu_H),$$

где $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{M}\right)$ — приведенная масса электрона, то с учетом одинаковости потенциалов взаимодействия, получим

$$\Delta \mathcal{E} \approx \hbar \frac{\omega_H - \omega_D}{2} = \frac{\hbar\omega_D}{2} \left(\frac{\omega_H}{\omega_D} - 1 \right).$$

Отношение $\frac{\omega_H}{\omega_D} = \sqrt{\frac{\mu_D}{\mu_H}} = \sqrt{2}$, откуда следует $\frac{\hbar\omega_D}{2} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\sqrt{2}-1} \approx 0,19$ эВ и

$$\frac{\hbar\omega_H}{2} = \sqrt{2} \frac{\Delta \mathcal{E}}{\sqrt{2}-1} = 0,27 \text{ эВ}.$$

5.30. $\mathcal{E}_0 \approx \frac{3\hbar^2}{8\mu r^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-16}$ эрг = $0,75 \cdot 10^{-4}$ эВ, где $2r \approx 4,5 \cdot 10^{-8}$ см — характерный размер области, занимаемый одним атомом в жидком гелии,

$$2r \approx \left(\frac{6\mu}{\pi \rho N_A} \right)^{1/3}.$$

$$\mathbf{5.31^*} \quad \frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{вр}}}{\Delta \mathcal{E}_{\text{кол}}} = \frac{\hbar}{\omega \mu r_0^2} = 1,63 \cdot 10^{-3}.$$

Решение. С ростом номера колебательного возбуждения меняется средний квадрат расстояния между атомами в молекуле и, следовательно, момент инерции молекулы (рис. 158) зависит от n .

$$\mathcal{E}_{\text{кол}} = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right) = \langle K \rangle + \langle U \rangle = 2\langle U \rangle \text{ — теорема вириала. Далее, } \langle U \rangle =$$

$$= 2 \frac{\mu \omega^2}{2} \langle x_n^2 \rangle \rightarrow \langle x_n^2 \rangle = \frac{\hbar}{\mu \omega} \left(n + \frac{1}{2} \right), \text{ где } \mu \text{ — приве-}$$

денная масса ядер. При этом $\langle x_0^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\mu \omega} = \frac{\lambda_0^2}{2}$ (см. задачу 5.25). Тогда

$$\sqrt{\langle x_0^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{\mu \hbar \omega}} = 10^{-9} \text{ см} = 0,1 \text{ \AA} \ll 1,1 \text{ \AA} = r_0.$$

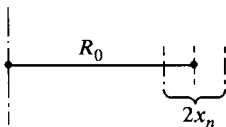


Рис. 158

Среднее значение вращательной энергии

$$\left\langle \frac{1}{2I} \right\rangle \hbar^2 l(l+1) = \frac{\hbar^2}{2\mu} l(l+1) \left\langle \frac{1}{r_n^2} \right\rangle \approx \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{\langle r_n^2 \rangle}.$$

Надо отметить, что усреднение ведется по заданному колебательному состоянию. В силу адиабатичности, $\mathcal{E}_{\text{вр}}$ — поправка к $\mathcal{E}_{\text{кол}}$.

Последнее равенство $\left(\left\langle \frac{1}{r_n^2} \right\rangle \approx \frac{1}{\langle r_n^2 \rangle} \right)$ справедливо, поскольку для небольших $n < 100$ справедливо соотношение $\langle x_n^2 \rangle \ll r_0$.

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{вр}}(l=1, \rightarrow l=0) = \frac{\hbar^2}{\mu \langle r_n^2 \rangle};$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{вр}}(n=0)}{\Delta \mathcal{E}_{\text{вр}}(n=1)} &= \frac{\langle (r_0 + x_1)^2 \rangle}{\langle (r_0 + x_0)^2 \rangle} = \frac{\langle r_0^2 + 2x_1 r_0 + x_1^2 \rangle}{\langle r_0^2 + 2x_0 r_0 + x_0^2 \rangle} = \frac{r_0^2 + \langle x_1^2 \rangle}{r_0^2 + \langle x_0^2 \rangle} = \\ &= \frac{r_0^2 + 3\hbar/(2\mu\omega)}{r_0^2 + \hbar/(2\mu\omega)} \approx \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\mu\omega r_0^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\mu\omega r_0^2} \right) = \frac{\hbar}{\mu\omega r_0^2} = 1,63 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Как видно из решения, существует взаимодействие между вращением и колебаниями ядер, что соответствует выходу за пределы адиабатического приближения (см. задачи 5.29 и 5.57).

$$5.32. \mathcal{E}_0 = \frac{3\hbar\omega}{2} = 3\hbar\sqrt{\frac{18\varphi}{mr_0^2}} = 1,944 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} \approx 226 \text{ К}.$$

$$5.33. \Delta \mathcal{E}_{\text{кол}} = \hbar\alpha \sqrt{\frac{4D}{m}} \approx 0,3 \text{ эВ}.$$

$$5.34. v_A = \sqrt{\frac{2\Delta \mathcal{E} m_B}{m_A(m_A + m_B)}}; \quad v_B = \sqrt{\frac{2\Delta \mathcal{E} m_A}{m_B(m_A + m_B)}}, \quad \text{где } \Delta \mathcal{E} = \hbar(v - v').$$

$$5.35. \text{Разность энергий ионизации атомов } {}^6_3\text{Li} \text{ и } {}^7_3\text{Li} \quad \Delta \mathcal{E} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ эВ};$$

ширина линии поглощения из-за эффекта Доплера $2\hbar\Delta\omega \approx \hbar\omega \frac{v}{c} \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}$, точнее (с учетом коэффициента $2\sqrt{\ln 2}$, см. Д. В. Сивухин «Общий курс физики. Оптика», формула 89.11) $5,17 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}$. Поскольку $\Delta \mathcal{E} > \hbar\Delta\omega$ (при $t \approx 800 \text{ }^\circ\text{C}$), разделение изотопов возможно.

$$5.36. \lambda = \frac{hc}{\text{Ry}(Z-\sigma)^2(1/n^2 - 1/m^2)} = 1,44 \cdot 10^{-8} \text{ см, где } n=2; m=3.$$

5.37. $\mathcal{E} = \hbar\nu = \text{Ry}(Z-1) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 17,15 \text{ кэВ}; \nu \approx 4,14 \cdot 10^{18} \text{ Гц}, \lambda_\alpha \approx 0,072 \text{ нм}$. Из экспериментальных данных известно, что для $20 < Z < 30$ постоянная экранирования $\sigma_{\text{экр}} = 1,13$.

5.38. Чтобы появилась линия K_α нужно выбить электрон из K -оболочки. В грубом приближении для этого требуется ионизовать атом. При этом $eV = \text{Ry}(Z-1)^2$. Таким образом, $V_{\text{Mo}} \approx 23 \text{ кВ}; V_{\text{Cu}} \approx 10,6 \text{ кВ}; V_{\text{Fe}} \approx 8,5 \text{ кВ}$.

Эти результаты можно уточнить. Так, в атоме Mo структура незаполненных электронных оболочек — $4d^5 5s^1$, т. е. есть свободные места в $4d$ -оболочке, откуда $eV_{\text{Mo}} = \text{Ry}(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \approx 21,4 \text{ кэВ}$. В атоме Cu структура

внешних электронных оболочек — $3d^{10}4s^1$, при этом в $3d$ -оболочке мест нет и, следовательно, требуемый переход — в $4s$. Поэтому $V_{Cu} \approx 10$ кВ. Структура внешних электронных оболочек Fe — $3d^64s^2$, откуда $V_{Fe} \approx 7,55$ кВ.

5.39*. Решение. K -полоса образуется при переходах K -электронов на свободные места. При таких переходах наиболее вероятно излучение электродипольных или $E1$ -фотонов. Самое коротковолновое излучение было бы при переходе внешнего электрона, т. е. $5s \rightarrow 1s$. Но такой переход с излучением $E1$ -фотона является $(0-0)$ -переходом и поэтому запрещен правилами отбора по L . Кроме того, для $E1$ -фотона этот переход запрещен еще и по закону сохранения четности. Таким образом, границы K -серии соответствуют переходу $4p$ -электрона (d -электроны не дают электродипольного излучения, потому что $\Delta L = 2$). Возможные и запрещенные переходы изображены на рис. 159. Пренебрегая расщеплением уровней из-за спин-орбитального расщепления, получаем

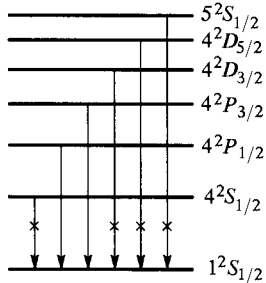


Рис. 159

возможные и запрещенные переходы изображены на рис. 159. Пренебрегая расщеплением уровней из-за спин-орбитального расщепления, получаем

$$\frac{hc}{\lambda_{тр}} = Ry(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right),$$

откуда $\lambda_{тр} = 5,79 \cdot 10^{-9}$ см $\approx 0,058$ нм.

Для атома меди (Cu) с конфигурацией электронных оболочек $1s^22s^22p^63s^23p^63d^{10}4s^1$ границы соответствуют переходу $3p$ -электрона

$$\lambda_{тр} \approx 0,013 \text{ нм.}$$

Для атома железа (Fe) конфигурация электронной оболочки имеет вид $1s^22s^22p^63s^23p^63d^64s^2$ — все аналогично меди

$$\lambda_{тр} = 1,64 \cdot 10^{-9} \text{ см} \approx 0,016 \text{ нм.}$$

5.40. Электронная конфигурация атома Co $1s^22s^22p^63s^23p^63d^74s^2$. Учитывая, что для этого атома переход $4s-1s$ с излучением $E1$ -фотона запрещен, $\mathcal{E}_{K_{тр}}^{Co} \approx 8,172$ кэВ. Минимальная энергия для возбуждения K -излучения

Ni (линия K_{α}) есть $\mathcal{E}_{K_{\alpha}}^{Ni} \approx 8,813$ кэВ. Поскольку $\mathcal{E}_{K_{\alpha}}^{Ni} > \mathcal{E}_{K_{тр}}^{Co}$, то K -серия атома Ni не возбуждается. Остальные линии — возбуждаются.

5.41. Zr и Mo; между ними находится элемент Nb.

5.42. Na ($3S \rightarrow 2P$ -переходы).

5.43. $V = 15$ кВ.

5.44. $T_{\min} = \frac{m_e c^2 \alpha^2 (Z-1)^2}{2[1 - m_e / (m_{Li} + m_e)]} = 85,5$ эВ, где α — постоянная тонкой

структуры.

5.45. $v \approx 5 \cdot 10^9$ см/с.

5.46. Минимальное значение Z находится из условия Брэгга—Вульфа $\lambda \leq 2d$ ($m = 1$). Тогда $Z_{\min} = 18$.

5.47. $V \geq \frac{hc}{2ed}$; $V_{\min} = 2,7$ кВ.

5.48. Переход из $l = 3$ в $l = 2$.

5.49. $T = - \frac{\hbar^2}{k\mu d^2 \ln(a/3)} = 1,4 \text{ К}$. Здесь отношение заселенностей состояний записано с учетом их статистических весов (кратностей вырождения):

$$a = \frac{N(l_1=1)}{N(l_2=0)} = \frac{2l_1+1}{2l_2+1} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}(l_1) - \mathcal{E}(l_2)}{kT}\right) = 3 \exp\left(-\frac{\hbar^2}{kTI}\right).$$

5.50. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = 2,5 \cdot 10^{-2}$, где μ — приведенная масса молекулы. Наибольшей длине волны соответствует переход из $l=1$ в $l=0$, откуда $\lambda = 2,65 \text{ мм}$.

5.51. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\mu}{2\mu} = 7,7 \cdot 10^{-4}$, где μ — приведенная масса молекулы.

5.52. $\omega(0) = \frac{2}{\pi\sqrt{2n}} = 0,14$.

5.53. $\omega = \frac{\int_{-x_0}^{x_0} e^{-x^2/x_0^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/x_0^2} dx} \approx 0,865$.

5.54. $l_{\max} \approx \left[\sqrt[4]{\frac{4M_{\text{аз}}}{m_e}} \right] + 1 = 18$, где $M_{\text{аз}}$ — масса атома азота, m_e — масса электрона. Квадратные скобки здесь и в следующей задаче означают операцию взятия целой части числа.

5.55. $N_{\max} = [n_{\max}] + 1 = 81$, где $n_{\max} = \frac{1-\alpha}{2\alpha} \approx 80,9$.

5.56. $\delta\mathcal{E}_{205} - \delta\mathcal{E}_{203} = \delta\mathcal{E}_{203} \frac{2}{3} \frac{\Delta A}{A} \approx 0,05 \text{ эВ}$. Тогда $\delta\mathcal{E}_{205} = \delta\mathcal{E}_{203} + 0,05 = -8,2 \text{ эВ}$ (энергия ионизации в атоме с ядром ^{205}Tl меньше, чем в атоме с ядром ^{203}Tl).

5.57. $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -0,046$.

Решение. Гамильтониан относительного движения атомов в молекуле имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{\varepsilon\sigma^2}{r^2} - 2\frac{\varepsilon\sigma}{r},$$

где $\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$ — радиальная часть лапласиана, $\mu = \frac{m_{\text{H}}m_{\text{Cl}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{Cl}}} \approx m_{\text{H}}$ — приведенная масса. Следовательно, эффективный потенциал

$$U_{\text{эфф}}(r) = U_{\text{цбеж}}(r) + U(r) = \frac{A_l}{r^2} - \frac{B}{r},$$

где $A_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu} + \varepsilon\sigma^2 = \varepsilon\sigma^2 \left[1 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu\varepsilon\sigma^2} \right] = \varepsilon\sigma^2(1 + \delta_l)$, $B = 2\varepsilon\sigma$. Минимум эффективного потенциала находится при $r_0 = \frac{2A_l}{B}$. Раскладывая потенциал вблизи минимума

$$U_{\text{эфф}}(r) \simeq U_{\text{эфф}}(r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_{\text{эфф}}}{dr^2} \Big|_{r=r_0} (r-r_0)^2,$$

получаем выражение для коэффициента жесткости

$$k = \frac{1}{2} \frac{d^2 U_{\text{эфф}}}{dr^2} \Big|_{r=r_0} = \frac{B^4}{8A_l^3}.$$

Частота колебаний $\omega_l = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \left(\frac{B}{A_l}\right)^2 \sqrt{\frac{A_l}{8\mu}}$.

Поскольку $\delta_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu\epsilon\sigma^2} = 0,024 \ll 1$, то

$$\omega_l \approx \frac{4}{\sigma^2} (1 - 2\delta_l) \sqrt{\frac{\epsilon\sigma^2}{8\mu}} \left(1 + \frac{\delta_l}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\sigma^2}} \left(1 - \frac{3}{2}\delta_l\right).$$

Введем обозначение $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\sigma^2}}$ — частота колебаний в основном состоянии. Тогда

$$\omega_l = \omega_0 \left(1 - \frac{3}{2}\delta_l\right) \text{ и } \frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{3}{2}\delta_l = -0,046.$$

См. также решение задачи 5.31.

Заметим, что квант колебаний $\hbar\omega_0 = \sqrt{2\epsilon} \frac{\hbar^2}{\mu\sigma^2} = 0,146$ эВ. Равновесное расстояние между атомами $r_0 \approx \sigma$.

Если ввести обозначения $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{\epsilon\sigma^2}{r^2} = \frac{\hbar^2 l^*(l^*+1)}{2\mu r^2}$ и $2\epsilon\sigma = (l^*)^2$, то получим гамильтониан атома водорода. Используя известный результат, получаем полную энергию молекулы $\mathcal{E} = -\frac{\mu(e^*)^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(n_r + l^* + 1)^2}$. Если n_r ,

$l \ll \frac{2\mu\epsilon\sigma^2}{\hbar^2}$, то полученную формулу можно разложить в ряд и получить

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & -\epsilon + \hbar \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\sigma^2}} \left(n_r + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2\mu\sigma^2} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \\ & - \frac{3\hbar^2}{2\mu\sigma^2} \left(n_r + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\hbar^3}{2\mu^2\sigma^4} \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{2\epsilon}} \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Первые три члена этой формулы соответствуют электронной, колебательной и вращательной энергиям молекулы (задача 5.29). Четвертый член соответствует ангармонизму колебаний (задача 5.55), а пятый — взаимодействию колебаний и вращений ядер (задачи 5.31 и 5.57). Не смотря на свою простоту, которая позволяет получить аналитическое решение, потенциал Кратцера плохо описывает реальную форму потенциала взаимодействия: на малых расстояниях отталкивание атомов в молекулах сильнее, а на больших расстояниях — притяжение слабее. Поэтому в теории молекул обычно используют потенциал Морса (задача 5.33), а в конденсированных средах потенциал Леннарда—Джонса.

§ 6. Спин. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Магнитный резонанс.

$$6.1. T = 2\pi r \sqrt{\frac{\pi a m c}{N \lambda}} = 5 \text{ мин.}$$

6.2. $M = \frac{\mathcal{I} S \lambda}{2\pi c} = 0,95 \cdot 10^{-6}$ дин·см. От распределения интенсивности в пучке M не зависит. Для пластинки в $\lambda/4$ вращающий момент такой же, как и для поглощающей пластинки. Вращающий момент удвоится, если взять пластинку в $\lambda/2$.

$$6.3. M = \frac{\mathcal{I} S \lambda}{2\pi c} \frac{2ab}{a+b} = 0,76 \cdot 10^{-6} \text{ дин·см.}$$

6.4. Свет будет поляризован по левому кругу.

$$\frac{M}{S} = \frac{\mathcal{I} \lambda}{\pi c} = 7,7 \cdot 10^{-9} \text{ дин/см.}$$

6.5. Максимальный вращающий момент возникает, когда главные направления пластинки ориентированы под углом 45° к плоскости поляризации света.

$$M = \frac{N \lambda}{2\pi c} = 10^{-8} \text{ дин·см.}$$

6.6. Из условий $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 3$ следует, что линейно поляризованный свет переносит половину всей мощности.

$$\frac{M}{S} = \frac{\mathcal{I} \lambda}{4\pi c} = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ дин/см.}$$

$$6.7. M = \frac{\mathcal{I} S \lambda}{2\pi c} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ дин·см; } F = \frac{\mathcal{I} S}{c} \approx 0,03 \text{ дин.}$$

Решение. Момент импульса проходящей и отраженной волн равен нулю в силу линейной поляризации. Согласно закону сохранения момента импульса $\Delta L_{\text{реш}} = -\Delta L_{\text{фот}}$ (изменению момента импульса фотонов).

$$\text{Вращающий момент } M = \frac{\Delta L_{\text{фот}}}{\Delta t} = \frac{\hbar \mathcal{I} S \Delta t}{\hbar \omega \Delta t} = \frac{\mathcal{I} S}{\omega} = \frac{\mathcal{I} S \lambda}{2\pi c} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ дин·см.}$$

Сила давления F обусловлена изменением импульса той части потока, которая испытывает отражение. Поэтому

$$F = 2 \frac{\hbar \omega}{c} \frac{\mathcal{I} S}{2\hbar \omega} = \frac{\mathcal{I} S}{c} \approx 0,03 \text{ дин.}$$

$$6.8. F = p \frac{\mathcal{I}}{e} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ дин,}$$

где $p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)} = 1,78 \cdot 10^{-17}$ г·см/с; $M = \frac{\hbar \mathcal{I}}{2e} = 3,3 \cdot 10^{-7}$ дин·см.

6.9. $\omega = \frac{2Nl}{I}$, цилиндр закрутится против часовой стрелки (вектор ω направлен вверх).

6.10. $\omega = \frac{2N_A \hbar}{A m} L \rho = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, где N_A — число Авогадро, A — атомная масса железа [г/моль], ρ — его плотность.

6.11. На два ($2S + 1 = 2$).

$$6.12^* s = 2\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(L+l/2)}{3kT} \approx 0,4 \text{ см.}$$

Решение. В области магнита на атом действует постоянная сила

$$F_x = \mu_B \frac{dB}{dx},$$

где μ_B — проекция магнитного момента атома на направление поля B

$$\mu_B = m_J g \mu_B,$$

где $g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ — фактор Ланде. В основном состоянии атома

Na $L = 0$, $S = 1/2$, $J = 1/2$, $g = 2$, и $F_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx}$. За время $t = \frac{l}{v}$ смещение частицы

$x_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{F_x l^2}{2m v^2}$, а скорость на выходе $v_x = \frac{F_x l}{m v}$ ($v_x \ll v$, в чем убедимся ниже). Вне магнита атом движется по инерции и $x_2 =$

$$= x_1 + v_x \frac{L}{v} = \frac{F_x}{mv^2} l \left(\frac{l}{2} + L \right).$$

За время $t = l/v$ атомы приобретают скорость

$$v_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l}{mv} \approx \pm 20 \text{ см/с,}$$

приводящую к смещению пучков на детекторе

$$x_2 = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(l/2 + L)}{mv^2}.$$

Средняя кинетическая энергия атомов в пучке равна $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, откуда $v \approx 600 \text{ м/с} \gg v_x$, а искомое расстояние между пятнами на детекторе

$$s = 2x_2 = 2\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(l/2 + L)}{3kT} \approx 4 \text{ мм.}$$

$$6.13. d_{\min} = \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{lL}{T} \left(1 + \frac{l}{2L} \right) = 1,79 \text{ см.}$$

6.14. Пучок разобьется на четыре компоненты. Угол между ними

$$\Delta\varphi = g\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l}{Am_p v^2} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 1,2^\circ.$$

В области магнита на атом действует постоянная сила $F_x = \mu_B \frac{dB}{dx}$, где μ_B — проекция магнитного момента атома на направление поля

$\mu_B = m_J g \mu_B$, где $g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ — фактор Ланде. Из определения спектроскопического символа $2S+1F_J$ имеем $S = 3/2$; $J = 3/2$ и $L = 3$, поэтому g -фактор (фактор Ланде) $g = 2/5$.

$$6.15. \frac{dB}{dx} = \frac{4\pi\hbar}{\mu_n L d} \sqrt{\frac{T}{2m_n}} \approx 150 \text{ Гс/см.}$$

$$6.16^* \theta = \frac{1,91\mu_{\text{яд}} B \lambda^2}{2\pi^2 \hbar^2} m_n \text{ tg } \varphi = 86 \text{ мкрад} \approx 3'.$$

Решение. Выберем координатные оси таким образом: поле \mathbf{B} направлено по оси Z , а нормаль к области поля есть ось X (рис. 160). Потенциальная энергия нейтрона в магнитном поле

$$U = -\boldsymbol{\mu} \mathbf{B} = -\mu_{\text{яд}} B_z g_{\text{сп}} m_s,$$

где $\mu_{\text{яд}}$ — ядерный магнетон Бора, $g_{\text{сп}} = -3,82$ — спиновый g -фактор нейтрона (аналог фактора Ланде для свободного электрона), $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

Поскольку потенциальная энергия однородна и различна в областях $x < 0$ и $x > 0$, то это приводит к силам, действующим на нейтрон в направлении по нормали к поверхности, а вдоль поверхности силы не действуют. Поэтому касательная компонента импульса нейтрона будет сохраняться ($m \equiv m_n$ — масса нейтрона):

$$mv_I \sin \varphi = mv_{II} \sin \psi, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{v_{II}}{v_I} = n.$$

Получили аналог оптического закона преломления. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_I^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} \pm U_0 \quad \text{получаем} \quad n = \sqrt{1 \mp \frac{2U_0}{mv_I^2}}.$$

Возможен *другой способ* получения выражения для показателя преломления нейтронов. На рис. 161 приведен график зависимости потенциальной энергии нейтрона $U(x)$ от координаты x . Из рисунка видно, что данную задачу можно рассматривать как задачу о надбарьерном отражении нейтронной волны де Бройля. Волновая функция нейтрона $\psi = Ae^{ikr} = Ae^{ik_x x}$ ($k_y = \text{const}$ и $k_z = \text{const}$). Используя известный результат задачи (3.25), запишем коэффициент отражения

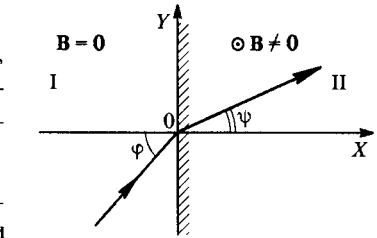


Рис. 160

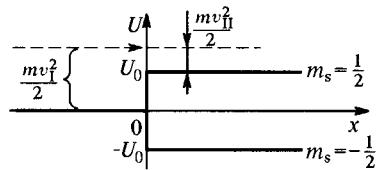


Рис. 161

$$R = \left(\frac{k_{xI} - k_{xII}}{k_{xI} + k_{xII}} \right)^2 = \left(\frac{k_I \cos \varphi - k_{II} \cos \psi}{k_I \cos \varphi + k_{II} \cos \psi} \right)^2 = \left[\frac{\cos \varphi - (k_{II}/k_I) \cos \psi}{\cos \psi + (k_{II}/k_I) \cos \varphi} \right]^2.$$

Если сравнить это выражение с соответствующей формулой Френеля, то получим, что

$$n = \frac{k_{II}}{k_I} = \sqrt{1 \mp \frac{2mU_0}{\hbar^2 k_I^2}}.$$

При этом условие непрерывности ψ на границе соответствует условию непрерывности E_t , а условие непрерывности ψ'_x — условию непрерывности H_t . Плотность потока частиц соответствует плотности потока электромагнитной энергии (вектору Пойнтинга).

Оценим отличие n от 1:

$$\frac{2mU_0}{\hbar^2 k_1^2} \approx \frac{2m\mu_{\text{яд}}B}{4\pi^2 \hbar^2} \lambda^2 = \frac{e^2 B}{\hbar c} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \approx 2 \cdot 10^{-13} \ll 1.$$

Здесь было подставлено значение $\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2mc}$. Таким образом,

$$n \approx 1 \mp \frac{mU_0}{4\pi^2 \hbar^2} \lambda^2.$$

Это значение, очевидно, разное для разных значений проекции спина нейтрона на направление магнитного поля.

$$\text{Для } m_s = \frac{1}{2} \quad n_+ = 1 - \frac{1,91\mu_{\text{яд}}B\lambda^2}{4\pi^2 \hbar^2} m.$$

$$\text{Для } m_s = -\frac{1}{2} \quad n_- = 1 + \frac{1,91\mu_{\text{яд}}B\lambda^2}{4\pi^2 \hbar^2} m.$$

Из закона преломления получим

$$\sin \psi_+ = \frac{\sin \varphi}{n_+}; \quad \sin \psi_- = \frac{\sin \varphi}{n_-},$$

или

$$\sin \psi_+ - \sin \psi_- = \sin \varphi \frac{n_- - n_+}{n_- n_+}.$$

При разложении разности синусов двух близких углов появляются очевидные соотношения

$$|\psi_+ - \psi_-| \ll \varphi; \quad \psi_+ + \psi_- \approx 2\varphi; \quad n_+ n_- \approx 1.$$

Окончательно

$$\theta = \Delta\psi = \psi_+ - \psi_- = (n_- - n_+) \operatorname{tg} \varphi = \frac{1,91\mu_{\text{яд}}B\lambda^2}{2\pi^2 \hbar^2} m \operatorname{tg} \varphi.$$

Подстановка чисел дает $\theta \approx 86 \cdot 10^{-6}$ рад $\approx 3'$.

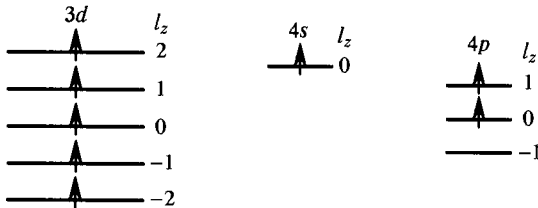


Рис. 162

6.17* Н — 2; Li — 2; Fe — 1, 3, 5, 7, 9; Cl — 2, 4, 6, 8; He — 1, 3; Mg — 1, 3; Hg — 1, 3; U — 1, 3, 5, 7.

Решение. Рассмотрим в качестве примера атомы Fe и Cl. Электронная конфигурация атома железа представляет собой заполненные оболочки, как у Ag, сверх которых имеются 8 электронов — $3d^6 4s^2$. Максимально возможный спин атома $S = 1/2 \cdot 8 = 4$. Для этого один электрон из 3d-оболочки и

один из $4s$ -оболочки должны перейти в $4p$ -оболочку (рис. 162). При этом мультиплетность $2S + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$. Если из $4p$ -оболочки один электрон вернется в $4s$ или $3d$ -оболочку, то он обязан «перевернуть» спин, и общий спин уменьшится на 1, и получим $2S + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Возврат второго электрона даст уменьшение еще на 1, и получим $2S + 1 = 5$.

Шесть электронов в d -оболочке могут дать суммарный спин 2, 1 и 0. Получаются мультиплетности 5, 3 и 1 (см. ответ).

У атома Cl электронная конфигурация $1s^2 2s^2 2p^5$. Максимальный спин $S = 7 \cdot 1/2 = 7/2$; мультиплетность $2S + 1 = 8$. Это достигается переходом одного электрона в $3s$ -оболочку и двух — в $3p$ -оболочку и т. д.

6.18. $\text{Sr}^+ - 2$; $\text{Li}^+ - 1, 3$; $\text{Ca}^+ - 2$; $\text{C}^{2+} - 1, 3$; $\text{O}^{4+} - 1, 3$.

6.19. 4.

6.20. $\Delta \mathcal{E} = 2\pi\hbar c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \approx 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$; $B = \frac{\Delta \mathcal{E}}{2\mu_B} \approx 1,8 \cdot 10^5 \text{ Гс}$.

6.21*. $\Delta \mathcal{E}_B = \mu_B B \left\{ \frac{5}{3}; \frac{1}{3}; -1 \right\}$ (три линии).

Решение. Для определения типа эффекта Зеемана (простой или сложный) необходимо сначала оценить величину спин-орбитального расщепления, пользуясь данными задачи.

$$\Delta U_{ls} = 2\pi\hbar c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \approx \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2} \Delta\lambda \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

Далее оценим произведение $\mu_B B \approx 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$. Сравнивая две полученные величины, мы видим, что $\mu_B B \ll \Delta U_{ls}$, т. е. поле является слабым.

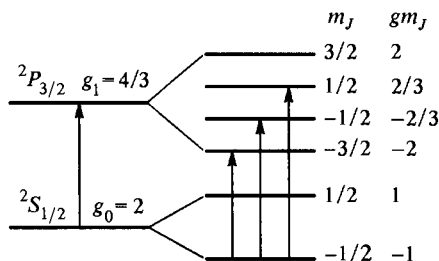


Рис. 163

Вычислим g -факторы состояний ${}^2P_{3/2}$ и ${}^2S_{1/2}$:

$$g_1 = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot 2}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{4}{3}; \quad g_2 = 2 \quad (\text{т. к. } L = 0).$$

Определим возможные переходы по формуле

$$\Delta \mathcal{E}_B = \mu_B B (g_{\text{кон}} m_J^{\text{кон}} - g_{\text{нач}} m_J^{\text{нач}}).$$

Однако в силу очень низкой температуры ($T = 0,5 \text{ К}$) $kT \approx \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \ll 2\mu_B B$ (расщепление термина ${}^2S_{1/2}$). Таким образом, при этой

температуре заселен только нижний подуровень уровня ${}^2S_{1/2}$ ($m_J = -1/2$). Поэтому в спектре поглощения возможны только три линии (рис. 163):

$$\Delta \mathcal{E}_B = \mu_B B \begin{cases} \frac{2}{3} - (-1) = \frac{5}{3}, \\ -\frac{2}{3} - (-1) = \frac{1}{3}, \\ -2 - (-1) = -1. \end{cases}$$

6.22. В спектре поглощения газа в магнитном поле будут наблюдаться шесть компонент расщепленной линии ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2D_{3/2}$. Это сложный эффект Зеемана ($\mu_B B \ll U_{LS}$; $\mu_B B \ll kT \approx 0,026$ эВ).

$$\frac{\Delta \mathcal{E}_B}{\mu_B B} = g_1 m_J^1 - g_2 m_J^2 = \left(\pm \frac{13}{15}; \pm \frac{11}{15}; \pm \frac{1}{15} \right).$$

6.23. $2J + 1$.

6.24. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mu_B B g m_J$, где \mathcal{E} — энергия атома в магнитном поле, \mathcal{E}_0 — без поля, $g = \frac{2J+1}{2L+1}$; а $J = \begin{cases} L + 1/2 \\ L - 1/2 \end{cases}$, L -орбитальный момент валентного электрона, $m_J = -J, -J + 1, \dots, +J$.

$$\begin{aligned} \mathbf{6.25.} \quad \Delta \mathcal{E}_B = \mu_B B (g_1 m_J^{(1)} - g_2 m_J^{(2)}) = & \left\{ \pm 1; \pm \frac{2}{7}; \pm \frac{39}{35}; \pm \frac{11}{7}; \pm \frac{6}{35}; \pm \frac{43}{45}; \right. \\ & \left. \pm \frac{51}{35}; \pm \frac{2}{35}; \pm \frac{47}{35} \right\} \mu_B B \quad (18 \text{ линий}). \end{aligned}$$

6.26. Это линии с $\Delta m_J = 0$ (колебания вдоль поля \mathbf{B} не испытывают действие силы Лоренца). $\Delta \mathcal{E}_B = \left\{ \pm \frac{2}{7}; \pm \frac{6}{35}; \pm \frac{2}{35} \right\}$ — 6 линий. Такие линии называются π -линиями. Они видны при наблюдении поперек поля и не видны при наблюдении вдоль поля.

6.27. Решение е. Множитель Ланде

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Для состояния ${}^2P_{3/2}$ ($J = 3/2$, $L = 1$, $S = 1/2$) этот множитель равен $g_1 = 4/3$; для состояния ${}^2S_{1/2}$ ($J = 1/2$, $L = 0$, $S = 1/2$), $g_2 = 2$. Смещения расщепленных компонент мультиплетта приведены в таблице:

${}^2P_{3/2}$	m_J	$-3/2$	$-1/2$	$+1/2$	$+3/2$
	$g m_J$	-2	$-2/3$	$+2/3$	$+2$
${}^2S_{1/2}$	m_J		$-1/2$	$+1/2$	
	$g m_J$		-1	$+1$	

Разрешенные переходы между компонентами мультиплетов (компонентами тонкой структуры) ${}^2P_{3/2}$ и ${}^2S_{1/2}$ удовлетворяют правилу отбора $\Delta m_J = m_J^{(1)} - m_J^{(2)} = 0, \pm 1$. Остальные переходы сильно подавлены. Разрешенные переходы и соответствующие им номера испускаемых спектральных линий с указанием поляризации (π или σ) приведены в таблице:

Переходы $m_J^{(1)} \rightarrow m_J^{(2)}$	Поляризация	$(gm_J)^{(1)} - (gm_J)^{(2)}$	№ линии
$-3/2 \rightarrow +1/2$	подавлен σ	$-2 - (-1) = -1$	2
$-3/2 \rightarrow -1/2$			
$-1/2 \rightarrow +1/2$	σ	$-2/3 - 1 = -5/3$	1
$-1/2 \rightarrow -1/2$	π	$-2/3 + 1 = 1/3$	4
$+1/2 \rightarrow +1/2$	π	$2/3 - 1 = -1/3$	3
$+1/2 \rightarrow -1/2$	σ	$2/3 + 1 = 5/3$	6
$3/2 \rightarrow +1/2$	подавлен σ	$2 - 1 = 1$	5
$3/2 \rightarrow -1/2$			

Смещенные линии расположены симметрично относительно несмещенной: три линии смещены влево (1, 2, 3), остальные три — вправо (4, 5, 6). Всего получается шесть смещенных компонент.

Магнитное поле считается слабым, если ларморовская частота $\Omega = eB/(2m_e c)$ мала по сравнению с частотой $2\pi c \Delta\lambda/\lambda^2$. Это дает $B \ll \ll (4\pi m_e c^2 \Delta\lambda)/(e\lambda^2)$. В этом случае получается сложный эффект Зеемана. Для D -линии натрия должно быть $B \ll 3,7 \cdot 10^5$ Гс. В противоположном случае эффект Зеемана будет простым.

6.28. $\Delta \mathcal{E}_B = \mu_B B = \hbar \Omega = \hbar \frac{eB}{2mc}$; число уровней равно числу проекций L на B и равно $2L + 1 = 7$.

6.29. $\Delta \mathcal{E}_B = \mu_B B (\Delta m_L + 2\Delta m_S) = \pm \mu_B B$, 0, т. е. как и должно быть в сильном поле на три компоненты, поскольку для электродипольных переходов $\Delta m_S = 0$, $\Delta m_L = \pm 1, 0$ (правила отбора).

$$\mathbf{6.30^*} \quad B = \frac{2\pi m_e c^2}{ed\Delta n}.$$

Решение. Из трех линий спектра центральная несмещенная линия не пройдет, если пластинка для нее имеет толщину $m\lambda$.

Боковые линии пройдут, если для их длин волн λ' и λ'' толщина пластинки будет $m\lambda' + \lambda'/2$ и, соответственно, $m\lambda'' - \lambda''/2$. Таким образом, кристаллическая пластинка с заданным d и Δn (рис. 164) должна удовлетворять условию

$$d\Delta n = m\lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda' = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda'',$$

где $\lambda' = \frac{2\pi c}{\omega + \Omega}$, а $\lambda'' = \frac{2\pi c}{\omega - \Omega}$ и ларморовская частота $\Omega = \frac{eB}{2m_e c}$. Отсюда

$$m + \frac{1}{2} = \frac{d\Delta n}{2\pi c} (\omega + \Omega); \quad m - \frac{1}{2} = \frac{d\Delta n}{2\pi c} (\omega - \Omega).$$

Вычитая эти равенства, получим

$$1 = \frac{d\Delta n}{2\pi c} 2\Omega = \frac{d\Delta n}{2\pi c} \frac{eB}{2m_e c},$$

откуда найдем искомое магнитное поле

$$B = \frac{2\pi m_e c^2}{ed\Delta n}.$$

Ответ не зависит ни от длины волны исходной линии, ни от ориентации пластинки относительно поля (рис. 164).

6.31. В сильном магнитном поле $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mu_B B (m_L + 2m_S)$. Уровень расщепится на 7 подуровней (рис. 165). Максимальная дополнительная энергия $\Delta U = 3\mu_B B = 3,5 \cdot 10^{-4}$ эВ.

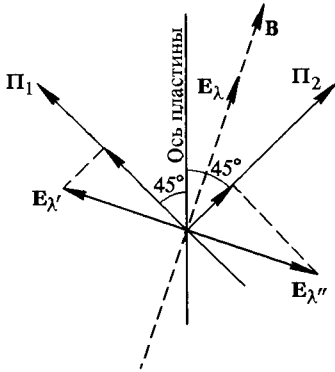


Рис. 164

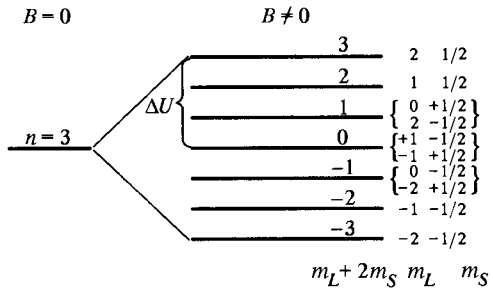


Рис. 165

6.32. $L = \frac{4\pi m_e c^2}{eB} = 4,3$ см.

6.33. $L = \frac{hc}{2n\lambda\mu_B B} = 2,8$ см.

6.34. Одна из линий дублета (переход ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$) расщепляется в магнитном поле на 6 компонент ($\pm 1; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{5}{3}$) Ω с расстоянием между крайними компонентами

$$\Delta\omega = \frac{5}{3}\Omega - \left(-\frac{5}{3}\Omega\right) = \frac{10}{3}\Omega,$$

где $\Omega = eB/(2m_e c)$ — ларморовская частота. (Аналогично, но на 4 компоненты ($\pm \frac{2}{3}; \pm \frac{4}{3}$) Ω , расщепляется вторая линия дублета — переход ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$).

Спектральный прибор для исследования расщепления должен не только разрешать расщепленные линии, но и не должен давать перекрытия порядков. Значит, область дисперсии $\Delta\lambda$ должна быть не меньше

$$\lambda \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{10}{3} \frac{eB}{2m_e c} = \frac{5}{6} \frac{\lambda^2 eB}{\pi m_e c^2}.$$

Подставляя сюда $\Delta\lambda = \lambda/m$, где $m = d(n-1)/\lambda$ — порядок спектра, получим

$$d \leq \frac{6\pi m_e c^2}{5eB(n-1)} \approx 2,6 \text{ см.}$$

6.35. $L_{\max} = \frac{2\pi m_e c^2}{eB} \approx 1,1$ см.

6.36. Нормальный (простой), так как рассматриваемая линия — синглет. Разрешающая способность интерферометра $N_{эфф}m$ должна быть не меньше $\frac{\omega}{\delta\omega}$, где $\delta\omega = \Omega = \frac{eB}{2m_e c}$. Величина $\delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2} \delta\omega$ должна быть меньше дисперсионной области λ/m , где $m = L/\lambda$ — порядок спектра. Из этих условий получаем

$$\frac{2\pi m_e c^2}{eBN_{эфф}} < L < \frac{2\pi m_e c^2}{eB},$$

или в рассматриваемом случае $0,54 \text{ мм} < L < 10,7 \text{ мм}$.

6.37: $\Delta\omega = \frac{eB}{2m_e c} \left(\pm \frac{13}{15}; \pm \frac{11}{15}; \pm \frac{1}{15} \right)$; (6 компонент).

Решение. Определим g -факторы состояний ${}^2D_{3/2}$ и ${}^2P_{1/2}$. Квантовые числа состояния ${}^2D_{3/2}$ соответственно равны $J_1 = 3/2$; $L_1 = 2$; $S_1 = 1/2$. Квантовые числа состояния ${}^2P_{1/2}$ соответственно равны $J_2 = 1/2$, $L_2 = 1$, $S_2 = 1/2$.

$$g_1 = \frac{3}{2} + \frac{S_1(S_1+1) - L_1(L_1+1)}{2J_1(J_1+1)} = \frac{4}{5}.$$

Аналогично, $g_2 = 2/3$. Таким образом, состояние ${}^2D_{3/2}$ расщепляется в магнитном поле на 4 подуровня (рис. 166) по m_J . Состояние ${}^2P_{1/2}$ расщепляется по m_J на два подуровня. Поскольку $g_1 \neq g_2$, то спектральная линия расщепляется в магнитном поле B в соответствии с правилами отбора ($\Delta m_J = 0, \pm 1$) на шесть компонент. Это сложный эффект Зеемана. Общая формула для расчета расщепления

$$\omega = \omega_0 + \frac{\mu_B B}{\hbar} (g_1 m_{J1} - g_2 m_{J2}),$$

или

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{eB}{2m_e c} (g_1 m_{J1} - g_2 m_{J2}) = \Omega \left(\pm \frac{13}{15}; \pm \frac{11}{15}; \pm \frac{1}{15} \right),$$

где Ω — ларморовская частота.

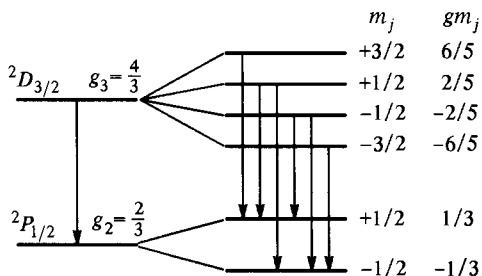


Рис. 166

6.38. Зеемановское расщепление в магнитном поле $\Delta\lambda_B = \frac{\Delta\epsilon\lambda^2}{2\pi\hbar c} \sim \frac{\mu_B B \lambda^2}{2\pi\hbar c} \sim 0,1 \text{ \AA} \ll \Delta\lambda = 38\text{ \AA}$ (расщепление в результате спин-орбитального

взаимодействия). Поэтому поле слабое, эффект аномальный (сложный). Одна линия дублета расщепится на шесть линий, другая — на четыре (см. задачу 6.34).

$$6.39. B \approx \frac{\pi \hbar c \Delta \lambda}{\mu_B \lambda^2} \approx 3 \text{ кГс.}$$

$$6.40. \frac{m_\mu}{m_e} = \left(\frac{3R_\infty}{4 \cdot 2\pi \hbar \nu} - 1 \right)^{-1} = 204,585.$$

$$6.41. \Delta \mathcal{E}_{sl} \approx \frac{e^2 \hbar^2}{2m_e c^2 n^6 r_1^3} l s \cos \hat{\mathbf{l}} \mathbf{s} \approx 0,91 \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \approx 0,57 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

$\Delta \mathcal{E}_{sl}$ можно найти приближенно. Для этого надо перейти в систему координат, связанную с электроном. В этой системе вращающийся протон создает магнитное поле \mathbf{B} , с которым и взаимодействует спиновый магнитный момент $\boldsymbol{\mu}_s$. Для оценки достаточно считать, что векторы \mathbf{B} и $\boldsymbol{\mu}_s$ коллинеарны (точный расчет должен был бы учесть, что $\cos \hat{\mathbf{l}} \mathbf{s} \neq 1$). Укажем, что

$$\frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{l})}{r^3} = |\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{l}| \frac{\cos \hat{\mathbf{s}} \mathbf{l}}{n^3 r_1^3}, \quad \text{где } |\mathbf{s}| = s; \quad |\mathbf{l}| = l; \quad \cos \hat{\mathbf{s}} \mathbf{l} = \pm 1.$$

Тогда

$$\Delta \mathcal{E}_{sl} \approx \frac{e^2 \hbar^2}{2m_e c^2 n^6 r_1^3} l s \cos \hat{\mathbf{l}} \mathbf{s} \approx 0,91 \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \approx 0,57 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

При точном расчете

$$\Delta \mathcal{E}_{sl} = \frac{e^2 \hbar^2}{4m_e c^2 r_1^3} \frac{1}{n^3 l} \frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{(l + \frac{1}{2})(l+1)} = \frac{\mu_B^2}{8r_1^3} = 4,53 \cdot 10^{-5} \text{ эВ,}$$

где $n = 2$; $l = 1$; $j_1 = 3/2$; $j_2 = 1/2$; $s = 1/2$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

Отличие в 8 раз!

$$6.42. \Delta \lambda = 2\pi \hbar c \left(\frac{1}{10,2 - \Delta_2} - \frac{1}{10,2 + \Delta_1} \right) \approx \frac{\hbar c}{(10,2)^2} (\Delta_1 + \Delta_2) \approx 0,0004 \text{ нм,}$$

где 10,2 эВ — значение энергии кванта нерасщепленной первой линии серии Лаймана (переход $n = 3 \rightarrow n = 1$); $\Delta_1 = \frac{1}{32} \frac{\mu_B^2}{r_1^3}$; $\Delta_2 = \frac{2}{32} \frac{\mu_B^2}{r_1^3}$.

$$6.43. \frac{\Delta \mathcal{E}_{sl} |_{J+1, J}}{\Delta \mathcal{E}_{sl} |_{J, J-1}} = \frac{J+1}{J}.$$

6.44* Решение. Зеемановское расщепление должно быть больше доплеровского уширения за счет теплового движения атомов (в основном, водорода) и вращения звезды, т. е.

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{2\mu_B B}{\hbar \omega_0} \geq \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right)_{\text{тепл}} + \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right)_{\text{вращ}} = \frac{v_{\text{тепл}}}{c} + \frac{v_{\text{вращ}}}{c} \approx \frac{v_{\text{тепл}}}{c}.$$

Окончательно получим

$$B \geq \frac{\hbar \omega_0}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{2kT}{m_p}} \approx 1,8 \text{ кГс.}$$

$$6.45. B = \frac{Ry}{\mu_B} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \approx \frac{Ry}{\mu_B} \frac{1}{n^4} \approx 2,3 \cdot 10^5 \text{ Гс, где } n \approx n_2 \approx n_1 = 10.$$

$$6.46. \Delta \mathcal{E} \approx \frac{m_e c^2}{1024} \alpha^4 \approx 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ.}$$

6.47. $(J + I) : (J + I - 1) : (J + I - 2) : \dots$ — правило интервалов Ланде.

6.48. $\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{|\Delta \mathcal{E}_{\text{ст}}|} = 28,1 \text{ см, где } \Delta \mathcal{E}_{\text{ст}} = 2g_{\text{сп}}g_s \frac{\mu_{\text{яд}}\mu_B}{r_B^3}, g_s = 2$ — спиновый g -фактор электрона. Экспериментальное значение $\lambda = 21 \text{ см}$. Этот результат получается и при теоретическом рассмотрении с учетом реального (неоднородного) распределения плотности спинового магнитного момента электрона.

Заметим однако, что для оценки величины сверхтонкого расщепления атомных состояний обычно считается, что это диполь-дипольное взаимодействие магнитных моментов электронов и ядра. В данной задаче это магнитное взаимодействие электрона и протона, что приводит к оценке $\Delta \mathcal{E} = 2 \frac{g_{\text{сп}}\mu_{\text{яд}}\mu_B}{3r_B^3}$, и это соответствует длине волны перехода $\lambda \approx 1 \text{ м}$. Эта оценка достаточно сильно отличается от экспериментального значения $\lambda = 21 \text{ см}$. Ясно, что это обусловлено грубостью приближения, поскольку электронная орбита здесь считается классической. На самом деле электронная плотность «размазана» в объеме порядка $\frac{4}{3}\pi r_B^3$. Если считать, как указано в условии, что электронная плотность однородна по объему шара радиусом r_B , то модельная оценка и эксперимент отличаются немного меньше.

$$6.49. \Delta \mathcal{E}_{\text{ст}} = \mathcal{E}_{\text{ст}}(F = 2) - \mathcal{E}_{\text{ст}}(F = 1) = 4g_j g_{\text{сп}} \frac{\mu_{\text{яд}}\mu_B}{n r_B^3} = 0,9 \cdot 10^{-7} \text{ эВ, где } n = 2, g_j = \frac{4}{3} \text{ — фактор Ланде для электрона.}$$

$$F = \mathbf{j} + \mathbf{s}_p, F = \begin{cases} 3/2 + 1/2 = 2 \\ 3/2 - 1/2 = 1 \end{cases} \text{ — это полный угловой момент атома.}$$

6.50. $\Delta \mathcal{E}_H \approx 0,59 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}$. Радиус позитрония в $2p$ -состоянии $r = 8r_1$, где r_1 — радиус боровской орбиты. Отношения частоты излучения позитрония к частоте излучения атомарного водорода

$$\frac{\nu_{\text{поз}}}{\nu_H} = \frac{m_p}{8^3 \cdot 2,79m_e} \approx 1,285, \text{ откуда } \Delta \mathcal{E}_{\text{поз}} \approx 0,76 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

6.51* Такое состояние невозможно. Если бы оно было возможно, то радиус электронной орбиты в таком «атоме» был бы много меньше комптоновской длины волны нейтрона.

Решение. При нерелятивистском рассмотрении полная энергия системы должна быть отрицательной:

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\mu_e \mu_n}{r^3} < 0.$$

Из соотношения неопределенностей $pr \sim \hbar$ выразим импульс электрона через r и подставим в предыдущее неравенство:

$$\mathcal{E} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{\mu_e \mu_n}{r^3}.$$

Радиус стационарной орбиты электрона оценим из минимума энергии $\frac{d\mathcal{E}}{dr} = 0$, откуда $r = \frac{3\mu_e \mu_n}{\hbar^2} m_e \approx 8 \cdot 10^{-16}$ см $\ll \frac{\hbar}{m_n c} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ см — комптоновской длины волны нейтрона. Последнее очевидное неравенство показывает неправомочность рассмотрения нейтрона в этой задаче как точечной частицы.

6.52. $B = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{4\mu m d^7}.$

6.53. $B \geq \frac{m^2 c e^3}{\hbar^3} \approx 10^9$ Гс.

6.54. $\mathcal{E} \approx \pm \frac{\mu}{r^3} \approx 3,2 \cdot 10^{-24}$ эрг = $2 \cdot 10^{-12}$ эВ.

6.55. $p_{ат} = \frac{2\pi \hbar c}{\lambda E} \approx 4,3 \cdot 10^{-18}$ ед. СГСЭ; $l = \frac{p_{ат}}{e} \approx 1$ Å.

6.56. Решение. Поскольку в сильных полях \mathbf{LS} -связь разрывается, можно считать, что векторы \mathbf{L} и \mathbf{S} прецессируют вокруг вектора \mathbf{B} независимо. Таким образом, сохраняющимися величинами являются L^2, S^2, L_z, S_z и

$$\langle U_{SL} \rangle = A \langle \mathbf{SL} \rangle = A \langle (L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z) \rangle = A \langle (L_z S_z) \rangle = A m_L m_S.$$

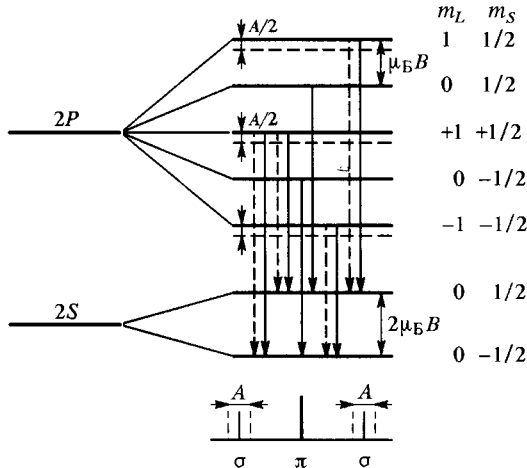


Рис. 167

Расщепление линий показано штрихами на рис. 167. В спектре излучения π -линия не расщепляется (у нее $m_L = 0$), а σ -линии становятся дублетами, раздвинутыми на величину A/\hbar [с⁻¹]. Экспериментально эффект наблюдался на Li.

6.57. $g = 0,34$; $\mu = g\mu_{\text{яд}} I = 0,85\mu_{\text{яд}}$.

6.58. Сигнал в магнитном поле пропорционален разности заселенности подуровней $\Delta n \approx N \frac{\mu B}{kT}$. Увеличение сигнала $a = \frac{A_0}{A_1} = \frac{\Delta n_0}{\Delta n_1} \approx \frac{B_0}{B} = 100$.

6.59. Сигнал в резонансе $\propto (h\nu)_{\text{рез}}^2 \frac{N_0}{kT} \propto \nu^2$, т. е. увеличится в четыре раза.

6.60* $T_{\text{min}} \approx \frac{h^2 \nu^2 I^2}{B^2 k d^3} \approx 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$

Решение. В методе адиабатического размагничивания поле \mathbf{B} переводит решетку в парамагнитное состояние, в котором магнитные моменты ядер ориентируются по полю \mathbf{B} . При этом $kT_{\text{нач}} \ll \mu_{\text{яд}} B$. При снятии внешнего поля происходит разупорядочение системы и понижение ее температуры. Выделившееся тепло отводится, и процесс можно повторить. При полном разупорядочении можно получить $T \approx 0 \text{ К.}$ Однако этого не происходит, поскольку есть взаимодействие, приводящее систему к установлению антиферромагнитного упорядочения. В принципе наличие энергии взаимодействия любой природы устанавливает предел на минимально достижимую температуру T_{min} , определяемую условием

$$kT_{\text{min}} \approx \mathcal{E}_{\text{вз}}$$

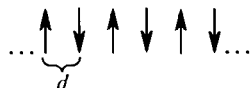


Рис. 168

Установление антиферромагнитного упорядочения в цепочке ядер ^{63}Cu (рис. 168) происходит за счет магнитного (диполь-дипольного) взаимодействия атомов. В приближении ближайших соседей энергия взаимодействия $\mathcal{E}_{\text{вз}} = \mu^2/d^3$. Из условия на ядерный магнитный резонанс следует, что магнитный момент ядра ^{63}Cu $\mu = g_I \mu_{\text{яд}} I$, где $g_I = \frac{h\nu}{\mu_{\text{яд}} B}$, от-

куда энергия взаимодействия атомов

$$\mathcal{E}_{\text{вз}} = \frac{g_I^2 \mu_{\text{яд}}^2 I^2}{d^3} = \left(\frac{h\nu I}{B} \right)^2 \frac{1}{d^3},$$

а также

$$T_{\text{min}} = \left(\frac{h\nu I}{B} \right)^2 \frac{1}{k d^3} \approx 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

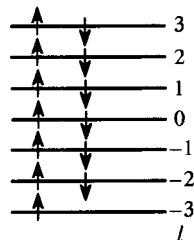


Рис. 169

6.61* $\nu_{\text{рез}} = 1,6 \text{ ГГц.}$

Решение. Поскольку электронные оболочки $5s$ и $5p$ полностью заполнены, то парамагнитные свойства иона определяются 13 электронами незаполненной $4f$ -оболочки. В соответствии с первым правилом Хунда эти электроны располагаются так, чтобы образовать максимальный спин S_{max} , и при данном S_{max} — максимальный орбитальный момент L_{max} (рис. 169). На f -оболочке ($l = 3$) имеется $2(2l + 1) = 14$ мест, тринадцать из которых заняты. Поскольку в квантовой физике за величину момента принимают значение его максимальной проекции на заданную ось (в единицах \hbar), то

$$(S_z)_{\text{max}} = \frac{1}{2}; \quad (L_z)_{\text{max}} = 3 + 2 + 1 + 0 - 1 - 2 = 3.$$

В соответствии со вторым правилом Хунда

$$J = L + S = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Вычислим g -фактор

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{8}{7}.$$

Резонансную частоту ЭПР найдем по формуле

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{g\mu_B B}{h} = 1,6 \text{ ГГц}.$$

6.62. $\nu = 1,12 \text{ ГГц}$ ($S = 1$; $L = 5$; $J = 4$; $g = 4/5$).

6.63. $M_0 = \frac{N_A \rho J h \nu}{B_{\text{рез}} A} = 2980 \text{ Гс}$, где A — атомная масса Dy.

6.64. $M_0 = \frac{N_A \rho}{A} g \mu_B J = 2723 \text{ Гс}$, где A — атомная масса эрбия Er,

$$\nu = \frac{g\mu_B B}{h} \approx 1,68 \text{ ГГц}, \text{ где } g = 6/5.$$

6.65. Для полученной конфигурации атома $S_{\text{max}} = 3/2$, $L_Z^{\text{max}} = 2$, $J = 1/2$, т. е. состояние $4D_{1/2}$. При этом $g = 0$, что означает, что $\mu_{\text{сумм}} \perp \mathbf{J}$. Таким образом $\mu_J = 0$, а значит, пучок не расщепится.

6.66* $\mu = \frac{LkT}{B\hbar N_A} = 2,62 \mu_{\text{яд}} = 13,25 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс}$.

Решение. Молярная масса тефлона $n \cdot 50 \text{ г/моль}$, поэтому образец тефлона массой 50 г содержит $1/n$ молей тефлона. В этом образце в соответствии с химической формулой содержится $N_0 = 2N_A n \frac{1}{n} = 2N_A$ атомов фтора. На



Рис. 170

рис. 170 изображена схема расщепления уровней ядра фтора в магнитном поле. Так как спин ядра равен $1/2$, то получается двухуровневая система. Из полного числа N_0 ядер на верхнем уровне находятся N_2 ядер фтора. Пусть $N_2 = N$. На нижнем уровне остается $N_1 = N_0 - N$ ядер. Разность

$\Delta N = N_1 - N_2 = N_0 - 2N$. В соответствии с распределением Больцмана

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N}{N_0 - N} = \exp\left(-\frac{\Delta \mathcal{E}}{kT}\right),$$

где $\Delta \mathcal{E} = 2\mu B$, μ — магнитный момент ядер фтора.

Из этого следует

$$N = \frac{N_0 \exp(-\Delta \mathcal{E}/kT)}{1 + \exp(-\Delta \mathcal{E}/kT)};$$

$$\Delta N = N_0 - 2N = N_0 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\Delta \mathcal{E}}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\Delta \mathcal{E}}{kT}\right)} \approx N_0 \frac{\frac{\mu B}{kT}}{1 - \frac{\mu B}{kT}} \approx \frac{\mu B}{kT} N_0.$$

Здесь мы учли, что $\frac{\mu_{\text{яд}} B}{kT} = 1,4 \cdot 10^{-6} \ll 1$ и поэтому разложим экспоненты в ряд. При снятии поля половина ядер из ΔN разориентируется, т. е. образец получит момент импульса

$$L = \frac{\Delta N}{2} \hbar = \frac{1}{2} \frac{\mu_B \hbar}{kT} N_0 = \frac{\mu_B \hbar N_A}{kT},$$

откуда и определим магнитный момент ядра фтора

$$\mu = \frac{LkT}{B\hbar N_A} = 13,25 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс} = 2,62\mu_{\text{яд}},$$

где $\mu_{\text{яд}} = 5,05 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс — ядерный магнетон Бора. При написании этой формулы мы учли, что магнитный момент ядра ^{19}F определяется неспаренным протоном, находящемся в состоянии $2s_{1/2}$ (это один протон сверх заполненной оболочки из 8 протонов). Поскольку в этом состоянии орбитальный момент $l = 0$, то у этого протона угловой момент является чисто спиновым и равен $\hbar/2$. При перевороте спина угловой момент изменяется на \hbar .

6.67. $B > \frac{\Delta \mathcal{E}}{2\mu_B} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Гс.}$

6.68*. $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-6}.$

Решение. В магнитном поле атомы водорода поляризуются из-за того, что проекция их магнитного момента на направление поля принимает два значения $\pm \mu_B$. Как в любой двухуровневой системе, полное число атомов $N_0 = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$. Отношение числа атомов Н со спином по полю N_{\uparrow} к числу атомов со спином против поля N_{\downarrow} (рис. 171).

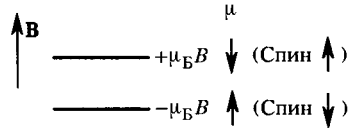


Рис. 171

отсюда
$$\frac{N_{\downarrow}}{N_{\uparrow}} = \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right),$$

$$N_{\uparrow} = \frac{N_0}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}; \quad N_{\downarrow} = \frac{N_0 \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}.$$

Поскольку $N_{\downarrow} < N_{\uparrow}$, то число атомов с антипараллельными спинами равно $2N_{\downarrow}$, а их относительное число

$$\alpha = \frac{2N_{\downarrow}}{N_0} = \frac{2 \exp[-2\mu_B B/(kT)]}{1 + \exp[-2\mu_B B/(kT)]} \approx 2 \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right) \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

6.69*. $T_{\text{max}} \approx \frac{\mu_B^2}{ka^3} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ К.}$

Решение. См. также задачу 6.60. Нагревание всегда разупорядочивает структуру. Поэтому $kT_{\text{max}} \approx \mathcal{E}_{\text{вз}}$. Энергия магнитного взаимодействия атомов $\mathcal{E}_{\text{вз}} \approx \mu^2/a^3$. Для оценки магнитного момента атома разумно взять магнетон Бора, поскольку электронный магнитный момент $\mu \leq \mu_B$. Отсюда $T_{\text{max}} \approx \mu_B^2/(ka^3) \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ К.}$

Эта оценка ясно показывает, что чисто магнитно-дипольное взаимодействие не может объяснить наблюдаемую величину температуры Кюри ферромагнетиков $T_K \sim 10 \div 1000$ К. Магнитное упорядочение у ферромагнетиков имеет другую природу — обменное взаимодействие, которое по своей сути является электростатическим (см. задачу 6.78). Величина электростатического взаимодействия двух электронов, находящихся на расстоянии a порядка e^2/a , что соответствует температуре упорядочения $T \sim e^2/(ka) \simeq 5 \cdot 10^4$ К. Т. к. обменное взаимодействие составляет обычно $(0,01 \div 0,1)$ долю электростатического, то видно что это обеспечивает наблюдаемые T_K практически всех материалов.

6.70* $\mathcal{E}_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$; $\omega_c = \frac{eB}{m_e c}$ — циклотронная частота; $\mathcal{E}_0 = 5,8 \cdot 10^{-6}$ эВ.

Решение. В магнитном поле электрон движется по окружности с циклотронной частотой $\omega_c = \frac{eB}{mc}$. Такое движение можно описать изменением только одной координаты — угла поворота. Тем самым задача сводится к задаче об одномерном осцилляторе с законом квантования $\mathcal{E}_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$.

Покажем как это можно получить используя уравнения Гамильтона. В магнитном поле соотношение между импульсом \mathbf{p} и скоростью \mathbf{v} частицы не имеет привычной формы $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Соотношение между \mathbf{p} и \mathbf{v} в присутствии магнитного поля можно получить двумя способами. Первый из них состоит в том, что когда частица из области $B = 0$ попадает в область $B \neq 0$ (либо B как-либо меняется от нуля до B_0), то возникает вихревое электрическое поле \mathbf{E} . Согласно уравнению Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A},$$

откуда следует, что $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. За время возникновения поля оно меняет скорость частицы

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

откуда интегрированием получаем

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 - \frac{q}{c} \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dt = \mathbf{p}_0 - \frac{q}{c} \mathbf{A}.$$

Отсюда следует, что $m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} = \text{const}$, и эта константа не зависит от наличия поля. Эту константу можно рассматривать как эффективный импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$. Для электрона ($q = -e$) $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$.

Второй способ состоит в том, что полный импульс заряженной частицы складывается из двух частей $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{кин}} + \mathbf{p}_{\text{пол}}$, где $\mathbf{p}_{\text{кин}} = m\mathbf{v}$, а $\mathbf{p}_{\text{пол}}$ — импульс электромагнитного поля, образованного электрическим (кулоновским) полем частицы и постоянным магнитным полем внешних источников.

$$\mathbf{p}_{\text{пол}} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{B}] dV, \quad \text{где} \quad \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho = 4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

\mathbf{r} — положение частицы (при $v \ll c$ ее можно считать покоящейся и не учитывать магнитного поля, создаваемого ею самой). Поскольку $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, то можно показать, что в этих предположениях $\mathbf{p}_{\text{пол}} = \frac{q}{c} \mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$.

Энергия частицы в постоянном магнитном поле есть чисто кинетическая (без учета спина), поэтому гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} [p_x^2 + (p_y - m\omega_c x)^2 + p_z^2],$$

где $\omega_c = \frac{qB}{mc}$ — циклотронная частота. Мы рассматриваем общий случай $p_z \neq 0$. Классические уравнения движения Гамильтона

дают
$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}; \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \\ \dot{y} = \frac{p_y - m\omega_c x}{m}, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, \end{cases} \quad \text{а также} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = -(p_y - m\omega_c x)\omega_c, \\ \dot{p}_y = 0, \\ \dot{p}_z = 0. \end{cases}$$

Видно, что p_y и p_z являются интегралами движения, а y — не является интегралом движения. Это есть проявление того факта, что в магнитном поле $B_0 \parallel OZ$ x - и y -компоненты скорости частицы не могут иметь одновременно определенных соотношений. Обозначим $p_y = p_{y0} = \text{const}$; $p_z = p_{z0} = \text{const}$. Поскольку по условию задачи $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, то $p_{z0} = 0$.

Тогда $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} [p_x^2 + (p_{y0} - m\omega_c x)^2]$.

Сделаем замену переменных $x' = x + \frac{p_{y0}}{m\omega_c}$. Тогда $p_x = p'_x$ и

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_x'^2 + \frac{m\omega_c^2}{2} x'^2.$$

Мы свели таким образом гамильтониан частицы к гамильтониану *одномерного* гармонического осциллятора. Воспользовавшись результатами квантово-механической задачи о квантовом осцилляторе, запишем по аналогии энергию уровней, называемых уровнями Ландау:

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Это — система эквидистантных уровней. Каждый уровень имеет бесконечную кратность вырождения, т. к. энергия не зависит от p_y , $-\infty < p_y < +\infty$. При этом координата положения равновесия осциллятора $x' = 0$, т. е. $x = -\frac{p_{y0}}{m\omega_c}$ — не определена.

Минимальная энергия электрона $\hbar\omega_c/2 = 5,8 \cdot 10^{-6}$ эВ. Учет спина электрона приводит к добавке $(\boldsymbol{\mu} \mathbf{B})$ в энергию и спиновому расщеплению уров-

ней $2m_s\mu_B B$, ($m_s = \pm 1/2$). Для свободного электрона $\mu_B B = \hbar\omega_c/2$. На рис. 172 изображено расщепление уровней. Стрелками изображено направление магнитных моментов электрона. Нижнее состояние определяется тем, что $\boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{B}$. При этом спин \mathbf{s} антипараллелен полю \mathbf{B} .

$$6.71^* S_{\min}^p = \frac{\pi\hbar eB}{c} \approx 1,66 \cdot 10^{-43} \text{ эрг}\cdot\text{Г}; S_{\min}^R = \frac{\pi\hbar c}{eB} = 6,56 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2.$$

Решение. Условие вращения электрона в магнитном поле по окружности

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = \frac{e}{c} v_{\perp} B$$

дает в координатном пространстве (\mathbf{R} -пространстве) радиус ларморовского кружка

$$R = \frac{mc}{eB} v_{\perp}.$$

Преобразуем это выражение:

$$R^2 = \left(\frac{mc}{eB}\right)^2 v_{\perp}^2 = \frac{2mc^2}{e^2 B^2} \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{2mc^2}{e^2 B^2} \mathcal{E}_{\perp},$$

где \mathcal{E}_{\perp} — кинетическая энергия поперечного движения частицы. Так как \mathcal{E}_{\perp} квантуется, т. е. $\mathcal{E}_{\perp} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$, то квантуется и квадрат радиуса орбиты, т. е. площадь

$$S_n = \pi R_n^2 = 2\pi \frac{mc^2}{e^2 B^2} \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Запишем далее уравнение движения (\mathbf{R} — это проекция \mathbf{r} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B})

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{B} \right].$$

Интегрируя и отбрасывая постоянную интегрирования, получаем

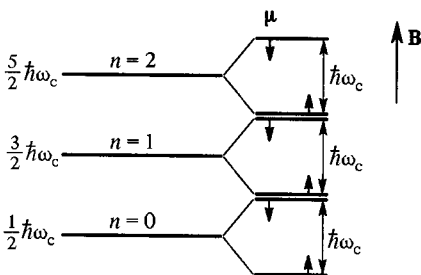


Рис. 172

$\mathbf{v} = \frac{e}{mc} [\mathbf{r}\mathbf{B}]$. Поскольку $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $\mathbf{r} \perp \mathbf{B}$, то $\mathbf{v}_{\perp} = \frac{eB}{mc} [\mathbf{R}, \mathbf{z}]$.

Отсюда видно, что в импульсном пространстве (или пространстве скоростей) траектория получается умножением на $eB/(mc)$ и ее поворотом на 90° вправо (по часовой стрелке), если смотреть с конца вектора \mathbf{B} .

Таким образом, траектория электрона в пространстве скоростей — тоже окружность и

$$S_n^v = \pi v_{\perp}^2 = \pi R_n^2 \left(\frac{eB}{mc}\right)^2 = 2\pi \frac{\hbar\omega_c}{m} \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Минимальная площадь $S_0^v = \frac{\pi \hbar \omega_c}{m}$, или, в импульсном пространстве,

$$S_{\min}^p = S_0^p = m^2 v_{\perp}^2 \pi = \pi m \hbar \omega_c = \frac{\pi \hbar e B}{c} = 1,66 \cdot 10^{-43} \text{ эрг} \cdot \text{г.}$$

Минимальная площадь в \mathbf{R} -пространстве

$$S_{\min}^{\mathbf{R}} = \pi \frac{m c^2}{e^2 B^2} \hbar \omega_c = \frac{\pi \hbar c}{e B} = 6,56 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2.$$

Заметим, что из квантования площади в \mathbf{R} -пространстве следует *квантование магнитного потока*, пронизывающего орбиту электрона,

$$\Phi_n = \pi R_n^2 B = \Phi_0 \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

где $\Phi_0 = \frac{2\pi \hbar c}{e} = \frac{2\pi e}{\alpha}$, где α — постоянная тонкой структуры, а Φ_0 — минимальный магнитный поток (квант магнитного потока).

$$6.72^* \quad R = \frac{\gamma M}{c^2 \ln(m_e c^2 / \mathcal{E}_2)} \approx 7 \text{ км}; \quad B = \frac{\mathcal{E}_1 m_e c^2}{2\mu_B \mathcal{E}_2} = 4,77 \cdot 10^{12} \text{ Гс.}$$

Решение. Вблизи нейтронной звезды находится другая звезда (красный гигант), образующая с нейтронной звездой двойную систему. За счет сильного гравитационного поля происходит аккреция, т. е. захват протонно-электронной плазмы красного гиганта и ее падение на нейтронную звезду. При этом непрерывное (тормозное) рентгеновское излучение уносит выделяющуюся кинетическую энергию.

Магнитное поле у нейтронной звезды возникает в силу сохранения магнитного потока из первоначального поля звезды и ее «раскрутки». Предполагается, что исходной была звезда типа Солнца. На поверхности звезды «аннигиляционный» γ -квант имеет энергию, равную $m_e c^2 = 511 \text{ кэВ}$. После «преодоления» гравитационного поля он «краснеет» (см. задачу 1.4) и на поверхности Земли имеет энергию $\mathcal{E}_2 = 460 \text{ кэВ}$. Таким образом,

$$\ln \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_2} = \frac{\gamma M}{c^2 R},$$

откуда следует ответ

$$R = \frac{\gamma M}{c^2 \ln(m_e c^2 / \mathcal{E}_2)} \approx 7 \text{ км.}$$

В магнитном поле уровни энергии свободного электрона (уровни Ландау) $\mathcal{E}_n = \hbar \omega_c n = 2\mu_B B n$. Как и в первом случае, это излучение преодолевает гравитационное поле нейтронной звезды и на поверхности Земли имеет энергию $\mathcal{E}_1 = 50 \text{ кэВ}$. Таким образом,

$$\ln \frac{2\mu_B B}{\mathcal{E}_1} = \frac{\gamma M}{c^2 R}, \text{ откуда искомое поле } B = \frac{\mathcal{E}_1 m_e c^2}{2\mu_B \mathcal{E}_2} = 4,77 \cdot 10^{12} \text{ Гс.}$$

$$6.73^* \quad P = 0,3.$$

Решение. В силу несохранения четности при β -распаде число электронов, вылетевших по и против спина ядра, будет различным. Но если число ядер со спином вверх и вниз будет одинаковым, то результирующая асимметрия вылета исчезнет, и эффект несохранения четности не проявит-

ся. Поэтому необходимо иметь преимущественную поляризацию ядер, что достигается в магнитном поле при низких температурах.

В магнитном поле уровень ядра с $I = 1$ расщепляется на три подуровня, соответствующие значениям магнитного квантового числа $m_I = 1, 0, -1$ и расстояние между ними $\Delta \mathcal{E} = g \mu_{\text{яд}} H$. Отношение заселенностей подуровней равно:

$$\frac{N(m_1)}{N(m_2)} = \exp \left[\frac{(m_1 - m_2) g \mu_{\text{яд}} B}{kT} \right] = e^\alpha, \text{ где } m_1 = +1, m_2 = -1.$$

Искомая поляризация ядер

$$P = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} = 0,3.$$

Это означает, что только 30% распадов дадут асимметричный эффект, который наблюдается на симметричном фоне распадов остальных ядер.

6.74* $n = 2, l = 1$, число подуровней 5.

Решение. Главное квантовое число $n = \sqrt{\frac{Ry}{\mathcal{E}}} = 2$. При этом $n = n_r + l + 1$, где радиальное квантовое число n_r определяет число нулей радиальной части волновой функции на $(0, \infty)$, т. е. $n_r = 0$. Отсюда следует, что $l = 1$, и мы имеем $2p$ -состояние. Число подуровней равно 5 ($m_l + 2m_s = \pm 2; \pm 1; 0$).

6.75 $2s$ -состояние ($l = 0$); $2s + 1 = 2$ — число подуровней. Оно не зависит от величины поля \mathbf{B} , т. к. данный уровень — синглет.

6.76* $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1\,034\,571,4 \text{ \AA} \approx 0,01 \text{ см.}$

Решение. В схеме Рассела—Саундерса снятие вырождения и расщепления термина 3P по величине полного момента \mathbf{J} с образованием подуровней тонкой структуры ${}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0$ есть результат спин-орбитального взаимодействия. Энергия подуровней отличается от энергии термина на величину энергии спин-орбитального взаимодействия

$$\mathcal{E}_{LS} = A \langle (\mathbf{L}\mathbf{S}) \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) = \frac{A}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)].$$

При этом

$$\mathcal{E}({}^3P_2) - \mathcal{E}({}^3P_1) = [\mathcal{E}({}^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=2)] - [\mathcal{E}({}^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=1)] = 2A > 0.$$

Знак константы спин-орбитального взаимодействия однозначно связан с правилом Хунда: если занято меньше половины свободных мест, то ниже по энергии лежит состояние с меньшим J и получается т. н. нормальный мультиплет. Действительно, электронная конфигурация O^{2+} : $1s^2 2s^2 2p^2$ и в незаполненной L -оболочке, содержащей $2(2l+1) = 6$ мест, занято всего 2 места. Аналогично

$$\mathcal{E}({}^3P_1) - \mathcal{E}({}^3P_0) = [\mathcal{E}({}^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=1)] - [\mathcal{E}({}^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=0)] = A.$$

Согласно правилам Бора

$$\mathcal{E}({}^3P_2) - \mathcal{E}({}^3P_1) = \left[\mathcal{E}({}^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_1} \right] - \left[\mathcal{E}({}^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_2} \right] = hc \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$$

Аналогично

$$\mathcal{E}(^3P_1) - \mathcal{E}(^3P_0) = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}(^3P_2) - \mathcal{E}(^3P_1)) = \frac{hc}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$$

Откуда получаем ответ:

$$\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1\,034\,571,4 \text{ \AA} \approx 0,01 \text{ см.}$$

6.77. $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 15\,784 \text{ \AA}$ (см. решение задачи 6.76. Однако здесь получается обращенный мультиплет (т. к. число электронов в незаполненной L -оболочке равно 4), когда большей энергии соответствует меньшее J : состояние 3P_1 лежит выше по энергии состояния 3P_2).

6.78. $A = 0,4 \text{ эВ}; \mathcal{E}_k = +9,2 \text{ эВ.}$

Заметим, что энергия возбужденного состояния атома гелия $\mathcal{E}_{\text{пара}} = -W_{\text{пара}} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_k + A$, а $\mathcal{E}_{\text{орто}} = -W_{\text{орто}} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_k - A$, т. к. энергия обменного взаимодействия $V = -A(S(S+1) - 1) = \begin{cases} -A & \text{для ортогелия,} \\ +A & \text{для парагелия,} \end{cases}$ а энергия электронной конфигурации $1s^1 2s^1$ равна $\mathcal{E} = -68 \text{ эВ.}$

6.79. $\nu_{\text{рез}} = \frac{2\mu_B B}{h} = 18,7 \text{ ГГц.}$

6.80. $L = 6.$

§ 7. Ядерные модели. Радиоактивность. Эффект Мессбауэра

7.1. $\rho = \frac{m_N A - BA/c^2}{4\pi R^3/3} = 1,8 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3.$

7.2. $\mathcal{E}_k \approx \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} \approx 0,66 Z^2 A^{-1/3} \text{ [МэВ].}$

7.3* $\sigma \approx 1,4 \cdot 10^{20} \text{ эрг/см}^2 \approx 3 \cdot 10^{17} \sigma_{\text{Hg}}.$

Решение. В капельной модели ядра можно по аналогии с жидкой каплей также ввести поверхностное натяжение

$$\sigma = - \frac{E_{\text{пов}}}{S} = - \frac{E_{\text{пов}}}{4\pi R^2} = \frac{17 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} A^{2/3} \text{ эрг}}{4\pi \cdot 1,3^2 \cdot 10^{-26} \cdot A^{2/3} \text{ см}^2} = 1,4 \cdot 10^{20} \text{ эрг/см}^2,$$

что превышает поверхностное натяжение ртути примерно в $3 \cdot 10^{17}$ раз.

7.4* Решение. Энергия связи ядра

$$\mathcal{E}_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}(A, Z)] c^2.$$

Кроме того,

$$\mathcal{E}_{\text{св}} = f(A) - \mathcal{E}_k - \mathcal{E},$$

где через $f(A)$ обозначены вклады в энергию связи, не зависящие от Z . Отсюда масса ядра

$$M_{\text{я}}(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + [\mathcal{E}_k + \mathcal{E} - f(A)]/c^2.$$

Приближенно минимум $M_{\text{я}}(A, Z)$ можно найти, считая Z непрерывной переменной и полагая $(\partial M_{\text{я}}/\partial Z)_A = 0$. В результате получим

$$Z = \frac{A}{1,97 + 0,015A^{2/3}}.$$

При пользовании этой формулой нужно брать ближайшее целое значение Z :

A	Z	Ядро	A	Z	Ядро
10	5	${}_{5}^{10}\text{B}$	150	60	${}_{62}^{150}\text{Sm}$
50	23	${}_{23}^{50}\text{V}$	200	80	${}_{80}^{200}\text{Hg}$
100	44	${}_{44}^{100}\text{Ru}$			

7.5. $Z_0 = \frac{A/2}{1 + 7,5 \cdot 10^{-3} A^{2/3}}$. ${}^{27}\text{Mg}$ — β^- -активен; ${}^{29}\text{P}$ — β^+ -активен; ${}^{37}\text{K}$ — β^+ -активен; ${}^{67}\text{Cu}$ — β^- -активен.

7.6. $R_{\text{яд}} = \frac{e^2}{\Delta \mathcal{E}_{\text{св}}} = 1,9 \cdot 10^{13}$ см.

Решение. Прежде всего предполагаем, что расстояние между протонами не может быть больше размеров ядра в приближении точечных протонов, т. е. $R_{\text{яд}} \approx \langle r \rangle$. Кроме того, считаем, что разница в энергиях связи обоих ядер $\Delta \mathcal{E}_{\text{св}} = \mathcal{E}_{\text{H}} - \mathcal{E}_{\text{He}}$ целиком кулоновского происхождения, т. е. $\Delta \mathcal{E}_{\text{св}} = \mathcal{E}_{\text{кул}}$.

Энергия кулоновского взаимодействия протонов в ядре ${}^3\text{He}$ есть

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = \int \psi^* \frac{e^2}{r} \psi dV.$$

Здесь ψ — волновая функция системы нуклонов в ядре, r — расстояние между протонами. Интегрирование идет по объему ядра, т. е. считается, что ядро имеет жесткую форму и вне ядра $\psi \approx 0$. Конкретный вид ψ -функции в данном случае не нужен.

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = e^2 \int |\psi|^2 \frac{1}{r} dV = e^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle.$$

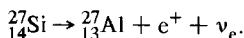
Будем считать, что $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx \frac{1}{\langle r \rangle}$, и величину $\langle r \rangle$ примем за размер ядра. Таким образом,

$$R_{\text{яд}} = \frac{e^2}{\Delta \mathcal{E}_{\text{св}}} = 1,9 \cdot 10^{-13}$$
 см.

7.7. $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см.

Решение. По отношению к ядерным силам протон и нейтрон ведут себя совершенно одинаково. Эта эквивалентность ядерных взаимодействий для протонов и нейтронов проявляется в так называемых зеркальных ядрах, получающихся друг из друга заменой протонов на нейтроны и наоборот. Именно такими парами и являются ядра ${}_{14}^{27}\text{Si}$ (14p + 13n) и ${}_{13}^{27}\text{Al}$ (13p + 14n). Одинаковость ядерных взаимодействий для протона и нейтрона носит название *зарядовой независимости* ядерных сил и является проявлением более общего свойства — изотопической инвариантности сильного взаимодействия.

Если бы изотопическая инвариантность ядерных сил была точным законом природы, то все параметры зеркальных ядер были бы одинаковыми и β -распад был бы запрещен законом сохранения энергии. Кулоновское взаимодействие нарушает зарядовую независимость и делает распад возможным.



Электрон не может «унести» больше энергии, чем выделяется при распаде. Таким образом,

$$\begin{aligned} m_e c^2 + \mathcal{E}_{\max} &= [M(\text{Si}) - M(\text{Al})]c^2 = \\ &= (m_p - m_n)c^2 + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} [Z_{\text{Si}}(Z_{\text{Si}} - 1) - Z_{\text{Al}}(Z_{\text{Al}} - 1)] = \\ &= -(m_n - m_p)c^2 + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (14 \cdot 13 - 13 \cdot 12), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{e^2}{r_0 A^{1/3}} = \frac{5}{78} [(m_n - m_p + m_e)c^2 + \mathcal{E}_{\max}].$$

И окончательно, $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см.

7.8. ${}^{11}\text{C}$, ${}^{11}\text{B}$: $\Delta \mathcal{E}_{\text{св}} = 2,8$ МэВ; $\Delta \mathcal{E}_{\text{к}} \approx 3,19$ МэВ;

${}^{13}\text{C}$, ${}^{13}\text{N}$: $\Delta \mathcal{E}_{\text{св}} = 3,0$ МэВ; $\Delta \mathcal{E}_{\text{к}} \approx 3,62$ МэВ.

Подсчет $\mathcal{E}_{\text{к}}$ выполняется по формуле $0,71 Z^2 A^{-1/3}$.

7.9. К-захват; β^+ -распад энергетически невозможен.

7.10. $\Delta M c^2 \approx \sqrt{2} M_{\text{Li}} c^2 \mathcal{E}_0 \approx 0,81$ МэВ.

7.11. $\mathcal{E} \approx 57$ эВ.

7.12. $\mathcal{E}_{\text{гп}} \approx 2,2$ МэВ.

Решение. Красная граница фоторасщепления дейтрона определяется энергией связи протона и нейтрона. На рис. 173 изображены потенциальная яма и волновая функция дейтрона. Вне ямы, где $U(r) = 0$, уравнение Шредингера для частицы с приведенной массой $\mu = m_{\text{N}}/2$ имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \psi = \mathcal{E} \psi,$$

где $\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$ — радиальная часть оператора Лапласа.

Подставляя в уравнение $\psi = A \exp(-\chi r)/r$, получим $\chi^2 \hbar^2 + 2\mu \mathcal{E} = 0$, откуда

$$\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2 \chi^2}{2\mu}.$$

Таким образом, минимальное значение энергии, достаточной для расщепления дейтрона,

$$\mathcal{E}_{\text{гп}} = \frac{\hbar^2 \chi^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2 \chi^2}{m_{\text{N}}} \approx 2,23 \text{ МэВ}.$$

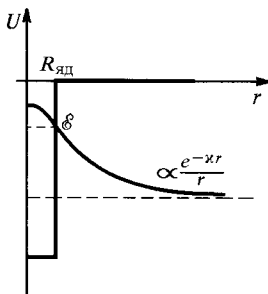


Рис. 173

7.13: $\mathcal{E}_{GR} = \hbar \frac{2,08}{R} \sqrt{\frac{2a_s}{m_N}} \approx 17,7 \text{ МэВ}$, где $a_s = 23,7 \text{ МэВ}$ — коэффициент в симметричном члене в формуле Вайцеккера, $R = 5,2 \text{ фм}$.

Решение. Если жесткость системы равна K , то упругая энергия $\mathcal{E} = K\varepsilon^2/2$, где ε — относительное смещение. Возвращающая сила, обусловленная симметричным членом в формуле Вайцеккера, стремится восстановить равномерную плотность протонов и нейтронов. Симметричный член в энергии меняется в расчете на 1 нуклон следующим образом:

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{A} a_s \frac{(A-2Z)^2}{A} = \frac{1}{2} 2a_s \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2,$$

где $a_s = 23,7 \text{ МэВ}$ — коэффициент в формуле Вайцеккера, N — число нейтронов.

Изменением кулоновской энергии при сжатии протонов вдвое можно пренебречь в силу относительной малости кулоновского члена в формуле Вайцеккера. Сравнивая \mathcal{E}_s с упругой энергией \mathcal{E} и полагая, что $(N-Z)/A$ — относительное смещение протонов относительно нейтронов, можно сделать вывод, что в расчете на один нуклон жесткость системы $K = 2a_s$. По формуле, данной в условии задачи, скорость распространения колебаний (скорость звука) $u^2 = K/m_N = 2a_s/m_N$, где m_N — масса нуклона.

Таким образом, энергия гигантского дипольного резонанса \mathcal{E}_{GR} в сферическом ядре с $A = 64$ (при $Z = N$)

$$\mathcal{E}_{GR} = \hbar k u = \hbar \frac{2,08}{R} u = \hbar \frac{2,08}{R} \sqrt{\frac{2a_s}{m_N}} \approx 17,7 \text{ МэВ},$$

Приведем другое решение данной задачи. Подсчитаем изменение энергии, непосредственно возникающее при смещении L нейтронов вправо, а L протонов влево. Тогда в левой половине будет $N/2 - L$ нейтронов и $Z/2 + L$ протонов, а в правой половине ядра $N/2 - L$ нейтронов и $Z/2 + L$ протонов (рис. 174).

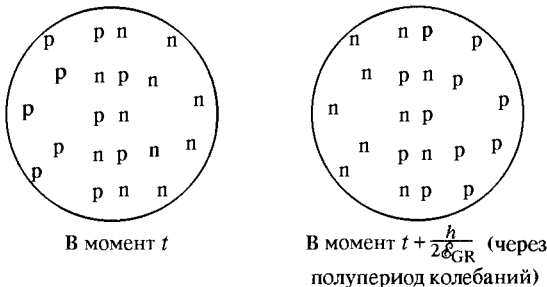


Рис. 174

Полная энергия, связанная с нарушением симметрии, есть

$$\mathcal{E}_s = \frac{(N/2 + L - Z/2 + L)^2}{A/2} a_s + \frac{(N/2 - L - Z/2 - L)^2}{A/2} a_s = \frac{16L^2}{A} a_s.$$

Приведем эту формулу к тому же виду $\mathcal{E} = K\varepsilon^2/2$ (см. первое решение). При этом становится очевидно, что максимальное число смещенных протонов или нейтронов равно $A/4$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{2} 2a_s A \left(\frac{L}{A/4} \right)^2,$$

откуда $K = 2a_s A$.

Далее легко видеть, что мы приходим к тому же выражению для \mathcal{E}_{GR} , что и в первом решении, поскольку полученное K следует либо привести к одному нуклону, т. е. поделить на A , либо воспользоваться формулой для расчета скорости u , приведенной в условии задачи,

$$u = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2a_s A}{Am_N}} = \sqrt{\frac{2a_s}{m_N}}.$$

Заметим, что эта модель достаточно хорошо описывает положение гигантского резонанса. Например, в ядре меди, у которого как раз $A = 64$, он наблюдается при энергии возбуждения 16 МэВ.

7.14. Нейтроны и протоны заполняют свои уровни независимо друг от друга, т. к. они не являются тождественными частицами. Первая оболочка $Z = N = 2$; $A = 4$ (He). Вторая оболочка $Z = N = 8$; $A = 16$ (O). Третья оболочка $Z = N = 20$; $A = 40$ (Ca).

7.15: $\mathcal{E}_{св} = |U_0| - \frac{5}{2} \hbar \sqrt{-\frac{2U_0}{m_N R_0^2}} \approx 12$ МэВ, где m_N — масса нуклона.

Решение. Радиус ядра кислорода ${}^{16}_8\text{O}$ $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{16} \approx 3,3 \cdot 10^{-13}$ см. Потенциальная энергия в однонуклонном приближении описывается выражением

$$U(r) = U_0 + \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

При $r \geq R_0$ потенциал $U(r) = 0$, и следовательно

$$\omega = \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}},$$

а уровни энергии имеют вид

$$\mathcal{E}_N = U_0 + \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right).$$

Картина уровней изображена на рис. 175. В пренебрежении конечным размером ямы уровни энергии эквидистантны. В силу зарядовой независимости ядерных сил (задача 7.7) уровни протонов и нейтронов в ядрах с $N = Z$ должны совпадать. В легких ядрах это действительно имеет место, поскольку в них вклад кулоновского взаимодействия в энергию связи незначителен. В случае ядра ${}^{16}_8\text{O}$ полностью оказываются заполненными протонные и нейтронные уровни с $N = 0$ и $N = 1$ (дважды магическое число 8 — по протонам и по нейтронам).

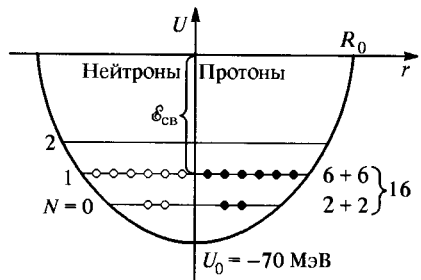


Рис. 175

На рис. 156 показано также, как отсчитывается искомая энергия связи $\mathcal{E}_{\text{св}}$ (от верхнего заполненного уровня до «потолка» ямы). Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\text{св}} \approx |U_0| - \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega,$$

где $N = 1$ (внешний нуклон). После преобразований получим

$$\mathcal{E}_{\text{св}} = |U_0| - \frac{5\hbar}{2} \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}} \approx 12 \text{ МэВ.}$$

$$7.16. \Delta\mathcal{E} = \hbar\omega = \frac{\hbar}{R_0} \sqrt{-\frac{2U_0}{m}} = 15,8 \text{ МэВ.}$$

7.17. $a^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu|U_0|}$; $a \approx 1,8 \cdot 10^{-13}$ см, где $\mu = \frac{m_p}{2}$ — приведенная масса дейтрона. Приведем также результат точного решения, полученного из условия сшивки волновых функций на границе (см. также задачи 3.18 и 3.12):

$$a = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu(|U_0| - \mathcal{E}_{\text{св}})}} \arccos \frac{\mathcal{E}_{\text{св}}}{|U_0|} = 1,82 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

$$7.18. R_d = \sqrt{r^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_N \mathcal{E}}} \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ см, где } m_N \text{ — масса нуклона.}$$

Здесь для оценки можно воспользоваться волновой функцией основного состояния дейтрона (см. задачу 7.12) $\psi \approx Ae^{-\kappa r}/r$, где $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m_N \mathcal{E}}$.

$$7.19. J \approx 1,4 \cdot 10^{-47} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

7.20. В силу радиоактивного равновесия между ^{238}U и ^{234}U $\lambda_4 N_4 = \lambda_8 N_8$ (вековое уравнение), откуда

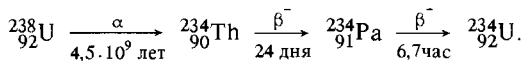
$$\frac{T_4}{T_8} = \frac{\lambda_8}{\lambda_4} = \frac{N_4}{N_8} = 5,5 \cdot 10^{-5}; \quad T_4 = 2,48 \cdot 10^5 \text{ лет.}$$

Период полураспада ^{234}U много меньше возраста Земли ($\approx 10^9$ лет); таким образом, наше предположение о наличии радиоактивного равновесия между ^{238}U и ^{234}U оправдано.

$$7.21. k_8(t) = \frac{k_8}{1 + k_5[e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} - 1]} \cdot 10^{-2}, \quad k_5(t) = 100 - k_8(t).$$

Если подставить числовые значения, то получается, что $4 \cdot 10^9$ лет тому назад содержание ^{235}U составляло 16,08%. Примерно $6 \cdot 10^9$ лет тому назад содержания ^{235}U и ^{238}U могли быть равными. Конечно, в момент образования Земли в ее составе имелись и другие изотопы урана (см. задачу 7.22).

7.22. С момента образования Земли за время $t = 4 \cdot 10^9$ лет содержание ^{234}U на Земле должно уменьшиться в $e^{(t \ln 2)/\tau_4} \approx e^{11180} \approx 10^{4855}$ раз. Если даже предположить, что в момент образования Земли на ней существовали только изотопы ^{234}U , то и тогда на Земле уже давно не осталось бы ни одного атома ^{234}U . Изотоп ^{234}U существует в природе благодаря α -распаду ^{238}U и β^- -распадам ^{234}Th и ^{234}Pa



Содержание ^{234}U находится из условия радиоактивного равновесия (см. задачу 7.20).

$$7.23. \frac{T_8}{\ln 2} = 6,45 \cdot 10^9 \text{ лет}; \quad \frac{T_5}{\ln 2} = 1,016 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

7.24. В связи с тем, что проникаемость кулоновского барьера экспоненциально зависит от ширины барьера, то ответ задачи оказывается чрезвычайно чувствителен к выбору приближения. Приведем три возможных формы ответа:

$$1) \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \exp \left\{ - \frac{4(Z-2)e^2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \left[\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \arccos \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{U_0}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} \arccos \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2}{U_0}} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2}{U_0} \left(1 - \frac{\mathcal{E}_2}{U_0}\right)} - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{U_0} \left(1 - \frac{\mathcal{E}_1}{U_0}\right)} \right] \right\} = 744;$$

$$2) \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \exp \left[\frac{2\pi(Z-2)e^2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \right) \right] = 942;$$

$$3) \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \exp \left[\frac{8(Z-2)e^2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \right) \right] = 6130,$$

где $U_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{R}$, R — радиус ядра с массовым числом $A - 4$.

Формулы 1)–3) получены для случая, когда вне ядра α -частица описывается плоской волной (обрыв барьера при $r = R$), что приближенно справедливо, если энергия α -частицы мала по сравнению с высотой кулоновского барьера. Полученные формулы справедливы также при вылете α -частицы «из центра» ядра, когда можно не учитывать центробежный барьер. При этом формула 1) представляет собой результат точного интегрирования; формула 2) является предельным случаем при $U_0 \rightarrow \infty$, а формула 3) есть результат интегрирования при $U(r) \gg \mathcal{E}$.

7.25. Зависимость периода полураспада от энергии (в МэВ) хорошо описывается законом Гейгера–Неттола

$$\lg T_{1/2} \approx A + \frac{B}{\sqrt{\mathcal{E}_\alpha}}.$$

Из условий задачи константы $A \approx -56,5$; $B \approx 148,3$. Искомый период полураспада равен $T_{1/2} \approx 3 \cdot 10^{84}$ лет.

$$7.26. \frac{T_p}{T_\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_p} = \exp \left[\frac{4\sqrt{2}Ze^2}{\hbar\sqrt{\mathcal{E}}} (Z_\alpha\sqrt{m_\alpha} - Z_p\sqrt{m_p}) \right] = e^{-169}, \quad T_p \approx 9 \cdot 10^{-57} \text{ с.}$$

В силу столь малых времен естественная протонная радиоактивность не наблюдается. Она обнаруживается экспериментально лишь в том случае, когда ей предшествует более медленный β -распад.

$$7.27. T_2 \sim 10^{12} \text{ лет.}$$

Решение. При выполнении условия $U \gg \mathcal{E}$ и $Z \gg 2$ проникаемость барьера равна (см. задачу 3.36)

$$D \approx \exp \left(- \frac{4\sqrt{2m}Z_\alpha Ze^2}{\hbar\sqrt{\mathcal{E}}} \right),$$

тогда $\frac{T_1}{T_2} = \exp \left[\frac{4\sqrt{2m} Z_\alpha e^2}{\hbar} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{\epsilon_1}} - \frac{Z_2}{\sqrt{\epsilon_2}} \right) \right] \approx e^{-4,9} = 7 \cdot 10^{-3}$ (здесь $Z_\alpha = 2$).

Откуда $T_2 \sim 10^{12}$ лет.

Заметим, что реальное ядро $^{152}_{65}\text{Tb}$ имеет период полураспада $1,1 \cdot 10^{14}$ лет при энергии α -частицы 2,14 МэВ.

7.28. $U_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{R} = 30,7$ МэВ; $d = \frac{2(Z-2)e^2}{g} - R = 36$ фм, где

$R = r_0 A^{1/3} \approx 7,9$ фм — радиус ядра.

7.29* $\varphi = \frac{\dot{N}\hbar}{8f} \approx 5 \cdot 10^{-11}$ рад = 50 град.

Решение. Электроны, вылетающие с поверхности диска, делятся на две равные части. Одна из них поглощается диском, а вторая, вылетающая в телесный угол 2π , покидает диск, унося момент импульса. Электрон, вылетающий с поверхности диска под углом θ (рис. 176), уносит момент импульса $\hbar/2$. Проекция этого момента на ось вращения равна $(\hbar/2) \cos \theta$. Поскольку все направления вылета равновероятны, то изменение момента импульса в единицу времени $\frac{dL}{dt} = \frac{\dot{N}}{2} \frac{\hbar}{2} \overline{\cos \theta}$, где черта означает усреднение по телесному углу 2π .

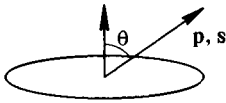


Рис. 176

$$\overline{\cos \theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \cos \theta \, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2}.$$

Таким образом $dL/dt = \dot{N}\hbar/8$. С другой стороны

$$\frac{dL}{dt} = f\varphi,$$

откуда и следует ответ

$$\varphi = \frac{\dot{N}\hbar}{8f} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ рад.}$$

7.30. $t = 1,57 \cdot 10^{17}$ с $\approx 5 \cdot 10^9$ лет (практически равно времени жизни Вселенной). Т. е. таких условий на Земле, по-видимому, не существовало.

7.31* $\tau_{\text{дип}} \approx 2 \cdot 10^{-16}$ с; $\tau_{\text{квад}} \approx 5 \cdot 10^{-13}$ с.

Решение. Число γ -квантов, излучаемых в единицу времени,

$$\frac{W}{\hbar\omega} = \frac{1}{\tau},$$

где τ — время жизни возбужденного уровня относительно излучения.

Дипольный момент $d = eR \sin \omega t$, где R — радиус ядра. Поэтому $\ddot{d} \approx eR\omega^2$ с точностью до коэффициента порядка единицы. Классическое выражение (данное в условии) для энергии дипольного излучения в единицу времени можно привести к виду:

$$W \approx \frac{2}{3c^3} e^2 R^2 \omega^4.$$

Таким образом, для дипольного излучения время жизни возбужденного уровня

$$\tau_{\text{дип}} = \frac{\hbar\omega}{W} \simeq \frac{3\hbar c^3}{2e^2 R^2 \omega^3}.$$

Если ввести $\lambda = \frac{c}{\omega} \simeq \frac{200}{\mathcal{E}[\text{МэВ}]}$ [фм] — приведенную длину волны γ -кванта с энергией \mathcal{E} в МэВ, то искомое время жизни

$$\tau_{\text{дип}} \simeq \frac{\hbar c}{e^2 \omega} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2 \simeq \frac{8 \cdot 10^{-20}}{\mathcal{E}} \left(\frac{200}{\mathcal{E}R}\right)^2 [\text{с}].$$

При $\mathcal{E} = 1$ МэВ и $R = 4$ фм (условие задачи) формула дает $\tau = 2 \cdot 10^{-16}$ с.

Для мультипольных (в частности — квадрупольных) переходов оценочная формула будет примерно такой же. Изменится только степень размера ядра (размера системы). Из электродинамики известно, что при разложении электрического поля в ряд по мультиполям параметром разложения является отношение размеров системы к расстоянию до точки наблюдения (безразмерная величина). Если в дипольный момент входит R в первой степени, т. е. $d \sim eR$, то в квадрупольный момент входит R^2 , а в момент порядка m — R^m . Таким образом, время излучения с моментом m равняется

$$\tau_m \approx \frac{8 \cdot 10^{-20}}{\mathcal{E}} \left(\frac{200}{\mathcal{E}R}\right)^{2m}.$$

Так, для $m = 2$ (квадруполь) $R = 4$ фм, $\mathcal{E} = 1$ МэВ, $\tau_{\text{квад}} \approx 5 \cdot 10^{-13}$ с.

$$7.32. t = -\frac{T_{1/2} \ln 0,1}{\ln 2} \approx 1,9 \cdot 10^4 \text{ лет.}$$

$$7.33. t_{\text{min}} = \frac{0,01 T_{1/2}}{\ln 2} \approx 80 \text{ лет.}$$

У к а з а н и е. Минимальный возраст, который можно определить, ограничивается статистикой отсчетов.

$$7.34. \beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{[\Delta \mathcal{E} a / (ch)]^2}{1 + [\Delta \mathcal{E} a / (ch)]^2}, \text{ где } \Delta \mathcal{E} = 110 \text{ кэВ; } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{\Delta \mathcal{E} a}{ch} \approx 28,5; \mathcal{E} = \gamma M_0 c^2 \approx 510 \text{ ГэВ.}$$

У к а з а н и е. Для возбуждения уровня в системе покоя ядра нужна частота, определяемая из условия $h\nu = \Delta \mathcal{E}$. Частота возбуждения есть

$$\nu' = \frac{\nu}{a'} = \frac{\nu}{a \sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

в направлении движения ядра.

$$7.35. \mu = -1,9(-\mu_{\text{яд}}/3) \approx 0,64\mu_{\text{яд}}.$$

Решение. Векторная модель сложения угловых моментов ядра ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$) и магнитных моментов ($\boldsymbol{\mu}_{\text{сум}} = \boldsymbol{\mu}_{\text{L}} + \boldsymbol{\mu}_{\text{S}}$) в самом общем виде изображена на рис. 177, на котором векторы моментов импульса должны быть отложены в единицах \hbar , а векторы магнитных моментов — в ядерных магнетонах Бора. Но в силу того, что для протона $g_{\text{lp}} = 1$, для нейтрона

$g_{In} = 0$ (в силу его электрической нейтральности), а спиновые g -факторы, соответственно, $g_{sp} = 5,58$ и $g_{sn} = -3,82$, рис. 177 не отражает (в смысле

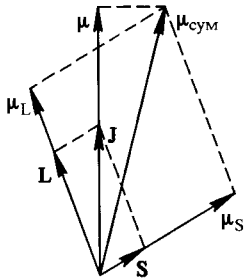


Рис. 177

масштабов) условие задачи, а лишь помогает понять правило сложения моментов. Средний магнитный момент ядра может быть направлен только вдоль \mathbf{J} , единственного сохраняющегося вектора в системе, $(\mu_{\text{сум}}) = \mu = g_{\text{J}} \mu_{\text{яд}} \mathbf{J}$. Умножим это равенство скалярно на \mathbf{J} и усредним по состоянию с заданными J, L, S . Тогда в силу того, что \mathbf{J} — сохраняющийся вектор, его можно внести под знак усреднения, и мы получаем:

$$\langle \mu_{\text{сум}} \mathbf{J} \rangle = g_{\text{J}} \mu_{\text{яд}} \langle \mathbf{J}^2 \rangle.$$

Поскольку $\mu_{\text{L}} = g_{\text{L}} \mu_{\text{яд}} \mathbf{L}$ и $\mu_{\text{S}} = g_{\text{S}} \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}$, то

$$g_{\text{S}} \langle \mathbf{S} \mathbf{J} \rangle + g_{\text{L}} \langle \mathbf{L} \mathbf{J} \rangle = g_{\text{J}} \langle \mathbf{J}^2 \rangle.$$

Используя теорему косинусов, получим

$$\frac{g_{\text{S}} \langle \mathbf{J}^2 + \mathbf{S}^2 - \mathbf{L}^2 \rangle}{2} + \frac{g_{\text{L}} \langle \mathbf{J}^2 + \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2 \rangle}{2} = g_{\text{J}} \langle \mathbf{J}^2 \rangle.$$

В квантовой физике справедливы соотношения

$$\langle \mathbf{J}^2 \rangle = J(J+1); \quad \langle \mathbf{S}^2 \rangle = S(S+1); \quad \langle \mathbf{L}^2 \rangle = L(L+1).$$

Используя их, получим

$$g_{\text{J}} = \frac{g_{\text{S}} + g_{\text{L}}}{2} + \frac{g_{\text{S}} - g_{\text{L}}}{2} \frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}.$$

В нашем случае магнитный момент ядра определяется состоянием нейтрона, находящегося на уровне $1p_{1/2}$, т. е. для нейтрона $g_{\text{L}} = g_{In} = 0$, $g_{\text{S}} = g_{sn} = -3,82$, $S = 1/2$; $L = 1$; $J = 1/2$. Подставляя эти данные, получим $g_{\text{J}} = 1,91 \cdot \frac{2}{3} \approx 1,273$; $\mu = g_{\text{J}} \mu_{\text{яд}} J \approx 0,64 \mu_{\text{яд}}$.

7.36. $\mu \approx -0,26 \mu_{\text{яд}}$.

7.37. $\frac{\Delta \epsilon_{\text{ст}}^{\text{H}}}{\Delta \epsilon_{\text{ст}}^{\text{D}}} = \frac{4}{3} \frac{g_{\text{sp}}}{g_{\text{sp}} + g_{\text{sn}}} = 4,23$.

Решение. В основном состоянии $\mathbf{L} = 0$, и магнитный момент имеет чисто спиновую природу. Спин водородного ядра $S_{\text{H}} = 1/2$, а дейтрона $S_{\text{D}} = 1$. Магнитный момент электрона $\mu_{\text{e}} = g_{\text{e}} \mu_{\text{B}} \mathbf{s}_{\text{e}} = 2 \mu_{\text{B}} \mathbf{s}_{\text{e}}$, а ядра $\mu_{\text{я}} = g \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}_{\text{я}}$. По определению для дейтерия

$$\mu_{\text{я}} = (g_{\text{sp}} \mathbf{s}_{\text{p}} + g_{\text{sn}} \mathbf{s}_{\text{n}}) \mu_{\text{яд}} = g \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}_{\text{D}},$$

откуда

$$g = \frac{g_{\text{sp}} + g_{\text{sn}}}{2}.$$

Для водорода, естественно, $\mu_{\text{я}} = g_{\text{sp}} \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}_{\text{p}}$. Полный момент атома $\mathbf{F} = \mathbf{S}_{\text{e}} + \mathbf{S}_{\text{я}}$, а величина сверхтонкого расщепления

$$\begin{aligned}\bar{U}_{\text{CT}} &= A \cdot 2g(\mathbf{S}_e \mathbf{S}_я) \mu_{\text{Б}} \mu_{\text{яд}} = Ag(F^2 - S_e^2 - S_я^2) \mu_{\text{Б}} \mu_{\text{яд}} = \\ &= Ag[F(F+1) - S_e(S_e+1) - S_я(S_я+1)] \mu_{\text{Б}} \mu_{\text{яд}}.\end{aligned}$$

Для атома водорода $S_я = 1/2$, $S_e = 1/2$, поэтому возможные значения $F = 1$ или 0 . Для дейтерия, соответственно, $S_я = 1$, $S_e = 1/2$, а $F = 3/2$ или $1/2$. Поэтому величина сверхтонкого расщепления для водорода

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{CT}}^{\text{H}} = Ag_{\text{sp}}(1 \cdot 2 - 0) \mu_{\text{яд}} \mu_{\text{Б}} = 2Ag_{\text{sp}} \mu_{\text{яд}} \mu_{\text{Б}},$$

а для дейтерия

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{CT}}^{\text{d}} = Ag \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \mu_{\text{яд}} \mu_{\text{Б}} = 3Ag \mu_{\text{яд}} \mu_{\text{Б}}.$$

Таким образом, $\frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{CT}}^{\text{H}}}{\Delta \mathcal{E}_{\text{CT}}^{\text{d}}} = \frac{2g_{\text{sp}}}{3g} = \frac{4}{3} \frac{g_{\text{sp}}}{g_{\text{sp}} + g_{\text{sn}}} = 4,23$.

7.38* $\langle \mu_{\text{ат}} \rangle (F=1) = -\frac{\mu_{\text{Б}}}{6}$; $\langle \mu_{\text{ат}} \rangle (F=2) = \frac{\mu_{\text{Б}}}{3}$.

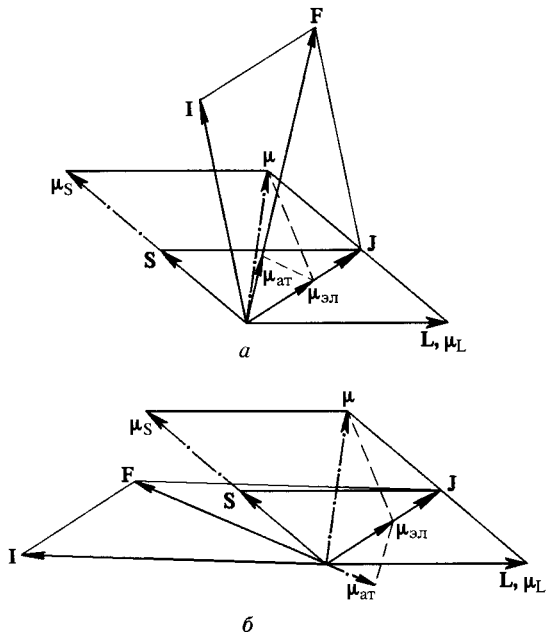


Рис. 178

Решение. Магнитный момент атома $\mu_{\text{ат}}$ складывается из магнитных моментов электронной оболочки и ядра $\mu_{\text{ат}} = \mu_e + \mu_я \approx \mu_e$, т. к. $|\mu_e| \gg |\mu_я|$. В состоянии с заданным J средний магнитный момент электрона

$$\bar{\mu}_e = g_J \mu_{\text{Б}} \mathbf{J}, \quad \text{где} \quad g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

В нашем случае $g_J = 2/3$. При наличии взаимодействия ядра с электронами сохраняющимся вектором является $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$, и средний магнитный момент атома $\langle \mu_{\text{ат}} \rangle$ должен быть направлен по \mathbf{F} , т. е. $\langle \mu_{\text{ат}} \rangle = \mu \mathbf{F}$. Умножая обе части скалярно на \mathbf{F} и внося вектор \mathbf{F} под знак усреднения, получим $\mu \langle \mathbf{F}\mathbf{F} \rangle = g_J \langle \mathbf{J}\mathbf{F} \rangle \mu_B$, или

$$\mu \langle \mathbf{F}^2 \rangle = \mu_B g_J \frac{1}{2} \langle \mathbf{F}^2 + \mathbf{J}^2 - \mathbf{I}^2 \rangle. \quad \text{Отсюда} \quad \mu = g_J g_F \mu_B,$$

где $g_F = \frac{1}{2} + \frac{J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}$.

Поскольку $I = 3/2$, $J = 1/2$, то или $F = 2$ и $g_F = +1/4$ или $F = 1$ и $g_F = -1/4$. Следовательно,

$$\langle \mu_{\text{ат}}(F = 2) \rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right) \mu_B \cdot 2 = \frac{\mu_B}{3}.$$

$$\langle \mu_{\text{ат}}(F = 1) \rangle = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{4} \right) \mu_B \cdot 1 = -\frac{\mu_B}{6}.$$

Примечание. Возможность такого подхода для вычисления $\mu_{\text{ат}}$ связана с малостью энергии сверхтонкого взаимодействия по сравнению с энергией спин-орбитального взаимодействия. Строго говоря, в векторной модели атома нужно сложить μ_S и μ_L и спроецировать сумму на направление \mathbf{F} . Мы же проецируем сначала на \mathbf{J} , а потом на \mathbf{F} . Частота прецессии \mathbf{J} вокруг \mathbf{F} много меньше частоты прецессии \mathbf{L} и \mathbf{S} вокруг \mathbf{J} (см. рис. 178а и б).

7.39* Решение. При испускании γ -кванта должны выполняться законы сохранения энергии и импульса

$$\mathcal{E} = \hbar\omega + R,$$

$$\frac{\hbar\omega}{c} = p_R = \frac{1}{c} \sqrt{R(2Mc^2 + R)},$$

где p_R — импульс ядра после испускания γ -кванта. Решая эти уравнения, получим

$$R = \frac{\mathcal{E}^2}{2(Mc^2 + \mathcal{E})} \approx \frac{\mathcal{E}^2}{2Mc^2} = 0,0468 \text{ эВ},$$

$$\hbar\omega = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}^2}{2Mc^2} \approx \mathcal{E} = 129 \text{ кэВ}.$$

7.40. $R \approx \frac{\mathcal{E}^2}{2Mc^2}$; $\hbar\omega = \mathcal{E} + R$.

7.41. Изменение энергии γ -кванта из-за эффекта Доплера $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} \frac{v}{c}$. Полагая $\Delta\mathcal{E} = \Gamma/6$, получаем $v/c = 6 \cdot 10^{-12}$, $v = 0,18 \text{ см/с}$.

7.42. Условие резонансного поглощения принимает вид $T_{\text{эфф}} \geq \frac{R}{4k_B}$. По-

скольку $R = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{2Mc^2} = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2 N_A}{2Ac^2}$, то $T_{\text{эфф}} \geq \frac{\mathcal{E}_\gamma^2 N_A}{8k_B Ac^2} \approx 135 \text{ К}$.

7.43. При излучении γ -кванта энергия отдачи R воспринимается всем кристаллом и поэтому $\Delta\mathcal{E} = R = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{2Mc^2} = 1,5 \cdot 10^{-25}$ эВ.

7.44. Смещение частот $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{R^2\Omega^2}{2c^2}$. Если $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-13}$, то $\Omega = 74$ рад/с.

7.45. $v = \frac{g}{2mc} \approx 10^4$ см/с.

7.46. $h = \frac{Gc^2}{100\mathcal{E}_\gamma g} \approx 28$ м, где g — ускорение свободного падения.

7.47*. Решение. Из-за различия эффективных температур излучателя и поглотителя частоты излученного и поглощенного γ -квантов будут смещены на величину порядка $\delta\nu \approx \nu \frac{k_B\delta T_{\text{эфф}}}{Mc^2} = \nu \frac{R\delta T_{\text{эфф}}}{Ac^2}$, где R — универсальная газовая постоянная, A — атомная масса железа. Именно это смещение должно быть меньше гравитационного $\Delta\nu = \nu \frac{gh}{c^2}$ (см. задачу 1.4). Разность

температур эквивалентна высоте $\delta h = \frac{R\delta T_{\text{эфф}}}{Ag} \approx 15$ м, что сравнимо с высотой башни в эксперименте Паунда и Ребки. Таким образом, для того, чтобы при помощи эффекта Мессбауэра можно было наблюдать гравитационное смещение частоты γ -квантов, температуры излучателя и поглотителя должны быть одинаковыми с очень высокой степенью точности.

7.48. $H = \frac{10hc^2}{g\tau\mathcal{E}} \approx 400$ м.

7.49. $m = \frac{\mathcal{E}^2\tau}{\hbar c^2} \approx 5,3 \cdot 10^{-13}$ г; $b = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \approx 0,25$ мкм.

7.50*. $\mathcal{E}_\nu = \frac{\Delta\mathcal{E} mc^2}{2\mathcal{E}_\gamma} \approx 960$ кэВ.

Решение. Естественная ширина возбужденного состояния очень мала и равна $\delta\mathcal{E} = \hbar/\tau = 1,5 \cdot 10^{-2}$ эВ. Уширение возникает из-за доплеровского сдвига, связанного с отдачей ядра при испускании нейтрино. Согласно закону сохранения импульса $p_{\text{яд}} = \mathcal{E}_\nu/c$, а доплеровский сдвиг равен

$$\Delta(h\nu) = h\nu \frac{v}{c} = \frac{\mathcal{E}_\nu \mathcal{E}_\nu}{mc^2} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2},$$

откуда следует

$$\mathcal{E}_\nu = \frac{\Delta\mathcal{E} mc^2}{2\mathcal{E}_\gamma} \approx 960 \text{ кэВ.}$$

7.51. $\tau \approx \frac{\hbar}{(\Delta\mathcal{E} - 2\delta\mathcal{E}_{\text{доп}})} \approx 10^{-17}$ с, где $\delta\mathcal{E}_{\text{доп}} \approx 160$ эВ.

Указание. При испускании γ -кванта с энергией 5 МэВ ядро испытывает отдачу, и поэтому линия излучения с энергией 1,5 МэВ оказывается уширенной на $2\delta\mathcal{E}_{\text{доп}}$.

7.52. При переходах излучаются магнитно-дипольные ($M1$) γ -кванты с моментом и четностью 1^+ (см. также задачу 7.57). Рассматривая крайние

компоненты расщепления ($\Delta v = 10,5$ мм/с), соответствующие изменению спина ядра ($-3/2 \rightarrow -1/2$ и $+3/2 \rightarrow +1/2$), получим

$$B = \frac{\mathcal{E}_0 \Delta v}{c \mu_{\text{яд}} (g_{1/2} + 3g_{3/2})} \approx 330 \text{ кГс.}$$

7.53. $\mathcal{E}_0 = -8,4$ МэВ.

Решение. Предположим, что ядро — равномерно заряженный шар радиусом R (см. задачу 4.41 и рис. 135 к ней). Мюон является лептоном, поэтому он может взаимодействовать с ядром только за счет электромагнитных сил. Тогда потенциальная энергия мюона внутри ядра

$$U(r < R) = -\frac{3Ze^2}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) = -U_0 + \frac{Ze^2}{2R^3} r^2, \text{ где } U_0 = \frac{3Ze^2}{2R}.$$

Видно, что это потенциал трехмерного изотропного гармонического осциллятора

$$U(r) = -U_0 + \frac{m_\mu \omega^2 r^2}{2},$$

где $\frac{m_\mu \omega^2}{2} = \frac{Ze^2}{2R}$, откуда следует, что $\omega^2 = \frac{Ze^2}{m_\mu R^3}$.

Подсчет дает $U_0 = \frac{3Ze^2}{2R} \approx 23$ МэВ; энергия основного состояния

$$\mathcal{E}_0 = -U_0 + \frac{3}{2} \hbar \omega; \hbar \omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 Ze^2}{m_\mu R^3}} = 9,73 \text{ МэВ. Окончательно, } \mathcal{E}_0 = -8,4 \text{ МэВ.}$$

7.54. Для оценки области локализации можно принять, что она совпадает с амплитудой колебаний трехмерного гармонического осциллятора в основном состоянии

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{3\hbar}{m_\mu}} \sqrt{\frac{m_\mu R^3}{Ze^2}} = 1,06 \cdot 10^{-12} \text{ см}$$

и больше радиуса ядра свинца $R_{\text{Pb}} = 7,7 \cdot 10^{-13}$ см.

7.55. $M = 5N(t)m_\alpha \approx 3,2 \cdot 10^{-6}$ г, где число расщепившихся ядер $N(t) \approx N_0 \frac{t \ln 2}{T_{1/2}} = 0,975 \cdot 10^{17}$.

7.56. $M \approx 300$ т (точно по Маяковскому).

7.57. $I_{\text{кон}} = \frac{1}{2}$; $2s_{1/2}$ -состояние.

Решение. Уравнение Шредингера для осциллятора допускает разделение переменных как в прямоугольной, так и в сферической системе координат. С этим же связано и случайное вырождение уровней энергии в данном потенциале. В декартовой системе уровни осциллятора характеризуются квантовым числом $N = n_x + n_y + n_z$. В сферической системе можно характеризовать их по моменту l и радиальному квантовому числу n_r . При этом $N = 2n_r + l$, а уровни записываются как $(n_r + 1)l$. Таким образом, $N = 0$ соответствует $n_r = l = 0$, т. е. это $1s$ -состояние. $N = 1$ соответствует $n_r = 0$, $l = 1$, и это $1p$ -состояние. $N = 2$ соответствует $n_r = 1$, $l = 0$ и $n_r = 0$, $l = 2$,

т. е. это $2s$ и $1d$ -состояния, которые в данном приближении вырождены. Учет спин-орбитального взаимодействия приводит к расщеплению $1p$ -состояния на $1p_{3/2}$ и $1p_{1/2}$; $1d$ -состояния на $1d_{5/2}$ и $1d_{3/2}$. Как показывает эксперимент, в ядре уровень с большим j лежит ниже по энергии.

При поглощении фотона $E1$ ($j = 1$ — момент импульса фотона) должны выполняться правила отбора

$$\left| I_{\text{кон}} - I_{\text{нач}} \right| \leq j \leq I_{\text{кон}} + I_{\text{нач}},$$

где $I_{\text{кон}}$ и $I_{\text{нач}}$ — конечное и начальное значения спина ядра. Ядро ${}^{13}_6\text{C}$ имеет $2 \cdot 2 = 4$ нуклона на оболочке с $N = 0$ и $2 \cdot 6 = 12$ нуклонов на оболочке с $N = 1$. Остается один нейтрон из незаполненной подоболочки в состоянии $1p_{1/2}$ (см. указание к задаче). Для одного нуклона с моментом l четность состояния равна $P = (-1)^l$ ($l = 1$ для состояния $1p_{1/2}$). Таким образом,

$$\left| I_{\text{кон}} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 \leq I_{\text{кон}} + \frac{1}{2}.$$

Кроме того, должен выполняться закон сохранения четности состояний

$$P_{\text{кон}} \cdot P_{\text{нач}} = \begin{cases} (-1)^J & \text{для } EJ - \text{фотонов;} \\ (-1)^{J+1} & \text{для } MJ - \text{фотонов,} \end{cases}$$

где $P_{\text{кон}}$ и $P_{\text{нач}}$ — четности конечного и начального состояний ядра, откуда следует, что конечная четность должна быть равна $P_{\text{кон}} = +1$. С другой стороны, $P_{\text{кон}} = (-1)^{l_{\text{кон}}}$, где $l_{\text{кон}}$ — орбитальный момент конечного состояния. Таким образом, получается, что оно четное. А значит, подходят два нуклонных состояния из $N = 2$: состояние $2s_{1/2}$ ($l_{\text{кон}} = 0$)

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \text{т. е. } (0 \leq 1 \leq 1),$$

а также состояние $1d_{3/2}$ ($l_{\text{кон}} = 2$)

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}, \quad \text{т. е. } (1 \leq 1 \leq 2).$$

Условию задачи удовлетворяет состояние с наименьшей энергией $2s_{1/2}$, спин ядра $I_{\text{кон}} = \frac{1}{2}$.

7.58. $I_{\text{кон}} = \frac{3}{2}$; $1d_{3/2}$ -состояние.

$$7.59. \quad k = \frac{M_T}{M_{\text{пл}}} = \left(\frac{\sqrt{2m_a g_a} N_A \ln 2}{4gT_{1/2} A} - 1 \right)^{-1} \approx 0,52.$$

$$7.60^* \quad \mu_d^{(1)} = \frac{\mu_{\text{яд}}}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{5,58 - 3,82}{2} \right] = 0,31 \mu_{\text{яд}} \quad \text{— для случая } ls\text{-связи;}$$

$$\mu_d^{(2)} = \frac{\mu_{\text{яд}}}{2} \left[\frac{4}{3} - \frac{5,58 - 3,82}{2} \right] = 0,373 \mu_{\text{яд}} \quad \text{— для случая } jj\text{-связи.}$$

Решен и е. Нецентральность ядерных сил ведет к несохранению момента импульса, поэтому основное состояние не есть чистое s -состояние ($L = 0$), а содержит также примесь состояния с $L = 2$ (D -состояние). На-

личие только четных моментов — следствие закона сохранения четности. Что же касается полного момента J , то он всегда является интегралом движения. Поэтому $J = 1$ в обоих случаях. Параллельность спинов (при этом $S = 1$, $2S + 1 = 3$) — экспериментальный факт, и с $S = 0$ связанного состояния нет.

Заметим, что при реализации ls -связи полный момент $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, где $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$; $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i$. При реализации jj -связи $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{j}_i$, где $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$.

Для дейтрона в состоянии 3D_1 : $L = 2$; $S = 1$; g -факторы протона и нейтрона: $g_{lp} = 1$; $g_{ln} = 0$ (поскольку заряд равен нулю); $g_{sp} = 5,58$; $g_{sn} = -3,82$. Если \mathbf{L} — орбитальный момент дейтрона, а \mathbf{S} — спиновый, то в силу зарядовой независимости p и n для ядерных сил $\mathbf{l}_p = \mathbf{l}_n = \mathbf{L}/2$; $\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_n = \mathbf{S}/2$. Таким образом, можно записать:

$$\boldsymbol{\mu}_d = (g_{lp}\mathbf{l}_p + g_{sp}\mathbf{s}_p + g_{sn}\mathbf{s}_n) \mu_{яд} = \left[\frac{\mathbf{L}}{2} + (g_{sp} + g_{sn}) \frac{\mathbf{S}}{2} \right] \mu_{яд}.$$

Далее надо вычислить проекцию вектора $\boldsymbol{\mu}_d$ на направление \mathbf{J} , которая и называется магнитным моментом дейтрона в ls -связи

$$\mu_d = \frac{\mu_{яд}}{2} \left[\langle \mathbf{L} \cos(\mathbf{LJ}) \rangle + (g_{sp} + g_{sn}) \langle \mathbf{S} \cos(\mathbf{SJ}) \rangle \right].$$

Здесь $\langle \mathbf{LJ} \rangle = \langle LJ \cos(\mathbf{LJ}) \rangle$, откуда $\langle L \cos(\mathbf{LJ}) \rangle = \frac{\langle \mathbf{LJ} \rangle}{J} \frac{J}{J} = \frac{\langle J(\mathbf{LJ}) \rangle}{J^2}$. Кроме того,

$$\langle S \cos(\mathbf{SJ}) \rangle = \frac{\langle J(\mathbf{SJ}) \rangle}{J^2}.$$

Подсчитаем:

$$\langle L \cos(\mathbf{LJ}) \rangle = J \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)} = \frac{1}{4} [2 + 6 - 2] = \frac{3}{2}.$$

$$\langle S \cos(\mathbf{SJ}) \rangle = \frac{J}{2J(J+1)} [J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)] = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда и следует первый ответ: $\mu_d^{(1)} = 0,31\mu_{яд}$.

Что же касается магнитного момента дейтрона при реализации jj -связи, то в этом случае подсчет следует осуществлять так:

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \langle g_n \mu_{яд} \mathbf{j}_n + g_p \mu_{яд} \mathbf{j}_p \rangle = g \mu_{яд} \mathbf{J}.$$

При этом

$$g = g_n \frac{\langle \mathbf{j}_n \mathbf{J} \rangle}{2J^2} + g_p \frac{\langle \mathbf{j}_p \mathbf{J} \rangle}{2J^2} = \frac{g_n + g_p}{2}.$$

Определим g -факторы протона и нейтрона g_p и g_n . Имеем

$$\langle \boldsymbol{\mu}_n \rangle = g_n \mu_{яд} \mathbf{j}_n, \text{ где } \boldsymbol{\mu}_n = g_{sn} \mu_{яд} \mathbf{s}_n.$$

Умножая оба выражения на \mathbf{j}_n и усредняя при этом скалярное произведение, получим

$$\langle \boldsymbol{\mu}_n \mathbf{j}_n \rangle = g_n \mu_{яд} \langle \mathbf{j}_n^2 \rangle = g_{sn} \mu_{яд} \langle \mathbf{s}_n \mathbf{j}_n \rangle, \text{ откуда следует, что}$$

$$g_n = \frac{\langle \mathbf{s}_n \mathbf{j}_n \rangle}{\langle \mathbf{j}_n^2 \rangle} g_{sn} = g_{sn} \frac{s_n(s_n+1) + j_n(j_n+1) - l_n(l_n+1)}{2j_n(j_n+1)} = -\frac{g_{sn}}{3} = \frac{3,82}{3}.$$

Совершенно аналогично определяется и протонный g -фактор:

$$g_p = \frac{\langle I_p j_p \rangle}{\langle I_p^2 \rangle} + g_{sp} \frac{\langle s_p j_p \rangle}{\langle I_p^2 \rangle} = \frac{4}{3} - \frac{5,58}{3}.$$

Подставив результаты для g_n и g_p , получим ответ

$$g = \frac{g_n + g_p}{2} = 0,373, \text{ т. е. } \mu_d^{(2)} = 0,373 \mu_{\text{яд}}.$$

Поскольку обе модели дают близкие результаты, то отдать предпочтение какой-то из них на основе экспериментальных данных невозможно (см. задачу 7.61).

7.61. $w = 0,035$ (3,5%) (см. также замечание в начале решения задачи 7.60). Если обозначить искомую вероятность как w , то тогда средний магнитный момент дейтрона, измеряемый в опыте, есть

$$\langle \mu \rangle = (1 - w) \mu(^3S_1) + w \mu(^3D_1),$$

откуда и следует приведенный ответ.

$$\begin{aligned} \mathbf{7.62.} \quad \delta \mathcal{E}_{\text{допл}} &= \frac{Q \mathcal{E}_\gamma}{M c^2} = 5,7 \text{ эВ}; \quad \delta \mathcal{E}_{\text{отд}} = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{2 M c^2} = 2,5 \text{ эВ}; \quad \delta \mathcal{E}_0 \approx \frac{\hbar}{\tau_1} + \frac{\hbar}{\tau_2} \approx \\ &\approx \frac{\hbar}{\tau_1} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}. \end{aligned}$$

7.63. Амплитуда сигнала ЯМР пропорциональна количеству соответствующих ядер. Поэтому первый пик соответствует ЯМР на ядрах трития.

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{h \nu I}{B_1} = 2,97 \mu_{\text{яд}} = 1,5 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/с, где } I = \frac{1}{2}. \quad \mu(t) - \mu_{\text{теор}}(t) = \\ &= (2,97 - 2,79) \mu_{\text{яд}} = 0,18 \mu_{\text{яд}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{7.64.} \quad \Delta \mu_{\text{He}} &= \left| \mu_{\text{эксп}} - \mu_{\text{теор}} \right| = 0,22 \mu_{\text{яд}} = 0,11 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс, где } \mu_{\text{эксп}} = \\ &= -2,13 \mu_{\text{яд}}; \quad \mu_{\text{теор}} = -1,91 \mu_{\text{яд}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{7.65.} \quad R_m = \frac{hc}{\mathcal{E} \sin \theta_m}, \quad m = 1, 2, 3; \quad R_{\text{ср}} = 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ см. } (r_0)_{\text{ср}} = \frac{R_{\text{ср}}}{A V^3} \approx 1,2.$$

§ 8. Нейтроны. Ядерные реакции

8.1. По закону сохранения момента импульса $bp = L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$. Минимальное значение $l = 1$, откуда $b_{\text{мин}} = \frac{\hbar \sqrt{2}}{p} = \frac{\hbar \sqrt{2}}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = \frac{\hbar}{\sqrt{m\mathcal{E}}} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$

$$\mathbf{8.2.} \quad \frac{\sigma_c(p)}{\sigma_c(n)} \approx 0,5.$$

Решение. Рассмотрим сначала случай рассеяния нейтрона на ядре (рис. 179). Возможные значения прицельных расстояний b_l определяются из правила квантования момента импульса

$$pb_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}.$$

Импульс нейтрона $p = \hbar/\lambda$. В квазиклассическом приближении ($l \gg 1$) $b_l \approx l\lambda$. Разобьем пространство, занимаемое падающим пучком нейтронов, на кольцевые зоны, ширина которых равна λ . В каждой из этих зон будут двигаться частицы с определенным значением момента импульса. Число частиц в такой зоне (при условии их равномерного распределения в пространстве) пропорционально площади кольца со средним радиусом b_l

$$S_l = \frac{1}{2} \pi (b_{l+1}^2 - b_{l-1}^2) = \pi \lambda^2 (2l + 1).$$

Полученная величина S_l — это геометрическое сечение, пропорциональное доле всех частиц, имеющих квантовое число l , из всего потока падающих на ядро нейтронов. Умножая S_l на вероятность w_l поглощения частицы ядром, получим парциальное сечение образования составного ядра для частицы с моментом l .

Вероятность поглощения зависит от внутренних свойств ядра и от характеристики сил, действующих на частицу вне ядра. В общем случае она пропорциональна вероятности проникновения через кулоновский и центробежный барьеры. Конечно, существует отражение и при $l = 0$.

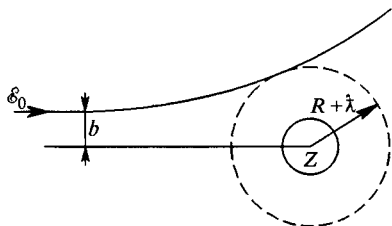


Рис. 179

Представим w_l в виде

$$w_l = P_l \zeta_l,$$

где P_l — вероятность проникновения через внешний барьер, ζ_l — вероятность «прилипания» частицы к ядру. Тогда полное сечение поглощения (образования составного ядра), включая случай с $l = 0$, есть

$$\sigma_c(n) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \pi \lambda^2 P_l \zeta_l.$$

Чтобы ядро поглотило частицу, она должна попасть в область действия ядерных сил, т. е. $(b_l)_{\max} \leq R$, откуда $l_{\max} \approx R/\lambda$. Что касается величины ζ_l , то будем считать, что ядро поглощает все падающие на него частицы (модель черного ядра). Тогда $\zeta_l = 1$ при $l \leq R/\lambda$ и

$$\sigma_c(n) = \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l + 1) \pi \lambda^2 P_l.$$

В области энергий нейтронов порядка нескольких МэВ и выше, когда $\lambda \ll R$, можно считать, что $P_l \approx 1$, и тогда

$$\sigma_c(n) = \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l + 1) \pi \lambda^2 = \pi (R + \lambda)^2. \quad (*)$$

В случае рассеяния протонов составное ядро образуется лишь тогда, когда энергия протона будет больше кулоновского барьера (туннельным эффектом при данной энергии можно пренебречь). Для вычисления воспользуемся полученным выше результатом (*). Как видно из этой формулы, эффективный размер ядра стал равным $R + \lambda$. Пусть на бесконечности энергия и прицельное расстояние протона равны \mathcal{E}_0 и b . Тогда закон сохранения энергии дает уравнение (в системе центра инерции)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{Ze^2}{R + \lambda}.$$

Соответствующий закон сохранения момента импульса —

$$b\sqrt{2m\mathcal{E}_0} = (R + \lambda)\sqrt{2m\mathcal{E}},$$

откуда сразу следует предельное значение b :

$$b = (R + \lambda)\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}}.$$

Тогда искомое сечение образования составного ядра под действием протонов

$$\sigma_c(p) = \pi b^2 = \pi(R + \lambda)^2 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \pi(R + \lambda)^2 \left[1 - \frac{Ze^2}{\mathcal{E}_0(R + \lambda)} \right].$$

Отношение сечений

$$\frac{\sigma_c(p)}{\sigma_c(n)} = 1 - \frac{Ze^2}{\mathcal{E}_0(R + \lambda)} \approx \frac{1}{2},$$

где $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}} = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см; $R_{Ca} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} = 4,45 \cdot 10^{-13}$ см (величины соизмеримые).

8.3. $\sigma_{\text{полн}} = 2\pi R_U^2 \approx 4,1$ бн. В релятивистском случае дебройлевская длина волны $\lambda = \hbar/p \approx \hbar/(m_{\text{п}}c) = 2 \cdot 10^{-14}$ см, что много меньше $R_U \approx 8 \cdot 10^{-13}$ см. Таким образом, сечение поглощения неупругого рассеяния $\sigma_{\text{полн}} = \pi(R_U + \lambda)^2 \approx \pi R_U^2$, т. е. все частицы с прицельным расстоянием, меньшим R_U , выбывают из пучка и поглощаются. Ядро ведет себя как поглощающий шар (модель «абсолютно черного ядра»). Действительно, длина пробега нуклона $l = \frac{1}{\sigma_{\text{NN}} n} = \frac{4\pi r_0^3}{3\sigma_{\text{NN}}} \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см $\ll R_U$. Однако из-за дифракции на краю ядра происходит отклонение частиц от первоначального направления — упругое рассеяние. Согласно принципу Бабинне для дифракции Фраунгофера количество света, рассеянного на черном теле, равно количеству света, падающего на него и поглощаемого им, $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{диф}}$. Следовательно, $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{полн}} + \sigma_{\text{диф}} = 2\sigma_{\text{полн}}$ (дифракционное удвоение), поэтому $\sigma_{\text{полн}} = 2\pi R_U^2 \approx 4,1$ бн.

8.4. Вероятность рассеяния с параллельной ориентацией спинов $\frac{I+1}{2I+1} = \frac{5}{8}$, а с антипараллельной $\frac{I}{2I+1} = \frac{3}{8}$.

Решение. Для медленных частиц минимальное прицельное расстояние (см. задачу 8.1) много больше размеров ядра, и поэтому реакция возможна только при $l = 0$. Таким образом, полный момент является чисто спиновым, и число спиновых состояний системы из двух частиц есть $(2S + 1)(2I + 1) = 2(2I + 1)$. При этом полный момент (спин) может принимать два значения: $I + 1/2$ и $I - 1/2$. Первому моменту соответствует $2(I + 1/2) + 1 = 2(I + 1)$ значений проекции момента, второму $2(I - 1/2) + 1 = 2I$.

Вероятность рассеяния пропорциональна относительной доле состояний с заданной проекцией полного момента, т. к. энергия взаимодействия не зависит от значения проекции.

$$8.5. \frac{d\sigma_{\text{лаб}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{ЦМ}}(\theta')}{d\Omega'}; \quad \theta' = 2\theta; \quad d\sigma_{\text{ЦМ}} = \frac{A}{4} d\Omega', \quad \text{т. е. нейтроны в системе}$$

центра масс (ЦМ) рассеиваются изотропно. $R \approx \lambda \approx 10^{-13}$ см. Полученные формулы следуют из векторных диаграмм рассеяния в ЛСО и ЦМ.

Приведем для сведения формулу для пересчета дифференциального сечения из «Л» — лабораторной системы в «ЦМ» — систему центра масс в общем виде

$$\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right)_{\text{Л}} = \left(\frac{d\sigma(\theta')}{d\Omega'}\right)_{\text{ЦМ}} \frac{(m_1^2 + 2m_1m_2 \cos \theta' + m_2^2)^{3/2}}{m_2^2(m_2 + m_1 \cos \theta')},$$

где штрихом обозначены углы в ЦМ, m_2 — покоящаяся масса, m_1 — движущаяся.

$$8.6.* \quad w \approx 4 \cdot 10^{-9}.$$

Решение. Уменьшение потока нейтронов связано с актами захвата и рассеяния. Так, в слое защиты толщиной dx , находящемся на расстоянии x от места входа нейтронов, их поток уменьшится на величину

$$dj = -j(x) \frac{dx}{\lambda},$$

где $\lambda \approx \frac{1}{n\sigma_{\text{полн}}}$ — длина свободного пробега нейтрона. Полное сечение реакции (как захват, так и упругое рассеяние) $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{погл}} + \sigma_{\text{расс}} \approx \sigma_{\text{расс}} = \sigma_0$. Таким образом,

$$j(x) = j_0 e^{-n\sigma_0 x},$$

где j_0 — поток нейтронов на входе. Перепишем это выражение в дифференциальной форме

$$dj = -j_0 n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} dx.$$

Таким образом вероятность упругого рассеяния нейтрона в слое толщиной dx на расстоянии x от входа в защиту

$$dw = \left| \frac{dj}{j_0} \right| = n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} dx.$$

После столкновения нейтроны проходят путь $\frac{l-x}{\langle \cos \theta \rangle}$. Определим среднее значение косинуса угла рассеяния, имея в виду замечание в условии задачи, что в системе центра масс угловое распределение упруго рассеянных нейт-

ронов изотропно. Как показано в предыдущей задаче 8.5, в этом случае в лабораторной системе отсчета $d\sigma(\theta) = A \cos \theta d\Omega$. Таким образом,

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos \theta d\Omega}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\Omega} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d(\cos \theta)}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d(\cos \theta)} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность выйти из защиты без какого-либо взаимодействия после рассеяния в точке, находящейся на расстоянии x от места входа,

$$dw(x) = n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} dx \exp\left(-n\sigma \frac{l-x}{\langle \cos \theta \rangle}\right).$$

Искомая вероятность пройти защиту, испытав лишь одно упругое столкновение,

$$w = \int_0^l n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} e^{-n\sigma_0 \frac{3}{2}(l-x)} dx = n\sigma_0 e^{-\frac{3}{2}n\sigma_0 l} \int_0^l e^{\frac{1}{2}n\sigma_0 x} dx \approx 2e^{-20} = 4 \cdot 10^{-9}.$$

8.7. $\frac{j_0 - j_d}{j_0} \approx n\sigma d = 10^{-5}.$

8.8. $\alpha_{\text{расс}} = 0,9; \alpha_{\text{погл}} = 0,022.$

8.9. $\frac{j_0}{j} = \exp\left(\frac{d\rho N_A \sigma}{A}\right) \approx 1,35,$ где $\sigma = \sigma_{\text{расс}} + \sigma_{\text{погл}} = 1,64$ бн.

8.10. $\tau = \frac{\mu}{2\rho N_A \sigma v} = 2,3 \cdot 10^{-4}$ с. Отметим, что в области справедливости закона Бете $\sigma = \sigma_{\text{погл}} \propto 1/v$, время жизни нейтрона в среде не зависит от его энергии.

8.11. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(\frac{\sigma_0 n d}{\ln(j_0/j)}\right)^2 \approx 0,14$ эВ, где $\mathcal{E}_0 = 0,025$ эВ.

8.12. $\varepsilon = 1 - \exp\left(-\frac{P\sigma d}{kT}\right) \approx 96\%.$

8.13*. Решение. Энергия связи ${}^3\text{He}$ равна 7,7 МэВ, а ${}^4\text{He}$ — 28,3 МэВ, т. е. реакция в принципе экзотермическая. Однако трехчастичная реакция невозможна, как это имеет место при фотоэффекте на свободном электро-не, в силу законов сохранения энергии и импульса

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} + Q = \frac{MV^2}{2}; \\ mv = MV. \end{cases}$$

Поскольку $M \approx 4m$, то $v = 4V$. Тогда

$$16V^2 + \frac{2Q}{m} = 4V^2, \quad 5V^2 + \frac{Q}{m} = 0.$$

Из последнего равенства видно, что реакция невозможна при $Q > 0$.

8.14. Условие резонанса $2R_{\text{я}} = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{2m_N(\mathcal{E}_n + U)}}$, $\mathcal{E}_n > 0$ (энергия отсчитывается от потолка ямы), откуда $n^2 \cdot 0,864 \text{ МэВ} > U$. Минимальное целое

n , которое удовлетворяет этому условию, есть $n=7$, при этом $\mathcal{E}_n = 2,34$ МэВ.

$$8.15^* L_{\text{эфф}} = \frac{A}{\rho N_A \sqrt{3} \sigma_{\text{расс}} \sigma_{\text{погл}}} \approx 44 \text{ см.}$$

Решение. Длина свободного пробега частицы $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$. В данном случае существуют два механизма взаимодействия нейтронов с ядрами углерода — рассеяние и поглощение (захват). Следовательно, имеются две длины свободного пробега. Время пробега до захвата $t_{\text{погл}} = \frac{\lambda_{\text{погл}}}{v}$. Искомый эффективный размер области, занимаемой нейтронами, определяется временем $t_{\text{погл}}$

$$L_{\text{эфф}} = \sqrt{6Dt_{\text{погл}}},$$

где коэффициент диффузии D в свою очередь определяется рассеянием нейтронов, т. е. $D = (1/3) \lambda_{\text{расс}} v$. Подстановкой получим

$$L_{\text{эфф}} = \sqrt{2\lambda_{\text{расс}} v \cdot \frac{\lambda_{\text{погл}}}{v}} = \sqrt{2\lambda_{\text{погл}} \lambda_{\text{расс}}} = \left(\frac{n^2 \sigma_{\text{погл}} \sigma_{\text{расс}}}{2} \right)^{-1/2}.$$

Плотность атомов углерода $n = \rho N_A / A$. Таким образом,

$$L_{\text{эфф}} = \frac{A\sqrt{2}}{\rho N_A (\sigma_{\text{расс}} \sigma_{\text{погл}})^{1/2}} \approx 107 \text{ см.}$$

8.16. Условие пропускания: $\lambda > 2d$, где λ — длина волны де Бройля для бериллия. Отсюда $\mathcal{E}_{\text{гр}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ эВ.

$$8.17. \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_n kT a^2} \right)^2 = 0,16\%.$$

8.18. $\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_k} = \frac{2kT}{(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{\text{Вi}})/2} \approx 34$, где $\mathcal{E}_C = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_C^2}$; $\mathcal{E}_{\text{Вi}} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_{\text{Вi}}^2}$, а $\lambda_C \geq 2d_C$ и $\lambda_{\text{Вi}} \geq 2d_{\text{Вi}}$ (нейтроны с длинами волн от λ_C до $\lambda_{\text{Вi}}$ рассеиваются в висмуте и выходят через его поверхность).

$$8.19. v_{\text{кр}} = \frac{2\hbar\sqrt{-\pi Nf}}{m_n} \text{ при условии, что } f < 0.$$

$$8.20. \varphi_0 \approx \sqrt{1-n^2} = \lambda \sqrt{-\frac{Nf}{\pi}}.$$

$$8.21. 1-n^2 = -\frac{2\pi\hbar^2 \rho N_A f}{m_n \mathcal{E} A} = 1,23 \cdot 10^{-5}, \theta \approx \sqrt{1-n^2} \approx 12' \text{ (угол скольжения).}$$

$$8.22. f = -\frac{\pi}{N\lambda^2} = -\frac{m_n^2 v^2 A}{4\pi\hbar^2 \rho N_A} \approx -0,78 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

8.23. Сечение упругого рассеяния нейтронов $\sigma = -\frac{\ln 0,7}{n_M d} = 5,45$ бн, где $n_M = \rho N_A / A_{\text{Рв}}$ — концентрация ядер мишени. При упругом s -рассеянии $\sigma = 4\pi |f|^2$, откуда $R_{\text{я}} = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} = 6,6 \cdot 10^{-13}$ см. Доказательство того, что проис-

ходит s -рассеяние, т. е. рассеяние с нулевым моментом импульса, основано на подсчете квантового числа l в условии $pR_{\text{я}} = \sqrt{2m_n \mathcal{E}} R_{\text{я}} = \hbar \sqrt{l(l+1)}$, откуда $l \approx 0,4$, т. е. в самом деле преобладает s -рассеяние.

$$8.24. H = \left(\frac{3nh}{4m\sqrt{2g}} \right)^{2/3} \approx 0,034 \text{ м.}$$

$$8.25. f = - \frac{gHAm_n^2}{2\pi\hbar^2\rho N_A} \approx -8,4 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

8.26.* Решение. Скорость счета, т. е. число нейтронов, попавших в детектор в единицу времени, есть произведение плотности потока нейтронов j на площадь детектора. Поскольку распределение нейтронов в реакторе максвелловское, то

$$dj(v) = v dn(v) = Av \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv,$$

где A — нормировочная постоянная.

Для ультрахолодных нейтронов $\frac{mv^2}{2k} = T^* = 6 \cdot 10^{-3} \text{ К} \ll T$, поэтому с хорошей точностью экспоненту можно считать равной 1. Тогда $dj(v) = Av^3 dv = A' \mathcal{E} d\mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = mv^2/2$. При «падении» нейтронов вниз их скорость увеличивается и может превысить граничное значение $v_{\text{гр}}$, вследствие чего такой нейтрон покинет трубу и не попадет в счетчик. Предельная энергия $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{\text{гр}} - mgH = \frac{mv_{\text{гр}}^2}{2} - mgH$. Суммарная плотность потока нейтронов

$$j = A' \int_0^{\mathcal{E}'} \mathcal{E} d\mathcal{E} = \frac{A'}{2} \mathcal{E}'^2 = \frac{A'}{2} \left(\frac{mv_{\text{гр}}^2}{2} - mgH \right).$$

Счет прекратится при $\mathcal{E}' = 0$, откуда предельное значение

$$H = \frac{v_{\text{гр}}^2}{2g} = 5 \text{ м.}$$

$$8.27. j \propto \left(\frac{mv_{\text{гр}}^2}{2} - mgH \right); H_{\text{гр}} = \frac{v_{\text{гр}}^2}{2g} = 5 \text{ м.}$$

$$8.28. S = \frac{4V}{v_{\text{г}}} = 0,8 \text{ мм}^2.$$

$$8.29. \alpha = \sqrt{\frac{6}{\pi}} (\sin i)^3 = 3,4 \cdot 10^{-8}.$$

$$8.30.* j \approx 18\,900 \text{ нейтронов/с.}$$

Решение. Чтобы понять, как ведут себя нейтроны с заданной энергией $\mathcal{E} = 10^{-7} \text{ эВ}$ в меди и алюминии, вычислим длину волны таких нейтронов:

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = 4,38 \text{ м/с}; \quad \lambda = \frac{h}{mv} = 9,05 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Предельные длины волн для нейтронов в меди и алюминии

$$\lambda_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{\pi}{N|f|}} = \sqrt{\frac{\pi A}{\rho N_A |f|}} = \begin{cases} 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ см (Cu)}, \\ 12,2 \cdot 10^{-6} \text{ см (Al)}. \end{cases}$$

Таким образом, длина волны нейтронов данной энергии удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\text{Гр}}^{\text{Cu}} < \lambda < \lambda_{\text{Гр}}^{\text{Al}}.$$

Это означает:

- стенки медной сферы для этих нейтронов непроницаемы;
- по алюминиевому нейтроноводу пойдут лишь те, что падают на стенку под углом больше критического

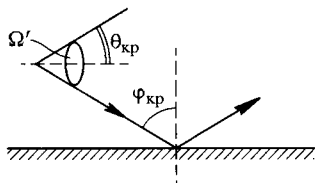


Рис. 180

углу Ω (рис. 180), предельное значение которого

$$\Omega' = 2\pi(1 - \cos \theta_{\text{кр}}) = 2\pi \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{кр}} \right) \right].$$

Итак,

$$\begin{aligned} \langle j_{\parallel} \rangle &= n_0 v \int \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{n_0 v}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2 - \varphi_{\text{кр}}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{n_0 v}{4} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{кр}} \right) = \frac{n_0 v}{4} \cos^2 \varphi_{\text{кр}}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомый поток нейтронов на мишени

$$\Phi = S \frac{n_0 v}{4} \cos^2 \varphi_{\text{кр}} = \frac{\pi r^2}{4} n_0 \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} \cos^2 \varphi_{\text{кр}} \approx 18\,900 \text{ нейтронов/с.}$$

8.31. $\alpha = \frac{\lambda^2 |f| \rho N_A R}{2\pi A b} \approx 0,076$. Как видно из рис. 181, по нейтроноводу пройдут лишь те нейтроны, которые падают на его поверхность под углом $\theta \leq \theta_{\text{кр}}$. Относительное их число α , очевидно, равно отношению h/b . Кроме того, приведем очевидные соотношения (i — угол падения):

$$\sin^2 i = \cos^2 \theta_{\text{кр}} = n^2; \quad 1 - \sin^2 \theta_{\text{кр}} = 1 - \frac{\lambda^2 N |f|}{\pi}.$$

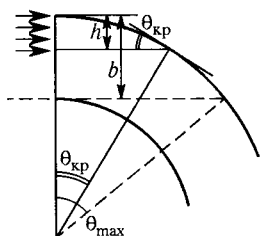


Рис. 181

$$\mathbf{8.32.} \quad R \approx \frac{4dm\epsilon\lambda_0^2}{h^2\theta_{\text{кр}}^2} \approx 75 \text{ м.}$$

8.33. Отличие показателя преломления от 1 есть $1 - n = \frac{N_A \rho a \lambda^2}{2\pi A} = 4,74 \cdot 10^{-6}$. Тогда фокусное расстояние одного отверстия $F_1 = \frac{R}{2(1-n)} \approx 10,5 \text{ м}$, фокусное расстояние системы из 10 отверстий $F \approx 1 \text{ м}$.

8.34* При облучении до насыщения число распадающихся в 1 с атомов йода (т. е. активность препарата) равно числу атомов, образующихся еже-секундно, т. е. $dn/dt = A = 10^7$ расп/с. Число атомов йода при активации до насыщения равно

$$N_{\text{нас}} = \frac{A}{\lambda} = 10^7 \frac{T}{\ln 2} = 2,16 \cdot 10^{10} \text{ атомов.}$$

Число атомов йода через время t после облучения

$$N = N_{\text{нас}} (1 - e^{-\lambda t})$$

или при малых t ($t \ll T$)

$$N = N_{\text{нас}} \lambda t = \dot{n}t.$$

При $t = 1$ мин

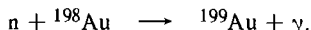
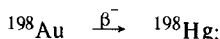
$$N = At = 10^7 \cdot 60 = 6 \cdot 10^8 \text{ атомов.}$$

При $t = 25$ мин

$$N = N_{\text{нас}} (1 - e^{-\lambda t}) = 1,08 \cdot 10^{10} \text{ атомов.}$$

8.35* $\frac{N^*(10T_{1/2})}{N(10T_{1/2})} \approx \frac{\lambda}{\lambda + j\sigma_2} = 0,53.$

Решение. Пусть N_0 — исходное число ядер ^{197}Au , N^* — число ядер ^{198}Au . На изотопах золота идут следующие реакции:



Уравнение баланса для ядер ^{198}Au имеет вид:

$$\frac{dN^*}{dt} \approx \sigma_1 j N_0 - \lambda N^* - \sigma_2 j N^*. \quad (*)$$

Обратим внимание на то, что в правой части в первом члене $\sigma_1 j N_0$ вместо текущего числа ядер ^{197}Au поставлено их исходное число N_0 (этим и обусловлен значок приближенного равенства). Простая оценка показывает, что за $t = 27$ суток ($t = 10T_{1/2}$) исчезнет всего

$$j\sigma_1 10T_{1/2} \approx 2 \cdot 10^{-3} = 0,2\% \text{ ядер } {}^{197}\text{Au},$$

что и обуславливает справедливость сделанного приближения.

Вычислим постоянную β^- -распада ядер ^{198}Au

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 2,97 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1};$$

а также второй коэффициент при N^* в уравнении (*)

$$\sigma_2 j = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Решение дифференциального уравнения (*) имеет вид

$$N^*(t) = \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda + j\sigma_2} \{1 - \exp [-(\lambda + j\sigma_2)t]\}.$$

Вычислим показатель экспоненты

$$(\lambda + j\sigma_2)10T_{1/2} \approx 13.$$

Таким образом, $1 - e^{-13} \approx 1$. Отсюда следует, что

$$N^*(t) \approx \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda + j\sigma_2}.$$

Если бы за счет радиационного захвата нейтронов не «выгорали» ядра ^{198}Au , то

$$N(t) = \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \approx \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda}.$$

Искомое уменьшение числа образующихся ядер ^{198}Hg равно

$$\frac{N^*(10T_{1/2})}{N(10T_{1/2})} \approx \frac{\lambda}{\lambda + j\sigma_2} = 0,53.$$

8.36. $N = N_0(1 - e^{-\lambda t})(1 + e^{-\lambda T}) = 1,4 \cdot 10^{14}$ ядер, где $T = 24$ ч; $t = 8$ ч (рис. 182). При непрерывном облучении $N = N_0(1 - e^{-\lambda t^*})$, откуда

$$t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_0 - N} = 14,5 \text{ ч}.$$

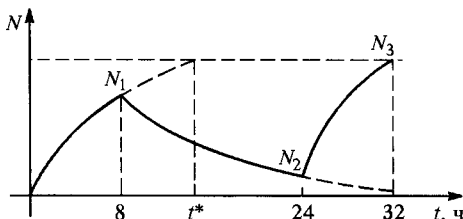


Рис. 182

8.37. $\frac{N_1}{N_1^{\max}} = (1 - e^{-\lambda t_1})(1 - e^{-\lambda t_2}) = 0,55$, где $N_1^{\max} = n_0 e^{-\lambda t_2}$.

8.38. $l\rho = \frac{\ln(1 + \alpha\sigma_0/\sigma_\Phi)}{\sigma_0 N_A} = 4,7 \text{ г/см}^2$.

8.39. За 6 месяцев накопится $1,08 \cdot 10^{14}$ протонов ($1,8 \cdot 10^{-10}$ г).

8.40. $N_p = j_n \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{\tau_n v}\right) \right] \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$,

где $\tau_n \approx 940$ с — время жизни нейтрона.

8.41*. $\sigma = \frac{\eta A_{Al}}{\rho_B l_B N_A} \approx 0,04 \text{ бн}$.

Решение. По определению сечения ядерной реакции

$$\sigma = \frac{dN/dt}{jN_M},$$

где dN/dt — число актов ядерного взаимодействия в единицу времени, [1/с]; j — плотность потока частиц, облучающих мишень [1/см²·с]; N_M — число ядер мишени.

Выход протонов определяется как

$$\eta = \frac{dN/dt}{jS},$$

где S — площадь поперечного сечения пучка. Тогда

$$\eta = \sigma \frac{N_M}{S} = \sigma n_M, \quad (*)$$

где n_M [1/см²] — поверхностная плотность ядер мишени.

Иногда эту же формулу записывают в несколько ином виде:

$$\frac{N}{S} = \sigma n_{\Pi} n_M,$$

где n_{Π} — число частиц пучка, приходящееся на 1 см² сечения пучка, N — число прореагировавших ядер мишени (число происшедших реакций).

Пробег α -частицы ограничен из-за потери энергии на ионизацию атомов. Очевидно, что потери пропорциональны плотности вещества, т. к. имеется приближенная пропорциональность между плотностью и порядковым номером Z элемента, а произведение пробега частицы l на эту плотность есть величина постоянная, практически не зависящая от рода вещества, а только от начальной энергии частицы. Таким образом,

$$l_B \rho_B = l_{Al} \rho_{Al}. \quad (**)$$

Используя помеченные соотношения (*) и (**), получим

$$\sigma = \frac{\eta}{n_M} = \frac{\eta}{\frac{n_M}{l_{Al}} l_{Al}} = \frac{\eta}{n_{Al} l_{Al}},$$

где n_{Al} — концентрация ядер в алюминиевой мишени в [см⁻³], l_{Al} — пробег α -частиц в ней. Однако в условии задан пробег l_B — в воздухе. Подставляя (**) в выражение для σ , получим

$$\sigma = \frac{\eta \rho_{Al}}{n_{Al} \rho_B l_B} = \frac{\eta A_{Al}}{\rho_B l_B N_A} = 4 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 = 0,04 \text{ бн.}$$

Здесь использовано, что $\rho_{Al} = m_{Al} n_{Al}$, где m_{Al} — масса атома алюминия. Плотность воздуха при нормальных условиях подсчитывается по известной формуле для идеального газа

$$\rho_{\text{воз}} = \frac{P\mu}{RT} \approx 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3.$$

$$8.42. \quad \sigma(\mathcal{E}) = \frac{Ac\mathcal{E}^2}{n_0}.$$

$$8.43. \quad \mathcal{J} = e \sqrt{\frac{KSc}{2l\epsilon\sigma}} = 1,96 \text{ А.}$$

$$8.44. \quad \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = e^{-(\mu_2 - \mu_1)x}. \text{ При } x = 5 \text{ см } \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \approx 1,5.$$

8.45. $\lambda' = 3\lambda = 3\text{Å}$.

8.46. $\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{2P_0 N_A}{\mu g} \sigma\right) \approx 1,2 \cdot 10^{-6}$, где $\sigma = \pi r_N^2 = \pi r_0^2 A_N^{2/3}$ (это геометрическое сечение неупругого процесса поглощения, и поэтому дифракционную упругую добавку учитывать не нужно), P_0 — нормальное атмосферное давление, μ — молярная масса азота.

8.47. $l_p = \frac{A_N}{8\pi r_N A r_p^2} \approx 148$ см, $l_N = \frac{A_N}{2\pi r_N A (r_N + r_p)^2} \approx 24$ см. (См. также комментарий к ответу задачи 8.3 о дифракционном удвоении.)

8.48. $\sigma_{\text{погл}} \approx \frac{\pi}{2} (2R_{\text{Pb}} - R_d) R_d = 0,385$ бн.

8.49. $T_n \approx \frac{\mathcal{E}_\gamma + \Delta\mathcal{E}_{\text{св}}}{1 + M_n/M_{\text{Li}}} = 6,7$ МэВ; $T_{\text{Li}} = \mathcal{E}_\gamma + \Delta\mathcal{E}_{\text{св}} - T_n = 1,1$ МэВ, где $\Delta\mathcal{E}_{\text{св}} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, M_{Li} — масса ядра ${}^6\text{Li}$.

8.50. $T_p = \frac{(4m_p - m_\pi)m_\pi}{2(m_p - m_\pi)} c^2 = 0,31$ ГэВ.

8.51. $\varphi = \frac{\hbar c}{\mathcal{E}_\gamma R_d} \approx 0,4$ рад.

Решение. Энергия связи нуклонов мала по сравнению с энергией падающих на мишень фотонов. Поэтому продольный импульс нуклонов можно оценить как $p_{\parallel} \approx \mathcal{E}_\gamma/c$. Поперечный импульс нуклонов обусловлен движением нуклонов в ядре. Импульс нуклона в ядре оценим из соотношения неопределенностей

$$p_{\perp} \approx \Delta p \sim \frac{\hbar}{R_d} \approx 100 \frac{\text{МэВ}}{c}, \quad c — \text{скорость света.}$$

Таким образом, угол рассеяния нуклонов в пучке по порядку величины равен

$$\varphi \approx \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \approx 0,4 \text{ рад.}$$

8.52. $p_{O^*} = m_{O^*} c \frac{\Delta\mathcal{E}}{2\mathcal{E}} = 1,49 \frac{\text{ГэВ}}{c}$, $\alpha \approx \frac{p_{O^*}}{p} \approx 0,15$ рад.

8.53. а) При реакции поглощается энергия (см. табл. 7 в конце книги) $Q = -931,5(7,016004 + 1,007825 - 7,016930 - 1,008665)$ МэВ = 1,645 МэВ

б) Из закона сохранения энергии и импульса для неупругого процесса найдем, полагая $m_n = m_p = m_{\text{Be}}/7 = m_{\text{Li}}/7$:

1) в системе центра масс

$$\mathcal{E}_n^c = \mathcal{E}_p^c - \frac{7}{8} Q;$$

2) в лабораторной системе

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \frac{49}{64} \left[\left(\mathcal{E}_p - \frac{8}{7} Q \right) + \frac{2}{7} \sqrt{\mathcal{E}_p \left(\mathcal{E}_p - \frac{8}{7} Q \right)} \cos \alpha + \frac{\mathcal{E}_p}{49} \right] = \\ &= \frac{1}{64} \left[\sqrt{\mathcal{E}_p} \cos \alpha + \sqrt{49 \left(\mathcal{E}_p - \frac{8}{7} Q \right) - \mathcal{E}_p \sin^2 \alpha} \right]^2, \end{aligned}$$

где \mathcal{E}_n^c и \mathcal{E}_n — энергии нейтрона в системе центра масс и лабораторной системе, \mathcal{E}_p^c , \mathcal{E}_p — то же для протона; α_c и α — углы между направлениями скорости протона и нейтрона в системе центра масс и лабораторной системе.

Из формул ясно, что минимальная энергия протона (порог реакции) в системе центра масс равна $\mathcal{E}_p^c = (7/8)Q = 1,44$ МэВ, а в лабораторной системе $\mathcal{E}_p = (8/7)Q = 1,88$ МэВ.

8.54. $\omega \approx \frac{R\sigma p}{m_N} \approx 7 \cdot 10^{-6}$, где m_N — масса нуклона. Нейтрино взаимодействует только с нейтронами ядер.

8.55. $\mathcal{E} \gg \frac{2m_p}{\rho R A} \approx 95 \cdot 10^3$ ГэВ.

8.56. Ослабление потока нейтрино $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{\sigma N_A \rho 2Rz}{2A} = 4,2 \cdot 10^{-4}$.

8.57*. Решение. Сечение взаимодействия нуклонов убывает с ростом скорости и стремится к «геометрическому» сечению $\sigma \sim 10^{-25}$ см² (радиус нуклона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13}$ см). Длина пробега при $n = 1$ см⁻³

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \approx 10^{25} \text{ см} \approx 10^7 \text{ св. лет}$$

(1 св. год $\approx 10^{18}$ см). Для массивных частиц в рамках геометрической модели рассеяния $\sigma \sim 10^{-24}$ см², а длина их свободного пробега $\lambda \sim 10^6$ св. лет. Т. о. прилет массивного «гостя» с такого расстояния крайне маловероятен. Заметим также, что полет комет по сильно выраженным гиперболическим траекториям не зафиксирован в истории астрономии.

8.58. $M = \frac{\pi L^2 n \mu}{N_A N_v u \sigma \eta} \approx 546$ т, где L — расстояние от Солнца до Земли, μ — молярная масса CCl_4 .

8.59*. $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-46}$ см².

Решение. Длина свободного пробега λ электрона в ядре, сечение взаимодействия σ и концентрация протонов n_p в ядре связаны известным соотношением $\lambda \sigma n_p = 1$. При этом $\lambda = 2v\tau$, где τ — время, проведенное K -электронами в ядре за $\tau_0 = 32$ дня, коэффициент «2» учитывает, что на K -оболочке находятся два электрона. Таким образом, искомое эффективное сечение

$$\sigma = \frac{1}{2n_p v \tau}$$

Концентрация протонов в ядре

$$n_p = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = 5,3 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3},$$

а время оценим как

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{R_{я}}{r_1} \right)^3,$$

где $R_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ А}^{1/3} = 4,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, а радиус орбиты K -электрона

$$r_1 = \frac{r_{\text{Б}}}{Z-1} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ см}. \text{ Таким образом, } \tau \approx 0,0074 \text{ с}.$$

Оценку скорости K -электрона проведем, исходя из соотношения

$$\frac{mv^2}{2} = Ry(Z-1)^2,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2Ry}{m}} (Z-1) = 3,7 \cdot 10^9 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Таким образом, искомое сечение

$$\sigma = \frac{1}{2nvt} \approx 3 \cdot 10^{-46} \text{ см}^2.$$

8.60. $R_{\text{Рб}} = r_0 A^{1/3} \approx 7,7 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Для K -оболочки мюона в атоме Рб

$$r = r_{\text{Б}} \frac{m_e}{m_{\mu} Z} \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ см} < R_{\text{Рб}}. \text{ Мюон взаимодействует с протоном по схеме}$$

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_{\mu}; \quad \sigma \approx \frac{4\pi r_0^3 A}{3Z^2 \cdot c\tau\alpha} \approx 1,9 \cdot 10^{-41} \text{ см}^2, \text{ где } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

8.61* Ослабление потока γ -квантов $j(L) = j(0)e^{-n\sigma L}$ будет малым при условии $n\sigma L \ll 1$, где n — концентрация «поглотителей» — ядер ^{119}Sn , σ — сечение поглощения. Самопоглощение мессбауэровских квантов носит резонансный характер. Из формулы Брейта—Вигнера для сечения упругого

$$\text{процесса при } \mathcal{E}_{\gamma} = \mathcal{E}_{\text{рез}} \text{ получаем } \sigma = g \frac{4\pi}{k^2} = \frac{4\pi\hbar^2 c^2}{\mathcal{E}_{\gamma}^2}. \text{ Здесь } g = \frac{1}{2} \frac{2J^* + 1}{2J + 1} -$$

статистический фактор, учитывающий число начальных (возбужденное ядро с моментом J^*) и конечных (ядро в нормальном состоянии с моментом J плюс γ -квант) состояний. Здесь $2 = 2J + 1$ — число возможных проекций момента γ -кванта. Для ядра ^{119}Sn $J^* = 3/2$, $J = 1/2$ и $g = 1$. Кроме того,

$$n = \rho \frac{N_{\text{А}}}{\mu} \varepsilon f. \text{ Отсюда } L \ll \frac{1}{n\sigma} = \frac{\mathcal{E}_{\gamma}^2 \mu}{4\pi\hbar^2 c^2 \rho N_{\text{А}} \varepsilon f} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \text{ где } \mu -$$

молярная масса BaSnO_3 .

$$\mathbf{8.62.} \quad N_{\text{Аг}} = \frac{j N_{\text{Сг}} \sigma}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \approx 30 \text{ ядер}, \text{ где } N_{\text{Сг}} \approx 2,2 \cdot 10^{30}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

$$\mathbf{8.63.} \quad N_{\text{Ge}} \approx 5 \text{ ядер}.$$

8.64. $\frac{\sigma_{\text{рез}}}{\sigma_0} \sim 10^6$. Здесь сечение поглощения в центре резонансной линии определяется формулой Брейта—Вигнера для неупругого поглощения $\sigma_{\text{рез}} = \pi\lambda^2 = \lambda^2/4\pi$.

$$\mathbf{8.65.} \quad \alpha_{\text{полг}} = \frac{j_0 - j_{\text{полг}}}{j_0} = 1 - e^{-n_{\text{я}} \sigma_{\text{полг}}^d} \approx 0,1; \quad \alpha_{\text{расс}} = \frac{j_0 - j_{\text{расс}}}{j_0} = 1 - e^{-n_{\text{я}} \sigma_{\text{расс}}^d} \approx 0,37.$$

$$8.66. \sigma_1 = \sigma_2 \frac{N_2^2 (kT)^2}{(2P_0)^2} \approx 11 \text{ бн.}$$

$$8.67. a_{\text{эл}} = \frac{\pi \theta_{\text{кр}}^2 / \lambda^2 - N_2 a_2 + N_1 a_1}{z_2 N_2 - z_1 N_1} = -2,6 \cdot 10^{-16} \text{ см. При учете рассеяния}$$

нейтронов на электронах, показатель преломления $n^2 = 1 - \frac{Na\lambda^2}{\pi} - \frac{ZNa_{\text{эл}}\lambda^2}{\pi}$.

Кроме того, в данной задаче $\theta_{\text{кр}}^2 \approx n_1^2 - n_2^2$.

Возможны два различных механизма взаимодействия, приводящих к рассеянию нейтронов на электронах. Еще в 1947 г. Ферми указал на возможность существования специфического взаимодействия между нейтроном и электроном, не сводящегося к взаимодействию между магнитными моментами этих частиц. Появление этого взаимодействия следует ожидать, исходя из представления о том, что ядерное взаимодействие есть результат обмена виртуальными пионами между нуклонами, так что часть времени нейтрон проводит в диссоциированном состоянии $n \rightleftharpoons p + \pi^-$. Тем самым должны возникать силы притяжения, обусловленные электростатическим притяжением между электроном и протоном. Как следует из эксперимента, длина рассеяния очень мала и поэтому эти силы должны быть весьма короткодействующими. Нейтрон состоит из трех заряженных кварков, и это взаимодействие фактически есть взаимодействие между составляющими нейтрон кварками и электроном.

Второй механизм — это так называемое фолдиевское взаимодействие — был получен и рассчитан Л. Фолди. Не вдаваясь в подробности, отметим, что взаимодействие медленного нейтрона с электростатическим полем возникает в результате учета квантовых эффектов и связано с «дрожанием» нейтрона в области размером в комптоновскую длину волны виртуальных пионов. На таких расстояниях нейтрон уже нельзя считать точечной частицей.

$$8.68. \tau \approx \frac{m_n \mathcal{E}_n \sigma_{\text{полн}}}{2h\Gamma_n} = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ с.}$$

$$8.69. \frac{\sigma_n(\mathcal{E}_1)}{\sigma_n(\mathcal{E}_2)} \approx 1, \text{ т. е. сечения примерно равны.}$$

Решение. Парциальное сечение нейтронного распада составного ядра

$$\sigma_n = \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{\text{полн}}} = \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_\gamma} \approx \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma},$$

где сечение образования составного ядра $\sigma_c = \pi \lambda^2 D$, а $D = 4 \frac{kk'}{(k+k')^2} \approx$

$\approx 4 \frac{k}{k'} \alpha \sqrt{\mathcal{E}}$ — вероятность проникновения нейтрона в тяжелое ядро.

Здесь $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}$; $k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 + \mathcal{E})} \gg k$; $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}}}$. Вероятность нейтрону покинуть составное ядро также пропорциональна D . Таким образом, $\sigma_n \propto \pi \lambda^2 D^2 \propto \frac{1}{\mathcal{E}} = \text{const}$, откуда и следует, что сечение распада составного ядра по нейтронному каналу от \mathcal{E} не зависит.

§ 9. Деление ядер. Реакторы. Термоядерный синтез

9.1* Решение. При делении ядер на два равных осколка

$$\Delta \mathcal{E}_{\Pi} = \mathcal{E}_{\Pi} (2^{1/3} - 1), \quad \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = \mathcal{E}_{\text{кул}} (2^{-2/3} - 1),$$

где $\mathcal{E}_{\Pi} = -17,8A^{2/3}$ [МэВ], $\mathcal{E}_{\text{кул}} = -0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ [МэВ].

Деление энергетически выгодно, когда $\Delta \mathcal{E}_{\Pi} + \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} > 0$, т. е.

$$-|\mathcal{E}_{\Pi}| (2^{1/3} - 1) + |\mathcal{E}_{\text{кул}}| (1 - 2^{-2/3}) > 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{|\mathcal{E}_{\text{кул}}|}{|\mathcal{E}_{\Pi}|} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0,70, \quad \text{или} \quad \frac{Z^2}{A} \geq 17,6.$$

9.2. 1) $\frac{Z^2}{A} \geq 17,62 + 129,4A^{-1,42}$; 2) $\frac{Z^2}{A} \geq 17,62 + 564,8A^{-1,42}$; 3) $\frac{Z^2}{A} \geq 17,62 + 305,9A^{-1,42}$.

Наметим путь решения задачи. Энергия связи четно-четного ядра

$$\mathcal{E}_{\text{св}}(A, Z) = \mathcal{E}_1 A - \mathcal{E}_2 A^{2/3} - \mathcal{E}_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \mathcal{E}_4 \frac{(A-Z)^2}{A/2} - \mathcal{E}_5 A^{-3/4},$$

где $\mathcal{E}_1 = 15,75$; $\mathcal{E}_2 = 17,8$; $\mathcal{E}_3 = 0,71$; $\mathcal{E}_4 = 23,7$; $\mathcal{E}_5 = 34$ [МэВ]. Энергия связи половинок ядра

$$\mathcal{E}'_{\text{св}}\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) = \mathcal{E}_1 \frac{A}{2} - \mathcal{E}_2 \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} - \mathcal{E}_3 \frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{1/3}} - \mathcal{E}_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A/2} - \mathcal{E}_5 \left(\frac{A}{2}\right)^{-3/4} \cdot \delta,$$

$$\text{где } \delta = \begin{cases} -1, & \text{если } \frac{A}{2} = 2p; \frac{Z}{2} = 2k, \\ 0, & \text{если } \frac{A}{2} = 2p + 1, \\ +1, & \text{если } \frac{A}{2} = 2p; \frac{Z}{2} = 2k + 1. \end{cases}$$

Условие распада

$$2\mathcal{E}'_{\text{св}}\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) - \mathcal{E}_{\text{св}} \geq 0.$$

Далее легко получить приведенные выше ответы.

9.3* Решение. При деформации формы ядра изменяются энергия поверхностного натяжения и энергия кулоновского взаимодействия. Если $\Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} + \Delta \mathcal{E}_{\text{пов}} \geq 0$, то энергия в конечном состоянии больше, и исходное сферическое ядро устойчиво:

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = \mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{элл}} - \mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{шар}}, \quad \Delta \mathcal{E}_{\text{пов}} = \sigma (S^{\text{элл}} - S^{\text{шар}}),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения ядра. Будем статически «вытягивать» сферическое ядро радиусом r , превращая его в эллипсоид вращения с полуосями a и b . Введем эксцентриситет меридионального сечения

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Тогда $a = r(1 - \varepsilon^2)^{-1/6}$; $ab = r^2(1 - \varepsilon^2)^{1/6}$;

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{r} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/3}}{2\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon};$$

$$S = 4\pi r^2 \frac{(1 - \varepsilon^2)^{-1/6}}{2\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

При малых деформациях $\varepsilon \ll 0$. Эти выражения можно разложить в ряды и мы получаем:

$$\mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{элл}} = \mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{шар}} \left(1 + \frac{2}{45} \varepsilon^4 \right), \quad \mathcal{E}_{\text{пов}}^{\text{элл}} = \mathcal{E}_{\text{пов}}^{\text{шар}} \left(1 - \frac{1}{45} \varepsilon^4 \right).$$

Отсюда следует условие устойчивости ядра

$$\mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{шар}} / \mathcal{E}_{\text{пов}}^{\text{шар}} \leq 2.$$

Используя формулу Вайцзеккера

$$\mathcal{E}_{\text{пов}} = 17,8A^{2/3} [\text{МэВ}] \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\text{кул}} = 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} [\text{МэВ}],$$

легко получить искомый критерий устойчивости ядер к статическим деформациям формы

$$\frac{Z^2}{A} \leq 50.$$

Рассмотренная задача — модельная, потому что большинство тяжелых ядер имеют несферическую форму.

Реально, конечно, процесс деления ядра — динамический. При взаимодействии нейтрона с ядром возникают колебания формы капли практически несжимаемой ядерной жидкости. Частота этих колебаний определяется соотношением $\mathcal{E}_{\text{кул}}$ и $\mathcal{E}_{\text{пов}}$. При $\mathcal{E}_{\text{кул}} / \mathcal{E}_{\text{пов}} \leq 2$ частота становится мнимой (колебания аperiодическими), и амплитуда колебаний нарастает со временем. Это приводит к возникновению перетяжки, и ядро делится на два осколка.

$$9.4^* \quad \sigma = \frac{4\pi}{kk'} \approx \begin{cases} 2600 \text{ бн (тепловые нейтроны),} \\ 4,1 \text{ бн (при } \mathcal{E} = 10 \text{ кэВ),} \end{cases}$$

где $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}$, $k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\mathcal{E} + U_0)}$.

Решение. При энергиях тепловых нейтронов дебройлевская длина волны нейтрона $\lambda = \hbar / \sqrt{2m\mathcal{E}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ см} \gg R_U = 8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ и сечение образования составного ядра $\sigma \approx \pi \lambda^2 D$, где D — коэффициент прохождения нейтронной волной границы ядра. Коэффициент прохождения D определяется соотношением (см. задачу 3.25)

$$D = \frac{4kk'}{(k+k')^2} \approx \frac{4k}{k'},$$

где волновые числа k и k' определяются как коэффициенты в уравнениях Шредингера для областей вне ядра и внутри ядра (рис. 183)

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}, \quad k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\mathcal{E} + U_0)}.$$

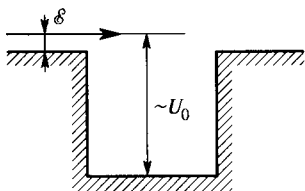


Рис. 183

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{kk'} \approx \frac{2\pi\hbar^2}{m\sqrt{\epsilon}U_0} \approx 2600 \text{ бн.}$$

Для нейтрона с энергией 10 кэВ $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-9}$ см, и искомое сечение $\sigma \approx 4,1$ бн. Как видно из формулы, при данных энергиях $\sigma \propto 1/\sqrt{\epsilon} \propto 1/v$. Такая зависимость сечения деления от скорости нейтронов называется *законом Бете*. Здесь он имеет место, поскольку рассматриваемые энергии лежат далеко от области резонансного поглощения нейтронов ядрами ^{235}U (1 ÷ 100 эВ).

Области резонансного поглощения нейтронов ядрами ^{235}U (1 ÷ 100 эВ).

9.5. $\sigma_c = \pi(R + \lambda)^2 D = 2,3$ бн, где $D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \approx 0,7$. Относительная

вероятность деления к полной вероятности реакций, идущих через составное

ядро, $\frac{\Gamma_{\text{дел}}}{\Gamma_{\text{соед}}} = \frac{\sigma_{\text{дел}}}{\sigma_c} \approx 0,2$.

9.6. $N = \frac{N_0}{1 - k_\infty}$.

9.7. $k_\infty = \frac{\sigma_{\text{расс}}}{\sigma_{\text{погл}}} \frac{\sigma_{\text{дел}}}{\sigma_{\text{погл}} + \sigma_{\text{расс}}}$. В данном случае $k_\infty = 0,75 < 1$, что и требо-

валось показать.

9.8. $P(t) = P(0)k^{t/\tau} \approx P(0)e^{t \ln k/\tau} \approx P(0)e^{\rho t/\tau}$; $T = \frac{\tau}{\rho}$.

9.9. При $\rho < \beta$. В отсутствие запаздывающих нейтронов $k - \beta < 1$ реакция только на мгновенных делительных нейтронах затухла бы. При $\rho > \beta$ реакция может развиваться и без запаздывающих нейтронов.

9.10. $R = \sqrt{\frac{3}{k_\infty - 1}} L = 4$ м.

Решение. Полное число нейтронов

$$N = \int_0^R n_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{\pi n_0 R^3}{3},$$

где n_0 — концентрация нейтронов при $r = 0$. Полагая $L \ll R$, подставляя числовые данные получим, что из тонкого наружного слоя реактора, содержащего $4\pi R^2 L \frac{n_0 L}{2R}$ нейтронов (где $\frac{n_0 L}{2R}$ — средняя плотность нейтронов внутри этого слоя), примерно половина этих нейтронов уйдет из реактора, а половина останется. За это же время внутри реактора появится $(k_\infty - 1)N$ новых нейтронов. Таким образом,

$$\pi R n_0 L^2 = \frac{1}{3} \pi n_0 R^3 (k_\infty - 1),$$

откуда и следует ответ $R = \sqrt{\frac{3}{k_\infty - 1}} L = 400$ см.

9.11. $t^* = \frac{T_1 T_2 \ln(T_2/T_1)}{(T_2 - T_1) \ln 2} \approx 11$ час.

Решение. Пусть при $t = 0$ имеется N_0 ядер йода I , а ядер ксенона $Xe - N_2(0) = 0$. Процесс β -распада I описывается уравнением

$$dN_1 = -N_1\lambda_1 dt,$$

откуда $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$, где λ_1 — постоянная распада ядер йода. Ядра ксенона не только постоянно образуются из йода, но и одновременно распадаются с постоянной распада λ_2 . Запишем уравнение этого процесса и его решение:

$$dN_2 = -N_2\lambda_2 dt + N_1\lambda_1 dt,$$

$$N_2(t) = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t}.$$

Поскольку $N_2(0) = 0$, то $a = -b$, $N_2(t) = b(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$. Подстановка $N_1(t)$ в дифференциальное уравнение для N_2 дает

$$b(\lambda_1 - \lambda_2) = N_0\lambda_1, \text{ откуда } b = \frac{N_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Таким образом,

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Условие максимума числа ядер ксенона $\frac{dN_2}{dt} = 0$, откуда $\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (\lambda_1 - \lambda_2)t^*$.

Таким образом, искомое время

$$t^* = \frac{T_1 T_2 \ln(T_2/T_1)}{(T_2 - T_1) \ln 2} \approx 11 \text{ час.}$$

9.12.* $t = 3,4 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 390$ дней.

Решение. Полное нейтронное сечение σ_t ^{239}Pu складывается из сечения деления σ_{f1} и сечения радиационного захвата нейтрона σ_{n1} (переход в ^{240}Pu), т. е. $\sigma_t = \sigma_{f1} + \sigma_{n1} = 1008$ бн.

Пусть плотность потока нейтронов, облучающих ^{239}Pu , равна j [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$]. Тогда число ядер N_1 ^{239}Pu убывает по закону

$$\frac{dN_1}{dt} = -j\sigma_t N_1.$$

Уравнение, описывающие накопление ядер N_2 ^{240}Pu с учетом их распада имеет вид:

$$\frac{dN_2}{dt} = j\sigma_{n1} N_1 - j\sigma_{n2} N_2.$$

Решение этой системы уравнений (см. задачу 9.11) есть

$$N_1 = N_{10} \exp(-j\sigma_t t); \quad N_2 = \frac{\sigma_{n1} N_{10}}{\sigma_{n2} - \sigma_t} \left[\exp(-j\sigma_t t) - \exp(-j\sigma_{n2} t) \right].$$

Требуемое отношение концентраций

$$\frac{N_{240}}{N_{239}} = 0,4 = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n2} - \sigma_t} \left\{ 1 - \exp[-j(\sigma_{n2} - \sigma_t)t] \right\},$$

откуда

$$-j(\sigma_{n2} - \sigma_t)t = \ln \left(1 - 0,4 \frac{\sigma_{n2} - \sigma_t}{\sigma_{n1}} \right).$$

Плотность потока j находится из энергетических соображений. Мощность реактора W равна (N_3 — число ядер горючего)

$$W = \epsilon j \sigma_{f3} N_3 = \epsilon j \sigma_{f3} M N_A / 235,$$

откуда искомый поток нейтронов

$$j = \frac{235W}{\epsilon \sigma_{f3} M N_A} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Время наработки необходимой концентрации ^{240}Pu равно

$$t = \frac{\ln [1 + 0,4 (\sigma_t - \sigma_{n2}) / \sigma_{n1}]}{j(\sigma_t - \sigma_{n2})} = 3,4 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 390 \text{ дней}.$$

$$9.13. \frac{n_{\text{Pu}}}{n_{\text{U}}} = \frac{\sigma_{j_n} T_{1/2}}{\ln 2} \approx 3,3 \cdot 10^{-16}.$$

$$9.14. \frac{\Delta M}{M} = \frac{\epsilon A_{\text{U}} m_n}{\epsilon_0 M n_0} \approx 0,63, \text{ где } A_{\text{U}} = 235.$$

$$9.15. t = \frac{T_1 T_2}{(T_1 - T_2) \ln 2} \ln \left(\frac{N_{10} N_2}{N_{20} N_1} \right) \approx 1,7 \cdot 10^9 \text{ лет, где } T_1 = 4,5 \cdot 10^9 \text{ лет, } T_2 = 0,7 \cdot 10^9 \text{ лет — периоды полураспада } ^{238}\text{U} \text{ и } ^{235}\text{U}.$$

$$9.16. j = \frac{WN}{4\pi L^2 Q} \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}; \eta = \frac{N\epsilon}{Q} = 0,045, \text{ где } Q = 200 \text{ МэВ — энергия, выделяемая при делении ядра урана}.$$

$$9.17. \text{ Земля практически не поглощает антинейтрино, поэтому } j = \frac{6W}{Q4\pi R_3^2} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Решение. В соответствии с законами сохранения электрического и лептонного зарядов антинейтрино взаимодействуют только с протонами:

$$\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+.$$

Реакция взаимодействия $\tilde{\nu}_e$ с нейтронами невозможна в силу закона сохранения лептонного заряда. Наибольшее поглощение толщей Земли будут испытывать антинейтрино, проходящие внутри Земли максимальный путь, равный диаметру Земли. Концентрация нуклонов $n = \rho / m_n = \rho N_A / \mu_n$, где m_n — масса нуклона; $\mu_n = 1$ г/моль. Поскольку Земля состоит в основном из элементов с $A \leq 60$, то числа протонов и нейтронов примерно равны, т.е. $n_p = n/2$. Тогда число протонов в «столбике» длиной $2R_3$ с поперечным сечением 1 см^2

$$N_p = n_p 2R_3 = \frac{1}{2} \frac{\rho N_A}{\mu_n} 2R_3 = \frac{\rho N_A R_3}{\mu_n}.$$

Уравнение, описывающее убыль антинейтрино из потока,

$$dN_\nu = -\sigma N_\nu dN_p.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$N_v = N_0 e^{-\sigma N_p} = N_0 \exp \left\{ -\sigma \frac{\rho N_A R_3}{\mu_H} \right\},$$

где N_0 — начальный поток антинейтрино. Поскольку показатель экспоненты

$$\frac{\sigma \rho N_A R_3}{\mu_H} \approx 1,4 \cdot 10^{-10} \ll 1,$$

то $N_v \approx N_0$, т. е. Земля практически не ослабляет поток антинейтрино, т. е. поглощением антинейтрино Землей можно пренебречь.

Полный поток антинейтрино на поверхности Земли от распада распределенных по объему ядер тяжелых элементов равен потоку от всех распадающихся ядер, помещенных в центре Земли. По существу это аналог электростатической теоремы Гаусса. Поэтому

$$j = \frac{6W/Q}{4\pi R_3^2} = 6 \cdot 10^5 \frac{\text{нейтрино}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}},$$

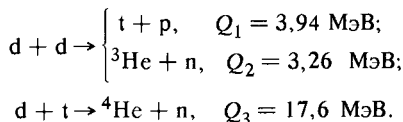
где $W = 15$ ТВт — мощность, выделяемая подземными источниками деления, $Q = 200$ МэВ — энергия, выделяющаяся при одном акте деления.

9.18. $m = 282,6 \cdot 10^3$ т естественного урана.

9.19. $v = \frac{\sqrt{2Ze}}{\sqrt{MR_\pi}} \approx 3,5 \cdot 10^9$ см/с, где Z , M , R_π — порядковый номер, масса и радиус ядра урана.

9.20* 1) $n_t = 10^{13}$ см⁻³; 2) $q = 1,25 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ · см⁻³; 3) $W = 99,6$ Вт/см³.

Решение. Отметим энерговыделение при указанных реакциях синтеза ядер



Первые две реакции (d, d) идут с равной вероятностью в силу зеркальности ядер t и ³He. Изменение со временем концентрации частиц в результате взаимодействия определяется скоростями реакций (d, d) и (d, t) и скоростью поступления ядер извне.

Скорость реакции — это число столкновений частиц сорта 1 и 2 в единицу времени, приводящее к реакции. Пусть $f_1(\mathbf{v}_1)$ и $f_2(\mathbf{v}_2)$ — функции распределения частиц сортов 1 и 2 по скоростям. Будем считать, что эти функции нормированы, т. е. $\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$. Тогда каждую секунду в каждом см³ объема плазмы число актов взаимодействия частиц, имеющих скорости от v_1 до $v_1 + dv_1$, и от v_2 до $v_2 + dv_2$ равно

$$dN_{12} = n_1 f_1(\mathbf{v}_1) n_2 f_2(\mathbf{v}_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sigma(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2,$$

где n_1 и n_2 — плотности частиц, $\sigma(v)$ — сечение реакции, зависящее от относительной скорости частиц, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ (рис. 184). Следовательно,

$$N_{12} = \iint d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 n_1 f_1(\mathbf{v}_1) n_2 f_2(\mathbf{v}_2) v \sigma(v) \quad [\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}].$$

Считая, что плотность частиц n_1 и n_2 неизменны, получаем

$$N_{12} = n_1 n_2 \overline{\sigma v}, \quad \text{где} \quad \overline{\sigma v} = \iint d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) v \sigma(v).$$

Запишем уравнение для изменения концентрации ядер дейтерия n_d со временем

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} = -2 \frac{(n_d - 1)n_d}{2} \overline{\sigma v_{dd}} - n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}} + q.$$

Здесь первое слагаемое описывает убыль ядер дейтерия из-за столкновений друг с другом. Одно ядро d имеет $(n_d - 1)$ столкновений (в расчете на единицу объема); n_d ядер имеют $n_d(n_d - 1) \approx n_d^2$ столкновений. Для реакции (d, d) безразличен порядок дейтронов в паре, поэтому число взаимодействующих пар равно $n_d^2/2$, и в каждом акте реакции исчезают два дейтрона. Таким образом,

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} = -n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} - n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}} + q.$$

Аналогично, для ядер трития можно записать:

$$\frac{\partial n_t}{\partial t} = -n_t n_d \overline{\sigma v_{dt}} + \frac{1}{2} \frac{n_d(n_d - 1)}{2} \overline{\sigma v_{dd}}.$$

Во втором слагаемом первый коэффициент $1/2$ учитывает вероятность получения трития в результате столкновения пары дейтронов. Таким образом,

$$\frac{\partial n_t}{\partial t} = -n_t n_d \overline{\sigma v_{dt}} + \frac{1}{4} n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}}.$$

В стационарном состоянии производные \dot{n}_d и \dot{n}_t равны нулю, и мы получаем уравнения баланса

$$\begin{cases} q = n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} + n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}}, \\ \frac{1}{4} n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} = n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}}, \end{cases}$$

откуда вычисляем стационарную концентрацию ядер трития

$$n_t = \frac{1}{4} n_d \frac{\langle \sigma v_{dd} \rangle}{\langle \sigma v_{dt} \rangle} = 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

а также интенсивность поступления в зону реакции дейтронов от внешнего источника

$$q = \frac{5}{4} n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} = 1,25 \cdot 10^{14} \frac{\text{ядер}}{\text{с} \cdot \text{см}^3}.$$

Выделяющаяся в термоядерных реакциях мощность W может быть выражена через скорости изменения концентраций ядер дейтерия по каналам (d, d) и (d, t)

$$W = Q_{dd} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n_d}{\partial t} \right)_{dd} + Q_{dt} \left(\frac{\partial n_d}{\partial t} \right)_{dt},$$

где Q_{dd} и Q_{dt} — энергосвечения в реакциях (d, d) и (d, t) . Коэффициент $1/2$ учитывает, что для реакции (d, d) нужно два дейтрона. Поскольку эта реакция идет с равной вероятностью по двум каналам, то $Q_{dd} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$, $Q_{dt} = Q_3$. Окончательно,

$$W = n_d^2 \overline{\sigma v}_{dd} \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{4} = 9,96 \cdot 10^8 \frac{\text{эрг}}{\text{с см}^3} = 99,6 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

9.21. Число реакций, происходящих в 1 с в 1 см³, равно $n^2 \overline{\sigma(v)} v / 2$, где черта означает усреднение по всем значениям относительных скоростей атомов дейтерия (см. задачу 9.20).

9.22. $W = \frac{n_d^2}{2} \overline{\sigma v}_{dd} \left(\frac{3,94 + 3,26}{2} \right) = 2,88 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{с см}^3} = 2,88 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}$ (см. также задачу 9.20).

9.23. $W = n_d n_t \overline{\sigma v}_{dt} Q_{dt} = \frac{n^2}{4} \overline{\sigma n}_{dt} Q_{dt}$, где $n_d = n_t = n/2$. (См. задачу 9.20).

$N = WV$.

При $kT = 1$ кэВ $W = 4,36 \cdot 10^{-5}$ Вт/см³, $N = 21,8$ кВт.

При $kT = 10$ кэВ $W = 0,422$ Вт/см³, $N = 211$ МВт.

9.24. $\tau \geq \frac{12kT}{\overline{\sigma v}_{dt} n Q_{dt}}$.

9.25. $W_{\text{выд}} = W_{\text{нагр}} = \frac{3kTn^2}{n\tau} = 0,48 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}$.

9.26. $n\tau > \frac{36kT}{\overline{\sigma v}_{dt} Q_{dt}} \approx 3 \cdot 10^{14}$ с/см³.

9.27. $R > \frac{12\sigma_c T^4}{Q n_d \overline{\sigma v}_{dd}} = 3,45 \cdot 10^{10}$ см = $3,45 \cdot 10^5$ км,

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 24,8$ МэВ — выделение энергии, соответствующие суммарному уравнению синтеза $5d \rightarrow {}^3\text{He} + {}^4\text{He} + p + 2n$, σ_c — константа Стеффана—Больцмана.

9.28* $\frac{N_{dd}^{\text{KB}}}{N_{dd}^{\text{КЛ}}} \approx 1,6 \cdot 10^{21}$.

Решение. Как следует из решения задачи 9.20, скорость реакции (d, d) можно представить в виде

$$N_{dd} = \frac{n_d^2}{2} \overline{\sigma v}_{dd}, \quad \text{где } \overline{\sigma v}_{dd} = A(m, T) \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) \sigma(v) dv,$$

где $\mu = m/2$ — приведенная масса, v — относительная скорость.

При классическом рассмотрении реакция произойдет только тогда, когда кинетическая энергия относительного движения будет больше высоты кулоновского барьера $\mu v^2/2 \geq U_{\text{кул}} = e^2/(2R_d)$, где R_d — классический радиус дейтрона ($R_d = 1,7 \cdot 10^{-13}$ см). В этом случае сечение взаимодействия $\sigma_{\text{кл}}(v) = 4\pi R_d^2$ и

$$\begin{aligned} \overline{\sigma v}_{dd}^{кл} &= A \int_0^{\infty} v^3 \sigma_{кл}(v) \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT_0}\right) dv = \tilde{A} \pi \left(\frac{e^2}{U_{кул}}\right)^2 \int_{U_{кул}}^{\infty} \mathcal{E} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT_0}\right) d\mathcal{E} \approx \\ &\approx \tilde{A} \pi \left(\frac{e^2}{U_{кул}}\right)^2 (kT_0)^2 \left(\frac{U_{кул}}{kT_0} + 1\right) \exp\left(-\frac{U_{кул}}{kT_0}\right) \approx \\ &\approx \tilde{A} \pi \left(\frac{e^2}{U_{кул}}\right)^2 kT_0 U_{кул} \exp\left(-\frac{U_{кул}}{kT_0}\right), \end{aligned}$$

поскольку $\frac{U_{кул}}{kT_0} \approx 58 \gg 1$.

При вычислениях были введены обозначения $\mathcal{E} = \mu v^2/2$, $\tilde{A} = A(2/\mu)^2$.

В квантовом случае определяющую роль играет проникаемость кулоновского барьера. При $\mathcal{E} \ll U_{кул}$ (это условие выполняется в задаче, поскольку $\mathcal{E} \sim (3/2)kT \approx 1,4 \cdot 10^4$ эВ $\ll 0,5$ МэВ)

$$D(\mathcal{E}) \simeq \exp\left(-\frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{\mathcal{E}}}\right).$$

В этом случае сечение взаимодействия $\sigma_{кв}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})D(\mathcal{E})$, где $\sigma(\mathcal{E})$ — геометрическое сечение образования составного ядра, и

$$\overline{\sigma v}_{dd}^{кв} = A \int_0^{\infty} v^3 \sigma_{кв}(v) \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT_0}\right) dv = \tilde{A} \int_0^{\infty} \mathcal{E} \sigma_{кв}(\mathcal{E}) \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT_0}\right) d\mathcal{E};$$

$$\sigma_{кв}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})D(\mathcal{E}) \approx \sigma(\mathcal{E}) \exp\left(-\frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{\mathcal{E}}}\right).$$

Выражение для $\overline{\sigma v}_{dd}^{кв}$ содержит интеграл с произведением двух экспонент (падающей и медленно растущей). Главную роль здесь играет область значений энергий вблизи максимума показателя экспоненциальной функции

$$\left. \frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\frac{\mathcal{E}}{kT_0} + \frac{4e^2 \sqrt{2\mu}}{\hbar \sqrt{\mathcal{E}}} \right) \right|_{\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max}} = 0,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{\max} = 2kT_0 \sqrt[3]{\frac{\mu e^4}{\hbar^2 kT_0}} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ эВ}.$$

Соответствующая длина волны де Бройля $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu \mathcal{E}_{\max}}} = 3,66 \cdot 10^{-11}$ см $\gg R_d$.

Таким образом, в наиболее существенной области значений энергий справедлива аппроксимация $\sigma(\mathcal{E}) = \pi \lambda^2 = \pi \hbar^2 / (2\mu \mathcal{E})$ и

$$\overline{\sigma v}_{dd}^{кв} = \tilde{A} \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT_0} - \frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{\mathcal{E}}}\right) d\mathcal{E}.$$

Подынтегральное выражение представляет собой функцию с острым максимумом и шириной порядка kT_0 . Т. к. $kT_0 \gg \mathcal{E}_{\max}$, то спадание функции вблизи экстремума определяется экспонентой $\exp(-\mathcal{E}/kT_0)$. Таким образом,

$$\overline{\sigma v}_{dd}^{кв} = \tilde{A} \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} kT_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{\max}}{kT_0} - \frac{4e^2 \sqrt{2\mu}}{\hbar \sqrt{\mathcal{E}_{\max}}}\right) = \tilde{A} \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} kT_0 \exp\left(-6 \sqrt[3]{\frac{\mu e^4}{\hbar^2 kT_0}}\right).$$

Окончательно,

$$\frac{N_{\text{dd}}^{\text{KB}}}{N_{\text{dd}}^{\text{КТ}}} = \frac{\hbar^2}{2\mu e^4} U_{\text{кул}} \exp\left(\frac{U_{\text{кул}}}{kT_0} - 6\sqrt[3]{\frac{\mu e^4}{\hbar^2 kT_0}}\right) \approx 1,6 \cdot 10^{21}.$$

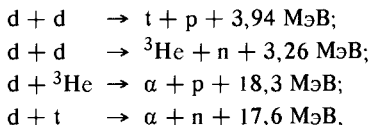
9.29* В магнитном поле все столкновения идут с моментом импульса $I = 3/2$ и среднее сечение увеличивается в 1,5 раза.

Решение. При низких энергиях, т.е. при малых импульсах, дебройлевская длина волны очень велика по сравнению с размерами частиц. По правилу квантования момента импульса взаимодействие возможно только в состоянии с $L = 0$, и полный момент импульса ядра как целого — чисто спиновый. Полный момент импульса системы $d + t$: $\mathbf{I} = \mathbf{S}_d + \mathbf{S}_t$ может принимать два значения $I = 3/2$ и $I = 1/2$. Так как ядерные силы зависят от спинов сталкивающихся частиц и полный спин есть интеграл движения, то

$$\langle \sigma \rangle = \omega_{3/2} \sigma_{3/2} + \omega_{1/2} \sigma_{1/2}.$$

Здесь $\langle \sigma \rangle$ — среднее сечение реакции; $\sigma_{3/2}$ и $\sigma_{1/2}$ — сечения реакции, соответствующие $I = 3/2$ и $I = 1/2$; $\omega_{3/2}$ и $\omega_{1/2}$ — доли состояний, соответствующие значениям полного момента импульса I из общего числа состояний, равного $(2S_d + 1)(2S_t + 1)$. По условию $\sigma_{1/2} \approx 0$, тогда $\langle \sigma \rangle = \omega_{3/2} \sigma_{1/2} = \frac{2 \cdot (3/2) + 1}{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1/2 + 1)} \sigma_{3/2} = \frac{2}{3} \sigma_{3/2}$. В магнитном поле, полностью поляризующем спины взаимодействующих ядер, возможно только одно состояние $S_{dz} = 1$ и $S_{tz} = 1/2$; $I_z = 3/2$ (ось z совпадает с направлением магнитного поля \mathbf{B}). Тогда $\langle \sigma(B) \rangle = \sigma_{3/2}$ и, следовательно, среднее сечение возрастает в 1,5 раза.

9.30* Если учесть четыре реакции



то на один «сгоревший» дейтрон выделяется энергия 7,18 МэВ. Пользуясь этим, легко найти, что при полном сгорании дейтерия, содержащегося в 1 л воды, выделится энергия $3,6 \cdot 10^3$ кВт·ч, что равно энергии, получающейся при сгорании 277 кг бензина.

9.31. $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^7$ кДж.

$$\mathbf{9.32.} \quad \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{\mathcal{E}_{\text{конечн}}} = \frac{36kT}{3Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3} \approx 0,06,$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — энергии, выделяющиеся при реакциях синтеза, равные соответственно 3,3; 4; 17,6 МэВ.

$$\mathbf{9.33*} \quad n_d \tau = \frac{3kT}{\frac{\eta}{\eta-1} \frac{2Q_{dd} + Q_{dt}}{4} - 1,5 \cdot 10^{-34} \sqrt{T}} \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ с/см}^3.$$

Решение. Реакция будет самоподдерживающейся, если выделяемая в реакторе плотность мощности превысит плотность мощности совокупных

потерь: $W \geq W_{\text{пот}}$. Последняя состоит из тепловых потерь, связанных с уходом частиц из зоны реакции, и потерь на тормозное излучение:

$$W = W_{\tau} + W_{\text{изл.}}$$

Выделяемая в реакторе мощность W берется из мощности термоядерного синтеза W_0 и частичного полезного преобразования мощности потерь в корпусе реактора, так и в окружающей защите

$$W = \eta W_0 + \beta (W_{\tau} + W_{\text{изл.}}).$$

Таким образом, условие стационарной работы на уровне нулевой мощности при $\eta = \beta$

$$\eta \cdot (W_0 + W_{\tau} + W_{\text{изл.}}) = W_{\tau} + W_{\text{изл.}}$$

Используя выражения для W_0 и W_{τ} , полученные в задачах 9.20 и 9.24,

$$W_0 = n_d^2 \overline{\sigma v}_{dd} \frac{1}{4} (2Q_{dd} + Q_{dt}), \quad W_{\tau} = \frac{3n_d kT}{\tau},$$

получим

$$n_d \tau = \frac{3kT}{\frac{\eta}{\eta-1} \overline{\sigma v}_{dd} \frac{2Q_{dd} + Q_{dt}}{4} - 1,5 \cdot 10^{-34} \sqrt{T}} \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ с/см}^3.$$

$$9.34. \quad \eta = \frac{Q}{Q_{\pi}} = \frac{4,964}{24,68} = 0,2.$$

$$9.35. \quad \mathcal{E}_k^{\text{max}} = 19,8 \text{ МэВ.}$$

$$9.36. \quad \mathcal{J} = \frac{em_p}{\sigma t} \approx 9300 \text{ А.}$$

9.37. $t_{1/2} = 1,2 \cdot 10^{10}$ лет — время, за которое концентрация протонов убывает в два раза.

Решение. Согласно решению задачи 9.20 уравнение, описывающее изменение концентрации протонов, имеет вид

$$\frac{dn_p(t)}{dt} = - \frac{n_p^2(t)}{2} \overline{\sigma v}_{pp} \approx - \frac{n_p^2(t)}{2} \overline{\sigma v},$$

где $n_p(0) = \rho N_A = 9,25 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ начальная плотность ядер водорода,

$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_p}} = 5,6 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ — средняя тепловая скорость протонов. Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{n_p(t)} - \frac{1}{n_p(0)} = \frac{\overline{\sigma v} t}{2}.$$

Откуда следует, что концентрация протонов уменьшается вдвое за время

$$t_{1/2} = \frac{2}{n_p(0) \overline{\sigma v}} = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ лет.}$$

9.38. Эффект можно заметить, если число ядер, подверженных вынужденному делению, $N_{\text{вын}}$ превысит дисперсию фона, т. е. дисперсию числа спонтанно делящихся ядер $N_{\text{сп}}$. Дисперсия фона $\sqrt{\Delta N_{\text{сп}}^2} \approx \sqrt{N_{\text{сп}}} = \sqrt{\lambda N_0 t_0}$.

За время t_0 $\overline{N_{\text{вын}}} \approx \sigma N j t_0$, где N — число ядер урана в момент времени t .

Таким образом, $j \geq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{A \ln 2}{T_{1/2} N_A m t_0}} \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$.

9.39. Грубая оценка: $R \sim \lambda \approx \frac{1}{n\sigma} = \frac{A}{\rho N_A \sigma} \approx 4,2 \text{ см}$, откуда масса «шарика» $M \approx 5,7 \text{ кг}$. Более точный расчет дает $R \approx \frac{3A}{\sigma \rho N_A (v-1)} \approx 8,3 \text{ см}$ и $M \approx 45 \text{ кг}$.

9.40. $t = \frac{n}{n_0 \sigma \sqrt{2\mathcal{E}}/M} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$, где n_0 — концентрация ядер ^{235}U , M — масса нейтрона, n — число поколений нейтронов, сменившихся к моменту заданного выделения энергии деления: n находится из уравнения

$\frac{k_\infty^n - 1}{k_\infty - 1} = \frac{W}{\mathcal{E}_{\text{дел}}}$, где $\mathcal{E}_{\text{дел}} \approx 200 \text{ МэВ/акт деления}$, $n \approx 3,27 \cdot 10^4$.

$$\mathbf{9.41^*} \quad \beta = \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma r_0 A^{1/3}} \right)^2 \approx 17.$$

Решение. Фотоделение через состояние 1^- происходит при поглощении $E1$ (электрических дипольных) квантов, а через состояние 2^+ — при поглощении $E2$ (квадрупольных) квантов. Так как энергия гамма-квантов больше высоты барьеров, то отношение вероятностей деления определяется только отношением сечений поглощения квантов ядром, равным $\beta = (\lambda/R_\gamma)^2$. Здесь $\lambda = \lambda/2\pi$ — приведенная длина волны γ -кванта, а R_γ — радиус ядра. Таким образом, отношение равно

$$\beta = \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma r_0 A^{1/3}} \right)^2 \approx 17.$$

Это значит, что происходит преимущественное деление под действием $E1$ -фотонов. При двухфотонном поглощении световой квант, практически не меняя энергии ядра, фактически меняет спин и четность основного состояния, и деление уже будет происходить под действием $E1$ -квантов через состояние 2^+ . Вероятность деления через канал 2^+ увеличится в 17 раз и будет равна сечению деления через канал 1^- под действием $E1$ -квантов.

9.42. $\frac{\omega_{\text{дел}}(1^-)}{\omega_{\text{дел}}(2^+)} = \frac{\sigma_{\text{дел}}(1^-)}{\sigma_{\text{дел}}(2^+)} D(\mathcal{E}_\gamma) = \left(\frac{\lambda}{R_{\text{яд}}} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{2\pi(U_0 - \mathcal{E}_\gamma)}{\hbar\omega} \right\} = 4,8$, где $D(\mathcal{E}_\gamma)$ — проницаемость параболического барьера (см. задачу 3.41). См. также решение задачи 9.41.

$$\mathbf{9.43.} \quad L_{\text{max}} = \sqrt{\frac{(1-\alpha)W}{8\pi\Phi_0}} \leq 110 \text{ км}.$$

§ 10. Элементарные частицы. Резонансы. Лептоны и кварки. Реакции при высоких энергиях

10.1. Запрещены распады 2 и 4, так как не сохраняется лептонный заряд, и распад 8, так как не сохраняется барионный заряд; в распаде 2 нарушается еще закон сохранения энергии.

10.2. Распады 2, 3, 9, 10 и реакции 6, 7 запрещены, так как в них не сохраняется лептонный заряд. При изучении взаимодействия нейтрино, полученных в распаде 1, с протонами было показано, что идет реакция 5, а не 6, хотя последняя энергетически более выгодна. Тем самым было доказано существование двух типов нейтрино.

10.3. В реакциях 1, 6, 8, 10, 12, 14 $|\Delta S| = 0$, и они идут по сильному взаимодействию с характерными временами $10^{-22} \div 10^{-24}$ с (ядерные времена). В реакциях 2, 7, 9, 11 $|\Delta S| = 1$, и они практически ненаблюдаемы. В распадах 3 и 4 $|\Delta S| = 1$, и они идут по слабому взаимодействию с характерными временами $\sim 10^{-10}$ с. В процессах 5 и 13 $|\Delta S| = 2$, и поэтому такие процессы не наблюдаются.

10.4. По указанному правилу разрешены распады 2, 3, 4, 5, 6, 8; запрещены распады 1, 7, 9, 10.

10.5. 1. Барийон Λ — синглет с зарядом $Z = 0$. Следовательно, $N = 1$, $T = 0$, $Z_{cp} = 0$, $S = -1$, $Y = 0$, $T_3 = 0$.

2. Барийон Σ — триплет с зарядом ± 1 и 0. Следовательно, $Z_{cp} = 0$, $N = 3$, $T = 1$, $Y = 0$, $S = -1$, $T_3 = Z$.

3. Барийон Ξ — дублет с зарядами 0 и -1 . Следовательно, $N = 2$, $T = 1/2$, $Z_{cp} = -1/2$, $S = -2$, $Y = -1$, $T_3 = -1/2$ для $Z = -1$ и $T_3 = \pm 1/2$ для $Z = 0$.

4. Отрицательно заряженный барийон Ω^- — синглет. Следовательно, $N = 0$, $Z_{cp} = -1$, $S = -3$, $Y = -2$, $T = 0$, $T_3 = 0$.

5. Мезон π с зарядами ± 1 , 0. Следовательно, $N = 3$, $T = 1$, $T_3 = Z$, $S = 0$, $Y = 0$. Заметим, что если в составе мультиплетта имеется истинно нейтральная частица, то при вычислении числа частиц в мультиплетте N нужно вместе считать частицы и античастицы. Во всех других случаях под N подразумевается число частиц.

6. Мезон K — дублет с зарядами 0 и $+1$. Следовательно, $N = 2$, $Z_{cp} = 1/2$, $S = 1$, $T = 1/2$, $T_3 = 1/2$ для K^+ и $T_3 = -1/2$ для K^0 .

7. Мезон η — нейтральный синглет. Следовательно, $N = 1$, $T = S = Z_{cp} = T_3 = 0$.

10.6. Распады 2 и 4 запрещены законом сохранения лептонного заряда. Реакция 5 практически ненаблюдаема из-за несохранения странности. Распад 3 и 6 разрешены. Распад 1 запрещен законом сохранения энергии.

10.7. Реакция 2 и распад 8 невозможны, так как не сохраняется барнионный заряд. Реакции 3 и 4 практически ненаблюдаемы из-за несохранения странности. Распады 1 и 7 происходят по слабому взаимодействию, распад 6 — по электромагнитному. Реакция 5 происходит по сильному взаимодействию.

10.8. Реакции 1 и 2 происходят по сильному взаимодействию; распады 3 и 5 — по электромагнитному; 4 и 6 — по слабому взаимодействию.

10.9. Странность K^0 -мезона равна $+1$, а странность \bar{K}^0 -мезона равна -1 . Поскольку странность нуклонов равна 0, а странность других барнионов либо равна нулю, либо отрицательна, то поглощение K^0 -мезона может происходить с сохранением странности, т. е. по сильному взаимодействию. Погло-

щение K^0 -мезона может происходить лишь с несохранением странности, т. е. по слабому взаимодействию. Следовательно, K^0 -мезон в отличие от K^0 будет слабо поглощаться веществом. Поскольку при переходах $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$ $|\Delta S| = 2$, то такие переходы крайне маловероятны (см. задачу 10.3).

10.10. Реакции 1, 3, 4 происходят по сильному взаимодействию; распады 6, 7, 8 — по слабому; реакции 2 и 5 — по электромагнитному взаимодействию.

10.11. 1. Так как $\Delta S = 2$, то возможна, но маловероятна.

2. Так как $\Delta S = 2$, то возможна, но маловероятна.

3. Нет, так как $(m_n - m_p) < m_\mu$.

4. Нет, не сохраняется лептонный заряд.

5. Нет, не сохраняется барионный заряд.

6. Нет, не сохраняется лептонный заряд.

10.12. Λ -гиперон или Σ^0 -гиперон.

10.13. $M = m_n N \frac{\tau}{t} \approx 170$ т, где $m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-24}$ г — масса нуклона.

10.14. $\tau = \frac{\mathcal{E}_\mu \tau_0}{m_\mu c^2} = 5,4$ мкс, где τ_0 — собственное время жизни мюона,

$$\mathcal{E}_\mu = \frac{m_K^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2m_K c^2}.$$

10.15. $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta \mathcal{E}} \approx 2,6 \cdot 10^{-20}$ с.

10.16*. 1. $A = 38$ (на неподвижной мишени). 2. $A \approx 3000$ (на встречных пучках), т. е. все известные ядра.

Решение. Найдем сначала скорость центра масс системы. Пусть энергия налетающей частицы \mathcal{E}_1 , а покоящейся $m_2 c^2$. Суммарная энергия системы $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + m_2 c^2$. Полный импульс системы \mathbf{p}_1 . Рассматривая эту систему как сложную частицу, находим скорость центра масс

$$\frac{\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}}{c} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2}.$$

Энергии частиц в системе центра масс (СЦМ) равны

$$\mathcal{E}_1^* = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{v}_{\text{ц.м.}}}{\sqrt{1 - (v_{\text{ц.м.}}/c)^2}}, \quad \mathcal{E}_2^* = \frac{m_2 c^2 - 0}{\sqrt{1 - (v_{\text{ц.м.}}/c)^2}}.$$

Таким образом, суммарная энергия в СЦМ

$$\mathcal{E}_{\text{ц.м.}}^* = \mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2^* = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 \mathcal{E}_1},$$

где было использовано релятивистское выражение для полной энергии частицы

$$\mathcal{E}_1^2 = (p_1 c)^2 + (m_1 c^2)^2.$$

Эту формулу можно было бы получить и без преобразований Лоренца, считая, что две частицы в СЦМ рождают одну с массой $M c^2 = \mathcal{E}_{\text{ц.м.}}^*$. Исполни-

зая инвариант, получим $(Mc^2)^2 = \mathcal{E}_{ц.м.}^2 - 0^2 = (\mathcal{E}_1 + m_2c^2)^2 - p_1^2c^2 =$
 $= (\mathcal{E}_1 + m_2c^2)^2 - [\mathcal{E}_1^2 - (m_1c^2)^2]$, откуда следует то же выражение

$$\mathcal{E}_{ц.м.}^* = \sqrt{m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2m_2c^2\mathcal{E}_1}.$$

Для двух одинаковых частиц $m_1 = m_2 = m_p$ получаем

$$p + p \rightarrow M + \tilde{M} + p + p$$

$$\text{и } \mathcal{E}_{ц.м.}^* = \sqrt{2m_p c^2 (\mathcal{E}_1 + m_p c^2)}.$$

Очевидно, что $\mathcal{E}_{ц.м.}^* \geq [2Am_p + 2m_p]c^2$, откуда $2m_p c^2 \mathcal{E}_1 + 2(m_p c^2)^2 \geq$
 $\geq 4(m_p c^2)^2 (A + 1)^2$. Если учесть, что $\mathcal{E}_1 \gg m_p c^2$, то получим ответ в первом
 случае (столкновения с неподвижным протоном)

$$A \leq \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{2m_p c^2}} - 1 \leq 39, \text{ т. е. } A = 38 \text{ (включительно).}$$

На встречных пучках

$$2\mathcal{E}' = 2Am_p c^2 + 2m_p c^2 \approx 2Am_p c^2,$$

откуда $A \approx 3000$, т. е. практически все известные ядра.

$$10.17. \tau \approx 3 \cdot 10^{-22} \text{ с; } mc^2 \approx 3,1 \text{ ГэВ.}$$

Решение. Масса частицы в данном случае равна $\mathcal{E}_{СЦМ}$, соответствующей положению максимума на графике. Полуширина резонансной кривой на уровне 1/2 высоты $\Delta\mathcal{E} \approx 2 \text{ МэВ}$. Время жизни находим из соотношения неопределенностей $\tau \approx \hbar/\Delta\mathcal{E} \approx 3 \cdot 10^{-22} \text{ с}$.

$$10.18. m_\xi c^2 = \sqrt{m_\gamma c^2 (m_\gamma c^2 - 2\mathcal{E}_\gamma)} = 8,32 \text{ ГэВ, } \beta = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_\gamma c^2 - \mathcal{E}_\gamma} \approx 0,13.$$

$$10.19. m_{J/\psi} c^2 = \mathcal{E} \sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 3,1 \text{ ГэВ; } \beta = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87.$$

$$10.20. T \approx 751 \text{ МэВ.}$$

$$10.21. \mathcal{E}_{\min} \geq 2m_B c^2 \approx 10,56 \text{ ГэВ.}$$

$$10.22. \mathcal{E}_{\text{пор}} = 4m_\Sigma c^2 + m_p c^2 + 2 \frac{m_\Sigma^2}{m_p} c^2 = 8,8 \text{ ГэВ.}$$

$$10.23. N_{\max} = \frac{\sqrt{2m_p c^2 (\mathcal{E}_p + m_p c^2)} - 2m_p c^2}{2m_\pi c^2} = 5,2 \text{ (пар пионов), всего может}$$

родиться не более 10 пионов.

$$10.24. T_{\text{пор}} = \frac{(m + M)^2 - (2m)^2}{2m} c^2 = 1,6 \text{ ГэВ, где } m_p \approx m_n = m; M =$$

$= m_\Delta + m_K$, где m_K — масса либо K^0 , либо K^+ -мезона.

$$10.25. T_{\text{пор}} = 8,94 \text{ ГэВ.}$$

$$10.26. \mathcal{E}_{\max} = \frac{m_\mu c^2}{2} \left(1 + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \approx \frac{m_\mu c^2}{2} \approx 52,8 \text{ МэВ.}$$

$$10.27. \mathcal{E}_{\min} = m_e c^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}; \mathcal{E}_{\max} \approx \mathcal{E}_\mu - \frac{m_\mu^2 c^4}{2\mathcal{E}_\mu} \approx 10,5 \text{ ГэВ}.$$

$$10.28. \sin \frac{\theta}{2} = \frac{m_\pi c^2}{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}} = 0,027.$$

$$10.29. \mathcal{E} = m_\pi c^2 \frac{2A_N}{\sigma \tau_0 \rho N_A \sigma} \approx 1,4 \text{ ТэВ}, \text{ где } A_N \text{ — атомная масса азота,}$$

$\sigma = 2\pi R_N^2$ — сечение рассеяния быстрых пионов, равное удвоенному геометрическому сечению ядра, $R_N = 1,3 \cdot 10^{-13} A_N^{1/3}$.

$$10.30. T = 6,615 \text{ ГэВ}; \delta \mathcal{E} \approx 7,8 \text{ эВ}; \tau = 4,2 \cdot 10^{-15} \text{ с}.$$

$$10.31. m_D c^2 \approx 1,85 \text{ ГэВ}; \beta = 0,94; \tau \approx 4,2 \cdot 10^{-13} \text{ с}.$$

$$10.32^*. m_\Omega c^2 \approx 1,7 \text{ ГэВ}.$$

Решение. Для нахождения массы Ω^- -гиперона воспользуемся инвариантностью квадрата четырехимпульса

$$m_\Omega^2 c^4 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2.$$

Нетрудно видеть, что Λ^0 -гиперон и K^0 -мезон можно считать ультрарелятивистскими, поскольку массы этих частиц малы по сравнению с произведениями pc : $m_\Lambda c^2 \approx 1,1 \text{ ГэВ}$; $m_K c^2 \approx 0,49 \text{ ГэВ}$ (табличные данные). Поэтому $\mathcal{E}_1 \approx p_1 c$; $\mathcal{E}_2 \approx p_2 c$. Раскрывая скобки, получим $m_\Omega^2 c^4 \approx 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - 2p_1 p_2 c^2 \cos \theta \approx 2p_1 p_2 c^2 (1 - \cos \theta)$, откуда

$$m_\Omega c^2 \approx 2\sqrt{p_\Lambda p_K} c \sin \frac{\theta}{2} = 1,68 \text{ ГэВ} \approx 1,7 \text{ ГэВ}.$$

$$10.33. \tau_0 \approx 0,88 \cdot 10^{-16} \text{ с}, \beta = 0,835.$$

$$10.34. L = \frac{c \tau_0 \mathcal{E}_\Lambda}{m_\Lambda c^2} \approx 50 \text{ см}, \text{ где } \tau_0 \approx 2,66 \cdot 10^{-10} \text{ с}; m_\Lambda c^2 = 1116 \text{ МэВ}.$$

$$10.35^*. L = (2 \ln 2) \frac{c \tau_0 \mathcal{E}_\pi}{m_\pi c^2} = 770 \text{ м}, \text{ где } \tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}; m_\pi c^2 \approx 140 \text{ МэВ}.$$

Решение. За период полураспада $T_{1/2}$ пиона (по схеме $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$) половина пионов переходит в мюоны. Еще через $T_{1/2}$ число мюонов в потоке превышает число пионов в три раза. Таким образом, искомая длина

$$L = v_\pi 2T_{1/2} \gamma, \text{ где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}_\pi}{m_\pi c^2}.$$

Скорость пионов v_π близка к скорости света, поскольку $\mathcal{E}_\pi \gg m_\pi c^2$. Период полураспада $T_{1/2} = \tau_0 \ln 2$, где τ_0 — собственное время жизни π^+ ($\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$). Окончательно

$$L \approx (2 \ln 2) \frac{c \tau_0 \mathcal{E}_\pi}{m_\pi c^2} \approx 770 \text{ м}.$$

Можно решить задачу иначе. Поскольку $\mathcal{E}_\pi = 10 \text{ ГэВ} \gg m_\pi c^2$, то пионы можно считать ультрарелятивистскими. Мюоны, вылетающие в направле-

нии движения пионов, также имеют скорость $v \approx c$. Собственное время жизни мюона примерно в 100 раз больше времени жизни пиона. Поэтому распадом мюонов в данной задаче пренебрегаем. Тогда $N_{\pi}(x) + N_{\mu}(x) = N_{\pi}(0)$. По закону радиоактивного распада

$$dN_{\pi}(x) = -\lambda N_{\pi}(x) dt = -\frac{N_{\pi}(x)}{\tau} dt.$$

Здесь $\tau = \gamma\tau_0 = \tau_0 \frac{\mathcal{E}_{\pi}}{m_{\pi}c^2}$, а $v dt = c dt = dx$, откуда $\frac{dN_{\pi}(x)}{dx} = -N_{\pi} \frac{m_{\pi}c^2}{\mathcal{E}_{\pi}\tau_0 c}$

или $N_{\pi}(x) = N_{\pi}(0) \exp\left(-\frac{m_{\pi}c^2}{\mathcal{E}_{\pi}c\tau_0} x\right)$. По условию $3N_{\pi}(L) = N_{\mu}(L)$, поэтому

$4 \exp\left(-\frac{m_{\pi}c^2}{\mathcal{E}_{\pi}c\tau_0} L\right) = 1$, откуда и следует приведенный выше ответ задачи.

$$10.36. \frac{N_{\mu}(L)}{N_{K}(0)} = 1 - \exp\left(-\frac{m_K c^2}{\mathcal{E}_K} \frac{L}{v\tau_0}\right) = 0,364, \quad \text{где } \tau_0 = 1,24 \cdot 10^{-8} \text{ с} -$$

время жизни K^{\pm} .

$$10.37. \frac{N_{\mu}(L)}{N_{K}(L)} \approx 1800.$$

$$10.38. \mathcal{E}_{\mu} = \frac{m_{\pi}^2 c^4 + m_{\mu}^2 c^4}{2m_{\pi}c^2} \cdot \frac{\mathcal{E}_{\pi}}{m_{\pi}c^2} \approx 330 \text{ МэВ}.$$

$$10.39^*. N_{\pi} \approx 3,6 \cdot 10^7 \text{ частиц/с}.$$

Решение. Число пионов, достигших детектора, $-n = \frac{N_{\pi}}{4\pi} \Omega e^{-t/\tau}$, где N_{π} — число всех генерированных пионов, $\Omega = S/L^2$ — телесный угол, под которым виден детектор из точки генерации пионов, t — время пролета пионом пути L , τ — время жизни пиона в лабораторной системе отсчета:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \tau_0 \frac{\mathcal{E}}{m_{\pi}c^2} = \tau_0 \left(1 + \frac{T}{m_{\pi}c^2}\right).$$

Окончательно получаем

$$N_{\pi} = n \frac{4\pi L^2}{S} \exp\left(\frac{L}{c\tau_0} \frac{m_{\pi}c^2}{\sqrt{T^2 + 2m_{\pi}c^2 T}}\right) \approx 3,6 \cdot 10^7 \frac{\text{частиц}}{\text{с}}.$$

$$10.40. \mathcal{E}_{\text{пор}} = (m_{\pi} - m_p + m_e)c^2 \approx 1,8 \text{ МэВ}.$$

$$10.41. \mathcal{E}_{\mu}^{\text{max}} \approx \mathcal{E}_{\mu}^{\text{max}} \approx \frac{(m_{\tau}c^2)^2 + (m_{\mu}c^2)^2}{2m_{\tau}c^2} \approx 0,9 \text{ ГэВ}. \quad \text{Точнее: } \mathcal{E}_{\mu}^{\text{max}} \approx \frac{m_{\tau}c^2}{2} \times$$

$$\times [1 + (m_{\mu}/m_{\tau})^2] = 0,894 \text{ ГэВ}, \quad \mathcal{E}_{\mu}^{\text{max}} \approx \mathcal{E}_{\mu}^{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{m_{\mu}c^2}{2\mathcal{E}_{\mu}^{\text{max}}}\right)^2\right] = 0,891 \text{ ГэВ}.$$

$$10.42. T = m_{\pi}c^2 \frac{2(m_p + m_n) + m_{\pi}}{2(m_p - m_{\pi})} \approx 330 \text{ МэВ}.$$

$$10.43. \mathcal{E}_p = m_p c^2 \approx 1 \text{ ГэВ}.$$

$$10.44. \mathcal{E}_p = m_p c^2 \frac{T}{2\varepsilon} = 6,57 \cdot 10^{19} \text{ эВ}; \tau \approx \frac{1}{\nu \sigma c} \approx 10^{15} \text{ с} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ лет.}$$

$$10.45. T \approx 2,6 \cdot 10^{14} \text{ эВ}; \tau \approx 8 \cdot 10^{10} \text{ с.}$$

$$10.46. \mathcal{E}_\mu = m_\mu c^2 \frac{H}{10c} \approx 6,4 \text{ ГэВ.}$$

10.47. $\mathcal{E}_{\min} = \Delta \mathcal{E} \approx \rho a H \approx 9 \text{ ГэВ}$, где $\Delta \mathcal{E}$ — потери энергии на ионизацию.

$$10.48. \frac{\delta T_\mu}{T_\mu} = \left(\frac{m_\nu}{m_\pi - m_\nu} \right)^2 \approx \begin{cases} 0,15 \cdot 10^{-4} & \text{при } m_\nu c^2 = 0,17 \text{ МэВ,} \\ 0,86 \cdot 10^{-5} & \text{при } m_\nu c^2 = 0,1 \text{ МэВ.} \end{cases}$$

10.49. Выход мюонных антинейтрино (нейтрино) составляет 2,0002% от числа пионов. Выход электронных антинейтрино (нейтрино) составляет 0,0002% от числа пионов.

10.50. Процесс рассеяния нейтрино на электронах — это тот же Комптон-эффект (рассеяние фотонов на электронах):

$$\mathcal{E} = \frac{T_e + pc}{2} = \frac{[T_e + \sqrt{T_e(T_e + 2m_e c^2)}]}{2} = 5,24 \text{ МэВ.}$$

$$10.51. \cos \beta = \frac{T_e(\mathcal{E} + m_e c^2)}{\mathcal{E} \sqrt{T_e(T_e + 2m_e c^2)}} = 0,927; \beta \approx 22^\circ \text{ (для } \mathcal{E} = 15 \text{ МэВ).}$$

$$10.52. \frac{\Phi(\nu_\mu)}{\Phi(\nu_e)} = 2. \text{ Наблюдение потоков атмосферных нейтрино на установке Super-Kamiokande не подтверждает этот результат. Таким образом, следует признать факт несохранения лептонного заряда и нейтринных осцилляций, что является следствием наличия у нейтрино массы.}$$

10.53. $(m_{\text{WC}}^2)_{\min} = (1 + \sqrt{2}/2)\mathcal{E} \approx 100 \text{ ГэВ}$. (Современное значение $m_{\text{WC}}^2 = 80,22 \pm 0,26 \text{ ГэВ}$.)

10.54. Электрон — продукт распада $\tau^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\tau$. Искомая проекция электрона максимальна, когда $\mathbf{p}_{\nu_e} = \mathbf{p}_{\nu_\tau}$ и когда она перпендикулярна \mathbf{p}_τ . Тогда $p_e \perp c = m_\tau c^2/2 = 0,896 \text{ ГэВ}$.

10.55. $m_{\text{ZC}}^2 \approx 2p_\mu c \sin(\theta/2) = 97,5 \text{ ГэВ}$; $\beta = \cos(\theta/2) = 0,82$ (Современное значение $m_{\text{ZC}}^2 = 91,173 \pm 0,020 \text{ ГэВ}$).

10.56. Минимальная длина волны γ -кванта соответствует максимальной энергии. Как видно из графика, максимальная зарегистрированная энергия (γ -квант + ψ) составляет 3,14 ГэВ.

$\lambda_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\mathcal{E}_\gamma}$; $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_{\max} - m_\psi c^2 = 40 \text{ МэВ} \ll 3,1 \text{ ГэВ}$; $\lambda_\gamma \approx 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ см}$ (пренебрегаем отдачей ψ -мезона).

10.57*. Спин мюона направлен против его импульса; $l \approx 1470 \text{ м}$.

Решение. Определение спина как собственного момента импульса, т. е. момента импульса в системе покоя частицы, оказывается неприменимым к безмассовым частицам, обладающим нулевой энергией покоя, т. е. $m = 0$. Для них принято вводить *спиральность*, т. е. проекцию собственного момента импульса на направление движения частицы — единственное выделенное направление для частиц с $m = 0$. При этом частицы с $\mathbf{S} \uparrow \uparrow \mathbf{p}$ называются

правоспиральными (правополяризованными), а частицы с $\mathbf{S} \uparrow \mathbf{p}$ называются левоспиральными (левополяризованными). При этом фотон как истинно нейтральная частица может менять свою спиральность (с помощью пластинки $\lambda/2$), а нейтрино — нет. Нейтрино по определению — левоспиральная частица, а антинейтрино — правоспиральная.

Так как каон K^+ имеет спин $S = 0$, то $\mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_\nu = 0$. Кроме того, $\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0$. Отсюда следует, что \mathbf{S}_μ антипараллелен \mathbf{p}_μ ($\mathbf{S}_\mu \uparrow \mathbf{p}_\mu$). Для ответа на второй вопрос задачи. Запишем закон сохранения энергии при распаде

$$m_K c^2 = \mathcal{E}_\nu + \mathcal{E}_\mu = pc + \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + p^2 c^2}, \text{ где } p_\mu = p_\nu = p.$$

Возведя это равенство в квадрат, получим

$$K^+ = \left(\begin{array}{c} u \\ \bar{s} \end{array} \right) \rightarrow W^+ \rightarrow \begin{array}{l} \mu^+ \\ \nu_\mu \end{array} \quad p c = \frac{(m_K c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2}{2m_K c^2} = 235,6 \text{ МэВ.}$$

Рис. 185

Полная энергия мюона

$$\mathcal{E}_\mu = \sqrt{p^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} \approx 258 \text{ МэВ.}$$

Из релятивистской формулы $\mathcal{E}_\mu = m_\mu c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma m_\mu c^2$ определим: $\gamma \approx 2,444$ и $\beta = 0,912$ (относительная скорость мюона). Пробег мюона в лабораторной системе отсчета

$$l = \beta c \tau_0 \gamma = 1,47 \cdot 10^5 \text{ см} = 1,47 \text{ км.}$$

При этом использовались табличные данные $m_K c^2 = 493,6$ МэВ; $m_\mu c^2 = 105,7$ МэВ; $\tau_\mu = \tau_0 = 2,2$ мкс. Схема распада приведена на рис. 185.

$$10.58. \quad \frac{q^2}{\hbar c} \sim \frac{\hbar}{2m_{\pi} c R_d} \sim 0,1.$$

$$10.59^* \quad r_{J/\psi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hbar c}{\sqrt{(4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}} = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Решение. Связанная система кварк-антикварк (в данном случае $c\bar{c}$) с потенциалом взаимодействия $U = -q^2/r$ аналогична позитронию и спектр ее возбуждений подобен энергетическому спектру атома водорода. Поэтому можно записать, что массы мезонов складываются из энергий покоя кварков за вычетом их энергии связи

$$\mathcal{E}_1 = 2m_c c^2 - \frac{\mu q^4}{2\hbar^2} \frac{1}{1^2};$$

$$\mathcal{E}_2 = 2m_c c^2 - \frac{\mu q^4}{2\hbar^2} \frac{1}{2^2},$$

где $\mu = m_c/2$ — приведенная масса. Здесь m_c обозначает массу с-кварка. Отличие в энергиях покоя двух состояний чармония (т. е. J/ψ -мезона и ψ' -мезона) $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{3}{16} \frac{m_c q^4}{\hbar^2}$. Из двух уравнений находим

$$m_c c^2 = \frac{4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{6} = 1,95 \text{ ГэВ}$$

и характерный радиус чармония

$$r_{1/\psi} = \frac{\hbar^2}{\mu q^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{(4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}} = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Поскольку кварки отсутствуют в свободном состоянии, то определение их энергии невозможно. Это связано с тем, что в адронах кварки окружены глюонами и виртуальными парами кварк-антикварк, и масса кварка должна зависеть от расстояния, на котором она определяется. На расстояниях $x \leq 10^{-14}$ см, где начинается асимптотическая свобода и «облака» глюонов и виртуальных кварковых пар «редеют», принято говорить о токовых (свободных) кварках. На больших расстояниях мы имеем дело с «одетыми» кварками, которые называются блоковыми или конституентными. (см. Приложение III, табл. 5).

В рамках данного приближения по результатам эксперимента можно определить, как энергию покоя кварков, так и энергию их взаимодействия.

$$10.60. m_{\text{вс}} c^2 = \frac{1}{6} (4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \approx 5,1 \text{ ГэВ}; g^4 = \left(\frac{q^2}{\hbar c}\right)^2 = 32 \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{(4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)} \approx 0,585, \\ g^2 \approx 0,765 \sim 1.$$

$$10.61. R \approx \frac{\hbar c}{m_{\text{вс}} c^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ см.}$$

$$10.62. m_{\Delta} c^2 = \sqrt{2m_{\text{p}} c^2 T_{\pi} + (m_{\text{p}} + m_{\pi})^2 c^4} = 1232,5 \text{ МэВ};$$

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Gamma} = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ с.}$$

10.63* Решение. Резонансный характер поглощения пионов свидетельствует об образовании составного ядра, которое можно уподобить короткоживущей частице. Сечение образования составного ядра в резонансной области (рис. 186) определяется для бесспиновых частиц формулой Брейта—Вигнера

$$\sigma_{\text{полн}} = \pi \hat{\lambda}^2 \frac{\Gamma_{\text{упр}} \Gamma_{\text{полн}}}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2 + \frac{\Gamma_{\text{полн}}^2}{4}},$$

где $\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$, λ — длина волны падающей частицы в системе центра масс, \mathcal{E} — суммарная энергия частиц в этой системе, \mathcal{E}_0 — энергия составного ядра (резонанса), $\Gamma_{\text{упр}}$ и $\Gamma_{\text{неупр}} = \Gamma_{\text{полн}} - \Gamma_{\text{упр}}$ — ширины резонанса, связанные с распадом по упругому и неупругим каналам.

Согласно закону сохранения электрического заряда распад резонанса возможен только по каналу $\Delta \rightarrow \pi^+ p$, то есть происходит только упругое рассеяние и в резонансе сечение

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} = 4\pi \hat{\lambda}^2 = \frac{4\pi \hbar^2}{p^2}.$$

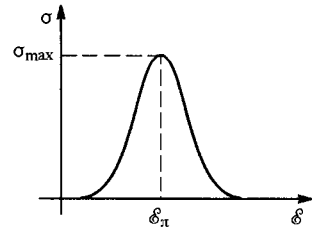


Рис. 186

Импульс сталкивающихся частиц в системе центра масс $p = p_p = p_\pi$ находится из условия

$$M_\Delta c^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_p c^2)^2} + \sqrt{(pc)^2 + (m_\pi c^2)^2},$$

откуда

$$p = \sqrt{\frac{(M_\Delta^2 + m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4M_\Delta^2} c^2 - m_p^2 c^2} = 227 \text{ МэВ}/c;$$

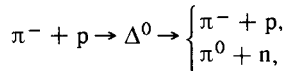
$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi\hbar^2 c^2}{p^2 c^2} = 95 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2 = 95 \text{ мбн.}$$

Экспериментальное значение для данной реакции $\sigma_{\text{полн}} \approx 200$ мбн. Различие связано с тем, что в простейшем варианте формулы Брейта—Вигнера не учитываются спиновые состояния начальной и конечной системы. Имеются $(2S_p + 1)(2S_\pi + 1)$ начальных состояний системы и $2J + 1$ конечных состояний Δ -резонанса, приводящих к одинаковому сечению.

В результате в формуле Брейта—Вигнера появляется множитель $g = \frac{2J + 1}{(2S_p + 1)(2S_\pi + 1)}$, учитывающий статистический вес входного и выходного состояний системы. Сравнение теоретического и экспериментальных значений позволяет определить, что $g \approx 2$, откуда находится полный момент резонанса $J = 3/2$.

Полученный результат требует пояснения. Так как $S_p = 1/2$; $S_\pi = 0$, то в сумме они не могут дать $J = 3/2$. Поэтому необходимо учитывать и орбитальное движение, т. е. закон сохранения момента нужно записывать в виде $\mathbf{J} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_\pi + \mathbf{L}_{\text{лр}}$, где $\mathbf{L}_{\text{лр}}$ — орбитальный момент относительного движения. Считая, что радиус протона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13}$ см (фактически это комптоновская длина волны протона), получаем $pr_p = \hbar\sqrt{L(L+1)}$, или $\sqrt{L(L+1)} = \frac{r_p}{\lambda}$. Так как $\lambda = 0,87 \cdot 10^{-13}$ см, то $L \approx 0,83$. Следовательно, возможные значения $L = 0, 1$. Соображения, основанные на законе сохранения четности, показывают, что $L = 1$ и $J = 1/2 + 1 = 3/2$. Образно говоря, пролетающий пион захватывается за счет сильного взаимодействия протоном на орбите с $L = 1$, делает несколько оборотов и затем улетает.

Во второй реакции (в отличие от предыдущей) возможен распад резонанса



и таким образом появляется «неупругий» канал.

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}},$$

где в резонансе

$$\sigma_{\text{полн}} = 8\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_{\text{упр}}}{\Gamma_{\text{полн}}} \quad \text{или} \quad 68 \approx 190 \frac{\Gamma_{\text{упр}}}{\Gamma_{\text{полн}}},$$

откуда

$$\frac{\Gamma_{\text{упр}}}{\Gamma_{\text{полн}}} = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{\sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}}} \approx 0,358; \quad \sigma_{\text{неупр}} \approx 1,8\sigma_{\text{упр}} \approx 0,64\sigma_{\text{полн}} \approx 44 \text{ мбн.}$$

Отметим, что другие неупругие процессы типа $\pi^0\pi^0\pi$ или $\pi^-\pi^0\pi$ запрещены законами сохранения энергии.

Рассмотренные резонансные состояния Δ^{++} и Δ^0 различаются проекциями изотопического спина. Изотопический спин пионов 1, а нуклонов 1/2. Полный изоспин резонанса поэтому может быть 3/2 и 1/2. При этом $(\pi^+\rho)$ -система обладает проекцией изоспина $T_3 = 3/2$, а $(\pi^-\rho)$ — проекцией $T_3 = 1/2$, т. е. является суперпозицией состояний с $T = 3/2$ и $T = 1/2$.

10.64. $p = (uud)$; $n = (udd)$; $\Omega^- = (sss)$.

10.65. $\pi^+ = (u\bar{d})$; $K^+ = (u\bar{s})$.

10.66. $K^0 = (d\bar{s})$, $\bar{K}^0 = (\bar{d}s)$.

10.67. $\Xi^0 = (uss)$; $\Lambda = (uds)$.

10.68. π^- ; K^- .

10.69. $\sigma_3 = 2\sigma_2 - \sigma_1$.

Решение. Кварковый состав частиц из задачи:

$$K^+ = (u\bar{s}), \quad \Sigma^+ = (uus), \quad \Xi^0 = (uss), \quad \Omega^- = (sss).$$

Обозначим сечения взаимодействия кварков, имея в виду, что в задаче могут взаимодействовать кварки двух поколений: u — из первого поколения, s — из второго. Кроме того, заметим, что при $\mathcal{E} \gg mc^2$ сечения рассеяния частицы и античастицы одинаковы (теорема Померанчука). Таким образом,

$$\sigma_a = \sigma(uu) \approx \sigma(ud) = \sigma(u\bar{d}) = \sigma(\bar{u}\bar{d});$$

$$\sigma_b = \sigma(us) = \sigma(u\bar{s}) \approx \sigma(d\bar{s}) = \sigma(\bar{u}\bar{s}) \text{ и т. д.};$$

$$\sigma_c = \sigma(ss) = \sigma(\bar{s}\bar{s}) = \sigma(\bar{s}s).$$

Рассмотрим в качестве примера первую реакцию (рис. 187). Стрелками обозначены взаимодействия кварков: сплошная стрелка — с сечением σ_a ;

штриховая стрелка — с сечением σ_b ; волнистая стрелка — с сечением σ_c . При указанных в задаче энергиях дебройлевская длина волны кварков оказывается много меньше размера частиц. Поэтому можно считать, что происходят только одночастичные взаимодействия кварков

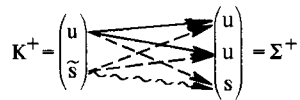


Рис. 187

и в каждой из указанных реакций сечения надо просуммировать по всем возможным каналам. Таким образом, сечение взаимодействия

$$\sigma_1 = 2\sigma_a + 3\sigma_b + \sigma_c.$$

Вторая реакция $K^+ + \Xi^0$ дает сечение

$$\sigma_2 = \sigma_a + 3\sigma_b + 2\sigma_c.$$

Аналогичное рассмотрение взаимодействия $K^+ + \Omega^-$ приводит к следующему выражению

$$\sigma_3 = 3\sigma_b + 3\sigma_c.$$

Решая полученную систему уравнений, выражаем неизвестное сечение σ_3 через заданные сечения σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_3 = 2\sigma_2 - \sigma_1.$$

10.70. $\sigma(\pi p) = 26$ мбн, $\sigma(\Lambda N) = 32$ мбн; $\sigma(\Xi N) = 25$ мбн.

10.71. $\sigma(\Lambda N) = 32$ мбн; $\sigma(\Xi N) = 25$ мбн, $\sigma(\Omega N) = 18$ мбн.

10.72. $m_{\Xi} \approx m_u + 2m_s \approx m_u + 2(\Delta + m_u) \approx 1290$ МэВ.

Замечание. Речь идет о блоковых (тяжелых) кварках, и $m_d \approx m_u$.

Поэтому $m_{\Lambda} - m_p = m_s - m_u$.

10.73. а) $\nu_{\mu} + p \rightarrow \mu^- + \Delta^{++}$. Здесь возможны две схемы реакции (рис. 188):

б) $\nu_{\mu} + p \rightarrow \mu^- + p$ или $\mu^- + \Delta^+$;

в) $\bar{\nu}_{\mu} + p \rightarrow \mu^+ + p$ или $\mu^+ + \Delta^0$;

г) $\bar{\nu}_{\mu} + p \rightarrow \mu^+ + \Delta^-$.

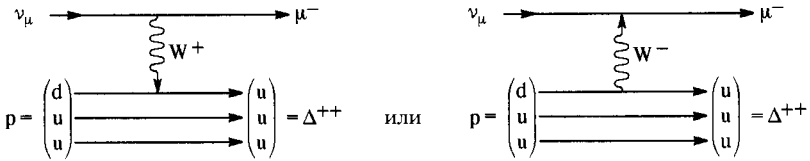


Рис. 188

Отношение эффективных сечений этих реакций $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c : \sigma_d = 1 : 2 : 2 : 1$.

10.74.* Решение. Схема распада протона $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ изображена на рис. 189. Масса X -бозона определяется из соотношения неопределенностей

$$Mc^2 \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx 0,6 \cdot 10^{23} \text{ эВ} = 0,6 \cdot 10^{14} \text{ ГэВ}.$$

Заряд X -бозона равен сумме зарядов двух u -кварков

$$Q_X = +\frac{4}{3}e.$$

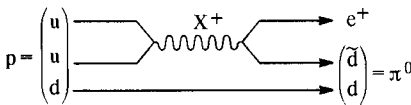


Рис. 189

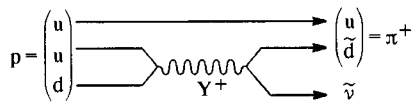


Рис. 190

10.75. $R \approx 2 \cdot 10^{-29}$ см; $Q_Y = +e/3$. Схема распада изображена на рис. 190.

10.76.* Решение. На рис. 191 и 192 показаны все 24 (2×12) перехода между кварками и лептонами, идущих через нейтральный Z^0 и заряженные

след возможно мюон, поскольку образовавшийся при распаде b -кварка W^- -бозон мог распасться по схеме

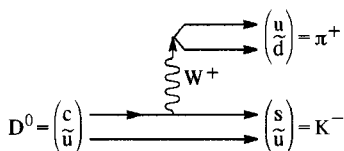


Рис. 194

$$W^- \rightarrow \begin{cases} \mu^- + \tilde{\nu}_\mu \\ e^- + \tilde{\nu}_e \\ \tau^- + \tilde{\nu}_\tau \end{cases}$$

Далее в вершине $3 D^0$ -мезон распадается. Схема его распада изображена на рис. 194. Наиболее вероятен распад s -кварка в рамках второго поколения по схеме

$$s \rightarrow s + W^+.$$

В свою очередь W^+ -бозон распадается, как сказано в условии задачи, по лептонному каналу. Наиболее вероятен такой распад:

$$W^+ \rightarrow u + \tilde{d} \equiv \pi^+.$$

Таким образом, в вершине $3 D^0$ -мезон распадается по схеме:

$$D^0 \rightarrow K^- + \pi^+, \quad \text{где } K^- = (s\bar{u}).$$

Возможны и другие каналы распада D^0 -мезона через K^- -мезон с образованием любого числа пионов: $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+ \pi^0$ или, например, $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.

10.77. Неизвестная частица X — это Ω^- -гиперон. При соударении K^- и p кроме Ω^- образовались еще две частицы. Это пара каонов K^0 и K^+ .

10.78.* Странность частицы $S = 1$. Это могут быть K^0 , а также D^0 , или B^0 .

Решение. По условию задачи электрический и барионный заряды частицы равны $Q = 0$, $B = 0$, а проекция изотопического спина $T_3 = -1/2$. Ответ надо искать, очевидно, среди мезонов, т.е. частиц, имеющих состав (кварк, антикварк).

По условию это может быть странный мезон, хотя не исключен очарованный или красивый мезон. Воспользуемся формулой Гелл-Мана—Нишиджимы

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} (B + S + C + b + t) = T_3 + \frac{1}{2} Y,$$

где B — барионный заряд, S — странность, C — очарование, b — красота, t — правдивость, Y — гиперзаряд. Подстановка в эту формулу данных задачи дает уравнение (для случая поиска странного мезона)

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (0 + S),$$

откуда $S = 1$. Таким образом, это $K^0 = (d\bar{s})$. В принципе, это может быть и очарованный мезон $D^0 = (\bar{u}c)$. В этом случае по формуле Гелл-Мана—Нишиджимы должно быть $C = 1$. Также не исключен случай совсем редкой частицы с кварками третьего поколения B^0 -мезон.

10.79. Антинейтрон \bar{n} .

10.80. $Y = -2$, $S = -3$. Ω^- -гиперон.

10.81. $Y = -1$; $S = -2$. $\Xi^0 \equiv (uss)$ -гиперон.

10.82. $\mu_{\Delta^{++}} = 2\mu_p = 5,6\mu_{\text{яд}}$.

10.83. $\mu_{\Omega^-} = 1,7\mu_{\text{яд}}$. Масса странного кварка принята равной $m_s \approx \approx M_{\Omega^-}/3 \approx 557$ МэВ.

10.84*. $k \approx 8 \cdot 10^{27}$ монополей.

Решение. Монополь, летящий со скоростью $v = \sqrt{2\mathcal{E}/M}$, в 1 с инициирует $N = \sigma n v$ распадов протонов (σ — сечение реакции, n — концентрация протонов). При этом освобождается энергия

$$Nm_p c^2 = \sigma n v m_p c^2,$$

переходящая в тепло при поглощении позитрона и γ -квантов. По условию $k \sigma n v m_p c^2 = L_C$, где k — число монополей в Солнце. Сечение реакции распада протона находится из условия распада одного протона на длине 1 см: $n_p \sigma = 1$; $\sigma = 1/n_p = 3 \cdot 10^{-24}$ см², где n_p — концентрация протонов в 1 см³ воды, $n_p = 10 N_A (m/\mu) \approx 3,3 \cdot 10^{23}$ см⁻³, (в молекуле воды 10 протонов).

Число протонов в 1 см³ Солнца

$$n = \frac{\rho}{m_p} = \frac{M_C}{(4/3) \pi R_C^3 m_p}.$$

Отсюда

$$k = \frac{L_C}{\sigma n v m_p c^2} = \frac{4 L_C n_p \pi R_C^3}{3 M_C c^2 \sqrt{2\mathcal{E}/M}} \approx 8 \cdot 10^{27}.$$

10.85*. $\mathcal{E}_{\text{пор}} \approx 270$ ГэВ.

Решение. На встречных пучках протонов (uud) и антипротонов ($\bar{u}\bar{d}\bar{d}$) может родиться реальный W^+ -бозон в реакции $u + \bar{d} = W^+$, если $\mathcal{E}_W > m_W c^2$. В ультрарелятивистском случае энергия распределяется между кварками точно так же, как и импульс. По закону сохранения энергии

$$m_W c^2 = \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_{\bar{d}} = (p_u + p_{\bar{d}}) c = 0,45 \frac{\mathcal{E}_{\text{пор}}}{3} + 0,45 \frac{\mathcal{E}_{\text{пор}}}{3}.$$

Откуда

$$\mathcal{E}_{\text{пор}} = \frac{m_W c^2}{0,3} \approx 270 \text{ ГэВ}.$$

Совершенно аналогично при столкновении кварков d и \bar{u} может родиться W^- -бозон. Порог реакции будет таким же.

10.86. $\mathcal{E}_{\text{пор}} \approx 300$ ГэВ.

10.87. См. рис. 195.

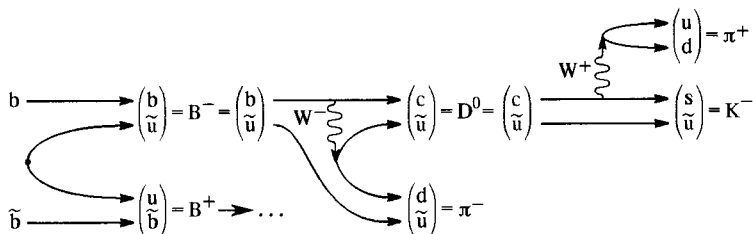


Рис. 195

10.88. См. рис. 196.

10.89. См. рис. 197.

10.90. См. рис. 198.

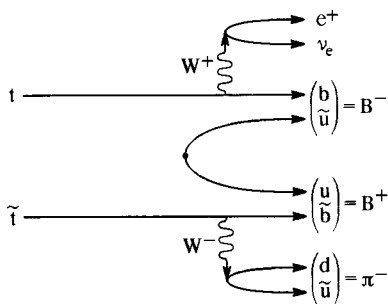


Рис. 196

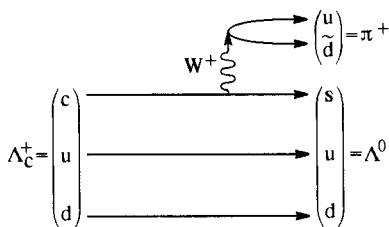


Рис. 197

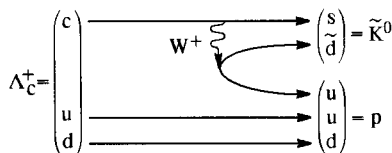


Рис. 198

10.91. Заметим, что реакция $\nu_e + p \rightarrow n + e^+$ не идет, поскольку запрещена законом сохранения лептонного заряда. Поэтому реакция может идти только на нейтронах. Причем, так как энергия нейтрино меньше 15 МэВ, то возможно детектирование только электронных нейтрино ν_e на нейтронах дейтерия в реакции $\nu_e + {}^2_1\text{d} \rightarrow p + p + e^-$, откуда $\mathcal{E}_{\text{пор}} = 1,37$ МэВ.

10.92. $\mathcal{E}_{\nu_e}^{\text{пор}} = 15,5$ МэВ; $\mathcal{E}_{\nu_\mu}^{\text{пор}} = 121,5$ МэВ.

10.93* $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} = -0,667$ (эксперимент дает $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -0,685$).

Решение. Для протона вероятность спинового состояния ($\uparrow u, \uparrow u, \downarrow d$) равняется $2/3$, а спинового состояния ($\uparrow u, \downarrow u, \uparrow d$) равняется $1/3$ (согласно условию). Следовательно, предполагая, что магнитный момент кварка пропорционален его заряду, получим, что $\mu_u = \frac{2}{3} \mu_1$; $\mu_d = -\frac{1}{3} \mu_1$, где μ_1 — «элементарный» магнитный момент. Таким образом, магнитный момент протона равен

$$\mu_p = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \mu_1 - \frac{2}{3} \mu_1 - \frac{1}{3} \mu_1 \right) + \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} \mu_1 + \frac{2}{3} \mu_1 - \left(-\frac{1}{3} \mu_1 \right) \right] = 3\mu_1.$$

Аналогично для нейтрона состояние ($\uparrow d, \uparrow d, \downarrow u$) имеет вероятность $2/3$, а состояние ($\uparrow d, \downarrow d, \uparrow u$) — вероятность $1/3$. Поэтому

$$\mu_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \mu_1 - \frac{1}{3} \mu_1 - \frac{2}{3} \mu_1 \right) + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{3} \mu_1 - \left(-\frac{1}{3} \mu_1 \right) + \frac{2}{3} \mu_1 \right] = -2\mu_1.$$

Откуда искомое отношение $\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3} = -0,667$, тогда как экспериментальное значение

$$\left(\frac{\mu_n}{\mu_p} \right)_{\text{эксп}} = -0,685.$$

Покажем, почему появляются вероятности $1/3$ и $2/3$ при разных спиновых состояниях протона. Каждый кварк имеет спин $1/2$, поэтому максимальный спин системы из трех кварков равен $3/2$ — это состояние $(\uparrow u, \uparrow u, \uparrow d)$, соответствующее Δ^+ -изобаре.

Если перевернуть спин одного из кварков в Δ^+ -изобаре, то получим систему со спином $1/2$. Таких состояний возможно три: $(\uparrow u, \uparrow u, \downarrow d)$, $(\uparrow u, \downarrow u, \uparrow d)$ и $(\downarrow u, \uparrow u, \uparrow d)$. При этом последние два совершенно неразличимы физически — это одно состояние. Таким образом, вероятность состояния $(\uparrow u, \uparrow u, \downarrow d)$ вдвое выше состояния $(\uparrow u, \downarrow u, \uparrow d)$ и составляет $2/3$ против $1/3$ в последнем случае.

Аналогично можно поступить и в системе кварков, $(\uparrow u, \uparrow d, \uparrow d)$, соответствующей Δ^0 -изобаре, имеющей спин $3/2$. Если перевернув спин одного из кварков, получить систему со спином $1/2$, то таких вариантов также три: $(\downarrow u, \uparrow d, \uparrow d)$, $(\uparrow u, \downarrow d, \uparrow d)$ и $(\uparrow u, \uparrow d, \downarrow d)$. Последние два варианта физически неотличимы. Поэтому вероятность состояния $(\downarrow u, \uparrow d, \uparrow d)$ вдвое больше состояния $(\uparrow u, \downarrow d, \uparrow d)$ и составляет $2/3$ против $1/3$.

Заметим, что разность масс Δ -изобар и нуклонов связана только с переверотом спина, а не с возникновением орбитального момента кварка. И нуклон и Δ -изобары — это S -состояния с различными J : $1/2$ и $3/2$.

Сейчас к проблеме магнитных моментов нуклонов развит более наглядный подход, основанный на обобщенном принципе Паули. Согласно этому принципу волновая функция нуклона (произведение орбитальной, спиновой, изоспиновой и цветовой функций кварков) должна быть антисимметрична относительно перестановки любой пары тождественных кварков. Отсюда следует, что спины одинаковых кварков в нуклонах параллельны (цветовая функция всегда антисимметрична, орбитальная функция при $l=0$ — симметрична, следовательно изоспиновая и спиновая функции — симметричны). Тем самым задача вычисления магнитных моментов нуклонов сводится к вычислению суммарного магнитного момента двух частиц со спином 1 (пара одинаковых кварков с параллельными спинами) и одной со спином $1/2$ (оставшийся кварк).

10.94. $\mathcal{E} = (m_{\Delta} - m_n)c^2 = 1231 - 939 = 292$ МэВ. (См. решение задачи 10.93.)

10.95. $\tau \simeq \frac{\hbar}{\alpha^2 m_e c^2} \frac{8r_B^3}{\Lambda_e^3} = \frac{8r_{кл}}{\alpha^6 c} = 5 \cdot 10^{-10}$ с, где r_B — боровский радиус

электрона в атоме водорода, $r_{кл} = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона.

10.96. $t_p \simeq t_{яд} \frac{r_{1p}^3}{\Lambda_{\pi}^3} = 0,32 \cdot 10^{-18}$ с, где $\Lambda_{\pi} = \frac{\hbar}{m_{\pi}c} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см — комптоновская длина волны пиона (радиус сильного взаимодействия), $t_{яд} \simeq 0,5 \cdot 10^{-23}$ с — характерное «ядерное время», r_{1p} — радиус основного состояния протониума.

10.97. $\mathcal{E}_{гл} = \frac{m_n c^2}{4}$; $R_n = \frac{4\pi\hbar}{m_n c} = 2,64$ фм.

Решение. Волновая функция основного сферически симметричного состояния (орбитальный момент равен нулю) частицы в трехмерной сферической яме с непроницаемыми стенками $\psi = A \frac{\sin kr}{r}$. Условие на границе $\psi(R) = 0$ дает разрешенные значения волновых чисел $k = \frac{\pi}{R} n$. Таким образом, минимальная энергия трех безмассовых кварков в непроницаемой сфере $\mathcal{E}_{\text{кв}} = 3\hbar kc = \frac{3\pi\hbar c}{R}$, т. к. из-за различия в цвете они могут втроем находиться на нижнем уровне. Обозначим плотность энергии глюонного поля через ε . Тогда энергия кварков и глюонов

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{кв}} + \mathcal{E}_{\text{гл}} = \frac{3\pi\hbar c}{R} + \varepsilon \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Минимизируя это выражение, получаем

$$R_{\text{min}} = \left(\frac{3\hbar c}{4\varepsilon}\right)^{1/4}, \text{ а } \mathcal{E}_{\text{min}} = 4\pi\hbar c \left(\frac{4\varepsilon}{3\hbar c}\right)^{1/4} = \frac{4\pi\hbar c}{R_{\text{min}}}.$$

Поскольку $\mathcal{E}_{\text{min}} = m_n c^2$, то

$$R_n = R_{\text{min}} = 4\pi \frac{\hbar}{m_n} = 4\pi\lambda_n = 2\lambda_n = 2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-13} \text{ фм.}$$

Энергия глюонного поля составляет:

$$\mathcal{E}_{\text{гл}} = \varepsilon \cdot \frac{4}{3}\pi R_{\text{min}}^3 = \frac{\pi\hbar c}{R_{\text{min}}} = \frac{m_n c^2}{4},$$

т. е. четверть энергии покоя нуклона.

10.98. Поскольку $\sigma(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^2$, то $\frac{\sigma(\mathcal{E}=1 \text{ МэВ})}{\sigma(\mathcal{E}=10 \text{ МэВ})} = 10^{-2}$.

§ 1. Излучение

1.1.* Решение. Из полного числа фотонов dn_ω с частотами вблизи ω , находящимися в 1 см^3 вакуумированной полости в пределах телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, к стенке будут лететь

$$dn_{\omega, \theta} = dn_\omega \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} dn_\omega \sin \theta d\theta$$

фотонов. Нормальная компонента плотности их потока $dj_{\omega, \theta}$ [фотон/(см²·с)] получается умножением $dn_{\omega, \theta}$ на нормальную компоненту скорости

$$dj_{\omega, \theta} = dn_{\omega, \theta} \cdot c \cos \theta.$$

Если считать, что фотоны отражаются от стенки зеркально (это не сказывается на общности результата), то каждый из них

передает стенке импульс $2p_n = 2 \frac{\hbar\omega}{c} \cos \theta$. Таким образом, фотоны создают давление

$$dP_{\omega, \theta} = 2p_n dj_{\omega, \theta} = d\rho_\omega \cos^2 \theta \sin \theta d\theta,$$

где $d\rho_\omega = \hbar\omega dn_\omega$ — плотность энергии фотонов с частотами вблизи ω . Давление, создаваемое всеми фотонами частотой ω ,

$$dP_\omega = \int_{(\theta)} dP_{\omega, \theta} = d\rho_\omega \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} d\rho_\omega.$$

Полное давление

$$P = \int_{(\omega)} dP_\omega = \frac{1}{3} \int_{(\omega)} d\rho_\omega = \frac{1}{3} \rho.$$

Малое отверстие в полости ведет себя как абсолютно черное тело, поскольку излучение, попавшее через это отверстие внутрь полости, в результате многократного отражения от стенок практически полностью поглощается, так что коэффициент поглощения отверстия можно считать равным единице. Излучение, покидающее полость через малое отверстие, по интенсивности и спектральному составу идентично излучению абсолютно черного

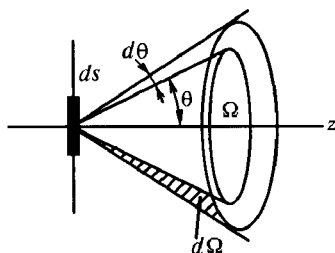


Рис. 199

тела с температурой T . Вычислим, какую энергию в интервале частот $d\omega$ испускает в единицу времени полость через отверстие площадью dS при плотности излучения $d\rho_\omega$ в полости. Энергия этого излучения, выходящего из отверстия под углом θ к нормали к площадке dS в телесном угле $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ (рис. 199), очевидно, равна

$$d\rho_\omega c dS \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} d\rho_\omega c dS \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Суммарное количество энергии в интервале частот $d\omega$, исходящее из отверстия в единицу времени, найдем интегрированием по полупространству

$$\frac{1}{2} d\rho_\omega c dS \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} d\rho_\omega c dS.$$

Интегрирование по всем частотам дает полное количество энергии, исходящее из отверстия в единицу времени: $\frac{\rho c}{4} dS$. С другой стороны, отверстие имеет ту же излучательную способность, что и абсолютно черная поверхность той же площади: $j dS$, где j [эрг/см²·с] — плотность потока энергии излучения. Таким образом, мы получаем

$$j(T) = \frac{\rho(T)c}{4}. \quad (*)$$

Иногда (в фотометрии, например) интегральную (по всем частотам) плотность потока энергии, излучаемой с единицы поверхности протяженного источника излучения в телесный угол $d\Omega$ под углом θ к нормали к поверхности, записывают так:

$$dj_\theta = B_\theta \cos \theta d\Omega.$$

Коэффициент пропорциональности B_θ называют в этом случае яркостью протяженного источника в направлении угла θ . Если B_θ не зависит от угла θ , т. е. $B_\theta = B$, то такой источник называют *ламбертовым*. Абсолютно черное тело — ламбертов источник излучения. Вычислим суммарную плотность потока энергии излучения j , посылаемую единицей поверхности абсолютно черного тела в телесный угол 2π :

$$j = \int_0^{\pi/2} B \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \pi B. \quad (**)$$

Кроме того, эта же величина в соответствии с законом Стефана—Больцмана равна σT^4 , где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5}$ эрг/(с·см²·К⁴). Приравнявая (**) к полученному ранее выражению (*), получаем, что яркость

$$B = \frac{\rho c}{4\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

Плотность потока энергии, излучаемой на всех частотах с единицы площади абсолютно черного тела, имеющего температуру T , в телесный угол 2π , называется энергетической светимостью (интегральной излучательной способностью)

$$R(T) = \frac{\rho(T)c}{4} = \sigma T^4$$

В соответствии с вышеприведенными рассуждениями излучательную способность абсолютно черного тела на частоте ω под углом θ к нормали, можно записать так

$$R_{\omega, \theta} = \frac{c}{4\pi} \rho_{\omega} \cos \theta.$$

Это выражение называется законом Ламберта.

$$1.2^* \quad \rho(T) = aT^4; \quad s(T) = \frac{4a}{3} T^3, \quad \text{где } a = \frac{4\sigma}{c}.$$

Решение. Пусть равновесное тепловое излучение содержится в объеме V . Тогда его внутренняя энергия U и энтропия S соответственно равны

$$U(V, T) = \rho(T)V; \quad S(V, T) = s(T)V. \quad (*)$$

Вспользуемся термодинамическими тождествами

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V; \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

Подставляя в первое из них уравнение состояния излучения $P = \rho(T)/3$ и соотношение (*), находим, что

$$s(T) = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dT}. \quad (**)$$

Подставляя полученный результат и первое из соотношений (*) во второе тождество, находим уравнение для $\rho(T)$

$$\frac{d^2\rho}{dT^2} = \frac{3}{T} \frac{d\rho}{dT},$$

откуда $\rho(T) = aT^4$, а также

$$s(T) = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dT} = \frac{4}{3} aT^3.$$

Полученная постоянная a в этих выражениях может быть выражена через постоянную Стефана—Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5}$ эрг/($c \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4$). Интегральная плотность потока теплового излучения j [эрг/($\text{см}^2 \cdot \text{с}$)] зависит от температуры по закону Стефана—Больцмана $j = \sigma T^4$. Кроме того, $j = c\rho/4$ (см. задачу 1.1), откуда постоянная $a = 4\sigma/c = 7,56 \cdot 10^{-15}$ эрг/($\text{см}^3 \cdot \text{К}^4$).

Заметим, что соотношение $j = c\rho/4$ легко получить, если рассматривать излучение как идеальный газ фотонов, движущихся со скоростью c . Как известно из молекулярно-кинетической теории газов, плотность потока частиц, т. е. число частиц z , движущихся со средней тепловой скоростью \bar{v} и пересекающих за 1 с единицу площади поверхности стенки сосуда, равно $z = n\bar{v}/4$. В этой формуле n — концентрация молекул газа, в нашем случае — это число фотонов в единице объема.

$$1.3. \quad S_2 - S_1 = \frac{16\sigma}{3c} T^3 (V_2 - V_1).$$

$$1.4. \quad A = \frac{4\sigma}{3c}; \quad c_V = \frac{16\sigma}{3c} T^3; \quad P = \frac{4\sigma}{3c} T^4; \quad c_V = 8c_V^{\text{ид}}; \quad \Phi = 0.$$

$$1.5. A = \frac{16\sigma}{3c} T_1^3 (T_1 - T_2) (V_2 - V_1).$$

$$1.6. P = \frac{32\sigma}{3c} T^4 = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2 = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \approx 10^{-6} \text{ мм рт. ст.}$$

$$1.7. C_P = \infty; VT^3 = \text{const или } PV^{4/3} = \text{const.}$$

$$1.8. T = \left(\frac{3c}{4\sigma} P \right)^{1/4} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ К.}$$

$$1.9. n = \frac{4\sigma}{3ck_B} T^3 \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

$$1.10. \frac{C_V^{\text{ид}}}{C_V^{\text{изл}}} = \frac{1}{8}.$$

$$1.11^* n = \frac{16\sigma}{3ck_B} T^3 = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}, T_\Gamma = \frac{T}{4} = 250 \text{ К.}$$

Решение. Температуры в обеих частях сосуда разные. Запишем условие механического равновесия поршня

$$P_1 = nk_B T_1 = \frac{4\sigma}{3c} T_2^4 = P_2, \quad (*)$$

где индекс 1 относится к газу, а 2 — к излучению. Естественно предположить, что $T_1 \ll T_2$, так что давлением излучения при T_1 можно пренебречь. По условию задачи при малых изменениях температуры в обеих частях сосуда на одну и ту же величину направление смещения поршня не зависит от знака этой величины. Это означает, что в зависимости объема одной из частей сосуда от температуры имеется экстремум (минимум, если система устойчива), в окрестности которого $\partial V / \partial T = 0$. Так как $N = nV = \text{const}$, то в линейном приближении по отклонениям от равновесия $n \frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial n}{\partial T} = 0$, и, следовательно, $\partial n / \partial T = 0$. Тогда из соотношения (*) следует

$$nk_B dT_1 = \frac{16}{3c} \sigma T_2^3 dT_2.$$

По условию задачи $dT_1 = dT_2$, откуда

$$n = \frac{16\sigma T_2^3}{3ck_B} = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

Начальная температура газа $T_1 = T_2/4 = 250 \text{ К}$. Поэтому отношение давлений

излучения $\frac{P_1^{\text{изл}}}{P_2^{\text{изл}}} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 = \frac{1}{256} \ll 1$, что оправдывает сделанное предположение о малости температуры газа в сравнении с температурой излучения.

$$1.12^* T^4(r) = T_0^4 \frac{R^2 h}{2(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Решение. Поток энергии, излученный элементом поверхности dS_1 , и падающий на элемент другой поверхности dS_2 , определяется соотношением

$$d^2\Phi = \frac{B dS_1 ds_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{R^2},$$

где в соответствии с рис. 200 \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — единичные векторы нормалей к соответствующим площадкам, R — расстояние между площадками, B — коэффициент пропорциональности, называемый поверхностной яркостью (см. задачу 1.1), вообще говоря, зависящий от угла θ_1 (а также азимутального угла φ_1 , не изображенного на рисунке).

Для абсолютно черного тела $B = \text{const}$ (закон Ламберта) и $B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$. Если ввести телесный угол $d\Omega_2 = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{R^2}$, под которым видна площадка dS_2 из центра первой площадки, то

$$d^2\Phi = \frac{\sigma T^4}{\pi} dS_1 \cos \theta_1 d\Omega_2.$$

На рис. 201 изображен шар — источник равновесного излучения, а под ним — зачерненная с обеих сторон поверхность, где и надо найти распределение температур. Из соображений симметрии ясно, что $T = T(r)$. При условии $h \gg a$ телесный угол, под которым из центра шара видно кольцо радиусом r на плоскости

$$d\Omega_2 \simeq \frac{2\pi r dr \cos \theta_2}{R^2} = \frac{2\pi r dr}{h^2 r^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Кроме того, условие $h \gg a$ позволяет считать, что $\theta_1 \approx \varphi$, где φ — угол между нормалью к dS_1 (т. е. радиусом) и вертикалью. Поэтому $dS_1 \cos \theta_1 \approx dS_1 \cos \varphi = dS'_1$, где dS'_1 — проекция dS_1 на экваториальную плоскость шара. Суммирование (интегрирование) по всем элементам полушферы дает πa^2 . Поэтому поток излученной шаром энергии и поглощенный кольцом

$$d\Phi = \pi a^2 \frac{\sigma T_0^4}{\pi} \frac{2\pi r dr h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

В равновесии этот поток переизлучается кольцом по обе стороны плоскости:

$$d\Phi = 2\pi r dr \cdot 2\sigma T^4(r).$$

Из равенства этих потоков и следует ответ

$$T^4(r) = T_0^4 \frac{a^2 h}{2(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

1.13. $T^4(r) = T_0^4 \frac{Rh}{2(h^2 + r^2)}$, где r — расстояние на плоскости до проекции оси цилиндра.

1.14. $T^4(r) = T_0^4 \frac{a^2 h^2}{2(h^2 + r^2)^2}.$

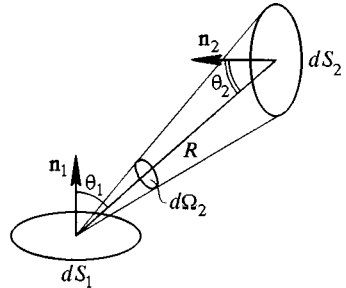


Рис. 200

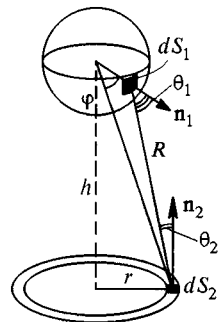


Рис. 201

$$1.15. T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r}{R} \sqrt[4]{\cos \theta_1 \cos \theta_2}}; \frac{T_2(\theta=0)}{T_2(\theta=\pi/4)} = 2^{1/8} \approx 1,09.$$

$$1.16. T_2 = T_1 \sqrt[4]{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + D^2/4}} \right)} \approx 1125 \text{ K.}$$

$$1.17. A \approx 1 - \frac{\rho d^2}{4D^2}; \frac{d}{D} \leq \frac{1}{16}.$$

$$1.18. T = \frac{T_C}{2} \sqrt{\frac{D}{F}} = 1500 \text{ K.}$$

Решение. Вычислим величину телесного угла Ω , под которым была бы видна линза из центра Солнца. Пусть L — расстояние от Солнца до Земли, а D — диаметр линзы. Угол α , под которым из центра Солнца виден радиус линзы, равен $\alpha = D/2L$, откуда

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \pi \alpha^2 = \pi \left(\frac{D}{2L} \right)^2.$$

Плотность потока энергии, излучаемой с поверхности Солнца, $j = \sigma T_C^4$. Поток энергии, излучаемой с поверхности Солнца в единицу телесного угла, равен $\frac{\sigma T_C^4 4\pi R_C^2}{4\pi}$. Мощность солнечного излучения, падающего на линзу,

$$N_C = \sigma T_C^4 R_C^2 \pi \left(\frac{D}{2L} \right)^2.$$

Нагреваясь, шарик, излучает. Когда поток энергии, полученной от Солнца, сравняется с потоком излученной энергии, установится равновесная температура шарика. Поток энергии с поверхности шарика диаметром d

$$N_{\text{ш}} = \sigma T^4 4\pi \frac{d^2}{4}.$$

По условию размер изображения Солнца $\alpha_C F$ равен диаметру d шарика, где $\alpha_C = \frac{2R_C}{L}$ — угловой размер Солнца, а F — фокусное расстояние линзы. Таким образом,

$$N_{\text{ш}} = \sigma T^4 \pi d^2 = \sigma T^4 \pi \alpha_C^2 F^2 = \sigma T^4 \pi F^2 \frac{4R_C^2}{L^2}.$$

Приравнивая потоки энергии N_C и $N_{\text{ш}}$, получаем

$$\sigma T_C^4 R_C^2 \pi \frac{D^2}{4L^2} = \sigma T^4 F^2 \pi \frac{4R_C^2}{L^2},$$

откуда и находим искомую температуру шарика

$$T = \frac{T_C}{2} \sqrt{\frac{D}{F}} = 1500 \text{ K.}$$

$$1.19. T = T_0 \left(1 + \frac{j_c D^2}{4\sigma T_0^4 d^2} \right)^{1/4} \approx 1980 \text{ K.}$$

$$1.20. \frac{j_{\text{кор}}}{j_{\text{им}}} = \frac{n(m_p + m_e)v^3}{2\alpha_c^2 \sigma T^4} \approx 1,5 \cdot 10^{-8}.$$

$$1.21. T_{\text{рад}} = \sqrt[4]{\frac{J_C \left(\frac{L}{R_C}\right)^2}{\sigma}} \approx 5850 \text{ К.}$$

$$1.22. D = \frac{2L}{T^2} \sqrt{\frac{j}{\sigma}} = 1,55 \cdot 10^6 \text{ см} = 15,5 \text{ км, где } T \approx \frac{0,29}{\lambda_{\text{max}}[\text{см}]} = 1,45 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

$$1.23. T_2 = (T_1^4 + T_{\text{стр}2}^4 - T_{\text{стр}1}^4)^{1/4} \approx 340 \text{ К.}$$

$$1.24. T = T_C \sqrt{\frac{R\alpha_C}{2r}} = 2120 \text{ К.}$$

1.25. $T = T_C \sqrt{\frac{R_C}{2L}}$, где L — расстояние от Солнца до соответствующей планеты; $T_B \approx 340 \text{ К}$; $T_3 \approx 290 \text{ К}$; $T_M \approx 230 \text{ К}$; $T_{\text{Ю}} \approx 130 \text{ К}$.

Перегрев поверхности Венеры возникает вследствие парникового эффекта. Атмосфера Венеры толще и плотнее земной, в ее составе значительную долю составляет CO_2 . Атмосфера пропускает солнечный свет с $\lambda \approx 4800 \text{ \AA}$ (6000 К), но не пропускает $\lambda \approx 10 \text{ мкм}$ (300 К).

$$1.26. T_C = 2T_3\alpha_C^{-1/2} \approx 6000 \text{ К.}$$

$$1.27. \frac{dT}{dt} = \frac{W - (1 - \varepsilon)S\sigma T^4}{Mc} \approx 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ К/с} \approx 0,96 \text{ К/ч, где принято:}$$

масса человека $M = 70 \text{ кг}$, поверхность человеческого тела $S \sim 1 \text{ м}^2$, удельная теплоемкость тела человека $c = 4,2 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$ (удельная теплоемкость воды). Можно также оценить максимальную длительность пребывания человека в открытом космосе (без принудительной вентиляции). Если принять, что максимально возможная температура для человеческого тела $T_{\text{max}} = 315 \text{ К}$ (42°C), то тогда $\Delta T_{\text{max}} = 5,4 \text{ К}$. Полагая найденную $\frac{dT}{dt} = \text{const}$, получим $\tau \approx 6 \text{ ч}$. Учет нелинейности производной только увеличит τ ($\frac{dT}{dt} \rightarrow 0$ с ростом T и поэтому значение τ вырастет).

$$1.28. 1) L = \frac{R_C}{2} \frac{T_C^2}{T^2} = (0,905 \div 2,53) \cdot 10^8 \text{ км.}$$

$$2) \frac{R_C^2}{L^2} = 4 \left(\frac{T}{T_C}\right)^4 - \frac{(1 - \eta)N}{\pi r^2 \sigma T_C^4 (1 - \alpha)}$$

В случае 1) ответ не зависит от отражательной способности α ; в случае 2) диапазон α определяется диапазоном температур и условием $(R_C/L)^2 > 0$ (правая часть положительна). Отражательная способность α должна лежать в пределах $0,773 < \alpha < 0,971$.

Отсюда следует, что при $\alpha \geq 0,971$ станция не может работать в непрерывном режиме на любых расстояниях от Солнца (и без Солнца будет перегрев); при $\alpha \leq 0,773$ получаем $L \geq 0,96 \cdot 10^8 \text{ км}$, т. е. станция может работать на сколь угодно большом расстоянии от Солнца; при $\alpha = 0$ $L \approx (0,93 \div 2,9) \cdot 10^8 \text{ км}$.

$$1.29^* u_{\text{max}} = \frac{2RT}{cA} \approx 0,1 \text{ см/с, где } A = 56 \text{ г/моль} — \text{ атомная масса железа.}$$

Решение. Согласно решению задачи 1.1 плотность потока энергии, излученной с поверхности пластинки под углом θ к нормали в телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, равна

$$dj = \frac{\rho c}{4\pi} \cos \theta d\Omega.$$

Так как пластинка излучает лишь в полупространство, то она получает составляющую плотности потока импульса в направлении угла θ :

$$dp = \frac{dj}{c} = \frac{\rho}{4\pi} \cos \theta d\Omega \left[\frac{\text{г} \cdot \text{см} / \text{с}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right].$$

Понятно, что только проекция составляющей импульса dp_z дает движение пластинки вдоль по оси z (рис. 202)

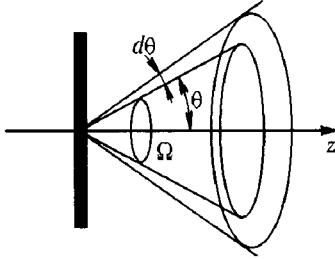


Рис. 202

$$dp_z = \frac{\rho}{4\pi} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{\rho}{4\pi} \cos^2 \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Полная плотность потока импульса, которая в силу симметрии направлена нормально к пластинке, равна

$$p_z = \frac{\rho}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\rho}{6} = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{c} T^4.$$

Найденная величина — это нормальная компонента импульса с единицы площади в единицу времени, т. е. нормальное давление. Полный импульс, полученный пластинкой, находится интегрированием нормального давления по площади пластины S и по времени излучения t . В соответствии с законом сохранения энергии он равен

$$p_{\text{полн}} = \int p_z dS dt = \frac{2}{3c} \int \sigma T^4 dS dt = \frac{2}{3c} \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — полная внутренняя энергия пластинки, переходящая в излучение. В соответствии с законом Дюлонга—Пти $\mathcal{E} = 3k_{\text{Б}}TN$, где $N = \frac{M}{m} = N_A \frac{M}{A}$ — число атомов железа в пластинке, M — ее масса, A — атомная масса. Используемое для \mathcal{E} приближение является довольно грубым, т. к. не учитывает уменьшения теплоемкости при остывании пластины ниже температуры Дебая (для железа примерно 500 К). Тем не менее его можно использовать для оценки максимальной скорости, развиваемой пластинкой. Таким образом,

$$v_{\text{max}} = \frac{p_{\text{полн}}}{M} = \frac{2RT}{cA} \approx 0,1 \text{ см/с}.$$

1.30. $\Delta T = T_3 \frac{W}{4W} \approx 7 \cdot 10^{-3} \text{ К}$, где T_3 — средняя температура поверхности Земли. $W_{\text{max}} \approx 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Вт} = 150 \text{ М}$.

$$1.31. T = \sqrt[4]{\frac{Lc}{16\pi R^2 \sigma}} = 278 \text{ К}; \Delta R = -2R \frac{\Delta T}{T} \sim -10^9 \text{ м}.$$

Истинная орбита Земли эллиптическая: $R_{\max} \approx 152$ млн км, а $R_{\min} \approx 148$ млн км. Полученная оценка допустимых отклонений по порядку величины совпадает с этими отклонениями. Следовательно, реальная оценка допустимого температурного перегрева Земли несколько занижена.

$$1.32. T = \left(\frac{\mathcal{E}_a \lambda_\alpha N}{\sigma S} \right)^{1/4} \approx 11,1 \text{ К, где } N = N_A \frac{m}{A} - \text{число ядер в кусочке}$$

урана, $\lambda_\alpha = \frac{\ln 2}{T_{1/2}^\alpha}$ — постоянная распада, $S = 4\pi \left(\frac{3m}{4\rho r} \right)^{2/3}$ — площадь поверхности кусочка. Вклад осколков деления в разогрев шарика несущественен в силу большой разницы их парциальных времен полураспада.

1.33. Теплообмен падает в $N + 1$ раз,

$$T_n^4 = \frac{(N+1-n)T_\Gamma^4 + nT_x^4}{N+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

1.34* 1) $T_{A2} = 950$ К; 2) $T_{A2} = 1230$ К.

Решение. 1) В первом случае ток не изменится. При повышении напряжения вдвое мощность тока увеличится также вдвое. В стационарном состоянии излучаемая мощность возрастает в $\sqrt[4]{2}$ раз и будет равной ≈ 950 К. Аналитически это записывается следующим образом

$$W_A = \mathcal{J}_A V_A; \quad \mathcal{J}_A = \text{const}; \quad \frac{W_{A1}}{W_{A2}} = \frac{\mathcal{J}_A V_{A1}}{\mathcal{J}_A V_{A2}} = \frac{\sigma T_{A1}^4}{\sigma T_{A2}^4},$$

откуда $T_{A2} = T_{A1} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{1/4} \approx 950$ К.

2) Во втором случае ток возрастет в $2^{3/2}$ раз, а мощность в $2^{5/2}$ раз. При этом температура анода повысится в $2^{5/8}$ раз и достигнет величины ≈ 1230 К. Запишем это:

$$T_{A2} = T_{A1} \left(\frac{W_{A2}}{W_{A1}} \right)^{1/4} = T_{A1} \left(\frac{\mathcal{J}_{A2} V_{A2}}{\mathcal{J}_{A1} V_{A1}} \right)^{1/4} = T_{A1} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/8} \approx 1230 \text{ К.}$$

$$1.35. T_{A2} = T_{A1} \left(\frac{W_2}{W_1} \right)^{1/4} = 1083 \text{ К,}$$

где $W_1 = \mathcal{J}_{A1} V_{A1} + W_{\text{накл}1} \approx \frac{\mathcal{E}}{R_n} V_{A1} + W_{\text{накл}1} = 200$ Вт,

$W_2 = \mathcal{J}_{A2} V_{A2} + W_{\text{накл}2} = \mathcal{J}_{A2} (\mathcal{E} - \mathcal{J}_{A2} R_n) + W_{\text{накл}2} = 2550$ Вт.

$$1.36. \frac{\rho_{\text{изл}}}{\mathcal{E}_{\text{пок}}} = \frac{4\sigma T^4}{c^3 m_p n} \sim 10^{-3}.$$

$$1.37. \frac{\rho_{\text{изл}}}{\mathcal{E}_{\text{маг}}} = \frac{32\pi\sigma T^4}{cB^2} \approx 3,8.$$

$$1.38. \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta j}{j} \approx \frac{2}{5} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{\Delta V}{V} \approx 0,38 \text{ (38\%)} - \text{с учетом зависимости со-}$$

противления нити от температуры, $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{\Delta V}{V} \approx 0,48 \text{ (48\%)} - \text{без учета этой зависимости.}$

$$1.39^* \frac{\Delta B}{B} \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar \omega}{k_B T_0} \frac{\Delta T}{T_0} \approx 0,0256 \quad (2,56\%),$$

$$\Delta T = \frac{5}{16} \frac{n}{\sigma T^2} \sqrt{\frac{k_B T_1}{\pi m_N}} \approx 5,6 \text{ K}$$

Решение. При данной температуре диссоциация азота не происходит, т. к. $9,74 \text{ эВ} \gg 0,216 \text{ эВ} (k_B T_0)$. Концентрация молекул азота $n = \frac{P}{k_B T} = 1,93 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Длина свободного пробега молекул азота $\Lambda = \frac{1}{n \sigma_N} \approx 2,8 \text{ см} > 2 \text{ см}$ — размера колбы лампы. Таким образом, движение молекул внутри колбы — бесстолкновительное. Для оценки будем считать, что всю энергию, полученную от спирали, молекула теряет при столкновении с холодной стенкой, которая имеет температуру $T_1 \approx 300 \text{ K}$. Число ударов в единицу времени о единицу поверхности стенки $z = \frac{n \bar{v}}{4}$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ на среднюю энергию одной молекулы $\bar{\epsilon} = c_V T \epsilon$, интенсивность потери энергии $N_{\text{пот}} = z \bar{\epsilon}$, а вращательные возбуждены, т. к.

$$\frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{m_N d^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \ll 0,216 \text{ эВ} (k_B T_0)$$

(здесь m_N — масса атома азота). Теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу, $c_V = c_{\text{пост}} + c_{\text{вр}} = \frac{5}{2} k_B$, т. е. $\bar{\epsilon} = \frac{5}{2} k_B T_0$. Таким образом, интенсивность потерь энергии

$$N_{\text{пот}} = \frac{5}{8} n \bar{v} k_B T_0.$$

Уравнение теплового баланса

$$\sigma (T_0 - \Delta T)^4 + N_{\text{пот}} = \sigma T_0^4.$$

Считая $\Delta T \ll T_0$, получаем

$$\Delta T \approx \frac{N_{\text{пот}}}{4 \sigma T_0^3} = \frac{5}{16} \frac{n}{\sigma T_0^2} \sqrt{\frac{k_B T_1}{\pi m_N}} \approx 5,6 \text{ K}.$$

При $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ отношение $\frac{\hbar \omega}{k_B T_0} = \frac{hc}{\lambda k_B T_0} = 11,5$, поэтому $e^{\hbar \omega / k_B T_0} \gg 1$ и $\rho(\omega) \propto \omega^3 e^{\hbar \omega / k_B T_0}$. Отсюда следует, что при изменении температуры на ΔT

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar \omega}{k_B T_0} \frac{\Delta T}{T_0} \approx 0,0256 \quad (2,56\%).$$

Поскольку излучательная способность (яркость лампы) однозначно определяется спектральной плотностью излучения, то искомое отношение равно $\frac{\Delta B}{B} = 0,0256$.

$$1.40^* T_2 \approx 80 \text{ K}.$$

Решение. Частота, соответствующая граничной длине волны $\lambda_0 = 5 \text{ мкм}$, равна $\omega_0 = 2\pi c / \lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Поскольку пластинка облуча-

ется потоком солнечного излучения, то необходимо вычислить частоту, на которой спектральная плотность солнечного излучения $\rho_T(\omega)$ максимальна.

Если считать Солнце абсолютно черным телом, то в соответствии с законом смещения Вина эта частота

$$\omega^* \approx 2,8 \frac{k_B T_C}{\hbar} \approx 23 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1},$$

откуда видно, что $\omega_0 \ll \omega^*$.

На рис. 203 показана спектральная плотность излучения Солнца $\rho_T(\omega)$. Из рисунка видно, что кварцевая пластинка поглощает лишь только малую часть излучения солнечного спектра (область, обозначенная штриховкой).

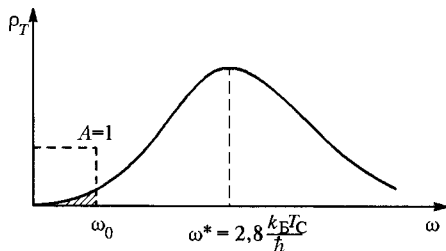


Рис. 203

Поток энергии, приходящий на кварцевую пластинку площадью S от Солнца, равен

$$\begin{aligned} \Phi &= jS = S \frac{c}{4} \int_0^{\omega_0} \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T_C} - 1} \approx S \frac{c}{4} \int_0^{\omega_0} \frac{\omega^2 k_B T_C}{\pi^2 c^3} d\omega = \\ &= S \frac{\omega_0^3 k_B T_C}{12\pi^2 c^2} \approx 4,3 \cdot 10^8 \cdot S \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right]. \end{aligned}$$

Рассчитаем теперь поток энергии, получаемый абсолютно черной пластинкой (в тех же условиях)

$$\Phi_{\text{черн}} = S\sigma T_C^4 \approx 734,8 \cdot 10^8 \cdot S \text{ [эрг/с]},$$

т. е. поток энергии, поглощаемый абсолютно черной пластинкой, больше такового для кварцевой пластинки в $\Phi_{\text{черн}}/\Phi \approx 170$ раз.

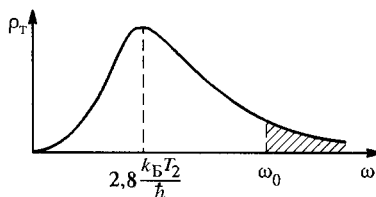


Рис. 204

Черная пластинка имеет равновесную температуру $T_1 = 300$ К. В соответствии с законом Стефана—Больцмана поток излучаемой ею энергии (с двух сторон)

$$\Phi'_{\text{черн}} = 2S\sigma T_1^4 = 4,59 \cdot 10^5 \cdot 2S \text{ [эрг/с]}.$$

Кварцевая пластинка, находящаяся в тех же условиях, излучает поток

$$\Phi' = 2S \left[\sigma T_2^4 - \frac{c}{4} \int_{\omega_0}^{\infty} \rho(\omega) d\omega \right] \quad (*)$$

На рис. 204 показана спектральная плотность равновесного теплового излучения кварцевой пластинки при температуре T_2 . Штриховкой показана область частот, в которой пластинка не излучает. Предполагаем, что $\omega_0 \gg 2,8 k_B T_2 / \hbar$. В этом случае интегралом $\int_{\omega_0}^{\infty} \rho_T(\omega) d\omega$ в формуле (*) можно

пренебречь. Условием теплового равновесия является равенство поглощаемого и излучаемого потоков энергии, т. е. $\Phi = \Phi'$ и $\Phi_{\text{черн}} = \Phi'_{\text{черн}}$. Поэтому

$$\Phi' \approx 2S \frac{c}{4} \int_0^{\omega_0} \rho_T(\omega) d\omega \approx \frac{1}{170} \Phi'_{\text{черн}},$$

откуда $T_2^4 = \frac{T_1^4}{170}$ или $T_2 = \frac{T_1}{\sqrt[4]{170}} \approx 80 \text{ К}$.

В заключение убедимся, что $\omega_0 \gg 2,8k_B T_2/\hbar$. В самом деле $2,8k_B T_2/\hbar \approx 0,3 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1} \ll 3,8 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1} = \omega_0$. Таким образом, наше приближение оправдано, и задача решена.

1.41. $\Phi \approx S \frac{15}{\pi^4} \sigma T^4 x_0^3 e^{-x_0} \approx 8,1 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}$, где $x_0 = \frac{\hbar \omega_0}{k_B T} \approx 16,2$, S — площадь окошка.

1.42. $x = \frac{5}{\pi^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{k_B T} \right)^3 \approx 0,003$.

1.43. $x = \frac{15}{\pi^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{k_B T} \right)^3 e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}} \approx 1,63 \cdot 10^{-7}$.

1.44. $T = \frac{\pi^4}{5} \frac{k_B^3 T^{*4}}{\hbar^3 \omega_0^3} = \frac{\pi^4}{5} \frac{T^{*4}}{\theta^3} \approx 5840 \text{ К}$.

1.45. $T = \frac{\pi^4}{5} \left(\frac{k_B T^*}{\hbar \omega_1} \right)^3 T^* \approx 370 \text{ К}$.

1.46. $d = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0 - I_\lambda}{I_0} = 23 \text{ см}$.

1.47. $\langle \Delta N_\lambda^2 \rangle \approx \langle N_\lambda \rangle \approx \frac{\tau \alpha_c^2 S \pi c}{2\lambda^3} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \exp\left(-\frac{\hbar c}{k_B T \lambda}\right) = 5,9 \cdot 10^9$. Относительная

флуктуация $\frac{\sqrt{\langle \Delta N_\lambda^2 \rangle}}{\langle N_\lambda \rangle} = 1,3 \cdot 10^{-5}$.

Заметим, что в задаче требуется определить среднеквадратичную флуктуацию сигнала, т. е. энергии, принимаемой приемником. Покажем, что при условии $\hbar\omega \gg k_B T$ это будет флуктуация числа фотонов. Строгая термодинамическая формула для флуктуации энергии имеет вид

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle = k_B T^2 \frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{dT}.$$

В интервале частот от ω до $\omega + d\omega$

$$\langle \mathcal{E} \rangle \equiv V \rho_T(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega.$$

Соответственно

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar^2 \omega^4 \exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^2} d\omega.$$

При $\hbar\omega/(k_B T) \gg 1$ (область Вина)

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle \approx \frac{V}{\pi^2 c^3} \hbar^2 \omega^4 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) d\omega = \hbar\omega \langle \mathcal{E} \rangle.$$

Сравнивая с результатом для флуктуации числа частиц идеального газа $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle$, мы видим, что в этой области справедливо представление о фотонах как газе независимых частиц

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle n \rangle \hbar\omega.$$

Напротив, в области Рэля—Джинса справедливы волновые представления о свете и

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle = k_B T \langle \mathcal{E} \rangle.$$

1.48. $T = \frac{2\pi\hbar c}{1,62k_B \lambda_2} = 2,96$ К; при $\lambda_3 = 30$ см сигнал уменьшится в 1000 раз.

1.49*: В обоих случаях $T_{эфф} = \frac{2\mathcal{E}^2}{k_B \pi^2 c \Delta \lambda} = 4,7 \cdot 10^{17}$ К.

Решение. Энергия, уносимая излучением за время dt с площадки dS под углом θ к ней в телесный угол $d\Omega$

$$d\mathcal{E} = I_{\omega, \theta} d\omega d\Omega dS dt,$$

где $I_{\omega, \theta} = \frac{c\rho_\omega}{4\pi} \cos \theta$ — излучательная способность АЧТ на частоте ω под углом θ к нормали. Согласно распределению Планка

$$\rho_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}.$$

Если рассматривать излучение вдоль направления нормали к площадке, то $\theta \approx 0$; $\cos \theta \approx 1$.

Переходя к конечным приращениям, запишем

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{c\rho_\omega}{4\pi} \Delta\omega \Delta\Omega \Delta S \Delta t, \quad \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}, \quad \Delta t = \tau. \quad (*)$$

Случай а): В отсутствие фокусировки $\Delta S = S = \frac{\pi D^2}{4}$, $\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi) = 4\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, где φ — угол дифракции на выходном отверстии. Полагая, что $\sin \varphi \approx \varphi \approx \frac{\lambda}{D}$, получим $\Delta\Omega \approx \frac{\pi^2 \lambda^2}{4S}$. В свою очередь,

$$\Delta\omega = \left| \Delta \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right) \right| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda.$$

После подстановки найденных величин в (*) получаем

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^3 \hbar c^2 \Delta\lambda \tau}{\lambda^3 \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T_{эфф}}\right) - 1 \right]}.$$

Вычислим выражение в скобках:

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T_{эфф}}\right) - 1 = \frac{\pi^3 \hbar c^2 \Delta\lambda \tau}{\mathcal{E} \lambda^3} \approx 0,4 \cdot 10^{-15} \ll 1.$$

Полученный результат означает, что $\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\text{эфф}}} \ll 1$. Тогда

$$T_{\text{эфф}} = \frac{2\mathcal{E}\lambda^2}{\pi^2 c t \Delta\lambda k_B} = 4,7 \cdot 10^{17} \text{ К.}$$

Заметим, что полученный ответ — чисто «классический», т. к. постоянная Планка в нем отсутствует. Это означает, что можно было воспользоваться для вычисления ρ_ω формулой Рэля—Джинса, а не Планка.

Случай б): При максимальной фокусировке с помощью линзы с фокусным расстоянием F площадь пятна в фокусе $\Delta S' = \pi \left(F \frac{\lambda}{D} \right)^2$, а телесный угол схождения лучей в фокус $\Delta\Omega' = \frac{\pi D^2}{4F^2}$. Отсюда следует

$\Delta\Omega' \Delta S' = \frac{\pi^2 \lambda^2}{4}$, т. е. такая же величина, что и в первом случае. Полученный результат $\Delta\Omega \Delta S = \text{const}$ является общим свойством оптических систем: поверхностная яркость предмета и его изображения одинаковы. Можно считать, что изображение «излучает» в телесный угол $\Delta\Omega'$. Поскольку все остальные параметры при фокусировке не меняются, то ответ будет таким же, как и в случае *а)*.

Фактически ответ можно получить и из качественных рассуждений. Энергия \mathcal{E} в интервале $\Delta\omega$ излучается лазером с площадки S в телесный угол $\Delta\Omega \sim \lambda^2/S$ за время τ . Энергия, излучаемая абсолютно черным телом с той же площадки, в тот же угол и за то же время есть $\rho_\omega \Delta\omega \Delta\Omega \tau S$, где $\rho_\omega \sim \frac{k_B T_{\text{эфф}}}{c\lambda^2}$. Сравнивая, получаем $k_B T_{\text{эфф}} \sim \frac{\mathcal{E}}{\tau \Delta\omega}$. Линза не меняет спектрального состава излучения, а значит, не меняет эффективную температуру.

$$\mathbf{1.50:} \quad T_{\text{эфф}} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^2 k_B} = 1,47 \cdot 10^{22} \text{ К.}$$

Решение. Поскольку энергия лазерного излучения $\mathcal{E} = 1 \text{ Дж}$ (что соответствует температуре $\mathcal{E}/k_B \sim 10^{23} \text{ К}$) сосредоточена в очень узком спектральном интервале, то можно с уверенностью считать, что для абсолютно черного тела, имеющего температуру $T_{\text{эфф}}$, $k_B T_{\text{эфф}} \gg \hbar\omega$ (ω — частота излучения лазера, $\hbar\omega \simeq 2 \text{ эВ}$ для красного цвета). Таким образом, спектральную плотность потока энергии излучения черного тела (спектральную светимость $R_T(\omega)$) можно записать, ограничившись классической формулой Рэля—Джинса.

$$R_T(\omega) = j_T(\omega) = \frac{c}{4} \rho_T(\omega) = \frac{\omega^2 k_B T_{\text{эфф}}}{4\pi^2 c^2} = \frac{k_B T_{\text{эфф}}}{\lambda^2}.$$

Спектральная яркость излучения абсолютно черного тела $B_T(\omega)$ связана со спектральной светимостью соотношением $R_T(\omega) = \pi B_T(\omega)$, являющимся следствием закона Ламберта. Откуда $B_T(\omega) = \frac{k_B T_{\text{эфф}}}{\pi\lambda^2}$.

Найдем спектральную яркость лазерного излучения $B_{\text{лаз}}(\omega)$. Если обозначить плотность потока энергии на выходе лазера как q , сечение пучка на выходе $S = \pi D^2/4$, а время импульса излучения τ , то, тогда очевидно, что

$$q = \frac{\mathcal{E}}{S\tau} = \frac{4\mathcal{E}}{\pi D^2\tau}.$$

Ширина спектра импульсного излучения $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$, а телесный угол, в котором распространяется лазерный пучок,

$$\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) \approx \pi\theta^2 \approx \pi\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2.$$

Таким образом, искомая спектральная яркость лазера

$$B_{\text{лаз}}(\omega) = \frac{q}{\Delta\omega\Delta\Omega} = \frac{q\tau}{2\pi^2\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^3\lambda^2}.$$

По условию $B_T(\omega) = B_{\text{лаз}}(\omega)$, откуда

$$T_{\text{эфф}} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^2 k_B} = 1,47 \cdot 10^{22} \text{ К}.$$

Эта колоссальная температура полностью оправдывает применение классической формулы Рэля—Джинса.

Как и в 1.49 можно привести качественную оценку. Поскольку здесь $\Delta\nu \cdot \tau \approx 1$, то $k_B T_{\text{эфф}} \approx \mathcal{E}$.

$$1.51. T_{\text{эфф}} = \frac{j d^2 \lambda}{2\pi c k_B \Delta\nu} \nu = 2,65 \cdot 10^{16} \text{ К}.$$

Как и в 1.49, считая, что $\mathcal{E}/\tau \approx p$, получаем $k_B T_{\text{эфф}} \approx p/\Delta\nu$.

$$1.52. T_{\text{эфф}} = \frac{2W}{\pi^2 k_B \delta\nu} = 1,47 \cdot 10^{15} \text{ К}.$$

Как и 1.49, поскольку $\mathcal{E} = W\tau$, то $k_B T_{\text{эфф}} \sim W/\delta\nu$.

$$1.53^* T_{\text{эфф}} = aT = 3 \text{ К}.$$

Решение. Антенный тракт представляет собой волновод, по которому электромагнитное излучение передается к приемнику. Поглощение возникает главным образом из-за конечной проводимости стенок волновода. Пусть $a_T(\omega)$ — коэффициент поглощения (поглощательная способность), а $R_T(\omega)$ — излучательная способность материала волновода при температуре T на частоте $\omega = 2\pi c/\lambda$. Тогда по закону Кирхгофа

$$R_T(\omega) = a_T(\omega)\varepsilon_T(\omega),$$

где $\varepsilon_T(\omega)$ — излучательная способность на частоте ω абсолютно черного тела, имеющего температуру T . По определению эффективной температуры $R_T(\omega) = R_T^{\text{эфф}}$, откуда $a_T(\omega)\varepsilon_T(\omega) = \varepsilon_{T_{\text{эфф}}}(\omega)$. Очевидно, что $T_{\text{эфф}} < T$. Предположим, что $\hbar\omega \ll k_B T_{\text{эфф}}$. Тогда в приближении Рэля—Джинса и при условии, что $a_T(\omega) \equiv a$, получаем

$$a \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T_{\text{эфф}},$$

откуда и следует ответ $T_{\text{эфф}} = aT = 3 \text{ К}$.

Так как $\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\text{эфф}}} = 0,16 \ll 1$, использованное приближение оправданно.

$$1.54^* \quad j_0 \approx \frac{\pi^2 \hbar c}{\lambda^3 \tau} = 9,5 \cdot 10^4 \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}) = 9,5 \text{ мВт}/\text{см}^2, \quad a_{\text{max}} = \frac{\hbar N_A}{2A_{\text{Na}} \tau \lambda} = 9,2 \cdot 10^7 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Решение. Существование силы светового давления обусловлено изменением импульса атома за счет процессов «поглощение + спонтанное испускание». При поглощении фотона импульс атома получает приращение $\hbar\mathbf{k}$. В то же время при спонтанном испускании фотон излучается в произвольном направлении, и поэтому при многократном повторении процессов поглощения и испускания средний импульс, уносимый фотонами, равен нулю. Поэтому в среднем каждый процесс «поглощение + спонтанное испускание» изменяет импульс атома на величину $\hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega/c$). Однако, наряду со спонтанным излучением, в потоке излучения может происходить и вынужденное (индуцированное) излучение, при котором атом отдает импульс вдоль заданного направления (волнового вектора излучения). В результате совокупного действия поглощения фотонов и их последующего индуцированного и спонтанного излучения движение атома имеет характер систематического дрейфа в направлении вектора \mathbf{k} (рис. 205) (длины стрелок одинаковы).

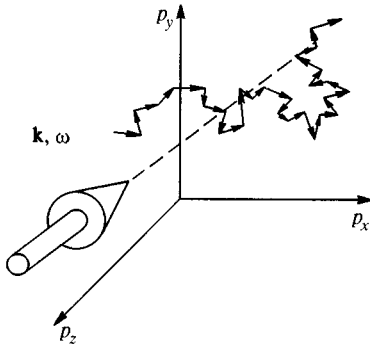


Рис. 205

По определению сила, действующая на атом, равна

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \quad (*)$$

где $\Delta \mathbf{p}$ — изменение импульса атома. Промежуток времени Δt , когда системе можно описывать классически, выбирается достаточно большим, чтобы за это время произошло много актов поглощения и испускания. Имеется два характерных масштаба времени: τ и $1/(\sigma\Phi)$. Характерное время спонтанного испускания τ связано с шириной линии и вероятностью спонтанного испускания $W_{\text{сп}} \sim 1/\tau$. Характерное время процессов взаимодействия поглощения и испускания $1/(\sigma\Phi)$ определяется сечением взаимодействия σ фотона с атомом и плотностью потока фотонов Φ [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$]. При этом $\sigma\Phi \sim W_{\text{п}} \equiv W_{\text{исп}}$, где $W_{\text{п}}$ и $W_{\text{исп}}$ — вероятности вынужденного поглощения и вынужденного испускания фотона (рис. 206). Таким образом, промежуток времени Δt должен удовлетворять условию $\Delta t \gg \tau, 1/(\sigma\Phi)$.

Пусть n_1 и n_2 — относительные заселенности уровней нижнего и верхнего состояний соответственно (рис. 206). Они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -\sigma\Phi n_1, \\ \frac{dn_2}{dt} = -\frac{n_2}{\tau} - \sigma\Phi n_2, \\ n_1 + n_2 = 1. \end{cases} \quad (**)$$

В стационарном состоянии скорости переходов «вниз» и «вверх» должны быть равны, и тогда из (***) следует условие баланса $\sigma\Phi n_1 = \frac{n_2}{\tau} + \sigma\Phi n_2$ и выражения для n_1 и n_2 :

$$n_1 = \frac{\sigma\Phi + \frac{1}{\tau}}{2\sigma\Phi + \frac{1}{\tau}}; \quad n_2 = \frac{\sigma\Phi}{2\sigma\Phi + \frac{1}{\tau}}.$$

Видно, что с ростом Φ заселенность нижнего уровня $n_1 \rightarrow \frac{1}{2} + 0$, а верхнего — $n_2 \rightarrow \frac{1}{2} - 0$, что соответствует насыщению. В качестве предельного значения можно взять $\Phi_0 \approx \frac{1}{2\sigma\tau}$.

Плотность потока энергии насыщения $j_0 = \hbar\omega\Phi_0 \approx \frac{\hbar\omega}{2\sigma\tau}$. Поскольку сечение поглощения фотона — процесс резонансный, то согласно формуле Брейта—Вигнера $\sigma = 4\pi\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{\pi}$ и $j_0 \approx \frac{\pi^2\hbar c}{\lambda^3\tau} = 9,5 \cdot 10^4$ эрг/(см²·с) = 9,5 мВт/см². Здесь сечение процесса поглощения считается как сечение упругого рассеяния.

Это связано с тем, что в начальном состоянии были фотон и атом, а в конечном состоянии — атом и фотон. Как следует из вышесказанного,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{\text{спонт}} + \left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_{\text{инд}} = 0 + \hbar k\sigma\Phi(n_1 - n_2) = \hbar k \frac{\sigma\Phi}{2\sigma\Phi\tau + 1}.$$

Следовательно, при $\Phi \rightarrow \infty$, получаем

$$\left|F_{\text{max}}\right| = \frac{\hbar k}{2\tau}, \text{ откуда } a_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{M} = \frac{\hbar N_A}{2A_{\text{Nat}}\lambda} = 9,2 \cdot 10^7 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} (\sim 10^5 g).$$

Выражение для силы F может быть интерпретировано следующим образом: $F = \hbar k \frac{1}{2\tau}$, т. е. произведение импульса одного кванта $\hbar k$ на вероятность спонтанного излучения в единицу времени $1/(2\tau)$. Последняя в свою очередь есть произведение вероятности того, что атом находится в возбужденном состоянии ($= 1/2$) на вероятность спонтанного излучения при условии, что атом возбужден ($= 1/\tau$).

Отметим, что если бы спонтанное излучение отсутствовало, то было бы $F = 0$ (при $\tau \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$). За большой ($\Delta t \gg \tau \rightarrow \infty$) промежуток времени

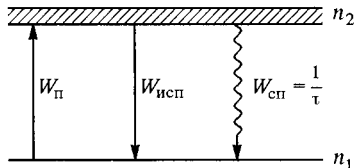


Рис. 206

атом поглотит и излучит в том же направлении одинаковое число квантов. Спонтанное излучение нарушает этот баланс, и в результате импульс атома равен импульсу тех поглощенных квантов, которые были переизлучены спонтанно.

1.55. Обозначая вероятность индуцированного перехода с n -го на m -й уровень p_{nm} ($p_{nm} = p_{mn}$), а спонтанного перехода W_{nm} , в случае атома

$$\frac{p_{nm}}{W_{nm}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \approx e^{-\hbar\omega/k_B T} \approx 1,6 \cdot 10^{-17} \quad (\hbar\omega \gg k_B T).$$

Для электронного спина в магнитном поле

$$\frac{p_{nm}}{W_{nm}} \approx \frac{k_B T}{2\mu_B B} \approx 2,2 \cdot 10^3 \quad (k_B T \gg 2\mu_B B).$$

1.56. $\lambda < \frac{hc}{k_B T \ln 101} \approx 10,6 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$

1.57. $\chi(T) = \chi_0 \text{th} \frac{\hbar\omega}{2k_B T};$ 1) $\chi(T) \approx \chi_0 \frac{\hbar\omega}{2k_B T};$

2) $\chi(T) \approx \chi_0 \left[1 - 2 \exp \left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \right].$

1.58*. $\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \approx \frac{\pi^2 Q c^3}{V \omega^3}.$

Решение. В квантовой физике спонтанное излучение возникает из-за возмущающего влияния на молекулу нулевых колебаний электромагнитного поля. Вероятности спонтанного и вынужденного излучений выражаются через коэффициенты Эйнштейна A и B и плотность энергии излучения $\rho(\omega)$

$$W_{\text{вын}} = \rho(\omega) B; \quad W_{\text{сп}} = A;$$

при этом $B/A = [\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)]^{-1}$, где $\mathcal{D}(\omega)$ — спектральная плотность мод (осцилляторов, числа колебаний) поля в единичном объеме. Таким образом,

$$\frac{W_{\text{вын}}}{W_{\text{сп}}} = \frac{\rho(\omega)}{\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)} = n(\omega, T),$$

где $n(\omega, T)$ — число фотонов данной моды колебаний.

Как известно, для невырожденных уровней одной моды молекулы (атома) вероятности вынужденного излучения и поглощения равны. Рассмотрим молекулу в поле излучения со спектральной плотностью потока энергии $j(\omega) \propto c\rho(\omega)$. Здесь точное значение коэффициента пропорциональности зависит от углового распределения излучения. Так для параллельного потока $j(\omega) = c\rho(\omega)$, а для изотропного излучения $j(\omega) = c\rho(\omega)/4$. В резонаторе этот коэффициент зависит от пространственного распределения поля, но по порядку величины он близок к единице.

Поглощаемая молекулой мощность

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int j(\omega) \sigma(\omega) d\omega,$$

где $\sigma(\omega)$ — сечение поглощения молекулы. Поскольку функция $\sigma(\omega)$ быстро спадает при удалении от резонансной частоты ω_0 , то можно записать

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx j(\omega_0) \int \sigma(\omega) d\omega \propto c\rho(\omega_0) S,$$

где S — площадь под кривой поглощения $\sigma(\omega)$. В обоснование вышеизложенного отметим, что в вакууме $j(\omega)$ является плавной функцией $\propto \omega^3$, а в резонаторе $j(\omega)$ занимает частотный интервал $\Delta\omega = \omega_0/Q$, который по условию задачи превосходит собственную ширину линии Γ , т. е. ширину кривой поглощения $\sigma(\omega)$. Если теперь записать $d\mathcal{E}/dt = \hbar\omega_0 W_{\text{вын}}$, то из сравнения получим

$$W_{\text{вын}} \propto \frac{c\rho(\omega_0)S}{\hbar\omega_0}, \text{ откуда } B \propto \frac{cS}{\hbar\omega_0}$$

и не зависит с точностью до коэффициента от того, где находится молекула: в свободном пространстве или в резонаторе.

Вероятность спонтанного излучения

$$W_{\text{сп}} = W_{\text{вын}} \frac{1}{n(\omega, T)} = W_{\text{вын}} \frac{\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)}{\rho(\omega)} = \hbar\omega \mathcal{D}(\omega) B.$$

Запишем эту вероятность для двух случаев — в резонаторе ($W_{\text{сп}}$) и в свободном пространстве ($W_{\text{сп}}^0$)

$$W_{\text{сп}} = \hbar\omega_0 \mathcal{D}_{\text{рез}}(\omega_0) B; \quad W_{\text{сп}}^0 = \hbar\omega_0 \mathcal{D}(\omega_0) B.$$

Искомое отношение этих вероятностей есть

$$\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} = \frac{\mathcal{D}_{\text{рез}}(\omega_0)}{\mathcal{D}(\omega_0)},$$

т. е. вероятность перехода пропорциональна плотности конечных состояний. В свободном пространстве (вакууме) спектральная плотность мод $\mathcal{D}(\omega_0) \simeq \frac{\omega_0^2}{\pi^2 c^3}$. А в резонаторе, настроенном на частоту перехода, в интервале частот $\Delta\omega$ имеется только одно колебание (мода). Тогда спектральная плотность числа мод (осцилляторов) поля имеет порядок $\mathcal{D}_{\text{рез}}(\omega_0) \sim \frac{1}{\Delta\omega \cdot V} \sim \frac{Q}{\omega_0 V}$, откуда следует ответ

$$\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \simeq \frac{\pi^2 Q c^3}{V \omega^3}. \quad (*)$$

В случае 1) получаем $\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \simeq 4 \cdot 10^2$, а в случае 2) получим $\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \simeq 4 \cdot 10^{-8}$.

Как видно, в зависимости от конкретных данных возможны различные ситуации.

Приведем еще одно решение этой задачи. Вероятность спонтанного излучения молекулы равна вероятности поглощения, т. е. вероятность вынужденного испускания под действием одного фотона. В свою очередь вероятность поглощения пропорциональна времени нахождения фотона вблизи молекулы в резонаторе τ_p . Из соотношения неопределенностей

$$\tau_p \Delta\omega \sim 1, \text{ откуда } \tau_p \sim \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q\lambda}{2\pi c}.$$

Минимальный объем резонатора при длине волны λ соответствует условию $\lambda/2 \sim \sqrt[3]{V}$. Таким образом, $\tau_p = \frac{QV^{1/3}}{\pi c}$. Если взять такой же объем V , но в свободном пространстве, то время нахождения вблизи молекулы $\tau_{св} \sim V^{1/3}/c$.

Искомое отношение вероятностей спонтанного перехода для этих двух случаев

$$\frac{W_{сп}}{W_{сп}^0} = \frac{\tau_p}{\tau_{св}} \sim \frac{Q}{\pi}$$

Очевидно, что это тот же результат, в чем легко убедиться, подставив $V = (\lambda/2)^3$, $\omega = 2\pi c/\lambda$ в соотношение (*).

1.59. $\frac{N_2}{N_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\ln(1-\tau)}{2lk_n} \right] = 0,5055$, где N_2 — число атомов хрома, находящихся в возбужденном состоянии, N_0 — полное число атомов хрома.

$$\mathbf{1.60.} \quad \Delta\nu = 2\nu_0 \sqrt{\frac{2RT}{\mu c^2} \ln\left(\frac{\beta_0-1}{1-R}\right)} = 3,5 \text{ МГц.}$$

Указание. При $\beta \rightarrow 1+0$ $\ln \beta \simeq \beta - 1$.

1.61. Сдвиг частоты принимаемого сигнала при изменении направления движения происходит за счет эффекта Доплера и составляет $\Delta\omega \simeq 2 \frac{v}{c} \omega$, где ω — частота, на которой производится измерение. При этом сдвиг распределения излучения абсолютно черного тела $\Delta\rho \simeq \frac{d\rho}{d\omega} \Delta\omega$. Отсюда видно, что измерения надо проводить на тех частотах, где максимальна величина $\left| \omega \frac{d\rho}{d\omega} \right|$.

Таким образом,

$$\left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right|_{x=x_1} \simeq 1,55 \cdot 10^{-3}; \quad \left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right|_{x=x_2} \simeq 2,52 \cdot 10^{-3}.$$

$$\mathbf{1.62.} \quad t = t_1 \frac{T_1}{T_0} \sim 10^7 \text{ лет.}$$

1.63. $P_{св} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \simeq 4,6 \cdot 10^{17} \text{ дин/см}^2 \simeq 4,6 \cdot 10^{11} \text{ атм}$; $P_{газ} = \frac{N_{APZ}}{A} k_B T = 7 \cdot 10^{10} \text{ атм} < P_{св}$. Реально при $kT = 10 \text{ кэВ}$ происходит лишь частичная ионизация. Заметим, что в водородной бомбе именно световое «сдавливание» термоядерного горячего (т. н. имплозия) играет решающую роль.

1.64. $T_{пл} = T_3 \left(\frac{\tau_3}{\tau_{пл}} \right)^{1/3} \approx 1350 \text{ К}$, где τ_3 — период обращения Земли, а T_3 — температура ее поверхности.

$$\mathbf{1.65.} \quad L_{\max} = RT_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{5j}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ м} \approx 150 \text{ км.}$$

$$\mathbf{1.66.} \quad T = T_C \sqrt{\frac{\alpha_c}{2} \left(\frac{1+d^2/(16r^2)}{1+r^2/R^2} \right)^{1/4}} \approx 430 \text{ К.}$$

1.67. $F = \frac{\sigma T^4 \pi a^4}{cL^2} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ дин}$ (притяжение). Если бы в полости был один шарик, то никаких сил на него не действовало бы (симметрия). На-

личие второго шарика приводит к нарушению симметрии. Он «затеняет» часть падающего излучения и нарушает баланс сил. В результате возникает эффективное притяжение между шариками. Собственное излучение шариков не дает вклада в силу из-за его изотропности.

1.68. $L \leq \lambda = \frac{1}{n\sigma} = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ см} \approx 10^7 \text{ пк}$ (парсек), т. е. много больше размеров нашей Галактики ($\sim 10^3 \text{ пк}$), где концентрация реликтовых фотонов

$$n = \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]} \approx 400 \text{ см}^{-3}.$$

1.69. $\omega \geq \pi \left(\frac{c^4 \sigma}{2a^4} \right)^{1/5}$. Отсюда предельно возможная частота в резонаторе $\omega_{\max} = 1,43 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$; а минимальная частота колебаний в кубическом резонаторе $\omega_{\min} = c \frac{\pi}{a} \sqrt{2} = 4,16 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Резонансные свойства пропадут, когда расстояние между пиками станет больше или равно ширине самого пика (аналог критерия Рэлея). Величина $\omega_{\max} \tau$, где $\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} \sim 10^{-14} \text{ с}$, $\omega_{\max} \tau \leq 10^{-3}$, т. е. σ можно считать постоянной.

$$\mathbf{1.70.} \quad \frac{\mathcal{E}}{\Delta\nu} = kT \frac{2L}{c} = 5,2 \cdot 10^{-21} \frac{\text{эрг}}{\text{Гц}}.$$

Замкнутый с обоих концов волновод с указанными размерами представляет собой длинный резонатор, в котором закон дисперсии $\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, где $k_x = m \frac{\pi}{a}$, $k_y = n \frac{\pi}{b}$, $k_z = l \frac{\pi}{L}$; $m, n, l = 0, 1, 2, 3, \dots$. Поскольку размеры a и $b \ll L$, то в диапазоне длин волн $\lambda = 10 \text{ см}$ поперечные моды сильно разрежены по сравнению с продольными. Продольные моды расположены намного чаще, и вся энергия сосредоточена в основном в них. Моды продольных колебаний поля распределены также, как колебания в одномерной цепочке. Резонансные частоты продольных колебаний находятся из условия $L = m \frac{\lambda}{2}$, m — целое число. Число мод в частотном интервале $\Delta\nu$ равно $\frac{2L}{c} \Delta\nu$. Поскольку $h\nu \sim 10^{-5} \text{ эВ} \ll kT \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$, то энергия одной моды колебаний равна kT . Поэтому плотность электромагнитной энергии в волноводе

$$\frac{\mathcal{E}}{\Delta\nu} = kT \frac{2L}{c} = 5,2 \cdot 10^{-21} \frac{\text{эрг}}{\text{Гц}}.$$

$$\mathbf{1.71.} \quad t = \frac{M^3}{3A} = 0,84 \cdot 10^{20} \text{ с}, \text{ где через } A \text{ обозначено } A = \frac{\hbar c^4}{15360\pi\gamma^2} \approx 0,4 \cdot 10^{25} \text{ г}^3/\text{с}.$$

1.72. $H \geq \frac{RT}{\mu_{\text{вг}}} \ln \left[\frac{P_0 \sigma \tau}{k} \sqrt{\frac{8R}{\pi \mu_K T}} \right] \approx 1,6 \cdot 10^5 \text{ м} = 160 \text{ км}$, где $\mu_{\text{вг}}$ и μ_K — молярные масса воздуха и кислорода, $P_0 \approx 10^5 \text{ Па}$ — атмосферное давление у поверхности Земли.

$$\mathbf{1.73^*} \quad n \leq 825.$$

Решение. Образование устойчивой атомной системы с уровнями \mathcal{E}_n возможно, если уширение уровней меньше расстояния между уровнями

$$\delta\mathcal{E}_n \leq \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1} = \hbar\omega.$$

В поле магнитотормозного излучения время жизни возбужденных атомов определяется двумя факторами — временем спонтанных переходов $\tau_{\text{сп}}$ и временем индуцированных переходов. Т. о. ширина атомных уровней $\delta\mathcal{E}_n$ состоит из двух слагаемых — естественной ширины, определяемой временем спонтанного перехода, и ширины, обусловленной временем индуцированного излучения

$$\delta\mathcal{E}_n \simeq \frac{\hbar}{\tau_{\text{изл}}} = \hbar \left(\frac{1}{\tau_{\text{сп}}} + \frac{1}{\tau_{\text{инд}}} \right).$$

Время индуцированных переходов с n -уровня под действием фотонов магнитотормозного излучения равно

$$\tau_{\text{инд}} = \frac{\tau_{\text{сп}}(n)}{N(\omega)} = \tau_{\text{сп}}(n) \frac{\hbar\omega\mathcal{D}(\omega)}{\rho(\omega)} = \tau_{\text{сп}}(n) \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2 I(\omega)}.$$

Здесь $N(\omega)$ — среднее число фотонов магнитотормозного излучения, $\mathcal{D}(\omega) = \omega^2/(\pi^2 c^3)$ — плотность состояний, $\rho(\omega) = 4I(\omega)/c$ — спектральная плотность изотропного излучения на частоте $\hbar\omega \approx 2Ry/n^3$.

В отсутствие вынужденного излучения, как это следует из условия, при $n \gg 1$ естественная ширина уровней пропорциональна n^{-5} , и поэтому она убывает быстрее, чем расстояние между уровнями, которое пропорционально n^{-3} . Поэтому спонтанное излучение не может привести к ограничению на величину n .

Однако фотоны магнитотормозного излучения существенно увеличивают ширину уровней, и предельное значение номера уровня находится из условия

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{инд}}} \leq \frac{2Ry}{n^3},$$

откуда

$$n^7 \leq \frac{4Ry^4 6 \cdot 10^{-12}}{\pi^2 c^2 \hbar^3 I(\omega)} = 0,26 \cdot 10^{21},$$

$$n_{\text{max}} \simeq 825.$$

Заметим, что магнитотормозное излучение не является равновесным и среднее число фотонов не описывается формулой Планка, а находится из заданной спектральной интенсивности

$$I(\omega) = \frac{c\rho(\omega)}{4} = \frac{c}{4} \hbar\omega \cdot \mathcal{D}(\omega) N(\omega),$$

откуда $N(\omega) \simeq 1,7 \cdot 10^{11}$. Поскольку в космическом пространстве есть и реликтовое излучение с температурой $T = 2,7$ К, то в принципе эти фотоны также могут вызывать индуцированные переходы. Среднее число таких фотонов в интересующем нас интервале частот равно

$$\bar{N}(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T)} \simeq \frac{k_B T}{\hbar\omega} \simeq 4,8 \cdot 10^3 \ll N(\omega),$$

Фактически эта оценка показывает, что эффективная температура магнитотормозного излучения, соответствующая данной частоте, равна

$$T_{\text{эфф}} = T \frac{N(\omega)}{N(\omega)} \simeq 9,4 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

1.74* $\sqrt{\langle \delta^2 \rangle} = 2 \lambda_e \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{2}{\alpha}} = 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ см}$, где $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, λ_e — комптоновская длина волны электрона.

Решение. Рассмотрим нулевое колебание (моду) с частотой ω : $\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$. Уравнение движения свободного электрона в поле этой волны имеет вид $m \frac{d^2 \delta_\omega}{dt^2} = e \mathbf{E}(\omega)$, где δ_ω — смещение электрона. Интегрируя это уравнение, получаем $\delta_\omega = -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}_0 \cos \omega t$. Средний по времени квадрат смещения электрона $\overline{\delta_\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{m^2 \omega^4} \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{e^2 E_0^2}{2m^2 \omega^4}$. Амплитуда колебания E_0 может быть найдена по принципу соответствия классического и квантового выражений для энергии моды

$$\int \frac{\overline{E^2(\omega)} + \overline{H^2(\omega)}}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \hbar \omega.$$

Здесь V — объем системы. В плоской электромагнитной волне $\overline{E^2(\omega)} = \overline{H^2(\omega)} = \frac{E_0^2}{2}$, поэтому $E_0^2 = \frac{4\pi}{V} \hbar \omega$. Следовательно $\overline{\delta_\omega^2} = \frac{2\pi}{V} \frac{\hbar e^2}{m^2 \omega^3}$. Поскольку нулевые колебания различных частот независимы, то надо просуммировать (проинтегрировать) это выражение по всем возможным колебаниям. Число мод нулевых колебаний (число осцилляторов поля) в объеме V , приходящихся на интервал $d\omega$, есть $dN_\omega = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$. Поэтому

$$\langle \delta^2 \rangle = \int \overline{\delta_\omega^2} dN_\omega = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int_{Ry/\hbar}^{2m^2 c^2/\hbar} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{4}{\pi} \alpha \lambda_e^2 \ln \frac{2}{\alpha}.$$

Здесь α — постоянная тонкой структуры, λ_e — комптоновская длина волны электрона. Таким образом,

$$\sqrt{\langle \delta^2 \rangle} = 2 \lambda_e \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{2}{\alpha}} = 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Такое смещение электрона на «орбите» может быть описано введением дополнительного, по отношению к кулоновскому потенциалу ядра, отталкивательного потенциала. Этот потенциал должен быть сферически симметричен и, как следует из полученной оценки, его эффективный радиус намного меньше боровского радиуса. Поэтому он главным образом возмущает $2s$ -состояние, волновая функция которого в отличие от $2p$ -состояния конечна при $r = 0$. В результате уровень $2s_{1/2}$ смещается вверх по энергии относительно уровня $2p_{1/2}$.

§ 2. Кристаллическая решетка. Фононы. Теплоемкость. Теплопроводность.

2.1. $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi\sqrt{2}}{6}; \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$.

2.2. Для Li $n = 1$, для CsCl $n = 2$.

2.3. $\frac{d_1}{d_2} = 2^{1/3} \sqrt{\frac{2}{3}} = 1,03$.

2.4. $a = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{N_A} \rho} = 5,64 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$

2.5* $d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$.

Решение. Для обозначения положения плоскостей и направлений в кристаллах пользуются индексами Миллера, обозначаемыми h, k, l . При задании положения плоскости определяются точки, в которых плоскость пересекает координатные оси. Затем берутся обратные значения полученных чисел и домножаются на наименьшее общее кратное их знаменателей. Полученный набор чисел указывается в круглых скобках: $(h k l)$.

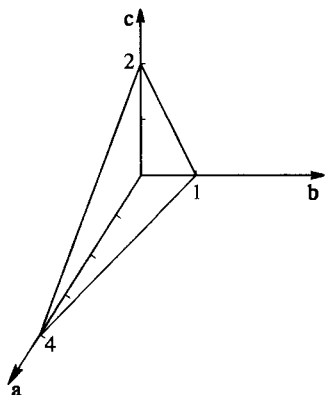


Рис. 207

Он определяет не только данную плоскость, но и все плоскости, ей параллельные.

Если плоскость пересекает ось координат в области отрицательных чисел, то соответствующий индекс также будет отрицательным. При этом знак минус указывается в виде черты над индексом: $(h \bar{k} l)$. На рис. 207 изображена плоскость, отсекающая на координатных осях отрезки 4, 1, 2. Соответственно индексы Миллера этой плоскости будут $(1 \bar{4} 2)$.

Для обозначения направлений применяются индексы, представляющие собой проекции вектора, исходящего из начала координат, параллельного данному направлению. Эти числа указываются в квадратных скобках: $[hkl]$. Такой набор чисел указывает не только данное направление, но и все ему параллельные.

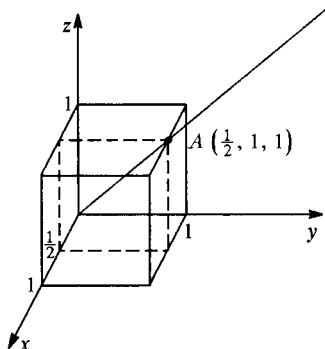


Рис. 208

На рис. 208 изображено направление, связывающее центр координат с точкой $A\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$. Индексы Миллера для этого направления записываются в виде $[1 \bar{2} 2]$. Для направления, связывающего точку с координатами $(1, 0, 1)$ с точкой с координатами $\left(\frac{4}{3}, 2, -\frac{1}{2}\right)$, проекции параллельного вектора будут иметь вид $\left(\frac{1}{3}, 2, -\frac{3}{2}\right)$, а значит, индексы Миллера этого направления запишутся в виде $[2 \bar{12} \bar{9}]$.

Отметим, что в кристаллах кубической симметрии (простая кубическая, объемноцентрированная кубическая и гранецентрированная кубическая решетки) направление $[hkl]$ перпендикулярно плоскости (hkl) с теми же индексами.

Пусть одна из плоскостей проходит через начало координат. По определению миллеровских индексов соседние параллельные ей плоскости отсекают на осях координат отрезки $\frac{a}{h}$, $\frac{a}{k}$, $\frac{a}{l}$. Следовательно, уравнение этих плоскостей будет $hx + ky + lz = a$. Из этого уравнения находим искомое межплоскостное расстояние:

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}.$$

2.6. 1) $d_{100} = a$, $d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

2) $d_{100} = \frac{a}{2}$, $d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $d_{111} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$;

3) $d_{100} = \frac{a}{2}$, $d_{110} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, $d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

2.7. $\lambda = 0,147$ нм.

2.8. $a = 0,628$ нм.

2.9* $d_{\min} = \frac{3c}{2\sqrt{2}v} = 2,893$ Å.

Решение. Волновой вектор \mathbf{k} падающего на кубический кристалл излучения имеет направление, параллельное оси x , т. е. $[100]$ (см. решение задачи 2.5). Таким образом, сам вектор можно обозначить как $\mathbf{k} = k(1, 0, 0)$, где $k = 2\pi/\lambda = 2\pi v/c$. Вектор \mathbf{k}' рассеянного излучения имеет направление $[122]$. Легко понять, что $\mathbf{k}' = \frac{1}{3}k(1, 2, 2)$, $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$. При брэгтовском рассеянии первого порядка должно выполняться условие

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b}_i,$$

где \mathbf{b}_i — один из трех векторов обратной решетки. Таким образом

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \frac{2}{3}k(-1, 1, 1).$$

Для решения задачи необходимо найти базисные векторы обратной решетки. При этом следует определить базисные векторы \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 примитивной ячейки прямой решетки, построенной на базисе элементарной ячейки гранецентрированной кубической решетки (ГЦК) с ребром a . На рис. 209 показаны элементарная ячейка ГЦК решетки и примитивная ячейка, построенная на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Сами векторы могут быть записаны так ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты осей координат):

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{a}{2}(1, 1, 0);$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{a}{2}(0, 1, 1);$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \frac{a}{2}(1, 0, 1).$$

Углы между векторами \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 равны 60° . Базисный вектор обратной решетки \mathbf{b}_1 определяется по формуле

$$\mathbf{b}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3)} = \frac{[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3]}{V},$$

где смешанное произведение векторов $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3)$ равно объему примитивной ячейки. Вычислим векторное произведение: $[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3] = \frac{a^2}{4} (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$. Результирующий вектор имеет компоненты $\frac{a^2}{4} (1, 1, -1)$. Тогда, очевидно,

$V = a^3/4$, и вектор \mathbf{b}_1 имеет компоненты $\frac{1}{a} (1, 1, -1)$.

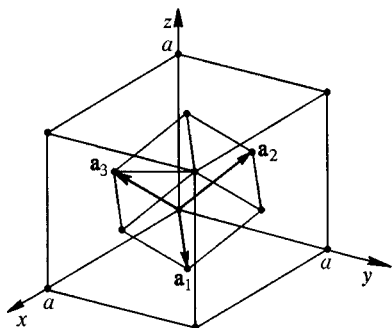


Рис. 209

Аналогично находим и два других

вектора $\mathbf{b}_2 = \frac{[\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3)}$ и $\mathbf{b}_3 = \frac{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3)}$ с

компонентами $\frac{1}{a} (-1, 1, 1)$ и $\frac{1}{a} (1, -1, 1)$.

Интересно отметить, что эти векторы задают примитивную ячейку ОЦК решетки, т. е. прямая — ГЦКР, а обратная — ОЦКР и наоборот.

Сравнивая направления векторов

обратной решетки с разностью $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{b} = \frac{2\pi}{3} (-1, 1, 1)$, видим, что вектор \mathbf{b} параллелен вектору \mathbf{b}_2 , т. е.

$$2\pi\mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a} (-1, 1, 1) = \frac{2\pi}{3} k (-1, 1, 1).$$

Отсюда получаем

$$a = \frac{3\pi}{k} = \frac{3c}{2v}.$$

Нам требуется найти наименьшее межатомное расстояние d_{\min} в кристалле с ГЦК решеткой. Очевидно, оно равно (рис. 209)

$$d_{\min} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3c}{2\sqrt{2}v} = 2,893 \text{ \AA}.$$

Возможно также решение задачи без привлечения понятия обратной решетки. Согласно закону Брэгга—Вульфа переданный импульс $\hbar\mathbf{K} = \hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, где \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — волновые векторы падающего и отраженного лучей. Так как $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda}$, то $\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (1, 0, 0)$, $\mathbf{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, и, следовательно, $\mathbf{K} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Таким образом, направление этого волнового вектора в решетке есть $[1\bar{1}\bar{1}]$. Поскольку переданный решетке импульс перпендикулярен системе отражающих плоскостей, то семейство

последних имеет миллеровские индексы $(1 \bar{1} \bar{1})$ (см. решение задачи 2.5). Используя результат задачи 2.5, находим расстояние между этими плоскостями $d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из треугольника векторов \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{K} находим

угол падения $\sin \varphi = \frac{\frac{1}{2} |\mathbf{K}|}{|\mathbf{k}_1|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя это в условие Брэгга—

Вульфа $2d \sin \varphi = \lambda$, получаем $\frac{2a}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \lambda$, откуда постоянная кубической решетки $a = \frac{3}{2} \lambda$. Минимальное расстояние между атомами в ГЦК решетке

$$d_{\min} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \lambda = \frac{3c}{2\sqrt{2}v} = 2,893 \text{ \AA}.$$

$$2.10. c_{\text{кол}} = \frac{k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2}; \quad \frac{\hbar\omega}{k_B T} = \begin{cases} 11,33 & \text{при } T = 300 \text{ К} \\ 2 & \text{при } T = 1700 \text{ К}. \end{cases}$$

$$a) c_{\text{кол}} \approx k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\hbar\omega/k_B T} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} k_B \quad (\text{при } T = 300 \text{ К});$$

б) $c_{\text{кол}} = k_B \frac{4e^2}{(e^2 - 1)^2} = 0,724 k_B$ (при $T = 1700 \text{ К}$), где e — основание натурального логарифма.

$$2.11. \text{ Если } \frac{\hbar^2}{2I} \gg k_B T, \text{ то } c_{\text{вр}} = \frac{3k_B \left(\frac{\hbar^2}{Ik_B T} \right)^2 e^{-\hbar^2/Ik_B T}}{(1 + 3e^{-\hbar^2/Ik_B T})^2}.$$

Если $\frac{\hbar^2}{2I} \ll k_B T$, то $c_{\text{вр}} = k_B$ (классический случай).

$$a) \text{ При } T = 22 \text{ К} \quad c_{\text{вр}} \approx 0,03 k_B;$$

$$b) \text{ При } T = 600 \text{ К} \quad c_{\text{вр}} = k_B.$$

$$2.12^* \lambda = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 14,5 \text{ мкм}.$$

Решение. По условию задачи $\gamma = 1,30 = \frac{C_V + R}{C_V}$, откуда получим

$C_V = \frac{10}{3} R$. На поступательные и вращательные степени свободы приходится,

как известно, $C_V = 3 \cdot \frac{1}{2} R + 2 \cdot \frac{1}{2} R = \frac{5}{2} R$. Тогда на колебательные степени

свободы приходится $C_V^{\text{кол}} = \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2} \right) R = \frac{5}{6} R$, или по $\frac{5}{12} R$ на каждую степень.

С другой стороны, колебательная теплоемкость равна (см. задачу 2.10)

$$C_V = \frac{R(\varepsilon/k_B T)^2 e^{\varepsilon/k_B T}}{(e^{\varepsilon/k_B T} - 1)^2} = \frac{5}{12} R, \text{ где } \varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Обозначая $\frac{\varepsilon}{k_B T} = x$, из уравнения $C_V^{\text{кол}} = \frac{5}{12} R$ получаем

$$\frac{x e^{x/2}}{e^x - 1} = 0,645 \quad \text{или} \quad \text{sh } \frac{x}{2} = 0,775 x,$$

откуда $x = 3,38$. Следовательно,

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = 3,38; \quad \lambda = 14,5 \text{ мкм.}$$

2.14* N продольных и $2N$ поперечных колебаний.

Решение. Пусть a — размер элементарной ячейки (в данном случае она содержит один атом, т. е. является примитивной) цепочки из N одинаковых атомов. Тогда полная длина цепочки $L = aN$. Смещение n -го атома в бегущей волне $u_n = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$ должно быть одинаковым при переходе от $x = na$ к $x + L$:

$$u_0 e^{iKna} = u_0 e^{iKa(n+N)},$$

откуда следует, что $e^{iKaN} = e^{iKL} = 1$ и

$$KL = 2\pi l, \text{ где } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом, разрешенные значения волнового числа K представляют собой дискретный набор значений

$$K_l = \frac{2\pi}{L} l, \text{ где } l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

с расстоянием между соседними модами колебаний

$$\Delta K = \frac{2\pi}{L} \Delta l = \frac{2\pi}{L}.$$

Другими словами, интервал, приходящийся на одну моду колебаний, равен $\frac{2\pi}{Na}$. Отсюда следует, что ширина интервала волновых чисел K , в котором содержатся все физически различные моды колебаний, равна $2\pi/a$. Этот интервал называется зоной Бриллюэна. Пределы изменения K , т. е. положения границ зоны Бриллюэна, при этом имеют вид: $-\frac{\pi}{a} < K \leq \frac{\pi}{a}$ (один знак нестрогого неравенства, т. к. точки $-\frac{\pi}{a}$ и $\frac{\pi}{a}$ являются физически эквивалентными). Число разрешенных значений K в зоне Бриллюэна равно числу примитивных ячеек, т. е.

$$\frac{2\pi/a}{2\pi/L} = \frac{L}{a} = N.$$

В данном случае это число совпадает с числом атомов.

Для каждого значения K имеется три типа независимых колебаний (в общем случае — с различными частотами): одно колебание — продольное, когда частицы перемещаются вдоль цепочки, и два поперечных. Таким образом, число мод поперечных колебаний равно $2N$. Всего в данной цепочке возможно $3N$ независимых колебаний, что равно числу степеней свободы указанной системы.

2.15* $\omega(K) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \left| \sin \frac{Ka}{2} \right|, \quad s = a \sqrt{\frac{\gamma}{m}}.$

Решение. Одномерная цепочка одинаковых атомов массой m изображена на рис. 210. Координата n -го атома $x_n = an$, смещение n -го атома от-

нительно положения равновесия обозначим как u_n . Тогда уравнение движения n -го атома запишется так

$$m\ddot{u}_n = \gamma(u_{n+1} - u_n) + \gamma(u_{n-1} - u_n) \quad \text{или} \quad m\ddot{u}_n = \gamma(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}).$$

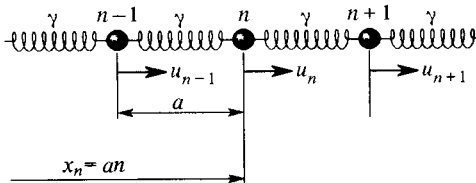


Рис. 210

Решением этого уравнения является функция вида

$$u_n(t) = u_0 e^{i(Kan - \omega t)},$$

описывающая бегущую волну. Подстановка этого выражения в дифференциальное уравнение движения приводит к условию

$$m\omega^2 [-m\omega^2 + 2\gamma(1 - \cos Ka)] = 0.$$

Из этого условия следует, что отличное от нуля u_0 будет существовать, только если частота и волновое число удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$m\omega^2 = 2\gamma(1 - \cos Ka) \quad \text{или} \quad \omega(K) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \left| \sin \frac{Ka}{2} \right|.$$

График этой функции изображен на рис. 211. Периодическую зависимость $\omega(K)$ можно было бы предвидеть заранее: в силу периодических свойств прямой решетки в координатном пространстве должны быть периодические свойства обратной решетки в квазиимпульсном пространстве. При этом «элементарной» ячейкой в K -пространстве, содержащей все физически неэквивалентные значения K , является зона Бриллюэна. Один из вариантов выбора зоны Бриллюэна показан на рис. 212.

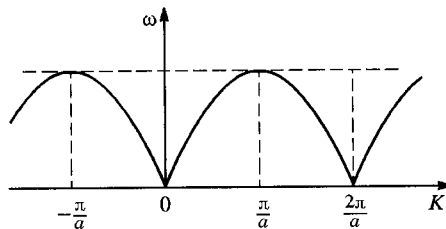


Рис. 211

Фазовая скорость упругих волн определяется законом дисперсии

$$v_\phi = \frac{\omega(K)}{K} = a \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \frac{\sin \frac{Ka}{2}}{Ka/2}.$$

В области $Ka \ll 1$ (рис. 212) $\omega(K) \approx 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \frac{Ka}{2} = Ka \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$. Так как здесь $\lambda \gg a$, то это соответствует переходу от дискретной системы к приближению сплошной среды (в одномерном случае — к струне). Как известно, в упругой среде могут распространяться звуковые волны с законом дисперсии $\omega = sK$, где s — скорость звука. Сравнивая две записи, получаем выражение для скорости звука, то есть скорости распространения упругих волн в цепочке

$$s = a \sqrt{\frac{\gamma}{m}}.$$

Энергия колебаний одномерной цепочки (как и трехмерного кристалла), или энергия упругой волны, может быть проквантована, как и энергия осциллятора. Квант

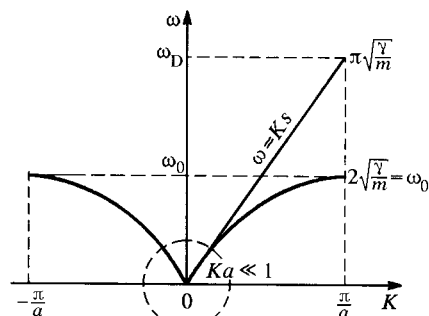


Рис. 212

энергии упругой волны называется *фононом*, по аналогии с фотоном — квантом электромагнитной волны, также имеющим линейный закон дисперсии $\omega = ck$, где c — скорость света в среде.

Значения волнового числа K , такие, что $|K| > \frac{\pi}{a}$, не дают новых решений дисперсионного уравнения. Действительно,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{iKa},$$

откуда видно, что область $Ka \in [-\pi, \pi]$ включает все независимые значения этого экспоненциального множителя.

Вычислим групповую скорость упругих волн в цепочке

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dK} = a \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \frac{Ka}{2} = s \cos \frac{Ka}{2}.$$

В области $Ka \ll 1$ $v_{\text{гр}} \approx s$. На границах зоны Бриллюэна при $K = \pm \frac{\pi}{a}$ групповая скорость $v_{\text{гр}} = 0$, т. е. волна является стоячей.

Заменяем истинный спектр колебаний звуковым во всей зоне Бриллюэна. Такая замена должна сопровождаться условием равенства числа нормальных колебаний числу атомов (точнее, числу примитивных ячеек) в цепочке. При $N \gg 1$ расстояния между соседними модами стремятся к нулю, и можно считать распределение мод квазинепрерывным. Число нормальных колебаний, лежащих в диапазоне волновых чисел от K до $K + dK$ (рассматривая только продольные волны)

$$dN_K = 1 \cdot \frac{L}{2\pi} \frac{2dK}{1} = \frac{L}{\pi} dK.$$

Здесь «2» в числителе — следствие того, что мы считаем $K > 0$, но учитываем возможность распространения волн как с K , так и с $-K$. Исходя из дисперсионного соотношения, найдем

$$dK = \frac{d\omega}{a\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \cos \frac{Ka}{2}} = \frac{d\omega}{a\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{2Ka}{2}}} = \frac{d\omega}{a\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4\gamma/m}}}$$

Обозначив максимальную частоту колебаний реального спектра как $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$, получим

$$dN(\omega) = \frac{2L d\omega}{\pi a \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Полное число нормальных колебаний цепочки

$$N = \int dN(\omega) = \int_0^{\omega_0} \frac{2L d\omega}{\pi a \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} = \frac{2L}{\pi a} \arcsin \frac{\omega}{\omega_0} \Big|_0^{\omega_0} = \frac{L}{a}$$

Число нормальных колебаний в «спрямленном» спектре $\omega = Ks$

$$dN'(\omega) = \frac{L}{\pi} dK = \frac{L}{\pi s} d\omega$$

Полное число колебаний

$$N' = \frac{L}{\pi s} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega = \frac{L\omega_{\max}}{\pi s}$$

Приравнивая полученные выражения, находим

$$\omega_{\max} = \frac{\pi s}{a} = \pi \sqrt{\frac{\gamma}{m}} = \frac{\pi}{2} \omega_0 \approx 1,6\omega_0$$

Процедура «спрямления» дисперсионной кривой называется приближением Дебая, а максимальная частота — дебаевской частотой ω_D . Этой частоте соответствует максимальное волновое число K_D :

$$K_D = \frac{\omega_{\max}}{s} = \frac{\pi}{a}$$

Совпадение значений дебаевского волнового числа с границей зоны Бриллюэна наблюдается только в одномерном случае для продольных и поперечных волн и является, по-видимому, случайным. В двух- и трехмерных случаях этого совпадения нет, но K_D мало отличается от значения π/a , которое служит хорошей оценкой во всех расчетах, проводимых в дебаевском приближении. См. задачу 2.27.

Очевидно, что при увеличении температуры растет и энергия квантов колебаний (фононов). Максимальной энергии можно поставить в соответствие температуру (температура Дебая θ), и в дебаевском приближении, когда частота колебаний достигает своего предела

$$\hbar\omega_{\max} = \hbar\omega_D = k_B\theta$$

Тем самым

$$\theta = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} = \frac{\pi\hbar}{k_B} \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

$$2.16^* \mathbf{p} = -i\omega M \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} \frac{1 - \exp(iNKa)}{1 - \exp(iKa)} = \begin{cases} 0 & \text{для } K \neq 0, \\ -i\omega MN \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} & \text{для } K = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем импульс цепочки суммированием импульсов отдельных атомов

$$\mathbf{p} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{p}_n = \sum_{n=0}^{N-1} M \frac{d\mathbf{u}_n}{dt} = -i\omega M \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inKa} = -i\omega M \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} \frac{1 - e^{iNKa}}{1 - e^{iKa}}.$$

Поскольку $u_n = u_{n+N}$, то $\exp(iNKa) = 1$ и $\mathbf{p} = 0$ для всех $K \neq 0$.

Этот результат вполне очевиден. Согласно рис. 2.11 спектр нормальных колебаний четен по K , поэтому всегда есть колебания с \mathbf{K} и $-\mathbf{K}$. Особняком стоит точка $\mathbf{K} = 0$, которая соответствует движению цепочки как целого. При $K = 0$ дробь равна N , и тогда импульс цепочки равен

$$\mathbf{p} = -i\omega MN \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}.$$

В цепочке конечной длины при четном числе атомов оказывается, что одно из колебаний соответствует границе первой зоны Бриллюэна $K = \frac{\pi}{a}$ и ему нет симметричного колебания с $K = -\frac{\pi}{a}$ (потому что в первую зону Бриллюэна включается только одна граница). Однако это непарное колебание соответствует стоячей волне ($v_{\text{гр}} = 0$), в которой соседние атомы колеблются в противофазе и импульс цепочки для такого колебания тоже равен нулю.

Отметим, что в гармоническом приближении отсутствует и поток импульса фононов, т. е. давление фононного газа равно нулю. Это связано с тем, что коэффициент линейного расширения тоже равен нулю в гармоническом приближении (см. задачу 2.17). При учете ангармоничности это уже не так.

2.17* $\alpha = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT} \sim \frac{\sigma}{\gamma^2} \frac{k_B}{a} \sim \frac{k_B}{\mathcal{E}} \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, где a — расстояние между атомами в двухатомной молекуле при $T = 0 \text{ K}$, \mathcal{E} — энергия взаимодействия, имеющая атомный ($\sim 10 \text{ эВ}$) порядок.

Решение. Потенциальная энергия взаимодействия пары атомов $U(x)$ возникает вследствие взаимодействия электронных оболочек, имеющих размер порядка a . И само взаимодействие имеет атомный порядок $\mathcal{E} \sim 10 \text{ эВ}$. Поскольку поправка, связанная с ангармонизмом, мала, то при $x \ll a$ отношение

$\frac{\delta x^3}{\gamma x^2} \ll 1$. При этом равенство достигается только при $x \approx a$, когда о малых колебаниях уже и речи нет. Поэтому $\mathcal{E} \sim \gamma a^2$, но и $\mathcal{E} \sim \delta a^3$.

Для оценки температурного коэффициента линейного расширения α вычислим среднее значение \bar{x} отклонения атома от положения равновесия, используя для этого функцию распределения Больцмана, которая позволяет учесть возможные значения x в соответствии с их термодинамической вероятностью

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-U(x)/k_B T} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-U(x)/k_B T} dx}.$$

Вычисление среднего существенно упрощается, если предположить, что ангармонические члены в выражении $U(x)$ малы по сравнению с $k_B T$. Это справедливо при малых смещениях x . Тогда подынтегральное выражение можно разложить в ряд

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-U(x)/k_B T} dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^2/k_B T} \left(x + \frac{\delta x^4}{k_B T} + \frac{\beta x^5}{k_B T} \right) dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\delta (k_B T)^{3/2}}{\gamma^{5/2}}.$$

Заметим, что при интегрировании здесь возникают интегралы типа

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{(n+1)/2}}, \text{ где гамма-функция } \Gamma \text{ при } n=1 \text{ равна } 1 (\Gamma(1)=1),$$

а при $n=4$ она равна $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Первый и третий интегралы в разложении равны нулю, как интегралы от нечетной функции в симметричных пределах. Поэтому ответ довольно очевиден. Нормировочный интеграл тоже легко вычисляется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-U(x)/k_B T} dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^2/k_B T} \left(1 + \frac{\delta x^3}{k_B T} + \frac{\beta x^4}{k_B T} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x^2/k_B T} dx = \sqrt{\frac{\pi k_B T}{\gamma}}.$$

Окончательно получаем

$$\bar{x} = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\gamma^2} k_B T \approx \frac{\delta}{\gamma^2} k_B T.$$

Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}$, где

$$l = a + \bar{x}. \text{ Тогда } \alpha \approx \frac{1}{a} \frac{\delta}{\gamma^2} k_B \sim \frac{k_B}{a} \frac{\mathcal{E}}{a^3} \frac{a^4}{\mathcal{E}^2} \sim \frac{k_B}{\mathcal{E}} \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

Заметим, что коэффициент линейного расширения α можно получить из других соображений. Запишем уравнение колебаний ангармонического осциллятора (μ — приведенная масса молекулы)

$$\mu \ddot{x} = -2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\beta x^3.$$

Усредняя уравнение движения по периоду колебаний τ ($0 < t < \tau$), получим по определению среднего и с учетом периодичности движения

$$\langle \ddot{x} \rangle = \frac{1}{2\tau} [\dot{x}(\tau) - \dot{x}(0)] = 0.$$

Поэтому, пренебрегая третьим членом в потенциальной энергии, получим

$$\bar{x} = \frac{3\delta}{2\gamma} \langle x^2 \rangle.$$

При слабом ангармонизме можно $\langle x^2 \rangle$ взять в гармоническом приближении

$$\langle \gamma x^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}.$$

Поэтому $\bar{x} = \frac{3}{2} \frac{\delta}{\gamma^2} k_B T \sim \frac{\delta}{\gamma^2} k_B T$.

$$2.18. \mathcal{E}_{\text{св}} = U_{\text{min}} = \frac{4}{27} \frac{\gamma^3}{\delta^2} = \frac{4}{27} M s^2 = 1,12 \text{ эВ}.$$

2.19. Возрастает в два раза.

$$2.20. \omega = \frac{\pi}{20} \frac{s}{a} \approx 1,05 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

$$2.21. \frac{n(\rho_{\max})}{n\left(\frac{\rho_{\max}}{2}\right)} = \frac{\exp\left(\frac{\rho_{\max} s}{2k_B T}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\rho_{\max} s}{k_B T}\right) - 1} = \begin{cases} 0,46 & \text{при } T = 500 \text{ К} \\ 3,4 \cdot 10^{-4} & \text{при } T = 10 \text{ К}. \end{cases}$$

$$2.22. 1) \frac{n(\omega_D)}{n(\omega_D/2)} = 4 \frac{\sqrt{e}-1}{e-1} = 1,51 \quad (\text{при } T = \theta);$$

$$2) \frac{n(\omega_D)}{n(\omega_D/2)} = 4 \frac{e^5-1}{e^{10}-1} \approx 4e^{-5} \approx 0,027 \quad (\text{при } T = \theta/10).$$

$$2.23^* T = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_\gamma^2 \hbar s}{\pi N a k_B^2 M c^2}} \approx 1,3 \text{ К}.$$

Решение. При излучении гамма-кванта одним из ядер ^{115}In оно получает энергию отдачи $\mathcal{E}_k = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{2Mc^2}$, где M — масса ядра. Эта энергия перераспределяется в цепочке и идет на увеличение внутренней энергии. Полагая, что внутренняя энергия в исходном состоянии пренебрежимо мала, можно считать, что $\mathcal{E}_k = U(T)$.

Внутренняя энергия цепочки, связанная с возбуждением в ней бегущих волн (фононов), может быть представлена в виде

$$U(T) = \sum_{\mathbf{K}} \hbar \omega_{\mathbf{K}} n_{\mathbf{K}}(T),$$

где сумма берется по всем волновым векторам из 1-й зоны Бриллюэна. Здесь $n_{\mathbf{K}}(T)$ — среднее число фононов с волновым вектором \mathbf{K} и частотой $\omega_{\mathbf{K}}$, даваемое формулой Планка

$$n_{\mathbf{K}}(T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{K}}}{k_B T}\right) - 1}.$$

При $N \gg 1$ спектр фононов является квазинепрерывным и от суммирования можно перейти к интегрированию. При этом

$$\sum_{\mathbf{K}} \rightarrow \int \hbar \omega_{\mathbf{K}} n_{\mathbf{K}}(T) dN_{\mathbf{K}} = \int \hbar \omega n(\omega) dN(\omega),$$

где $dN_{\mathbf{K}}$ и $dN(\omega)$ — числа возможных мод колебаний (число осцилляторов) в интервале от \mathbf{K} до $\mathbf{K} + d\mathbf{K}$ и от ω до $\omega + d\omega$ соответственно. Учитывая продольные и поперечные колебания и тот факт, что $dN(\omega) = dN_{\mathbf{K}}$, можно записать

$$dN(\omega) = 3 \frac{L \cdot 2 dK}{2\pi} = \frac{3L d\omega}{\pi s},$$

где коэффициент 3 перед формулой означает, что одной и той же частоте колебаний соответствует три «поляризации» — одно продольное колебание и два поперечных. Таким образом,

$$U(T) = \frac{3L}{\pi s} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} d\omega.$$

Максимальная частота — это дебаевская частота ω_D . Обозначив $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$,

получим

$$U(T) \approx \frac{3\hbar L}{\pi s} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^2 \int_0^{\theta/T} \frac{x dx}{e^x - 1},$$

где дебаевские температуры $\theta = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} = \frac{\hbar s \pi}{a k_B} \approx 100$ К. Предполагая, что $T \ll \theta$, получаем

$$U(T) \approx \frac{3\hbar L}{\pi s} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{3\hbar L}{\pi s} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi N a k_B^2}{2\hbar s} T^2,$$

откуда

$$T = \sqrt{\frac{\varepsilon_\gamma^2 \hbar s}{\pi N a k_B^2 M c^2}} \approx 1,3 \text{ К.}$$

и предположение оправдано.

2.24. $\omega_{1,2}(K) = \frac{\gamma}{\mu} \pm \gamma \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \frac{4 \sin^2 Ka}{mM}}$, где $\mu = \frac{mM}{m+M}$ — приведенная масса. График дисперсионной зависимости $\omega(K)$ приведен на рис. 213. Максимальным значением волнового числа $K_{\max} = \pi/2a$ ограничивается фоновый спектр, т. е. $|K| \leq \pi/2a$, K_{\max} соответствует минимальной длине волны $\lambda_{\min} = 4a$.

На нижней ветви (см. рис. 213) в области $|Ka| \ll 1$ частота $\omega \propto K$. Эта ветвь графика называется акустической. Верхняя ветвь носит названия оптической. Такое название обусловлено тем, что указанные колебания в ионных кристаллах (см. задачу 2.25) могут возбуждаться внешней электромагнитной волной (обычно инфракрасного диапазона). Здесь при $K = 0$ $\omega = \sqrt{2\gamma/\mu} \neq 0$. Между ветвями существует «щель» — область, соответствующая нераспространяющимся (затухающим) волнам.

Щель исчезает при $\frac{m}{M} \rightarrow 1$. При $m = M$ период цепочки скачком уменьшается вдвое,

и закон дисперсии становится таким: $|Ka| \leq \pi$ (сравнить с зад. 2.15 и рис. 212).

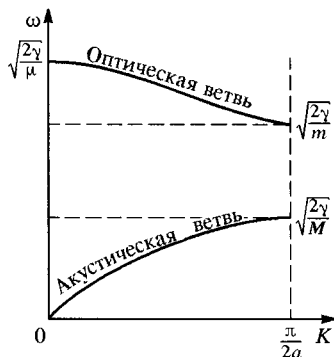


Рис. 213

$$\omega^2(K) = \frac{2\gamma}{m} (1 - \cos Ka) \text{ при}$$

$$\mathbf{2.25.} \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2}{\mu} \left(\frac{2\gamma}{\mu} - \omega^2 \right)^{-1}.$$

$$\mathbf{2.26.} \quad \frac{\omega_{\text{NaF}}}{\omega_{\text{NaBr}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{NaBr}} - 1}{\varepsilon_{\text{NaF}} - 1} \frac{\varepsilon_{\text{NaF}} + 2}{\varepsilon_{\text{NaBr}} + 2} \frac{\rho_{\text{NaF}}}{\rho_{\text{NaBr}}} \frac{M_{\text{Br}}}{M_{\text{F}}}} = 2,018.$$

$$\mathbf{2.27.} \quad \omega_D = 2 \sqrt{\frac{\pi\gamma}{M}}; \quad K_D = \frac{2}{a} \sqrt{\pi}.$$

2.28* Решение. Будем следовать обозначениям задачи 2.24, где под a понимается расстояние от K^+ до $B\Gamma^-$, т. е. постоянная решетки КВг (или ребро элементарного куба) равна $2a$, тогда

$$2a = \sqrt[3]{\frac{4(M+m)}{\rho}} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ см};$$

$s = a\omega_{\max} \sqrt{\frac{M}{M+m}} = 2,12 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, где $M = M_{\text{Br}}$, $m = M_{\text{K}}$; $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{M}}$ — максимальная частота на акустической ветви (при $K = \pi/2a$).

На акустической ветви при $K \rightarrow 0$ $\omega(K) \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{M+m}} aK = sK$. Отсюда следует $s = \sqrt{\frac{2\gamma}{M+m}} a = a \sqrt{\frac{2\gamma}{M}} \sqrt{\frac{M}{M+m}} = a\omega_{\max} \sqrt{\frac{M}{M+m}} = 2,12 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

2.29. $\omega = 2\pi\nu \approx \sqrt{\frac{E}{m}} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\nu \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$, m — масса атома меди.

2.30. $\frac{x_0}{a} = \frac{\hbar}{\theta a} \sqrt{18 \cdot \frac{T_{\text{пл}}}{k_{\text{Б}} M}} \approx 0,01$, где M — масса атома криптона.

Приведенный ответ следует из простого соотношения $m\omega_{\text{D}}^2 A_0^2 \approx k_{\text{Б}} T$. Более аккуратный расчет (см. задачи 2.74 и 2.75) дает $\frac{\sqrt{A_0^2}}{a} = \frac{\hbar}{\theta a} \sqrt{18 \cdot \frac{T_{\text{пл}}}{k_{\text{Б}} M}} \approx 0,01$.

2.31* Решение. При поглощении и испускании фононов в процессе неупругого рассеяния нейтрона энергия колебаний атомов кристалла изменяется на величину, кратную $\hbar\omega$. При этом нейтрон получает или отдает порцию импульса $\hbar\mathbf{K}$, где ω и \mathbf{K} — частота и волновой вектор соответствующей бегущей волны (фонона). Пусть вначале в кристалле находилось $n_{\mathbf{K},s}$ фононов с частотой $\omega_{\mathbf{K},s}$ и поляризацией s , а после рассеяния $n'_{\mathbf{K},s}$. Тогда

$$\begin{cases} \mathcal{E}' = \mathcal{E} + \hbar\omega_{\mathbf{K},s} (n_{\mathbf{K},s} - n'_{\mathbf{K},s}) \\ \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{K} (n_{\mathbf{K},s} - n'_{\mathbf{K},s}) + \hbar \cdot 2\pi\mathbf{b}' \end{cases}$$

где \mathbf{b} — вектор обратной решетки, \mathcal{E}' и \mathbf{p}' — энергия и импульс нейтронов после рассеяния. Слагаемое $\hbar \cdot 2\pi\mathbf{b}'$ можно трактовать как импульс, передаваемый кристаллической решетке в целом. При этом мы не суммируем по всем \mathbf{K} и s , рассматривая взаимодействие только с одним типом фононов. В силу идеальности газа фононов перераспределение энергии и импульса между различными фононными модами не происходит.

Рассмотрим как упругие, так и неупругие процессы.

1) Бесфононное упругое рассеяние нейтронов (брэгговское рассеяние):

$\begin{cases} \mathcal{E}' = \mathcal{E}, \\ \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar 2\pi\mathbf{b}' \end{cases}$. Векторная диаграмма этого рассеяния изображена на рис. 214, откуда получается условие Брэгга—Вульфа

$$2p \sin \theta = 2\pi\hbar b = \frac{2\pi}{a} \hbar \quad \text{или} \quad \lambda = 2a \sin \theta.$$

2) Однофононное рассеяние

$$\begin{cases} \mathcal{E}' = \mathcal{E} \pm \hbar\omega_{\mathbf{K}, s} \\ \mathbf{p}' = \mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{K} + \hbar 2\pi\mathbf{b}, \end{cases}$$

где знак «+» означает поглощение фонона, а знак «-» — испускание. Задавая \mathcal{E} и \mathbf{p} и измеряя \mathcal{E}' и \mathbf{p}' , мы однозначно определяем $\hbar\mathbf{K}$ и $\hbar\omega_{\mathbf{K}, s}$, т. е. находим «точку» в фононном спектре. Меняя энергии падающих нейтронов и направления приема рассеянных нейтронов, мы находим много «точек» и восстанавливаем спектр.

3) Двух- и многофононные процессы рассеяния. Здесь нужно учитывать как возможность поглощения (испускания) двух и более фононов с разными квазиимпульсами и поляризациями, так и возможность поглощения одного и испускания другого. Тогда

$$\begin{cases} \mathcal{E}' = \mathcal{E} \pm \hbar\omega_{\mathbf{K}, s} \pm \hbar\omega_{\mathbf{K}', s'} \\ \mathbf{p}' = \mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{K} \pm \hbar\mathbf{K}' + \hbar \cdot 2\pi\mathbf{b}, \end{cases}$$

где знаки «+» и «-» определяются, как и в случае 2). Из этой системы нельзя однозначно найти \mathbf{K} и \mathbf{K}' , $\omega_{\mathbf{K}, s}$ и $\omega_{\mathbf{K}', s'}$, т. к. неизвестных больше, чем уравнений. С точки зрения постановки эксперимента запишем

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \pm \hbar\omega_{\mathbf{K}, s} \pm \hbar\omega_{\pm\left(\frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{\hbar} \mp \mathbf{K}\right), s'}.$$

Здесь мы исключили \mathbf{K}' и воспользовались периодичностью $\omega_{\mathbf{K}, s}$: $\omega_{\mathbf{K} + 2\pi\mathbf{b}} = \omega_{\mathbf{K}}$. Поскольку \mathbf{K} пробегает все значения в 1-й зоне Бриллюэна, то в заданном направлении \mathbf{p}' вылетают нейтроны произвольных энергий. Это дает фон. На рис. 215 изображена соответствующая экспериментальная зависимость. Пунктиром изображена ситуация с бесконечным временем жизни фонона. Уширенные максимумы возникают из-за неидеальности газа фононов и соответствуют конечным временам жизни фононов.

Приведенное рассмотрение соответствует квазичастичному подходу. Однако возможно рассмотрение этой задачи как задачи о рассеянии нейтронной волны на решетке атомных ядер. Тогда приведенное выше в 1) решение соответствует отражению нейтронной волны, в 2) когерентному рассеянию нейтронной волны, в 3) некогерентному рассеянию.

$$2.32^* \quad C_1 \propto T; \quad C_2 \propto T^2.$$

Решение. Энергия колебаний решетки, которую можно отождествить с понятием «внутренней» энергии решетки $U(T)$, находится суммированием энергий всех возбужденных фононов (см. задачу 2.23). Эта энергия есть

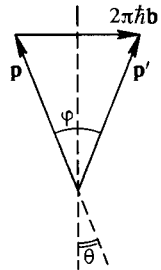


Рис. 214

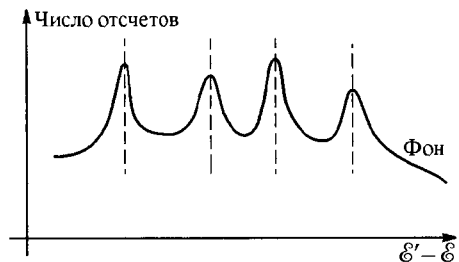


Рис. 215

функция температуры. Теплоемкость решетки $C = \frac{dU(T)}{dT}$. Переходя от суммирования к интегрированию, можно записать:

$$U(T) = \int \hbar\omega_{\mathbf{K}} n_{\mathbf{K}} dN_{\mathbf{K}} = \int \hbar\omega n(\omega) dN(\omega),$$

где $n_{\mathbf{K}} \equiv n(\omega)$ — среднее число фононов, имеющих частоту $\omega_{\mathbf{K}}$.

Число различных мод колебаний (число осцилляторов) равно

$$dN_{\omega} = dN_{\mathbf{K}} = p \frac{dV_{\mathbf{K}}}{\Delta_{\mathbf{K}}},$$

где $p = (1, 2, 3)$ — число возможных поляризаций фононов (нормальных колебаний), $dV_{\mathbf{K}} = (2dK, 2\pi K dK, 4\pi K^2 dK)$ — элементарный объем K -пространства в одно-, двух- и трехмерном случаях; $\Delta_{\mathbf{K}}$ — объем K -пространства, приходящийся на одно состояние фонона. Очевидно, что

$$\Delta_{\mathbf{K}} = \frac{(2\pi)^2}{V_n},$$

где $n = (1, 2, 3)$ — размерность пространства.

Таким образом, число различных мод колебаний

$$dN_{\omega} = p \frac{V dV_{\mathbf{K}}}{(2\pi)^n}.$$

Рассмотрим для определенности двумерный кристалл. Полагая, что частота фонона $\omega = sK$, получим $dV_{\mathbf{K}} = \frac{2\pi\omega d\omega}{s^2}$ ($p = 1$). Пусть «объем» двумерного кристалла, т. е. площадь $L^2 = S$. Тогда $dN_{\omega} = \frac{S\omega d\omega}{2\pi s^2}$ и внутренняя энергия кристалла

$$U(T) = \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \frac{S\omega d\omega}{2\pi s^2} [\text{эрг/см}^2].$$

В нашем случае низких температур будем использовать модель Дебая. Тогда максимальной частотой будет ω_D . При низких температурах $k_B T \ll \hbar\omega_D$ и заполнены состояния с частотами $\omega \ll \omega_D$. Поэтому из-за быстрого спада подынтегральной функции при больших ω интегрирование в пределах от 0 до ω_D можно заменить на интегрирование от 0 до ∞ . Кроме того, делаем замену переменных $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$. Тогда

$$U(T) = \frac{\hbar}{\pi s^2} \frac{S}{2} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \propto T^3.$$

Таким образом, теплоемкость двумерного кристалла $C_2(T) = \frac{dU}{dT} \propto T^2$.

Получим выражения для дебаевской частоты и дебаевской температуры:

$$\omega_{D2} = s \left(4\pi \frac{N}{S} \right)^{1/2}; \quad \theta_2 = \frac{\hbar s}{k_B} \left(4\pi \frac{N}{S} \right)^{1/2}.$$

Тогда внутреннюю энергию колебаний можно представить в виде

$$U(T) = Nk_B \frac{T^3}{\theta_2^3} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 4,808 Nk_B \frac{T^3}{\theta_2^3}.$$

Следовательно теплоемкость

$$C_2 = \frac{dU(T)}{dT} = 14,424 Nk_B \frac{T^2}{\theta_2^2}.$$

Аналогично в одномерном случае

$$\omega_{D1} = s\pi \frac{N}{L} \quad \text{и} \quad \theta_1 = \frac{\hbar s}{k_B} \pi \frac{N}{L} \quad (L - \text{полная длина цепочки}).$$

Энергия колебаний цепочки

$$U(T) = Nk_B \frac{T^2}{\theta_1} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} Nk_B \frac{T^2}{\theta_1},$$

а теплоемкость

$$C_1 = \frac{\pi^2}{3} Nk_B \frac{T}{\theta_1}.$$

2.33. $c_V = \frac{2\pi^2}{15} k_B \left(\frac{2}{s_l^3} + \frac{1}{s_t^3} \right) \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3$ — теплоемкость единицы объема.

2.34* $\frac{C_{\text{опт}}}{C_{\text{ак}}} \approx \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{k_B T} \right)^2 \left(\frac{\theta}{T} \right) e^{-\hbar \omega_{\text{опт}}/k_B T} \approx 2,56 \cdot 10^{-10},$

где $\frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{k_B T} = 10 \sqrt{\frac{M}{m}} = 30.$

Решение. Приведенная масса $\mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$. Поэтому оптическая ветвь имеет практически постоянную частоту $\omega_{\text{опт}} = \sqrt{2\gamma/m} \approx \text{const}$. Энергия оптических колебаний цепочки

$$\mathcal{E}_{\text{опт}} = \frac{N}{2} n(\omega_{\text{опт}}) \hbar \omega_{\text{опт}} = \frac{N}{2} \frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{\exp(\hbar \omega_{\text{опт}}/k_B T) - 1},$$

где $N/2$ — число колебательных мод в одной из ветвей одномерной решетки с двумя различными атомами.

$$C_{\text{опт}} = \frac{d\mathcal{E}}{dT} = \frac{N}{2} k_B \left(\frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp(\hbar \omega_{\text{опт}}/k_B T)}{[\exp(\hbar \omega_{\text{опт}}/k_B T) - 1]^2}.$$

Максимальная частота на акустической ветви $\omega_{\text{ак}}^{\text{max}} = \sqrt{2\gamma/M}$. Обозначим $\hbar \omega_{\text{ак}}^{\text{max}} = k_B \theta$. Отношение $\frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{k_B \theta} = \sqrt{\frac{M}{m}} = 3$, а отношение $\frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{k_B T} = 30 \gg 1$. Поэтому выражение для $C_{\text{опт}}$ можно упростить

$$C_{\text{опт}} \approx k_B \frac{N}{2} \left(\frac{\hbar \omega_{\text{опт}}}{k_B T} \right)^2 e^{-\hbar \omega_{\text{опт}}/k_B T}.$$

Теперь рассчитаем энергию акустических колебаний цепочки (см. решение задачи 2.32)

$$\mathcal{E}_{\text{ак}} = \frac{L(k_{\text{Б}}T)^2}{\pi\hbar s} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1}, \quad \text{где} \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Заметим, что в дебаевской модели вводится некая предельная частота ω_{D} звуковой аппроксимации реального спектра. Ей соответствует дебаевская температура θ_{D} . Выразим скорость звука через дебаевскую температуру θ_{D} , полагая в соответствии с условием задачи $\theta_{\text{D}} \approx \theta$, введенной выше:

$$\hbar\omega_{\text{D}} = \hbar s K_{\text{D}} = \hbar s \frac{\pi}{2a} = k_{\text{Б}}\theta_{\text{D}}, \quad \text{откуда} \quad s = \frac{k_{\text{Б}}\theta_{\text{D}}2a}{\pi\hbar} \approx \frac{k_{\text{Б}}\theta2a}{\pi\hbar}.$$

Кроме того, длина цепочки $L = Na$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\text{ак}} \approx \frac{\pi^2 N k_{\text{Б}} T^2}{12\theta} \quad \text{и} \quad C_{\text{ак}} \approx \frac{\pi^2 N k_{\text{Б}}}{6} \left(\frac{T}{\theta} \right).$$

Искомое отношение теплоемкостей

$$\frac{C_{\text{опт}}}{C_{\text{ак}}} \approx \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{\hbar\omega_{\text{опт}}}{k_{\text{Б}}T} \right)^2 \left(\frac{\theta}{T} \right) e^{-\hbar\omega_{\text{опт}}/k_{\text{Б}}T} \approx 2,56 \cdot 10^{-10}.$$

$$2.35. \quad \frac{C_{\text{Be}}}{C_{\text{Cu}}} \approx \frac{4\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_{\text{Be}}} \right)^3 \frac{\rho_{\text{Be}} A_{\text{Cu}}}{\rho_{\text{Cu}} A_{\text{Be}}} \approx 2,2.$$

2.36. Полагая, что при $T \ll \theta$ теплоемкость металла имеет вид $C(T) = aT + bT^3$, определим b . Тогда $\theta = \sqrt[3]{\frac{234R}{b}} \approx 195 \text{ К}$.

$$2.37. \quad s = \frac{k_{\text{Б}}T}{\hbar} \left(\frac{2\pi^2 k_{\text{Б}}}{5c} \right)^{1/3} \approx 2,7 \cdot 10^5 \text{ см/с}; \quad \theta = \frac{\hbar s}{k_{\text{Б}}a} (6\pi^2)^{1/3} = 286 \text{ К}.$$

$$2.38. \quad 1) \quad T = T_0 \left[1 + \frac{5\mu gh}{3\pi^4 R T_0} \left(\frac{\theta}{T_0} \right)^3 \right]^{1/4} = 4,86 \text{ К}, \quad \Delta T = 0,66 \text{ К};$$

$$2) \quad \Delta T = \frac{\mu gh}{3R} = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ К}.$$

$$2.39. \quad \tau = \frac{78k_{\text{Б}}nRa}{\sigma\theta^3} \left(\frac{T_0}{T_c} \right)^4 \approx 0,038 \text{ с}.$$

$$2.40. \quad \frac{m(\text{Si})}{m(\text{Pb})} = \frac{A_{\text{Pb}}}{A_{\text{Si}}} \left(\frac{\theta_{\text{Pb}}}{\theta_{\text{Si}}} \right)^3 = 0,032.$$

$$2.41. \quad V = \frac{3\pi^4 RM}{5A_{\text{Fe}}\theta^3 q} (T_1^4 - T_2^4) \approx 1,1 \text{ л}.$$

$$2.42. \quad \frac{\theta_{\text{Si}}}{\theta_{\text{Ge}}} = \sqrt{\frac{A_{\text{Ge}}}{A_{\text{Si}}}} \approx 1,6. \quad \text{По табличным данным} \quad \frac{\theta_{\text{Si}}}{\theta_{\text{Ge}}} = \frac{645}{373} \approx 1,73.$$

$$2.43. \quad \Delta T = \frac{\varepsilon}{3k_{\text{Б}}} \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_{\text{Б}}T_1}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_{\text{Б}}T_2}\right) \right] = 0,26 \text{ К}.$$

$$2.44. \quad S = R \ln(2I + 1), \quad S_{\text{He}} = R \ln 2, \quad S_{\text{Ar}} = 2R \ln 2.$$

Энтропия полностью упорядоченного состояния принята равной нулю.

$$2.45. T = T_{\text{He}} \left[\frac{(s_r s_l^3)}{s_{\text{He}} (2s_r^2 + s_l^3)} \right]^{1/4} \approx 5,62 \text{ К.}$$

2.46. $L \leq \frac{\pi}{(6\pi^2)^{1/3}} \frac{\theta}{T} \left(\frac{4\mu}{\rho N_A} \right)^{1/3} \approx 0,125 \text{ мкм.}$ Качественная оценка: энергетический интервал между соседними модами должен быть больше тепловой энергии, т. е. $\hbar \Delta \omega = \hbar s \Delta K \approx \hbar s \frac{1}{L} > k_B T$, т. к. $k_B \theta \approx \frac{\hbar s}{a}$, то $L < a \frac{\theta}{T}$.

2.47*: $\frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = \frac{\Delta u_{\text{класт}}}{\Delta u_{\text{тела}}} = 0,13$. Полагая L достаточно большим числом и заменяя суммирование интегрированием, получим $\frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = 0,22$.

Решение. При нулевых граничных условиях (закрепленная граница, т. е. амплитуда колебаний на границе равна нулю) смещение U может быть записано в виде

$$U = A e^{i\omega_n t} \sin \frac{\pi x}{L} n_x \cdot \sin \frac{\pi y}{L} n_y \cdot \sin \frac{\pi z}{L} n_z,$$

а частота n -го колебания ω_n равна

$$\omega_n^2 = \left(\frac{\pi s}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Числа n_x, n_y, n_z принимают все целочисленные значения ≥ 1 . Энергия колебаний

$$\mathcal{E} = 3 \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{\hbar \omega_n}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_n}{k_B T}\right) - 1},$$

где коэффициент «3» — это три независимые поляризации. При больших L сумма может быть заменена интегралом

$$\mathcal{E}(T) = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\omega \mathcal{D}(\omega) n(\omega, T) \hbar \omega, \text{ где } \mathcal{D}(\omega) = \frac{3}{2} \frac{V \omega^2}{\pi^2 s^3},$$

откуда энергия единицы объема кластера

$$u_{\text{класт}}(T) = \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\pi^2 s^3} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} = \frac{3}{2} \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Здесь $\omega_{\max} = \frac{\pi s}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)_{\max} \approx \frac{\pi s}{L} N$, $L = Na$. Точное значение коэффициента при низких температурах несущественно.

С другой стороны,

$$\omega_{\min} = \frac{\pi s}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)_{\min} = \begin{cases} 0 & \text{при } L \rightarrow 0, \\ \frac{\pi s}{L} \sqrt{3} & \text{при } L < \infty. \end{cases}$$

Кроме того, в интеграле была сделана стандартная замена переменных

$$x_{\max} = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T} = \frac{\pi s \hbar}{a k_B T} = \frac{\theta}{T}; \quad x_{\min} = \frac{\hbar\omega_{\min}}{k_B T} = \frac{\pi s \sqrt{3}}{10 a k_B T} = \frac{\theta}{T} \frac{\sqrt{3}}{10},$$

Таким образом, энергия единицы объема кластера

$$u_{\text{класт}} = \frac{3}{2} \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_{\frac{\theta}{T} \frac{\sqrt{3}}{10}}^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагрева единицы объема кластера

$$Q_{\text{класт}} = \Delta u_{\text{класт}} = u_{\text{класт}} \left(\frac{\theta}{30} \right) - u_{\text{класт}}(0) = \frac{3}{2} \frac{\left(k_B \frac{\theta}{30} \right)^4}{\pi^2 \hbar^3 s^3} \int_{\frac{\theta}{30}}^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Для единицы объема большого тела

$$\Delta u_{\text{тела}} = \frac{3}{2\pi^2 \hbar^3 s^3} \left(\frac{k_B \theta}{30} \right)^4 \int_0^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad \text{и тогда} \quad \frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = \frac{\Delta u_{\text{класт}}}{\Delta u_{\text{тела}}} = \frac{\int_{\frac{\theta}{30}}^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}{\int_0^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}.$$

В этих интегралах верхний предел можно заменить на бесконечность, а поскольку $e^{3\sqrt{3}} \simeq 180 \gg 1$, то

$$\int_{\frac{\theta}{30}}^{30} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \approx \int_{\frac{\theta}{30}}^{\infty} e^{-x} x^3 dx = 1,43; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6,5.$$

$$\text{Отсюда} \quad \frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = \frac{1,43}{6,5} = 0,22.$$

Если же непосредственно подсчитать сумму всех возможных колебаний, то ограничиваясь числами (n_x, n_y, n_z) : $(1, 1, 1)$; $(1, 1, 2)$; $(1, 2, 1)$; $(2, 1, 1)$; $(2, 2, 1)$; $(2, 1, 2)$; $(1, 2, 2)$; $(1, 1, 3)$; $(1, 3, 1)$; $(3, 1, 1)$ и $(2, 2, 2)$, получаем $\frac{Q_{\text{класт}}}{Q_{\text{тела}}} = 0,13$.

$$2.48^* \quad T = \left(\frac{\rho l^2}{a k_B^4} \frac{40 \hbar^3 s^2}{\pi^2} \right)^{1/4} = \left[\frac{2}{3} \frac{\rho l^2}{a \sigma} \left(\frac{s}{c} \right)^2 \right]^{1/4} \approx 1,04 \text{ К, где } c \text{ — скорость}$$

света, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Решение. Сопротивление пленки (рис. 216)

$$R = \rho \frac{b}{ad}.$$

Мощность, выделяемая при пропускании тока \mathcal{I}

$$W = R \mathcal{I}^2 = \rho \frac{b}{ad} \mathcal{I}^2.$$

Поскольку в условии задачи задана линейная плотность тока $i = \mathcal{I}/d$, то

$$W = \frac{\rho b d}{a} i^2.$$

Мощность, выделяемая в пленке, на единицу площади поверхности раздела ($S = bd$)

$$W_0 = \frac{W}{S} = \frac{\rho i^2}{a}.$$

Эта мощность по условию задачи уходит целиком в кристалл, порождая в нем поток фононов. Плотность потока фононов $j(T)$ связана с плотностью энергии фононов $u(T)$ соотношением

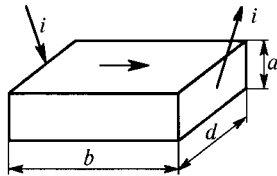


Рис. 216

$$j(T) = \frac{u(T)s}{4}, \text{ где}$$

$$u(T) = \frac{U(T)}{V} = \frac{1}{V} \int_0^{\omega_{\max}} \hbar \omega n(\omega) dN(\omega) =$$

$$= \frac{1}{V} 3 \frac{V \hbar}{(2\pi)^3} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega 4\pi}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \frac{\omega^2 d\omega}{s^3} = \frac{3}{2\pi^2} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 s^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{10} \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 s^3}.$$

Приравнявая выделяемую мощность W_0 , уносимую фононами, к мощности $j(T)$, получим

$$T^4 = \frac{\rho i^2}{a k_B^4} \frac{40 \hbar^3 s^2}{\pi^2},$$

откуда и следует ответ.

Однако можно поступить гораздо проще, записав плотность потока фононов (уносимую мощность) в виде

$$j(T) = \sigma_s T^4.$$

Это аналог закона Стефана—Больцмана, где под σ_s — понимается фононная константа Стефана—Больцмана, полученная из фотонной константы σ следующим образом:

$$\sigma_s = \frac{3}{2} \left(\frac{c}{s} \right)^2 \sigma = 8,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

Коэффициент $3/2$ введен потому, что у фононов 3 состояния поляризации (2 поперечных и одно продольное), а не 2, как у фотонов. Кроме того, в выражении для константы Стефана—Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 s^2 \hbar^3} = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4}$$

следует заменить скорость света c на среднюю скорость звука s . Далее легко получить ответ:

$$T^4 = \frac{\rho i^2}{a \sigma_s}, \text{ где } \sigma_s = \frac{\pi^2 k_B^4}{40 s^2 \hbar^3}.$$

$$2.49. T = \left[\frac{40 W \hbar \theta^2}{\pi^2 k_B^4 d (6\pi^2 n)^{2/3}} \right]^{1/4} \approx 3,7 \text{ К}.$$

$$2.50. \Delta x < \frac{3\pi^4 c_p R (T_2^4 - T_1^4)}{5 A_{Cu} j B \theta^3} \approx 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

$$2.51. T_2 = \left[T_1^4 + \frac{5\sigma^2 \theta^3 \delta A_{Cu}}{3\pi^4 \rho E R} \right]^{1/4} \approx 7,5 \text{ К, } \Delta T \approx 3,3 \text{ К.}$$

$$2.52. U(T) \propto \left(\frac{k_B T}{\hbar A} \right)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} \propto T^{5/2}, \text{ откуда } C = \frac{dU(T)}{dT} \propto T^{3/2}.$$

$$2.53. \frac{C_{\text{магн}}}{C_{\text{фон}}} = \frac{2}{3} \left(\frac{s}{v} \right)^3 \approx 3,1.$$

$$2.54. u(T) = aT^{7/3}, \quad c(T) = \frac{7}{3} aT^{4/3}, \text{ где } a = \text{const.}$$

$$2.55. c = \frac{2\pi^2 k_B}{15} \left(\frac{k_B T}{\hbar s} \right)^3 \approx 30 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}}.$$

$$2.56. v = \frac{p}{m} = \pm \frac{\varepsilon_0}{\hbar K_0} + \frac{\hbar K_0}{2m} \approx \begin{cases} 2 \cdot 10^4 \text{ см/с,} & - \text{ соответствует поглощению} \\ 4 \cdot 10^4 \text{ см/с,} & + \text{ соответствует испусканию,} \end{cases}$$

$K_0 = 10^8 \text{ см}^{-1}, \varepsilon \approx 15 \text{ К}$ (см. график в условии, рис. 68).

2.57. $c \approx 40 \text{ эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{К})$, для ее подсчета следует воспользоваться формулой (см. ответ задачи 2.55), для требуется вычислить скорость звука. Скорость звука легко определить по графику, приведенному в условии задачи,

$$s = \frac{d\varepsilon}{d(\hbar K)} \approx 210 \text{ м/с; (в действительности } s = 240 \text{ м/с)} \quad \varepsilon_m = 1,6 k_B T = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ эВ; } \frac{n(\varepsilon_m/3)}{n(\varepsilon_m)} = 0,62; \quad \frac{n(3\varepsilon_m)}{\varepsilon_m} = 0,30.$$

$$2.58. S_{\text{уд}} = \frac{2\pi^2 k_B^4 T^3}{45 \rho \hbar^3 s^3} \approx 8,88 \cdot 10^3 \text{ эрг}/(\text{К} \cdot \text{г}).$$

$$2.59. \Phi = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{c}{s} \right)^2 (T_2^4 - T_1^4) A \approx 0,163 \cdot 10^5 \text{ эрг/с.}$$

2.60* $\Omega = 2kns \sin \frac{\theta}{2}$, где $\hbar\Omega$ — энергия фонона, s — его скорость, n — показатель преломления жидкости, $\hbar k = \hbar\omega/c$ — импульс падающего фотона, θ — угол между направлениями движения падающего и рассеянного фотонов.

Решение. Рэлеевское рассеяние света можно рассматривать как процесс поглощения или излучения фонона фотоном. Запишем законы сохранения энергии и импульса, обозначив штрихованными величинами состояние фотона после рассеяния, нештрихованными — до рассеяния, а также угол между направлениями падающего и рассеянного фотона θ , а угол между направлениями движения падающего фотона и соответствующего фонона — α .

$$\begin{cases} \hbar\omega' = \hbar\omega \pm \hbar\Omega; \\ n\hbar k' \cos \theta = n\hbar k \pm \hbar K \cos \alpha; \\ n\hbar k' \sin \theta = \pm \hbar K \sin \alpha. \end{cases}$$

Здесь ω и \mathbf{k} — частота и волновой вектор фотона, Ω и \mathbf{K} — частота и волновой вектор фонона, n — показатель преломления жидкости. Знак плюс от-

носится к поглощению, а знак минус — к излучению фонона. Полагая далее, что импульс фонона $\hbar K = \hbar\Omega/s$, исключим из системы уравнений угол α и волновое число k' . Тогда получим квадратное уравнение относительно Ω

$$\left(\frac{1}{s^2} - \frac{n^2}{c^2}\right)\Omega^2 \mp \frac{4n^2\omega\Omega}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{4n^2\omega^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0.$$

Так как $\omega \gg \Omega$ и $\frac{c}{n} \gg s$, то, отбрасывая свободный член, получаем

$$\Omega = 2kns \sin \frac{\theta}{2}.$$

2.61. Максимум соответствует рассеянию света на 180° . При этом $\Omega = \frac{2kns}{1+s/c} \approx \frac{4\pi ns}{\lambda} \approx 7,1 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$.

2.62. $\Omega = \frac{4\pi ns}{\lambda} \sin \frac{\pi}{4} \approx 2,8 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ или $\nu \approx 4,46 \cdot 10^9 \text{ Гц}$. Разрешающая способность $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{2\pi c}{\lambda\Omega} \approx 10^5$.

2.63. Доплеровский сдвиг частоты рассеянного света определяется соотношением $\Delta\nu = 2\nu \frac{s}{c/n} \sin \frac{\theta}{2}$, которое может быть получено или из рассмотрения брэгговского рассеяния на движущейся решетке или излучения (поглощения) фонона фотоном. Здесь θ — угол рассеяния. Из условия разрешения $R = mN \geq \nu/\Delta\nu$ при $m = 1$ получим $N \geq \frac{c}{2sn \sin(\theta/2)} \approx 1,1 \cdot 10^5$.

2.64. $\kappa = \frac{2\pi^2}{15} k_B^4 \frac{T^3}{s^2 \hbar^3} \Lambda \approx 1,2 \cdot 10^{11} \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{К}}$, где $\Lambda \approx \frac{1}{n\sigma}$ — длина свободного пробега фонона; $d \approx \Lambda \approx 1 \text{ см}$.

$$\mathbf{2.65.} \quad \left(\frac{\kappa}{T^3}\right)_2 = 4 \left(\frac{\kappa}{T^3}\right)_1 = 90 \frac{\text{мВт}}{\text{см} \cdot \text{К}^4}.$$

$$\mathbf{2.66.} \quad \frac{\Lambda(100)}{\Lambda(50)} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{2.67.} \quad \kappa(0,3 \text{ К}) = 0,025 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К}).$$

$$\mathbf{2.68.} \quad \kappa \approx 2,7 \cdot 10^4 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}).$$

$$\mathbf{2.69*} \quad \kappa(80 \text{ К}) \approx 10 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}). \text{ При этом } \frac{\kappa(80)}{\kappa(30)} = 37,5 \cdot 10^{-5}.$$

Решение. Тепловое сопротивление в диэлектрическом кристалле возникает за счет процессов переброса, когда взаимодействие двух фононов приводит к рождению третьего фонона с волновым вектором $K \geq \pi/(2a)$ (этот вектор принадлежит второй зоне Бриллюэна). Поэтому процессы переброса могут происходить только с фононами, у которых энергия во всяком случае $\sim k_B\theta/2$. Вероятность возбуждения таких фононов при температуре T пропорциональна больцмановскому фактору $\exp(-k_B\theta/2k_B T) = \exp(-\theta/2T)$. Температурная зависимость теплопроводности определяется произведением двух факторов — теплоемкости (она растет по дебаевскому закону при низких температурах как T^3 , а при высоких выходит на константу) и вероятности процессов переброса. Таким образом, формируется максимум в теплопроводности совершенных диэлектрических кри-

сталлов. За этим максимумом, при температурах порядка дебаевской, все определяется вероятностью процессов переброса — в этом диапазоне «теплоспротивление» экспоненциально растет с температурой, а теплопроводность — экспоненциально уменьшается.

При высоких температурах ($T > \theta$) практически все фононы дебаевские, то есть могут приводить к процессам переброса, а, значит, вероятность этих процессов будет пропорциональна их полному числу. Это приводит к линейной зависимости теплоспротивления от температуры, так как тепловая энергия $3Nk_B T \approx n\hbar\omega_D$ (здесь N , n соответственно число атомов в решетке и число фононов).

2.70* Решение. В исходном состоянии I (в отсутствии сдвига) решетка находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 217). А в состоянии II — в состоянии неустойчивого равновесия. На рис. 217 показана плоскость атомов B, сдвинутая относительно плоскости атомов A. В силу трансляционной инвариантности зависимость $U_{\text{пот}}(x)$ в идеальном кристалле должна быть периодичной с периодом a . Простейший вид такой зависимости

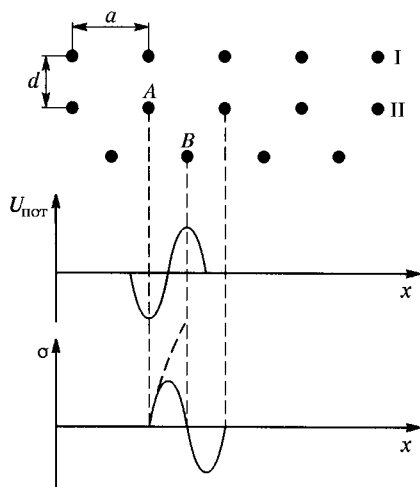


Рис. 217

$$U_{\text{пот}}(x) = -U_0 \cos \frac{2\pi x}{a}.$$

В реальном кристалле этот член может рассматриваться как первый член разложения $U_{\text{пот}}(x)$.

Поскольку $\sigma \approx \frac{dU_{\text{пот}}(x)}{dx}$, то можно записать

$$\sigma = \frac{Ga}{2\pi d} \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

Действительно, при $x \ll a$ получаем $\sigma = G \frac{x}{d}$ — закон Гука. Критическое скалывающее напряжение, при котором решетка становится неустойчивой, соответствует максимуму σ , т. е.

$$\sigma_c = \frac{Ga}{2\pi d} \approx \frac{G}{2\pi} \approx \frac{G}{6}.$$

Здесь использовался случай, когда $a \approx d$, т. е. когда сдвиг происходит в базовых плоскостях.

Заметим, что экспериментальные значения отношения σ_c/G даже для самых прочных материалов (сталь) едва достигает 10% от этой оценки, т. е. на порядок меньше. Это объясняется модельностью задачи и неучетом дефектов, имеющихся в реальных кристаллах.

2.71. $\frac{\langle x_{\text{ак}}^2 \rangle}{\langle x_{\text{опт}}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{m}{M}} \approx 0,37$, где $m = 16$ а. е. м., $M = 119$ а. е. м.

$$2.72. \frac{u_{100}}{u_1} = e^{iK_2 a} = e^{-8,94} = 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

Решение. В длинной цепочке смещение n -го атома описывается в виде $u_n = A \exp [i(Kna - \omega t)]$, где K , ω — волновой вектор и частота волны, a — межатомное расстояние. При этом K и ω удовлетворяют дисперсионному уравнению $\omega(K) = \omega_0 \sin(Ka/2)$.

Поскольку частота вынужденных колебаний задана, то для определения волнового вектора получаем уравнение

$$\sin \frac{Ka}{2} = 1,001.$$

Обозначая $\exp(iKa/2) = Z$, получаем уравнение

$$Z^2 - 2,002iZ - 1 = 0, \text{ откуда}$$

$Z_1 \approx 1,0457 i$, $Z_2 \approx 0,9563 i$. Таким образом, вычислением получаем $K_1 a = \pi - i 0,0447$; $K_2 a = \pi + i 0,0894$. Первый корень не подходит, т. к. $\text{Im } K_1 a < 0$, что соответствует нарастающему решению. Следовательно, от-

ношение амплитуд $\frac{u_{100}}{u_1} = \exp(iK_2 a) = e^{-8,94} = 1,3 \cdot 10^{-4}$.

$$2.73. t = 1,8 \text{ с}; Q = 3 \frac{\rho N_A}{A} k_B 4\pi R^2 d \cdot \Delta T = 2,92 \cdot 10^{12} \text{ эрг}; \frac{Q_{\text{изл}}}{Q} = \frac{16\sigma T^3 V_{\text{ш}} \Delta T}{cQ} = 0,43 \cdot 10^{-9}.$$

$$2.74. \sqrt{A^2} = \frac{3(k_B \theta)^2}{4\pi^2 s^3 \rho \hbar} = 0,059 \text{ \AA}.$$

Поскольку нормальное колебание представляет собой совокупность колебаний всех атомов кристалла с одной и той же частотой, то верно и обратное: в смещение каждого атома вносят свой вклад все нормальные колебания кристалла. Поэтому энергия кристалла, равная сумме энергий всех колеблющихся атомов, равна сумме энергий всех нормальных колебаний.

Пусть у нас возбуждено одно нормальное колебание заданной поляризации с волновым вектором \mathbf{K} . Так как амплитуды колебаний всех атомов одинаковы, то средняя энергия кристалла для этого нормального колебания

$$\mathcal{E}_K = \sum_{i=1}^N \frac{m\omega_K^2 A_K^2}{2} = \frac{M\omega_K^2 A_K^2}{2} = \hbar\omega_K \left(n_K + \frac{1}{2} \right),$$

где m и M — массы атома и кристалла, n_K — среднее число фононов. Т. к. нормальное колебание эквивалентно осциллятору с частотой ω_K , то мы приравняли классическое выражение для энергии колеблющихся атомов в нормальной моде к энергии квантового осциллятора. Из написанного выражения следует, что

$$A_K^2 = \frac{\hbar^2}{M\omega_K} \left(n_K + \frac{1}{2} \right).$$

Это выражение надо просуммировать по всем нормальным колебаниям с учетом трех возможных поляризаций нормального колебания (одного продольного и двух поперечных). Таким образом,

$$\overline{A^2} = 3 \sum_K A_K^2 = 3 \sum_K \frac{\hbar}{M\omega_K} \left(n_K + \frac{1}{2} \right).$$

Для нулевых колебаний $n_K = 0$. Так как число нормальных мод велико, то суммирование может быть заменено интегрированием, откуда и следует ответ.

Приведенные в условии данные относятся к вольфраму. Ребро элементарного куба (постоянная решетки) ОЦК решетки вольфрама равно $3,16 \text{ \AA}$. Поэтому амплитуда нулевых колебаний составляет около 2% от постоянной решетки.

$$2.75. L_{\min} = 2a \exp \left(\frac{\pi a m s \alpha}{\hbar} \right) = 280 \text{ см.}$$

$$2.76. L_{\min} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \exp \left(\frac{\pi A m_p s^2 \alpha}{2k_B T} \right) = 2,36 \text{ см.}$$

Решение. Поскольку $\hbar\omega_D = \hbar s K_D = 2\sqrt{\pi} \hbar s / a \approx 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$, а $k_B T = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$, то для всех мод средние числа фононов n_K велики (даже для дебаевских фононов $n_K \approx k_B T / \hbar\omega_D = 4 \gg 1$). Амплитуда колебаний K -й моды находится из условия $M\omega_K^2 A_K^2 / 2 = 2n_K \hbar\omega_K$. (см. задачу 2.74) Суммируя по всем нормальным модам колебаний, получаем

$$\langle A^2 \rangle = \sum_K A_K^2 = \int 2 \frac{2n_K \hbar}{M\omega_K} dN_K = 2 \frac{2S}{(2\pi)^2} k_B T \int \frac{2\pi K dK}{M\omega_K^2}.$$

Здесь $dN_K = 1 \cdot \frac{S 2\pi K dK}{(2\pi)^2} = \frac{L^2}{2\pi} K dK$ — число осцилляторов поля на интер-

вале dK , $S = L \times L$ — площадь кристалла, $N = \frac{S}{a^2}$ — полное число атомов.

Верхний предел интегрирования K_D найдем из условия

$$N = 1 \frac{S \pi K_D^2}{(2\pi)^2}, \text{ откуда } K_D = \frac{2\sqrt{\pi}}{a}.$$

Нижний предел нужно взять равным минимально возможному значению волнового вектора в двумерном кристалле для нулевых граничных условий (закрепленных границ кристалла), т. е. $K_{\min} = \frac{\sqrt{2}\pi}{L}$ (См. задачу 2.47)

Таким образом,

$$\langle A^2 \rangle \approx \frac{L^2}{(2\pi)^2} k_B T \int_{\frac{\sqrt{2}\pi/L}{\sqrt{2\pi/L}}}^{\frac{2\sqrt{\pi}/a}{\sqrt{2\pi/L}}} \frac{4 \cdot 2\pi}{M s^2} \frac{K dK}{K^2} = \frac{2a^2 k_B T}{\pi m s^2} \int_{\frac{\sqrt{2}\pi/L}{\sqrt{2\pi/L}}}^{\frac{2\sqrt{\pi}/a}{\sqrt{2\pi/L}}} \frac{dK}{K} = \frac{2a^2 k_B T}{\pi m s^2} \ln \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{L}{a} \right),$$

поскольку $M = Nm = (L/a)^2 m$. Минимальное значение длины цепочки находится из условия $\langle A^2 \rangle = aa^2$, откуда

$$L_{\min} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \exp \left(\frac{\pi A m_p s^2 \alpha}{2k_B T} \right).$$

Подставив числовые значения, получим $L_{\min} = 6,27 \cdot 10^{-8} \cdot e^{17,44} = 2,36 \text{ см}$.

$$2.77. L \simeq \frac{\hbar \pi s}{2\mu_B B} = 0,57 \text{ нм}.$$

$$2.78. \frac{\theta_2}{\theta_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/2} = 3.$$

Решение. Наложение внешнего давления приводит к появлению линейного потенциала $U_{\text{вн}} \propto x$. Новое положение равновесия определяется минимумом суммарного потенциала, $U = U_{\text{вн}} + U_{\text{отт}}$, а жесткость кристалла определяется второй производной этого потенциала. Поэтому жесткость определяется только отталкивательной частью потенциала:

$$\gamma = \frac{d^2 U_{\text{отт}}}{dx^2}.$$

Давление внутри кристалла $P = -\frac{dU}{dV} = -\frac{dU_{\text{отт}}}{dx^3}$ и равно внешнему давлению. Таким образом,

$$P \propto x^{-(\beta+3)}.$$

Дебаевская температура:

$$\theta \propto \omega_D \propto \sqrt{\frac{\gamma}{M}} \propto \gamma^{1/2}.$$

Жесткость кристалла:

$$\gamma \propto \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \propto x^{-\beta-2}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\theta \propto x^{\frac{\beta+2}{2(\beta+3)}}.$$

При $\beta \gg 1$ получаем $\theta \propto P^{1/2}$, и соответственно

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/2} = 3.$$

§ 3. Электроны в металлах. Ферми-частицы

$$3.1. \Delta E = \frac{\hbar^2}{ma^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} d\right) \approx 1 \text{ эВ}.$$

Решение. Ширина зоны $\Delta \mathcal{E} \approx \hbar \omega D'$, где $\omega \approx v/a \approx \hbar/ma^2$ — квазиклассическая частота колебаний электрона в яме. Что касается коэффициента туннелирования D' , то он связан с коэффициентом туннелирования через барьер соотношением $D' = \sqrt{D} = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \sqrt{2mU_0} d\right)$. Дело в том, что поскольку электрон находится в состоянии суперпозиции атомных волновых функций, то для попадания в соседнюю яму (расположенную на расстоянии

d) электрону надо «пройти» только половину пути под барьером. Т. о.

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{ma^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar} d\right) \approx 1 \text{ эВ.}$$

$$3.2^* p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3} \approx 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}; v_F = \frac{p_F}{m^*} \approx 2,1 \cdot 10^8 \text{ см/с};$$

$$\epsilon_F \approx 9,7 \text{ эВ.}$$

Решение. Число возможных состояний для электронов, имеющих импульс от p до $p + dp$ определяется по общей формуле

$$dN(p) = 2V \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

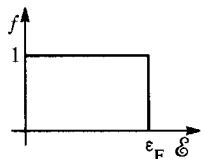


Рис. 218

где коэффициент «2» — число состояний на каждом из энергетических уровней (спиновое вырождение), а V — объем металла. При $T = 0 \text{ К}$ заняты все возможные состояния электрона вплоть до граничного импульса p_F поскольку вероятность f занять состояние с энергией ϵ равна единице для всех ϵ вплоть до энергии Ферми

(рис. 218). В импульсном пространстве заняты все состояния вплоть до импульса Ферми p_F . Таким образом, полное число состояний в единице объема

$$\frac{N}{V} = \int_0^{p_F} dN(p) = \frac{4\pi}{3} p_F^3 \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \text{ и } p_F = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3},$$

откуда и получается ответ.

$$3.3. \bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_F, \text{ где } \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}.$$

$$3.4. \bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(3\pi^2 \frac{3^{3/2}}{4d^3}\right)^{2/3} \approx 1,9 \text{ эВ.}$$

$$3.5. \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \approx 5 \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2 \approx 1,3 \cdot 10^{-4}, \text{ где } T = 300 \text{ К.}$$

$$3.6. \bar{\lambda} = \frac{3}{2} \lambda_F \approx 3a, \text{ где } \lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} \approx 2a.$$

$$3.7^* p_F \approx 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с.}$$

Решение. Скорость позитрона перед аннигиляцией является тепловой и ею можно пренебречь по сравнению со скоростями электронов, которые порядка фермиевской скорости. Следовательно,

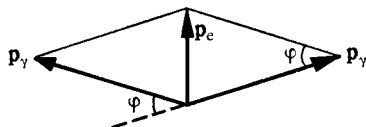


Рис. 219

но, до столкновения суммарный импульс системы равен импульсу электрона p_F . Как видно из рис. 219,

$$p_e = 2p_\gamma \sin \frac{\varphi}{2} \approx p_\gamma \varphi,$$

где p_γ — импульсы фотонов (аннигиляционных γ -квантов). Энергия, выделяющаяся при аннигиляции электрон-позитронной пары, в расчете на один γ -квант равна $mc^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}$, где m — масса электрона. Это намного пре-

вышает фермиевскую энергию электрона $\epsilon_F \leq 10$ эВ. Таким образом, импульс каждого γ -кванта практически равен mc . Так как $mc \gg p_F$, то угол между разлетающимися γ -квантами близок к π . Отклонение φ от этого угла тем больше, чем больше импульс аннигилирующего электрона. Так как $p_e \leq p_F$, то максимальное отклонение угла разлета от 180° соответствует случаю $p_e = p_F$ и тем самым

$$p_F \approx mc\varphi = 0,96 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с} \approx 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

$$3.8^* \quad \varphi \sim \frac{T}{\theta} \ll 1 \text{ рад.}$$

Решение. При температуре $T \ll \theta$ наибольшую роль в процессах рассеяния играют фононы с энергией $\hbar\omega \approx k_B T$. В этой области $\omega = sK$, где K — волновое число фонона, а s — скорость звука. Импульс фонона $p_{\text{фон}} = \hbar K = \hbar\omega/s$. Импульс электрона $p_{\text{эл}} \approx p_F$. Угол рассеяния

$$\varphi \approx \frac{p_{\text{фон}}}{p_{\text{эл}}} \approx \frac{\hbar\omega}{sp_F} \approx \frac{k_B T}{sp_F}.$$

Фермиевский импульс $p_F = \hbar (3\pi^2 n)^{1/3} \approx \hbar (3\pi^2)^{1/3} \frac{1}{a}$, т. е. $p_F \approx \frac{\hbar\pi}{a}$. Скорость звука можно выразить через дебаевскую температуру θ :

$$k_B \theta = \hbar\omega_D = \hbar s K_D \approx \hbar \frac{\pi}{a} s = sp_F.$$

Таким образом,

$$\varphi \approx \frac{T}{\theta} \ll 1 \text{ рад.}$$

Знаки приближенных равенств берутся потому, что в качестве модели выбран одновалентный металл с простой кубической решеткой, что не оговорено в условии.

$$3.9. \quad \varphi_{\text{max}} = 2 \arcsin(2^{-2/3}) \approx 78^\circ.$$

$$3.10. \quad H_{\text{max}} = \frac{2c\hbar}{ed} (3\pi^2 n)^{1/3} \approx 180 \text{ Э.}$$

$$3.11. \quad d_{\text{max}} = \frac{2\hbar c}{eH} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{1/3} \approx 0,1 \text{ см.}$$

$$3.12. \quad \frac{U}{\epsilon_F} = \frac{2me^2}{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3} n^{1/3}} \approx 1,3.$$

Вырожденный ферми-газ тем идеальнее, чем он плотнее, так как $U \propto n^{1/3}$, $\epsilon_F \propto n^{2/3}$ и $U/\epsilon_F \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Данная задача показывает, что при реальных металлических концентрациях $U/\epsilon_F \approx 1$, т. е. электроны в металле — это скорее ферми-жидкость, а не ферми-газ! Тот факт, что модель свободных электронов дает правильные порядки и числа, есть следствие общих закономерностей квантовой механики. Отметим, что ответ можно записать так: $\frac{U}{\epsilon_F} \approx \frac{1}{5} \frac{n^{-1/3}}{r_B}$. Для «газовости» среднее расстояние между электронами должно быть меньше $r_B \approx 0,5 \text{ \AA}$. В обратном предельном случае разреженного газа $nr_B \ll 1$ электроны проводимости должны образовывать упорядоченную структуру — т. н. вигнеровский кристалл (см. задачу 3.92).

$$3.13. \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}(B)}{\mathcal{E}_{\text{кин}}(0)} = 2^{2/3} \approx 1,6.$$

$$3.14. N = \left(\frac{mv_{\text{кр}}}{\hbar} \right)^3 \frac{V}{3\pi^2} \approx 2,5 \cdot 10^{20} \text{ нейтронов.}$$

$$3.15^*: v_F = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{8} \frac{\hbar}{mr_0}} \approx \frac{3\hbar}{2mr_0} = 7,3 \cdot 10^9 \text{ см/с} \approx \frac{c}{4}, \text{ где } r_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см —}$$

коэффициент в формуле для радиуса ядра $R_{\text{я}} = r_0 A^{1/3}$.

Решение. Нуклоны как ферми-частицы заполняют уровни энергии своих потенциальных ям согласно принципу Паули: по два нуклона каждого сорта на уровень. Считая, что уровни энергии нуклонов распределены квази непрерывно и вероятность занятия состояний с $p < p_F$ равна единице, получаем для полного числа нуклонов

$$N = \int_0^{p_F} dN_p = \int_0^{p_F} 4V \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

где $V = \frac{4}{3} \pi R_{\text{яд}}^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$ — объем ядра.

Коэффициент «4» отражает тот факт, что мы пренебрегаем различием в уровнях энергий нейтронов и протонов из-за кулоновского взаимодействия, т. е. считаем их потенциальные ямы идентичными. Отсюда фермиевский импульс нуклонов

$$p_F = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{8} \frac{\hbar}{r_0}} = 1,23 \cdot 10^{-14} \text{ г}\cdot\text{см/с.}$$

Так как $mc \approx 5 \cdot 10^{-14} \text{ г}\cdot\text{см/с} > p_F$, то можно пользоваться нерелятивистским приближением $v_F = \frac{p_F}{m}$, откуда и следует ответ.

$$3.16. \text{Средняя энергия на один нуклон } \bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_F = \frac{3}{5} \frac{p_F^3}{2m} \approx 17,1 \text{ МэВ.}$$

$$3.17^*: \mathcal{E}_{\gamma}^{\text{мин}} = \Delta \epsilon = \frac{\hbar^2}{4mr_0^2} (3\pi^2)^{1/3} \approx 80 \text{ кэВ,}$$

$$\sigma \approx \pi \lambda_{\gamma}^2 = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2 = 1,9 \cdot 10^5 \text{ бн, где } \lambda_{\gamma} = \frac{\hbar c}{\mathcal{E}_{\gamma}^{\text{мин}}} = 2,47 \cdot 10^{-10} \text{ см.}$$

Решение. Возбуждение ядра состоит в поглощении γ -кванта нуклоном, находящемся на уровне с $\epsilon = \epsilon_F$ и переходе его на свободный уровень. В силу квазидискретности энергетических уровней расстояние между ними вблизи $\epsilon = \epsilon_F$

$$\Delta \epsilon = \frac{1}{\mathcal{D}(\epsilon_F)},$$

где $\mathcal{D}(\epsilon_F) = \left. \frac{dN}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_F}$ — плотность состояний или число энергетических

уровней на единичный интервал энергии вблизи энергии Ферми. В модели ферми-газа $\epsilon = BN^{2/3}$; $\ln \epsilon = \ln B + \frac{2}{3} \ln N$, откуда

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{dN}{N} \text{ и } \left. \frac{dN}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\epsilon_F} = \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_F}.$$

Используя результат, полученный в задаче 3.15, найдем

$$\mathcal{E}_{\gamma}^{\min} = \Delta\epsilon = \frac{\hbar^2}{4mAr_0^2} (3\pi^2)^{1/3} \approx 80 \text{ кэВ.}$$

Сечение фотопоглощения оценим как сечение образования составного ядра

$$\sigma = \pi(R_{\text{яд}} + \lambda_{\gamma})^2, \quad \text{где} \quad \lambda_{\gamma} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar c}{\mathcal{E}_{\gamma}^{\min}} = 2,47 \cdot 10^{-10} \text{ см;}$$

$$R_{\text{яд}} = r_0 A^{1/3} \approx 8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \ll \lambda_{\gamma}.$$

Окончательно

$$\sigma \approx \pi \lambda_{\gamma}^2 = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2 = 1,19 \cdot 10^5 \text{ бн.}$$

Аналогичную оценку для сечения можно получить, применив формулу Брейта—Вигнера для неупругого процесса.

$$\begin{aligned} 3.18. \quad U = \epsilon_F + \mathcal{E}_{\text{св}} &= \frac{p_F^2}{2m_n} + \mathcal{E}_{\text{св}} \approx 40 \text{ МэВ} \quad (\text{см. рис. 220}), \quad \text{где} \quad p_F = \\ &= \sqrt[3]{\frac{9\pi}{4} \frac{N}{A} \frac{\hbar}{r_0}} \quad (\text{см. задачу 3.15}). \end{aligned}$$

3.19* Решение. Электростатическая энергия распределения зарядов с плотностью ρ определяется как

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV.$$

В случае равномерного распределения протонов по ядру плотность заряда $\rho = \frac{Ze}{V} = \frac{Ae}{2V}$. Здесь $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$ — объем ядра. Потенциал внутри равномерно заряженного шара

$$\varphi = \frac{Ze}{2R^2} (3R^2 - r^2).$$

Поэтому интегрированием легко определить

$$U_{\text{равн}} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}.$$

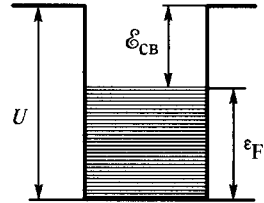


Рис. 220

При неравномерном распределении протонов радиус нейтронной сердцевины находится из условия $V_{\text{нейтр}} = V/2$ или $R_{\text{нейтр}}^3 = R^3/2$, и мы имеем заряженный сферический слой с плотностью $\rho_0 = \frac{Ze}{V_{\text{прот}}} = \frac{Ze}{V/2} = 2\rho$. Потенциал внутри этого слоя

$$\varphi_0(r) = 3 \frac{Ze}{R} - \frac{Ze}{R^3} r^2 - \frac{Ze}{r}.$$

Соответственно электростатическая энергия

$$U_{\text{неравн}} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} (6 \cdot 2^{-5/3} - 1).$$

Таким образом, выигрыш в кулоновской энергии

$$U_{\text{равн}} - U_{\text{неравн}} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R} 6 \cdot 2^{-5/3} = \frac{18}{5} \cdot 2^{-5/3} \frac{(Ae)^2}{4R} = 0,075 A^{-5/3} \text{ МэВ.}$$

При равномерном распределении протонов в ядре импульс Ферми определяется из условия

$$A = 4 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4}{3} \pi p_F^3, \quad \text{откуда} \quad p_F = 2\pi\hbar \left(\frac{3A}{16\pi V} \right)^{1/3}.$$

Кинетическая энергия ядра при этом

$$\mathcal{E}_k^{\text{равн}} = \frac{3}{5} A \epsilon_F = \frac{3}{5} A \frac{p_F^2}{2m}.$$

В случае неравномерного распределения нуклонов

$$\frac{A}{2} = 2 \frac{V/2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4}{3} \pi p_{F0}^3, \quad \text{откуда} \quad p_{F0} = 2\pi\hbar \left(\frac{3A}{8\pi V} \right)^{1/3},$$

т. е. $p_{F0} = 2^{1/3} p_F$, а кинетическая энергия

$$\mathcal{E}_k^{\text{неравн}} = 2 \frac{A}{2} \frac{3}{5} \frac{p_{F0}^2}{2m} = \frac{3}{5} A \frac{p_{F0}^2}{2m} 2^{2/3}.$$

Таким образом в кинетической энергии есть проигрыш

$$\mathcal{E}_k^{\text{неравн}} - \mathcal{E}_k^{\text{равн}} = \frac{3}{5} A \epsilon_F (2^{2/3} - 1) \approx 10A \text{ [МэВ]}.$$

Отсюда следует, что равномерное распределение нуклонов в ядре энергетически более выгодно, поскольку сравнивать надо полные энергии

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{равн}} - \mathcal{E}_{\text{неравн}} = 0,075 A^{5/3} - 10A = 0,075 A^{5/3} \left(1 - \frac{10}{0,075 A^{2/3}} \right) \text{ [МэВ]}.$$

Эта величина положительна при $A \geq (133,3)^{3/2} \approx 1540$. Таким образом для всех реальных ядер равномерное распределение нуклонов в ядре более выгодно.

$$3.20. \quad \theta_{\min} = 2 \arccos \frac{p_F}{m_p c} = \arccos 0,242 \approx 152^\circ.$$

$$3.21. \quad \frac{T_{\text{пор1}}}{T_{\text{пор2}}} = \frac{6m_p c^2}{6m_p c^2 - \sqrt{48} p_{FC}} \approx 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{p_{FC}}{m_p c^2} \approx 1,29.$$

$$3.22. \quad P = \frac{2}{5} n \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{5m} (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3} = 3,84 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2 \approx 3,79 \cdot 10^5 \text{ атм};$$

$$\beta_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T = \frac{3m}{\hbar^2 (3\pi^2)^{2/3} n^{5/3}} = \frac{3}{5P} \approx 0,16 \cdot 10^{-5} \text{ атм}^{-1}.$$

$$3.23. \quad s = \frac{v}{\sqrt{3}} = 115,5 \text{ м/с}.$$

$$3.24. \quad P_e \approx n_e \epsilon_F \sim 10^{13} \text{ дин/см}^2 \approx 10^7 \text{ атм, где } \epsilon_F = \mathcal{E}_F;$$

$$n_e \approx \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e \epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}; \quad \rho = n_e m_p \approx 0,6 \text{ г/см}^3.$$

3.25* $T \approx 2 \cdot 10^9$ К.

Решение. Температуру в центре звезды можно определить из условия равновесия. Гравитационному давлению противостоят давление равновесного излучения и давление электронного газа. Рассмотрим сферический слой радиусом r и толщиной dr . Оказываемое этим слоем давление на нижние слои

$$dP_{\text{грав}} = \frac{dF_{\text{грав}}}{S} = \gamma \frac{M(r) dr}{r^2 4\pi r^2}.$$

Используя граничное условие на поверхности звезды $P_{\text{грав}}(R) = 0$, получим

$$P_{\text{грав}}(0) = \int_0^R \gamma \frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right) (4\pi r^2 dr \rho)}{r^2 (4\pi r^2)} = \frac{2\pi}{3} \gamma (\rho R)^2 = 1,4 \cdot 10^{23} \text{ дин/см}^2.$$

Концентрация электронов в звезде

$$n = \frac{\rho}{Am_p} Z \approx \frac{\rho}{2m_p} \approx 3 \cdot 10^{27} \text{ см}^{-3}.$$

Энергия Ферми этих электронов

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3} \approx 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ эрг} = 7,5 \text{ кэВ}.$$

Соответствующая ей температура вырождения

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B} = 0,87 \cdot 10^8 \text{ К}.$$

Предположим, что температура в центре звезды $T > T_F$. Тогда давление электронного газа можно подсчитать по классической формуле (давлением ядер можно пренебречь, т. к. во-первых $Z \gg 1$, а во-вторых тепловая энергия $k_B T \approx 0,1$ МэВ, что недостаточно для «развала» ядра на нуклоны)

$$P_{\text{эл}} = nk_B T$$

Условие равновесия

$$P_{\text{грав}} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 + nk_B T.$$

Подставляя численные данные, получим

$$1,4 \cdot 10^{23} = 7,56 \cdot 10^{-15} T^4 + 4,14 \cdot 10^{13} T.$$

Решение этого уравнения дает температуру в центре звезды $T = 2,07 \cdot 10^9$ К, и таким образом предположение о том, что $T > T_F$ выполнено.

3.26* Решение. Оценка концентрации электронов

$$n_e \sim \frac{M}{m_y} Z \frac{1}{R^3} = \frac{MZ}{m_p AR^3}.$$

Расстояние между электронами $a \sim n_e^{-1/3}$. Скорость электронов определим из соотношения неопределенностей

$$v_e \sim \frac{\hbar}{m_e a}.$$

Энергия одного электрона

$$\varepsilon_e = \frac{m_e v_e^2}{2} \sim m_e \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \sim \frac{\hbar^2 n_e^{2/3}}{2m_e}.$$

Давление электронного газа с точностью до коэффициента порядка единицы равно плотности энергии

$$P_e \approx n_e \varepsilon_e \sim \frac{\hbar^2 n_e^{5/3}}{2m_e} \sim \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{5/3} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \frac{1}{R^5}.$$

Гравитационное давление

$$P_{\text{грав}} = \frac{U_{\text{грав}}}{V} \sim \gamma \frac{M^2}{R} \frac{1}{R^3} = \frac{\gamma M^2}{R^4}.$$

Из условия равенства давлений $P_e = P_{\text{грав}}$ следует

$$M^{1/3} R \sim \frac{1}{\gamma} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \frac{1}{m_p^{5/3}} = \text{const.}$$

3.27. $U = \frac{3}{4} n \varepsilon_F$, где $n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar c}\right)^3 = 4,42 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$ (ср. с задачей 3.3);

$U \approx 5,3 \cdot 10^{36} \text{ дин/см}^2$; $P = \frac{U}{3} = 1,77 \cdot 10^{36} \text{ дин/см}^2 \approx 1,747 \cdot 10^{30} \text{ атм.}$

3.28. $PV^{4/3} = \text{const}$ (см. предыдущую задачу).

3.29* Решение. Известно, что свободный нейтрон распадается по схеме

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e + Q,$$

где $Q \approx 1,3 \text{ МэВ}$ — выделяемая при распаде энергия (дефект массы). Покажем, что нейтроны, составляющие нейтронную звезду, не подвержены указанному распаду. Количество нейтронов в пульсаре: $N \sim \frac{M}{m_n} \sim 10^{57}$. При распаде всех нейтронов появилось столько же электронов: 10^{57} , а их концентрация была бы порядка

$$n_e \sim \frac{N}{R^3} \sim 10^{39} \text{ см}^{-3}.$$

При таких плотностях электронный газ становится ультрарелятивистским ($\varepsilon_F \gg m_e c^2$). Тогда $\varepsilon_F = p_F c = \hbar c (3\pi^2 n_e)^{1/3} \approx 600 \text{ МэВ}$. Таким образом, хотя при распаде одного нейтрона и выделяется энергия порядка 1 МэВ, но проигрыш за счет увеличения кинетической энергии электронов составит в расчете на один электрон величину порядка $\frac{3}{5} \varepsilon_F = 360 \text{ МэВ}$. Это и делает распад нейтронов энергетически невыгодным. Можно сказать, что давление электронного газа стабилизирует распад большого числа нейтронов.

3.30. $\frac{\Delta\theta}{\theta} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_F} = 0,05\%$.

3.31. $\varepsilon_F = \frac{1}{\sqrt{32}} \frac{k_B \theta^2}{m_s^2} \approx 4,1 \text{ эВ}$.

3.32. Решая уравнения движения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]$; $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}$, получаем

$$\omega_c^2 = \frac{e^2}{c^2} \left(\frac{B_x^2}{m_y m_z} + \frac{B_y^2}{m_x m_z} + \frac{B_z^2}{m_x m_y} \right).$$

3.33. $p_x = \text{const}$; $p_y = \frac{eB}{c} \left[\frac{\partial \mathcal{E}(p_z)}{\partial p_z} \right] t$; $p_z = \text{const}$;

$x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \left(\frac{\partial \mathcal{E}(p_z)}{\partial p_z} \right) t$.

3.34* $v_{\max} = v_F = \frac{\hbar}{m_e a} \sqrt{\frac{2\pi}{0,85}} \approx 1,05 \cdot 10^8 \text{ см/с}$; $\omega_c = \frac{eH}{m_e c} \cos \theta$.

Решение. Ферми-поверхность $\mathcal{E}(k_x, k_y, k_z) = \epsilon_F$ представляет собой изоэнергетическую поверхность в k -пространстве. В зависимости от вида закона дисперсии, соотношения k_F и k_{Br} (т. е. в зависимости от концентрации электронов и типа симметрии обратной решетки) она может быть замкнутой, незамкнутой или состоящей из нескольких несвязанных областей. Поскольку зависимость энергии от квазиимпульса является функцией периодической и ограниченной, то существуют точки экстремумов. В зависимости от электронной структуры атомов и типа симметрии решетки они могут располагаться как в центре зоны Бриллюэна при $k = 0$, так и в других точках (в том числе и на границе) при $k \neq 0$.

Вблизи экстремума можно разложить зависимость $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ в ряд и ограничиться первым исчезающим членом.

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}(\mathbf{k}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial k_i \partial k_j} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0} (k_i - k_{0i}) (k_j - k_{0j}) + \dots$$

После приведения этой квадратичной формы к главным осям ферми-поверхность будет иметь вид эллипсоида. В случае кристаллов кубической симметрии эллипсоид вырождается в шар. Такая картина имеет место при $k_F \ll k_{Br}$. С ростом концентрации (и k_F) нужно учитывать другие члены разложения и ферми-сфера деформируется (по-разному в разных направлениях зоны Бриллюэна: чем ближе граница, тем сильнее деформация). Рассмотрим предложенный в задаче «двумерный» закон дисперсии

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2).$$

Число электронов, равное по условию числу элементарных ячеек N в объеме кристалла V , есть

$$N = \int dN_k = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int \int \int_{k_x^2 + k_y^2 \leq k_F^2} dk_x dk_y dk_z.$$

Поскольку спектр от k_z не зависит, то интегрировать нужно по всем возможным значениям k_z в зоне Бриллюэна. Если размер элементарной ячейки основной решетки вдоль оси z есть a , то $-\frac{\pi}{a} < k_z \leq \frac{\pi}{a}$. Форма и размер ячейки вдоль осей x и y не имеют значения, если только

$k_F \leq k_{\perp \text{ Бр}} = \sqrt{k_{\text{Бр}x}^2 + k_{\text{Бр}y}^2}$. Вводя полярные координаты, получим $dk_x dk_y = 2\pi k_{\perp} dk_{\perp}$, откуда

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{k_F} k_{\perp} dk_{\perp} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_z = \frac{V}{2\pi^2} \frac{k_F^2}{2} \frac{2\pi}{a}; \quad k_F = \sqrt{\frac{2\pi N}{V}} a.$$

Поскольку объем элементарной ячейки равен по условию $0,85a^3$, то искомая скорость Ферми

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*} = \frac{\hbar}{m_e a} \sqrt{\frac{2\pi}{0,85}} \approx 1,05 \cdot 10^8 \text{ см/с}.$$

Поверхность Ферми здесь — цилиндр (открытая ферми-поверхность).

3.35* $S = \frac{2\pi^2}{a^2}$, см. рис. 221.

Решение. Поскольку примитивная ячейка квадратной решетки содержит один атом, то число разрешенных значений квазиимпульса в первой зоне Бриллюэна (равное числу примитивных ячеек) равно числу атомов N . Считая, что зона построена из s -состояний атомов, получаем, что из $2N$ мест в зоне проводимости занято ровно половина и поэтому

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 = \frac{2\pi^2}{a^2}.$$

В силу симметричного характера спектра половинное заполнение зоны Бриллюэна соответствует $\epsilon_F = 0$. Таким образом, уравнение поверхности Ферми находится из условия

$$\cos k_x a + \cos k_y a = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos \frac{k_x + k_y}{2} a \cdot \cos \frac{k_x - k_y}{2} a = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} k_x + k_y = \frac{\pi}{a} (1 + 2m) \\ k_x - k_y = \frac{\pi}{a} (1 + 2n), \end{cases}$$

где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В первой зоне Бриллюэна $|k_x|, |k_y| \leq \pi/a$, откуда подходят $m, n = 0, -1$, т. е.

$$\begin{cases} k_x + k_y = \pm \frac{\pi}{a} \\ k_x - k_y = \pm \frac{\pi}{a}. \end{cases}$$

Таким образом, заняты все состояния внутри квадрата площадью $2\pi^2/a^2$ (см. рис. 221).

Для нахождения распределения скоростей на ферми-поверхности в силу симметрии рассмотрим только первый квадрант. По определению

$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}$. Поскольку градиент перпендикулярен линиям уровня, то скорость электронов перпендикулярна ферми-поверхности. Следовательно в нашем случае компоненты вектора скорости электрона должны быть равны.

Докажем это: $v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\partial k_x} = \frac{\mathcal{E}_0 a}{\hbar} \sin k_x a$, $v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\partial k_y} = \frac{\mathcal{E}_0 a}{\hbar} \sin k_y a$. Т. к. $k_x a + k_y a = \pi$, то $v_y = v_x$. Таким образом, скорость распределена вдоль сторон квадрата по закону синуса — она максимальна в середине боковых сторон и равна нулю в углах квадрата. Последнее очевидно. В углу квадрата скорость электрона должна быть перпендикулярна двум смежным сторонам квадрата. Это возможно только для нулевого вектора.

$$3.36^* \quad v_{Fz} = \frac{\mathcal{E}_0 a}{\hbar} \approx 2,3 \cdot 10^7 \text{ см/с}; \quad v_{Fx} = v_{Fy} = 0.$$

Решение. (См. также решение задачи 3.34). В этой задаче рассматривается «одномерный» закон дисперсии $\mathcal{E}(k_z) = \mathcal{E}_0 \cos k_z a$. По условию каждая из N элементарных ячеек, содержащихся в объеме V , поставляет в зону проводимости по одному электрону, т. е.

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint dk_x dk_y dk_z = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} S_{k_\perp} \int dk_z, \quad (*)$$

где S_{k_\perp} — площадь сечения зоны Бриллюэна плоскостью $k_z = \text{const}$. Используя вид закона дисперсии (рис. 222), получаем

$$\int dk_z = -k_F - \left(-\frac{\pi}{a}\right) + \frac{\pi}{a} - k_F = 2 \left(\frac{\pi}{a} - k_F\right).$$

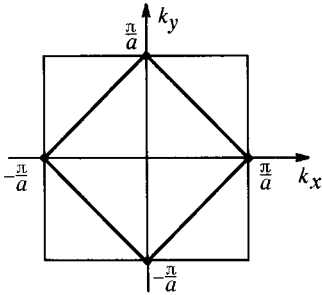


Рис. 221

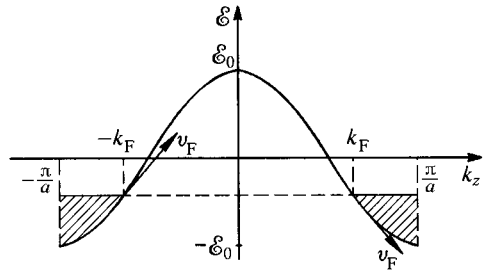


Рис. 222

По условию S_{k_\perp} не зависит от k_z и объем зоны Бриллюэна равен $V_k = S_{k_\perp} \frac{2\pi}{a}$. Кроме того, объем зоны Бриллюэна легко вычислить иначе $V_k = \frac{(2\pi)^3}{v}$, где $v = \frac{V}{N}$ — объем элементарной ячейки. Таким образом, подставляя все это в (*), получаем

$$\frac{\pi}{a} = 2 \left(\frac{\pi}{a} - k_F\right),$$

откуда в одномерном случае $k_F = \frac{\pi}{2a}$.

Фермиевская скорость

$$v_F = \left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\hbar \partial k_z} \right|_{k_z = \pm k_F} = - \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar} a \sin k_z a \Big|_{k_z = \pm k_F} = \mp \frac{\mathcal{E}_0 a}{\hbar}.$$

Выражение для k_F можно получить и другим путем. В зоне проводимости для электронов имеется $2N$ мест, из которых занято N мест, т. е. половина. Таким образом, в силу симметричной формы спектра $\epsilon_F = 0$, откуда $\cos k_F a = 0$, $k_F = \pi/2a$. Ферми-поверхность в 1-ой зоне Бриллюэна имеет вид двух параллельных плоскостей (в одномерном случае — две точки).

3.37* Решение. Из уравнения $\dot{p}_x = eE$ следует

$$k_x = \frac{p_x}{\hbar} = \frac{eE}{\hbar} (t - t_0),$$

откуда с учетом $\dot{x} = v_x$ и $v_x = \frac{\partial \epsilon}{\partial p_x} = -\frac{\epsilon_0 a}{\hbar} \sin \frac{eEa}{\hbar} (t - t_0)$ получим

$$x(t) = x_0 + \frac{\epsilon_0 a}{eE} \cos \left[\frac{eEa(t - t_0)}{\hbar} \right].$$

Таким образом, электрон осциллирует около равновесного положения x_0 с частотой $\omega = eEa/\hbar$, и средний ток равен нулю. Причина этого состоит

в том, что кинетическая энергия $\epsilon_0 \cos(k_x a)$ является ограниченной функцией k_x . В результате движение электрона в поле с потенциальной энергией $U(x) = -eEx$ ограничено конечной областью (вследствие закона сохранения энергии). Очевидны равенство нулю средней скорости ($\bar{v}_x = 0$) и ограниченность координаты ($\bar{x} = x_0$), что легко определить по виду $v(t)$ и $x(t)$.

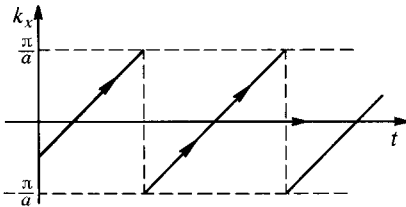


Рис. 223

по виду $v(t)$ и $x(t)$. На рис. 223 изображена зависимость $k_x(t)$. Ускоряясь, электрон достигает границы первой зоны Бриллюэна, отражается и оказывается в эквивалентной точке $k_x = -\pi/a$. Далее картина повторяется.

Подсчитаем, например, частоту и амплитуду осцилляций электрона Δx по медному проводу

$$E = \frac{\mathcal{J}\rho}{S} \approx 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ ед СГСЭ} = 1,71 \cdot 10^{-3} \text{ В/см}; \quad \omega = \frac{eEa}{\hbar} \approx 7,8 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Так как $\Delta \epsilon = 2\epsilon_0$, то $\Delta x \approx \frac{\Delta \epsilon}{2eE} \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ см} = 15 \text{ м}$.

Это явление крайне трудно наблюдать, так как $\Delta x \gg \Lambda$ (длины свободного пробега): даже в самых чистых образцах $\Lambda \leq 1 \text{ см}$.

$$3.38. \quad v_x = \frac{\epsilon_0 a}{2\hbar}; \quad v_y = v_z = 0; \quad \dot{v}_x = \dot{v}_z = 0; \quad \dot{v}_y = -\frac{\epsilon_0^2 a^3 eH}{2c\hbar^3}.$$

$$3.39. \quad \epsilon_F = \epsilon_0; \quad p_F[110] = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\pi\hbar}{a} \approx 1,48 \frac{\hbar}{a};$$

$$p_F[111] = \sqrt{3} \frac{\hbar}{a} \arccos \frac{2}{3} \approx 1,46 \frac{\hbar}{a}.$$

$$3.40. \quad m^* = \frac{\hbar^2}{\epsilon_0 a^2}.$$

$$3.41. v_F[100] = \frac{\epsilon_0 a}{\hbar}; \quad v_F[110] = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\epsilon_0 a}{\hbar}; \quad v_F[111] = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{\epsilon_0 a}{\hbar}.$$

$$3.42. t = \frac{\pi \hbar}{2eEa}; \quad \dot{\mathbf{v}} = 0; \quad \mathcal{E} = 2\epsilon_0; \quad \varphi_{\max} = 45^\circ.$$

$$3.43^* \Delta \mathcal{E} = \frac{6\hbar^2}{m_e a^2} = 5 \text{ эВ}.$$

Решение. Согласно закону дисперсии

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \epsilon_0 (3 - \cos k_x a - \cos k_y a - \cos k_z a),$$

«Потолок» (максимальное значение энергии) зоны проводимости достигается в углах зоны Бриллюэна при $\mathbf{k} = \left(\pm \frac{\pi}{a}; \pm \frac{\pi}{a}; \pm \frac{\pi}{a} \right)$, а «дно» (минимальное значение энергии) — в центре зоны при $k = 0$. При этом $\mathcal{E}_{\max} = 6\epsilon_0$; $\mathcal{E}_{\min} = 0$. Ширина зоны $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min} = 6\epsilon_0$. Вблизи дна зоны

$$\mathcal{E}(k \rightarrow 0) \approx \epsilon_0 a^2 \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{2} = \frac{\epsilon_0 a^2 k^2}{2},$$

и таким образом $m^* = m_e \frac{\hbar^2}{\epsilon_0 a^2}$, откуда $\Delta \mathcal{E} = \frac{6\hbar^2}{m_e a^2} = 5 \text{ эВ}$.

Отметим, что эффективные массы можно было бы вычислить и непосредственно из закона дисперсии (см. задачу 3.34)

$$m_i^* = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\hbar^2 \partial k_i^2} \right) \Bigg|_{k_i=0}^{-1} = \frac{\hbar^2}{\epsilon_0 a^2}, \text{ где } i = x, y, z.$$

Следовательно, эллипсоид энергии здесь является шаром.

$$3.44. T^* = \sqrt{\frac{5k_B \theta^3}{24\pi^2 \epsilon_F}} \approx 3,3 \text{ К для Си и } 1,5 \text{ К для Na}.$$

$$3.45. \text{ В расчете на 1 атом: теплоемкость решетки } c_{\text{реш}}(T) = \frac{12\pi^4}{5} k_B \left(\frac{T}{\theta} \right)^3;$$

$$c_{\text{реш}}(3 \text{ К}) \approx 6 \cdot 10^{-4} k_B; \quad c_{\text{реш}}(300 \text{ К}) \approx 3k_B.$$

Электронная теплоемкость (в расчете на 1 атом):

$$c_{\text{эл}}(T) = \left(\frac{\pi}{3n} \right)^{2/3} \frac{m_e k_B^2 T}{\hbar^2}; \quad c_{\text{эл}}(3 \text{ К}) \approx 2,32 \cdot 10^{-4} k_B; \quad c_{\text{эл}}(300 \text{ К}) = 2,32 \cdot 10^{-2} k_B.$$

$$3.46. C_{\text{эл}} = \gamma T = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2 T}{\epsilon_F} N_A \approx 5 \cdot 10^3 \text{ эрг/(К} \cdot \text{моль)};$$

$$K_D = (6\pi^2 n)^{1/3} = 2^{1/3} \frac{\sqrt{\epsilon_F \cdot 2m^*}}{\hbar} = 2,1 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}.$$

$$3.47. \theta = \gamma \frac{\hbar^3 s}{k_B m_e} \sqrt[3]{54} = 330 \text{ К}.$$

$$3.48. \epsilon_F = \frac{\pi^2 k_B^2 N_A}{A} = 7,05 \text{ эВ, где } A = \frac{C_{P1} T_1^3 - C_{P2} T_1^3}{T_1 T_2^3 - T_2 T_1^3}.$$

$$3.49. T = \sqrt{\frac{T_1^2 A_{Au} + T_2^2 A_{Ag}}{A_{Au} + A_{Ag}}} = 0,144 \text{ К.}$$

$$3.50. T_F = 6,4 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

$$3.51^* L \geq \left(\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{kTn} \right)^{1/3} = 86 \text{ \AA}, \quad \varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (12\pi^2)^{2/3} \approx 7 \text{ эВ, где}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4A}{\rho N_A}} \approx 3,62 \text{ \AA}, \quad n = \frac{4}{a^3}.$$

Решение. В металлах возбуждаются лишь те электроны, энергия которых лежит вблизи энергии Ферми. Если $\mathcal{D}(\varepsilon_F)$ — плотность электронных состояний, т. е. число состояний, приходящихся на единичный энергетический интервал, то обратная ей величина

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{D}(\varepsilon_F)}$$

есть расстояние между энергетическими уровнями. В объеме V одновалентного металла содержится N свободных электронов, которые размещены по энергетическим уровням вплоть до энергии Ферми. Из выражения для ε_F следует, что

$$N = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m^* \varepsilon_F}{\hbar^2} \right)^{3/2},$$

откуда легко найти плотность состояний вблизи уровня Ферми:

$$\mathcal{D}(\varepsilon_F) = \frac{dN}{d\varepsilon_F} = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F}.$$

Из полученного выражения находим

$$\Delta\varepsilon = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{N} \approx \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{nL^3},$$

где n — концентрация электронов, равная $4/a^3$, L — линейный размер кристалла меди.

Условие, при котором дискретность уровней еще не сказывается на удельной теплоемкости, довольно очевидно:

$$\Delta\varepsilon \ll kT,$$

откуда следует ответ задачи

$$L \geq \left(\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{kTn} \right)^{1/3} = a \left(\frac{1}{6} \frac{\varepsilon_F}{kT} \right)^{1/3}.$$

Постоянную решетки можно найти по формуле

$$a = \sqrt[3]{\frac{4A}{\rho N_A}} = 3,62 \text{ \AA}.$$

Энергия Ферми не задана в условии задачи. Поэтому вычислим ее:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} (12\pi^2)^{2/3} = 7 \text{ эВ,}$$

что совпадает с табличным значением ε_F .

Окончательно получим размер кристалла меди, исходя из вычисленных нами данных

$$L \geq a \left(\frac{1}{6} \frac{\varepsilon_F}{kT} \right)^{1/3} = 86 \text{ \AA}.$$

3.52* $\varphi(x) \propto \exp\left(\pm \frac{x}{l_{TF}}\right)$, где $l_{TF} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\pi l^2 \mathcal{D}(\varepsilon_F)}}$, $\mathcal{D}(\varepsilon_F) = \frac{3}{2} \frac{n_0}{\varepsilon_F}$ — плотность состояний на уровне Ферми, n_0 — равновесная концентрация.

Решение. Распределение потенциала внутри проводника описывается уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n - n_0)/\varepsilon,$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, возникающая за счет электронов заполненных зон (т. е. всех электронов, за исключением электронов проводимости).

В состоянии термодинамического равновесия двух тел их химические потенциалы равны, т. е.

$$\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T).$$

Однако, при наличии электрического потенциала роль μ начинает играть другая величина $\mu + U = \mu - e\varphi \equiv F$, называемая электрохимическим потенциалом, и тогда условием равновесия является $F = \text{const}$ (рис. 224). При плавном изменении потенциала $\varphi(x)$ на расстояниях порядка постоянной решетки можно считать, что дно зоны проводимости, соответствующее в этом приближении потенциальной энергии электрона, меняется от точки к точке, т. е. зависит от координат, и в результате $\mu = \mu(x)$. Если изгиб зон мал, то

$$n - n_0 = \Delta n \approx \left. \frac{dn}{d\mu} \right|_{x \rightarrow \infty} \Delta\mu = \left. \frac{dn}{d\mu} \right|_{x \rightarrow \infty} e\varphi(x) = \mathcal{D}(\mu) e\varphi(x),$$

где $\mathcal{D}(\mu)$ — плотность состояний (на единицу объема) вблизи уровня Ферми. Будем полагать, что $\mathcal{D}(\mu) \approx \mathcal{D}(\varepsilon_F) = \frac{dn}{d\varepsilon_F} = \frac{3}{2} \frac{n_0}{\varepsilon_F}$ (см. задачи 3.17 и 3.51). Здесь $n = n(x)$ — локальная плотность состояний, n_0 — равновесная концентрация при $x \rightarrow \infty$. Подставив это в уравнение Пуассона, получим

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \mathcal{D}(\varepsilon_F) \varphi.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) \propto \exp\left(\pm \frac{x}{l_{TF}}\right),$$

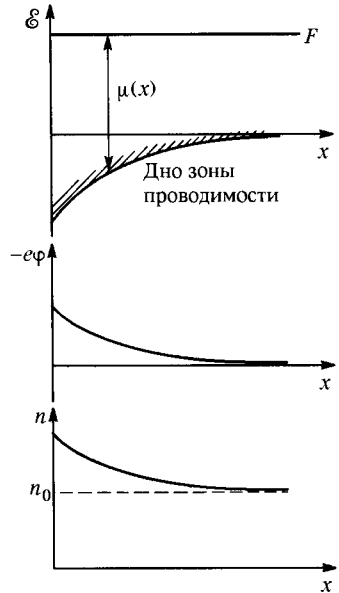


Рис. 224

где $l_{TF} = \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi e^2 \mathcal{D}(\epsilon_F)}} = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_F}{6\pi e^2 n_0}} \approx \begin{cases} 4,3 \cdot 10^{-9} \text{ см для металлов,} \\ 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см для полуметаллов.} \end{cases}$

Заметим, что в металлах $l_{TF} \approx a$ — постоянной решетки, т. е. внешнее статическое поле практически полностью экранируется на расстоянии одной постоянной решетки и внутрь металла не проникает.

$$3.53. \frac{\Delta n}{n} = \frac{C(A_1 - A_2)}{V n e^2} \approx -5,2 \cdot 10^{-16}.$$

$$3.54. \frac{\Delta n}{n} = \frac{S}{4\pi d} \frac{A_1 - A_2}{V n e^2} \approx -4,6 \cdot 10^{-13}.$$

$$3.55. \Delta \varphi \approx \frac{\epsilon_F}{k_F L e} \sim 10 \text{ мВ.}$$

Решение с. Контактная разность потенциалов $\Delta \varphi$ связана с разными начальными положениями уровней Ферми (относительно уровня вакуума) в контактирующих объектах.

С уменьшением размеров кубиков расстояние между одноэлектронными энергетическими уровнями увеличивается. В предположении постоянной электронной концентрации это приводит к повышению уровня Ферми в маленьком кубике по сравнению с его положением в «массивном» металле. Чтобы оценить величину $\Delta \varphi$ такого повышения, заметим, что полное число свободных электронов в кубе размером L со сферической Ферми-поверхностью определяется количеством ячеек объемом $(2\pi)^3$ в k -пространстве и равно $N \sim (k_F L / 2\pi)^3$, где k_F — это величина фермиевского волнового вектора. Приведенное выражение справедливо в пределе $k_F L \rightarrow \infty$. При конечной величине $k_F L$ число электронов определяется количеством точек с координатами, кратными $(2\pi/L)$, в пространстве волновых чисел. В этом случае

$$N \sim \left(\frac{k_F L}{2\pi}\right)^3 - \alpha \left(\frac{k_F L}{2\pi}\right)^2,$$

где поправка, пропорциональная $\alpha \sim 1$, связана с «целочисленными» точками, расположенными в координатных плоскостях пространства волновых чисел, а также с «целочисленными» точками, ближайшими к поверхности Ферми-сферы, но не попавшими «под» нее. Отсюда для концентрации электронов $n = N/L^3$ получаем $n \sim k_F^3 [1 - \alpha / (k_F L)]$, что при $k_F L \gg 1$ дает $k_F^2(L) \propto n^{2/3} \frac{1 + (2\alpha/3)}{k_F(\infty)L}$. Полагая $n = \text{const}$ и учитывая, что энергия Ферми

$\epsilon_F \propto k_F^2$, находим

$$\frac{\epsilon_F(L)}{\epsilon_F(\infty)} \approx 1 + \frac{2\alpha/3}{k_F(\infty)L},$$

откуда при $\epsilon_F \sim 1$ эВ, $k_F \sim 10^8 \text{ см}^{-1}$, $L = 10^{-6} \text{ см}$ следует

$$\Delta \varphi \equiv \frac{1}{e} [\epsilon_F(L) - \epsilon_F(\infty)] \approx \frac{\epsilon_F}{k_F L e} \sim 10 \text{ мВ.}$$

$$3.56. \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3} = 2; \text{ полное отражение будет при угле падения}$$

электронов $\psi = 30^\circ$ из среды с показателем преломления $n_2 > n_1$.

Решение. Будем считать, что контакт металлов осуществляется во всех точках соприкасающихся поверхностей (это требует высокой точности обработки). Тогда контактная разность потенциалов будет приложена между свободными концами. На границе раздела возникает скачок потенциала из-за перехода части электронов из металла с меньшей работой выхода в металл с большей работой выхода. Этот скачок потенциала произойдет на расстояниях порядка $l_{TF} < a$ — периода решетки (см. решение задачи 3.52). Величина скачка находится из условия равенства электрохимических потенциалов $\mu_1 - e\varphi_1 = \mu_2 - e\varphi_2$, где μ_1 и μ_2 — химические потенциалы после перетекания заряда. Доля перетекаемого заряда ничтожно мала (см. задачу 3.53). Поэтому $\mu_{1,2} = \varepsilon_{F1,2}$. Таким образом, энергетическая диаграмма металлов, находящихся в таком контакте, имеет вид, изображенный на рис. 225, где ноль отсчета потенциальной энергии совмещен с дном одной из зон проводимости.

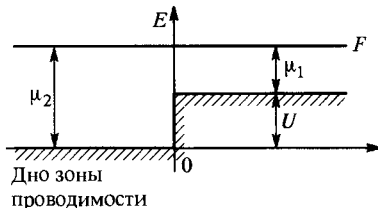


Рис. 225

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = U = \mu_2 - \mu_1.$$

Наличие скачка потенциала приводит к силам, перпендикулярным поверхности контакта. Эти силы меняют нормальную составляющую скорости электронов, преодолевающих барьер, но не меняют продольную составляющую, т. е.

$$v_{F1} \sin \alpha_1 = v_{F2} \sin \alpha_2,$$

откуда получаем закон преломления для электронов

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_{F2}}{v_{F1}} = \frac{n_2^{1/3}}{n_1^{1/3}} = 2.$$

Таким образом, металл с большей фермиевской скоростью является «оптически более плотным». Следовательно, полное внутреннее отражение наступает при падении электронов на границу раздела из металла с большей концентрацией электронов при угле $\alpha_2 \geq \psi = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$.

3.57. Вводя углы падения и преломления φ_1 и φ_2 $\left(\operatorname{ctg} \varphi = \frac{p_n}{p_t} \right)$, получаем закон преломления электронных волн на межкристаллической границе

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \sqrt{\frac{\cos 2\varphi_2}{\cos 2\varphi_1}} = \sqrt{\frac{m_y^*}{m_x^*}}.$$

При малых углах падения и преломления $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \approx \sqrt{\frac{m_y^*}{m_x^*}}$.

3.58* $\frac{\beta(T_0)}{\beta(T_{\text{He}})} = \frac{T_0}{T_{\text{He}}} \approx 75.$

Решение. Приведем схему термоэлемента. Это кольцо, спаянное из двух разных металлов. В отсутствии тока термоЭДС возникает между разрывами в одном из металлов (рис. 226). При этом предполагается, что температура концов разрыва одинакова (ответ не зависит от конкретного значения T_0). Появление термоЭДС обусловлено различием электрохимических

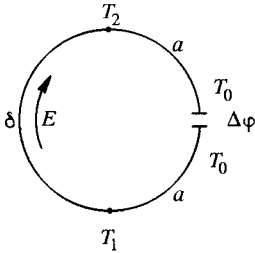


Рис. 226

потенциалов в двух металлах, и поэтому при установлении электрического контакта электроны начнут переходить из одного металла в другой. В области границы возникает двойной электрический слой. Толщина этого слоя порядка межатомных расстояний и может рассматриваться как бесконечно тонкая в задачах макроскопической электродинамики (см. задачи 3.52—3.56). В этом слое происходит скачок электрического потенциала, который выравнивает электрохимические потенциалы. Такой скачок называется контактной разностью потенциалов.

Поскольку уровень «вакуума» одинаков для обоих металлов, то $e|\Delta\varphi_{\text{конт}}| = |A_{\text{б}} - A_{\text{а}}|$, где A — работа выхода из металла. Переносим заряд по замкнутому контуру, получим

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{\text{конт}}(T_1) + \Delta\varphi_{\text{конт}}(T_2) + \Delta\varphi_{\text{а}}(T_0) &= 0; \\ |\Delta\varphi_{\text{а}}(T_0)| &= |\Delta\varphi_{\text{конт}}(T_1) + \Delta\varphi_{\text{конт}}(T_2)| = \\ &= \left| A_{\text{б}}(T_1) - A_{\text{а}}(T_1) + A_{\text{а}}(T_2) - A_{\text{б}}(T_2) \right| \frac{1}{e} = \left| [A_{\text{а}}(T_2) - \right. \\ &\quad \left. - A_{\text{а}}(T_1)] - [A_{\text{б}}(T_2) - A_{\text{б}}(T_1)] \right| \frac{1}{e} = \\ &= \left| [\mu_{\text{а}}(T_2) - \mu_{\text{а}}(T_1)] - [\mu_{\text{б}}(T_2) - \mu_{\text{б}}(T_1)] \right| \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Поскольку у металлов при любых температурах T $\mu(T) - \mu(0) \propto \kappa k_{\text{Б}} T \frac{k_{\text{Б}} T}{\varepsilon_{\text{F}}} \propto T^2$ (точный результат, как будет показано ниже, равен $\frac{\pi^2 k_{\text{Б}}^2}{6\varepsilon_{\text{F}}} T^2$), то

$$|\Delta\varphi_{\text{а}}(T_0)| = \gamma \left| \frac{T_2^2 - T_1^2}{\varepsilon_{\text{F}}^{\text{а}}} - \frac{T_2^2 - T_1^2}{\varepsilon_{\text{F}}^{\text{б}}} \right| = \gamma \left| \left(\frac{1}{\varepsilon_{\text{F}}^{\text{а}}} - \frac{1}{\varepsilon_{\text{F}}^{\text{б}}} \right) (T_2^2 - T_1^2) \right|,$$

где $\gamma = \frac{\pi^2 k_{\text{Б}}^2}{6e}$. Таким образом, считая $\Delta T = T_2 - T_1 \ll T_1$, получаем

$$\beta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta T} \approx \frac{(T_1 + \Delta T)^2 - T_1^2}{\Delta T} \approx 2T_1.$$

Тогда

$$\frac{\beta(T_0)}{\beta(T_{\text{He}})} = \frac{T_0}{T_{\text{He}}} \approx 75.$$

Строго говоря, при наличии градиента температур плотность тока определяется не градиентом электрического потенциала φ , а градиентом электрoхимического потенциала

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right),$$

где μ — химический потенциал.

Т. к. $\nabla \mu \propto \nabla T$, то $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \nabla T$ (аналогичное выражение имеется и для полного тока в полупроводниках, где к омическому току добавляется диффузионный: $\nabla \mu \propto \nabla n$ при $T = \text{const}$). В состоянии термодинамического равновесия $\mathbf{j} = 0$, однако $\mathbf{E} \neq 0$ и $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\oint \frac{\kappa}{\sigma} \nabla T d\mathbf{l} = -\oint \frac{\kappa}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial l} dl$, откуда следует

$$|\Delta \varphi| = \left| \int_{T_1}^{T_2} \left[\left(\frac{\kappa}{\sigma} \right)_b - \left(\frac{\kappa}{\sigma} \right)_a \right] dT \right|.$$

Коэффициент $\kappa/\sigma \equiv Q$ называется дифференциальной термоЭДС. В модели свободных электронов

$$Q = \frac{\pi^2}{3e} \frac{k_B^2 T}{\varepsilon_F},$$

откуда

$$|\Delta \varphi| = \frac{\pi^2 k_B^2}{6e} \left| \left(\frac{1}{\varepsilon_F^a} - \frac{1}{\varepsilon_F^b} \right) (T_2^2 - T_1^2) \right|.$$

$$3.59. \quad \frac{\delta p}{p_F} = \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F}; \quad \frac{\delta n}{n} = \frac{3}{2} \frac{\mu_B H}{\varepsilon_F}; \quad M = \frac{m^* \mu_B^2 H}{\pi^2 \hbar^2} (3\pi^2 n)^{1/3},$$

$$\chi_{\text{Na}} = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{m^* \mu_B^2}{\pi^2 \hbar^2} (3\pi^2 n)^{1/3} = 5,2 \cdot 10^{-7}.$$

Задача решается из условия «равновесия», т. е. равенства уровней Ферми

$$\frac{p_+^2}{2m^*} - \mu_B H = \frac{p_-^2}{2m^*} + \mu_B H.$$

3.60. $C(T) = \frac{\pi^2 R}{2\varepsilon_F} k_B T = R \frac{T}{T_0}$, где $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N_A}{V} \right)^{2/3} = 6,75 \cdot 10^{-15}$ эрг = 4,22 мэВ. Температура вырождения $T_F = \varepsilon_F/k_B \approx 50$ К. Таким образом, теплоемкость жидкого ${}^3\text{He}$ при низких температурах определяется так же, как и для электронов в металле

$$C(T) = \frac{\pi^2}{2} \frac{R}{\varepsilon_F} k_B T = R \frac{T}{T_0}, \quad \text{где } T_0 = \frac{2\varepsilon_F}{\pi^2 k_B} = \frac{2}{\pi^2} T_F \approx 10 \text{ К.}$$

3.61. У атомов ${}^3\text{He}$ суммарный спин электронов равен нулю, а спин ядра равен 1/2. Поэтому теплоемкость при столь малых температурах мала и определяется так же, как для электронов в металле. Таким образом,

$$\frac{m^*}{m} = \frac{C \hbar^2}{\pi^2 k_B^2 T N_A^{1/3} m} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{A} \right)^{2/3} = 2,3.$$

$$3.62^* \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{\varepsilon m^*}} \simeq 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1} \text{ (для металлов)}.$$

Решение. Пусть $\rho = e \delta n = e(n - n_0) \ll en_0$ — отклонение плотности электронов от равновесной n_0 . В результате этого отклонения возникает электрическое поле \mathbf{E} , которое удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, обусловленная поляризуемостью решетки и электронов внутренних оболочек.

Под действием поля \mathbf{E} электроны приобретают мгновенную скорость \mathbf{v} , модуль которой много меньше скорости хаотического движения $v_{\text{хаот}}$, которая $\sim v_F$ в металлах и $\sim \sqrt{mk_B T}$ в невырожденных полупроводниках. Она определяется из уравнения

$$m^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m^* \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e\mathbf{E}.$$

Мы пренебрегаем слабой зависимостью \mathbf{v} от координат и учитываем только зависимость от времени. Плотность тока $\mathbf{j} = en\mathbf{v} \simeq en_0\mathbf{v}$ удовлетворяет закону сохранения заряда $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$. Продифференцируем это выражение по времени и подставим туда выражение для \mathbf{j} и \mathbf{E} . В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{4\pi e^2 n_0}{m^* \varepsilon} \rho = 0,$$

откуда $\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m^* \varepsilon}$.

Отметим, что здесь n_0 — концентрация электронов в зоне проводимости (электроны заполненных зон дают вклад только в ε). Численное значение плазменной частоты для «типичного металла» (например, Cu с $n_0 = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $m^* = m_e$, $\varepsilon \simeq 1$) $\omega_p \simeq 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$. Для собственных полупроводников (например, Ge с $\varepsilon = 16$, $m^* \simeq 0,2m_e$ и $n_0 \simeq 10^{14} \text{ см}^{-3}$ при $T = 300 \text{ К}$) $\omega_p \simeq 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

Так как мы рассматриваем колебания с одной длиной волны, намного превосходящей постоянную решетки, то справедливо приближение сплошной среды для решетки, что и оправдывает введение диэлектрической проницаемости среды ε .

Приведем еще один вариант решения этой задачи. Рассматривая длинноволновые колебания, можно считать, что распределение электронов как целое смещается относительно положительного фона (ионов решетки). Пусть x — величина смещения электрона. Тогда дипольный момент единицы объема (поляризация) $P = n_0 e x$. Поскольку свободных зарядов нет (т. е. $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, а в силу однородности поля и $\mathbf{D} = 0$), то

$$E + 4\pi P = 0,$$

откуда $E = -4\pi n_0 e x$.

Уравнение движения электрона

$$m^* \ddot{x} = \frac{eE}{\varepsilon} = - \frac{4\pi n_0 e^2}{\varepsilon} x,$$

откуда и следует выражение для ω_p . Подчеркнем, что независимость ω_p от волнового числа является следствием рассматриваемого приближения — неучета диффузионной компоненты тока.

$$3.63. \frac{\bar{r}_e}{r_{кл}} \approx \frac{(3\pi^2)^{4/3}}{16\pi} \frac{1}{a^2} \approx 3,4 \cdot 10^4, \text{ где } r_{кл} = \frac{e^2}{mc^2}, \alpha = \frac{1}{137} \text{ — постоянная}$$

тонкой структуры.

$$3.64. \hbar\omega_p = \sqrt{\frac{4m_e^{1/2} e^2}{3\pi\hbar} (2\varepsilon_F)^{3/2}} = 8,4 \text{ эВ.}$$

$$3.65. \Lambda \approx \frac{(3\pi^2)^{1/3} \hbar a^2}{e^2 \rho} \approx 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

$$3.66. \sigma \approx \frac{e^2 n d}{\hbar (3\pi^2 n)^{1/3}} \approx 1,2 \cdot 10^9 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1} \text{ (серебро, } n = 5,85 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}).$$

$$3.67^* \tau_M = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \sim 10^{-10} \text{ с (для чистого германия).}$$

Решение. Растекание заряда описывается уравнением непрерывности $\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ и материальным уравнением $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В хороших проводниках изменение проводимости, связанное с избыточными носителями, образующими объемный заряд, ничтожно мало по сравнению с равновесной проводимостью, поэтому $\sigma = \text{const}$. Используя соотношение $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость, связанная с электронами заполненных зон, и $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$, получаем окончательно

$$\dot{\rho} + (4\pi\sigma/\varepsilon) \rho = 0.$$

Решение этого уравнения есть

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) \exp(-t/\tau_M),$$

где $\tau_M = \varepsilon/(4\pi\sigma)$, а $\rho_0(\mathbf{r})$ — распределение заряда в начальный момент $t = 0$. Из решения видно, что плотность ρ , не деформируясь в пространстве, экспоненциально спадает во времени, так что в тех областях пространства, где заряд при $t = 0$ отсутствует, постоянно сохраняется электронейтральность. При этом ток, естественно, течет во всем пространстве. Для германия $\tau_M \approx 10^{-10}$ с. Если теперь формально подсчитать τ_M для металла, скажем, для Cu, то при $\sigma_{Cu} \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ получим

$$\tau_M = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ с.}$$

За столь малое время электрон проходит расстояние порядка 10^{-10} см, что намного меньше длины свободного пробега. Это значит, что в данном случае использование соотношения $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ было незаконным. Действительно, решение уравнения движения для электрона в вязкой среде

$$m^* \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} - \frac{m^* \mathbf{v}}{\tau} \text{ имеет вид } \mathbf{v}(t) = \frac{e\mathbf{E}\tau}{m^*} (1 - e^{-t/\tau}),$$

где τ — среднее время между столкновениями. Очевидно, при $t > \tau$ $\mathbf{v} \approx \text{const} = \mathbf{v}_{\text{др}} = \frac{e\mathbf{E}\tau}{m^*}$, и закон Ома с постоянной σ справедлив. Наличие еще одного масштаба времени τ_M показывает, что при $t < \tau_M$ успевает установиться постоянная дрейфовая скорость электрона и закон Ома справедлив. При обратном знаке неравенства это неверно. Оценка τ по известным σ , n , m^* показывает (см. следующую задачу), что неравенство $\tau_M > \tau$ выполняется в плохих проводниках (полупроводниках) и не выполняется в хороших (металлах). Это можно также видеть непосредственно из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Если характерное время изменения поля \mathbf{E} есть τ (для периодических процессов это $1/\omega$), то отношение двух последних членов есть $\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \tau$. Таким образом, $\left(\frac{4\pi\sigma}{\epsilon\omega}\right) = \frac{\tau}{\tau_M} \left(\frac{1}{\omega\tau_M}\right)$. Если $\tau \gg \tau_M$ ($\omega\tau_M \ll 1$), то можно пренебречь током смещения и вещество ведет себя как проводник. При $\tau \ll \tau_M$ ($\omega\tau_M \gg 1$) оно ведет себя как диэлектрик.

3.68*: $\epsilon(\omega) = \epsilon \left[1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 + i/(\omega\tau)} \right]$, где ϵ — статическая диэлектрическая проницаемость.

Решение. Чтобы ввести комплексную диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega)$, надо, имея в виду запись электромагнитной волны в виде $E = E_0 \exp[i(kx - \omega t)]$, переписать уравнение Максвелла в следующем виде:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{\epsilon(\omega)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

С учетом материальных уравнений $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, выражение для диэлектрической проницаемости проводящей среды принимает вид

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

где ϵ — эффективная диэлектрическая проницаемость, обусловленная связанными зарядами (см. 3.62). Здесь ϵ считается константой, что справедливо вдали от областей аномальной дисперсии и частот (линий) поглощения для связанных электронов. Из уравнения движения электрона в вязкой среде

$$m^* \dot{\mathbf{v}} = - \frac{m^*}{\tau} \mathbf{v} + e\mathbf{E}$$

получаем выражение для проводимости

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}, \quad \text{где } \sigma_0 = \frac{e^2 n \tau}{m^*}.$$

Окончательно

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \epsilon + i \frac{4\pi n e^2 \tau}{m^* \omega (1 - i\omega\tau)} = \epsilon \left[1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + i/(\omega\tau)} \right],$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m^* \epsilon}$.

Из дисперсионного соотношения $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon'' = n^2 = (n' + in'')^2$ можно найти показатель преломления n' и коэффициент затухания n'' . На высоких частотах, когда $\omega\tau \gg 1$, ε'' и $n'' \rightarrow 0$, $n'^2 = \varepsilon \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$. Следовательно при $\omega > \omega_p$ показатель преломления является чисто вещественной величиной и проводник (металл) становится прозрачным для электромагнитных волн.

Величину τ можно оценить из данных по электропроводности. Так для меди $n \approx 8,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $m^* \approx m_e$, $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon \approx 1$ и $\tau = 2 \cdot 10^{-14} \text{ с}$. Таким образом при $\omega \geq \omega_p = 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$, что соответствует $\lambda \approx 1000 \text{ \AA}$, условие $\omega\tau \gg 1$ выполняется с большим запасом.

$$3.69^* \quad l = \frac{\lambda \ln \alpha}{4\pi \sqrt{\left(\frac{\lambda\omega_p}{2\pi c}\right)^2 - 1}} \approx \frac{c \ln \alpha}{2\omega_p} \approx 280 \text{ \AA}, \quad \text{где } \omega_p = \frac{4}{3\pi} \frac{e^2(2m_e\varepsilon_F)^{3/2}}{\hbar^3 m_e}.$$

Решение. В среде волновое число

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v} = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} n(\omega),$$

где $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ — коэффициент преломления. Для бесстолкновительной электронной плазмы

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Вычислим плазменную частоту

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_e}, \quad \text{где } n = \frac{(2m_e\varepsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Тогда

$$\omega_p^2 = \frac{4}{3\pi} \frac{e^2(2m_e\varepsilon_F)^{3/2}}{\hbar^3 m_e}.$$

Подстановка числовых значений дает $\omega_p = 1,64 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1} > \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 4,2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и

$$n(\omega) = \pm i \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}.$$

Пусть A_0 — амплитуда электромагнитной волны на входе в пленку ($x = 0$). Рассматривая только затухающее решение, запишем

$$\psi(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)} = A_0 e^{-i\omega t} \exp\left(-\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \frac{x}{c}\right).$$

На выходе из пленки интенсивность волны по условию уменьшится в $\alpha = 20$ раз. Таким образом,

$$\frac{|\psi(l, t)|^2}{|\psi(0, t)|^2} = \exp\left(-2 \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \frac{l}{c}\right) = \alpha^{-1},$$

откуда следует ответ:

$$l = \frac{c \ln \alpha}{2 \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} = \frac{\lambda \ln \alpha}{4\pi \sqrt{\left(\frac{\lambda\omega_p}{2\pi c}\right)^2 - 1}} \approx \frac{c \ln \alpha}{2\omega_p} \approx 280 \text{ \AA}.$$

3.70. Как следует из решения задачи 3.68, при не слишком высоких частотах ($\omega\tau \ll 1$) $\epsilon' = \epsilon - 4\pi\sigma\tau$, $\epsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$. У металлов $4\pi\sigma\tau \gg \epsilon \approx 1$, и в указанной области частот $\epsilon'' \ll |\epsilon'| \approx 4\pi\sigma\tau$ и, следовательно, ток проводимости значительно превышает ток смещения. Тогда комплексное волновое число равно

$$k = \left(\frac{\omega}{c}\right) \epsilon^{1/2}(\omega) = \frac{(1+i)}{\delta},$$

где $\delta = c/(2\pi\sigma\omega)^{1/2}$ — скин-глубина проникновения (толщина скин-слоя). Для меди при указанной частоте $\delta \approx 2 \cdot 10^{-4}$ см.

Заметим, что мы рассматриваем здесь нормальный скин-эффект, когда глубина скин-слоя много меньше длины свободного пробега. В этом случае соотношение между плотностью тока и полем носит локальный характер: плотность тока \mathbf{j} в данной точке \mathbf{r} определяется полем \mathbf{E} в этой же точке. С ростом частоты указанное неравенство нарушится в металлах еще в области $\omega\tau \ll 1$, когда $\sigma = \text{const}$. У полупроводников же с ростом частоты сначала нарушается условие $\omega\tau \ll 1$.

3.71* Решение. Уравнение движения электрона в вязкой среде:

$$m^* \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + (e/c) [\mathbf{v}\mathbf{H}] - (m^*/\tau)\mathbf{v},$$

$$\mathbf{H} \parallel z, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{H}.$$

Ищем только среднюю скорость дрейфа \mathbf{v} , опуская вращение вокруг направления \mathbf{H} , не дающее вклада в средний поток; для этого полагаем $\dot{\mathbf{v}} = 0$. Тогда

$$j_x = \sigma \frac{E_x + \omega_c \tau E_y}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad j_y = \sigma \frac{E_y - \omega_c \tau E_x}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad j_z = 0,$$

где $\sigma = e^2 n \tau / m^*$ — удельная проводимость при $H = 0$, $\omega_c = eH / (m^* c)$ — циклотронная частота.

При $E_y = 0$ продольная составляющая плотности тока равна

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + (\omega_c \tau)^2} E_x.$$

Уменьшение тока в этом направлении с ростом H определяет магнитосопротивление. Составляющая плотности тока в перпендикулярном направлении равна

$$j_y = -\sigma \frac{\omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} E_x$$

и является холловской. Наблюдения в этих условиях производятся в диске Корбино.

В пластине ток вдоль нормали отсутствует ($j_y = 0$), поэтому холловское поле $E_y = \omega_c \tau E_x$ и $j_x = \sigma E_x$. В данном случае магнитосопротивление отсутствует. Причина этого состоит в том, что ток течет не только под действием внешнего поля E_x , но и под действием холловского поля E_y . В сильных полях ($\omega_c \tau \gg 1$) $j_y \gg j_x$.

3.72. $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{[1 + (\omega - \omega_c)^2 \tau^2]}$, $\sigma_0 = \frac{e^2 n \tau}{m^*}$, где ω_c — циклотронная частота, n — концентрация электронов. Форма кривой — лоренцева.

$$3.73. \kappa = \frac{\pi^2}{3} \frac{nk_B^2 T d}{\hbar (3\pi^2 n)^{1/3}} \approx 400 \text{ Вт/(см}\cdot\text{К)}.$$

3.74. Полагая, что искомая температура $T \ll \theta$, получим

$$T \approx \sqrt{\frac{5k_B\theta^3}{12\pi^2 s m_e v_F}} \approx 70 \text{ К (медь: } s = 3,7 \cdot 10^5 \text{ см/с, } v_F = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ см/с, } \theta = 347 \text{ К)}.$$

3.75. $\alpha \approx \frac{100\rho e^2 a}{(12\pi^2)^{1/3} \hbar} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$. Приведенный ответ соответствует предположению о независимых колебаниях отдельных атомов, т. е. что $\frac{M_{\text{ат}} \omega_D^2 A^2}{2} \approx \frac{3}{2} k_B T$. Как показано в задаче 2.74, при $T > \theta$ это дает правильную оценку.

$$3.76. \rho = \frac{2m_e \hbar^2 \pi T v_F}{A m_p k_B \theta^2 e^2} \approx 1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{см}.$$

$$3.77. \Lambda = \frac{Ea}{\pi n k_B T} \approx 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}.$$

$$3.78: s \approx 25 \sqrt{\frac{k_B T}{\rho a^3}} \approx 3,3 \cdot 10^5 \text{ см/с}.$$

Решение. Пусть ξ — амплитуда колебаний атомов. Тогда сила, возвращающая атом в положение равновесия, $f = -\alpha \xi$, где α — коэффициент упругости. При колебаниях атома относительно положения равновесия на среднюю потенциальную энергию таких колебаний приходится энергия $k_B T/2$, т. е.

$$\frac{\alpha \xi^2}{2} = \frac{k_B T}{2},$$

откуда $\alpha = \frac{k_B T}{\xi^2}$. Если стержень имеет сечение S , то натяжение (давление), развиваемое в стержне при прохождении звуковой волны,

$$\frac{F}{S} = f n_{\text{пов}} = \alpha \xi n_{\text{пов}},$$

где $n_{\text{пов}}$ — поверхностная плотность атомов, оцениваемая как $1/a^2$. Следовательно,

$$\frac{F}{S} \approx \frac{\alpha \sqrt{\xi^2}}{a^2}.$$

С другой стороны, согласно закону Гука натяжение пропорционально относительному удлинению стержня

$$\frac{F}{S} = E \epsilon \text{ или } \frac{F}{SE} = \epsilon \approx \frac{\sqrt{\xi^2}}{a}.$$

Приравнявая оба выражения, получим

$$\alpha \approx E a.$$

Скорость звука в стержне определяется по известной формуле

$$s = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \simeq \sqrt{\frac{\alpha}{a\rho}} = \sqrt{\frac{k_B T}{a\rho\xi^2}}.$$

По условию задачи $\overline{\xi^2} \simeq 16 \cdot 10^{-4} a^2$. Тогда

$$s \simeq 25 \sqrt{\frac{k_B T}{\rho a^3}} \simeq 3,3 \cdot 10^5 \text{ см/с.}$$

$$3.79^* \quad t \simeq \frac{d^2}{D} = \frac{9}{\pi^2} \frac{d^2 m_e v_F}{k_B T \Lambda} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с, где } v_F = \frac{\hbar}{m_e a} (3\pi^2)^{1/3} \approx 10^8 \text{ см/с}$$

(для $a = 3 \text{ \AA}$).

Решение. Характерное время t , через которое пластинка «почувствует» изменение температуры, оценивается как d^2/D , где D — коэффициент диффузии. Это время также известно, как время «выравнивания».

Коэффициент диффузии есть отношение коэффициентов теплопроводности кристалла κ к его теплоемкости C . При комнатных температурах теплоемкость кристалла практически равна решеточной $C_{\text{реш}}$ и согласно закону Дюлонга—Пти $C = C_{\text{реш}} = 3nk_B T$, где n — плотность атомов. Таким образом

$$D = \frac{\kappa}{C_{\text{реш}}} = \frac{\kappa}{nk_B T}.$$

Коэффициент теплопроводности κ для переноса тепла в газе со средней скоростью частиц v и длиной свободного пробега Λ равен

$$\kappa = \frac{1}{3} C_V \Lambda v,$$

где C_V — теплоемкость единицы объема газа. При комнатных температурах в большинстве металлов почти весь тепловой поток переносят электроны. В применении к электронному газу в качестве v разумно взять v_F , а

$C_V = C_{\text{эл}} = \frac{\pi^2}{2} nk_B^2 \frac{T}{\varepsilon_F} = \frac{\pi^2 nk_B^2 T}{m_e v_F^2}$. Тогда коэффициент электронной теплопроводности

$$\kappa = \frac{\pi^2 nk_B^2 T}{3m_e v_F} \Lambda.$$

Таким образом, коэффициент диффузии

$$D = \frac{\kappa}{C_{\text{реш}}} = \frac{\pi^2 k_B T \Lambda}{9 m_e v_F},$$

откуда искомое время

$$t \simeq \frac{d^2}{D} \approx \frac{9}{\pi^2} \frac{d^2 m_e v_F}{k_B T \Lambda} \simeq 2 \cdot 10^{-2} \text{ с,}$$

где $v_F \simeq \frac{\hbar}{m_e a} (3\pi^2)^{1/3} \sim 10^8 \text{ см/с}$ (рассчитано для постоянной решетки $a \simeq 3 \text{ \AA}$).

3.80. $t \approx \frac{3L^2 \rho R}{\chi \mu} \approx 90 \text{ с}$, где R — универсальная газовая постоянная, а μ — молярная масса меди.

$$3.81. \frac{\kappa(5)}{\kappa(1,25)} = \left(\frac{5}{1,25}\right)^{2/3} \simeq 2,5.$$

$$3.82^* \frac{\eta(2)}{\eta(1)} = \frac{1}{4}.$$

Решение. Вязкость $\eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda = \frac{1}{3} \rho v_F^2 \tau$. Так как ρ и v_F постоянны, то все определяется временем релаксации. Обмен энергией может происходить лишь у частиц в области $k_B T$ вблизи ϵ_F . Когда происходит обмен энергией при столкновении двух атомов гелия, должны быть свободны все уровни, на которые перейдут эти частицы. Так как энергетический интервал свободных уровней $\Delta \epsilon \simeq k_B T$, то для двух частиц вероятность найти два свободных уровня пропорциональна $(\Delta \epsilon)^2 = (k_B T)^2$, а тем самым время релаксации, которое обратно пропорционально вероятности переходов, обратно пропорционально T^2 . Таким образом $\eta(2)/\eta(1) = 1/4$.

$$3.83^* j(T) = \frac{em_e}{2\pi^2 \hbar^3} (k_B T)^2 e^{-A/k_B T}.$$

Решение. Рассмотрим термоэлектронную эмиссию с поверхности металла как испарение электронов из металла. Поскольку максимальная при данной температуре скорость испарения определяется равенством потоков электронов из металла в вакуум и из вакуума в металл, то вычислим последнюю. Газы свободных электронов в металле и в вакууме находятся в равновесии и в контакте. Поэтому их химические потенциалы должны быть одинаковыми. Если принять за уровень отсчета энергии потенциальную энергию электронов в металле и считать ее нулем ($U_{мет} = 0$), то $U_{вак} = A + \mu$.

Поэтому для подсчета плотности электронов в вакууме запишем

$$N = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int f(p) 4\pi p^2 dp = V \int_{A+\mu}^{\infty} \mathcal{D}(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon,$$

где $\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\epsilon - (A + \mu)}$ — плотность числа состояний, $f(\epsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1}$. Вводя новую переменную $\epsilon' = \epsilon - (A + \mu)$, получаем

$$n_{вак} = \frac{N}{V} = \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon'} d\epsilon'}{\exp\left(\frac{\epsilon' + A}{k_B T}\right) + 1}.$$

Здесь $\epsilon' = \frac{p^2}{2m_e}$ — кинетическая энергия электрона, отсчитываемая от уровня $A + \mu$. Поскольку $A \gg k_B T$ ($A \sim 1$ эВ, $k_B T \approx 0,025$ эВ), то

$$n_{вак} = \frac{\sqrt{2} m_e \sqrt{\pi}}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{A}{k_B T}\right) (k_B T)^{3/2}.$$

Нормальная компонента плотности тока

$$j = ez,$$

где $z = \frac{1}{4} n_{\text{вак}} \bar{v}$ — число ударов о единицу площади поверхности металла в единицу времени, \bar{v} — средняя скорость электронов в вакууме. Поскольку мы заменили фермиевскую функцию распределения бальцмановской, то $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_e}}$. Тогда

$$j = \frac{em_e}{2\pi^2 \hbar^3} (k_B T)^2 \exp\left(-\frac{A}{k_B T}\right).$$

$$3.84. A(E) = A - e\sqrt{eE}; j(T, E) = \frac{em}{2\pi^2 \hbar^3} (k_B T)^2 \exp\left(-\frac{A}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{e\sqrt{eE}}{k_B T}\right).$$

$$3.85. \mathcal{E}_{\text{пр}} = -\left[\frac{\hbar c}{\lambda_0} + \frac{\hbar^2}{2m^* a^2} (12\pi^2)^{2/3}\right] = -10,1 \text{ эВ}.$$

$$3.86. s = v_F \sqrt{\frac{m^*}{3M_{\text{ат}}}} = \frac{\hbar}{m^* a} (6\pi^2)^{1/3} \sqrt{\frac{N_A m^*}{3A}} = 1,85 \cdot 10^5 \text{ см/с}.$$

Экспериментальное значение скорости звука в направлении [100]: $s = 1,82 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

$$3.87. \frac{C_{\text{реш}}}{C_{\text{эл}}} \approx \frac{v_F}{2\pi^2 s} \approx 5 \left(\text{здесь } C_{\text{эл}} = \frac{2\pi^2}{3} L \frac{k_B^2 T}{\hbar v_F}\right).$$

Более грубая оценка: если полагать, что $C_{\text{эл}} \approx \frac{Nk_B^2 T}{\epsilon_F}$, то: $\frac{C_{\text{реш}}}{C_{\text{эл}}} \approx \frac{v_F}{3s} \approx 30$.

$$3.88. \rho \approx \frac{\hbar}{4e^2 n^{1/3}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}\cdot\text{см}.$$

3.89. Из рис. 77 в условии задачи видно, что между двумя дефектами имеется примерно 6 интерференционных максимумов, что соответствует 6 полуволнам. Поэтому длина волны фермиевских электронов $\lambda = 14 \text{ \AA}$, т. е.

$$k_F = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 4,5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}. \text{ Так как } k_F = \sqrt{2\pi n}, \text{ то } n = \frac{k_F^2}{2\pi} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}.$$

$$3.90. T_{\text{кон}} = 8 \text{ мК}.$$

Решение. Рассчитаем температуру Ферми гелия-3:

$$T_{\text{Ф}}^{\text{неразб}} = \frac{\hbar^2}{2m_3 k_B} \left(\frac{3\pi^2 \rho_3 N_A}{\mu_3}\right)^{2/3} = 2,05 \text{ К}.$$

После 19-кратного разбавления гелия-3 гелием-4

$$T_{\text{Ф}}^{\text{разб}} = \frac{\hbar^2}{2m_3 k_B} (3\pi^2 n_3^{\text{разб}})^{2/3} \approx \frac{\hbar^2}{2m_3 k_B} \left(3\pi^2 \frac{\rho_4 N_A}{20\mu_4}\right)^{2/3} = 0,33 \text{ К},$$

где оценку концентрации ${}^3\text{He}$ в растворе произвели по очевидному соотношению

$$n_3^{\text{разб}} = \frac{\rho_4 N_A}{20\mu_4}.$$

Поскольку $T = 0,05 \text{ К} \ll 0,33 \text{ К}$, то в указанной области температур жидкий гелий (${}^3\text{He}$) ведет себя во многих отношениях как вырожденный газ ферми-частиц (в отличие от ${}^4\text{He}$).

Эффект понижения температуры максимален в адиабатически обратимом процессе $\delta Q = T dS = C dT$. Рассчитаем энтропию 1 моля ${}^3\text{He}$ при температуре T :

$$S_3 = \int_0^T \frac{C dT}{T} = \int_0^T \frac{\pi^2}{2} k_B N_A \frac{T}{T_F} \frac{dT}{T} = \frac{\pi^2 R T}{2 T_F} = C_3.$$

При данной $T = 0,05 \text{ К}$ энтропии разбавленного и неразбавленного ${}^3\text{He}$

$$S_3^{\text{разб}} = \frac{\pi^2 R}{2 T_F^{\text{разб}}} T = 124 \cdot 10^7 T = 6,2 \cdot 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{К} \cdot \text{моль}};$$

$$S_3^{\text{неразб}} = \frac{\pi^2 R}{2 T_F^{\text{неразб}}} T = 20 \cdot 10^7 T = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{К} \cdot \text{моль}}.$$

Энтропия ${}^4\text{He}$ на несколько порядков меньше. Покажем это. При низких температурах молярная теплоемкость жидкого ${}^4\text{He}$ равна теплоемкости фононного газа

$$C_4 = \frac{C_{\text{тв. тела}}}{3} = \frac{4}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3,$$

откуда энтропия

$$S_4 = \int_0^T \frac{C_4 dT}{T} = \int_0^T \frac{4}{5} \pi^4 R \frac{T^2}{\theta^3} dT = \frac{C_4}{3} = \frac{4}{15} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 = 31,5 \cdot 10^4 T^3 \approx 40 \text{ эрг}/(\text{К} \cdot \text{моль}).$$

Поскольку $S_4 \ll S_3$, то изменением энтропии ${}^4\text{He}$ пренебрегаем. В адиабатическом обратимом процессе энтропия не изменяется ($\Delta S = 0$), поэтому

$$S_3^{\text{разб}} - S_3^{\text{неразб}} = \frac{\pi^2 R}{2 T_F^{\text{разб}}} T_{\text{кон}} - \frac{\pi^2 R}{2 T_F^{\text{неразб}}} T_{\text{нач}} = 0, \text{ т. е.}$$

$$T_{\text{кон}} = \frac{T_F^{\text{разб}}}{T_F^{\text{неразб}}} T = 8 \text{ мК}.$$

3.91. В изотермическом процессе $Q = T (S_3^{\text{разб}} - S_3^{\text{неразб}}) =$
 $= \frac{\pi^2 R}{2} T^2 \left(\frac{1}{T_F^{\text{разб}}} - \frac{1}{T_F^{\text{неразб}}} \right) = 2,6 \cdot 10^6 \text{ эрг}$ (см. также решение задачи 3.90.).

3.92*

Решение. $n \leq 4 \cdot 10^{-16} \text{ см}$

Обозначим радиус элементарной ячейки через R . Если a — среднее расстояние между электронами, то $4\pi R^3/3 = a^3$. Поскольку суммарный заряд элементарной ячейки кристалла равен нулю в силу электронейтральности, то мы имеем положительно заряженный шар, в центре которого расположен электрон. При отклонении электрона от центра шара на него действует сила, выражение для которой можно получить из теоремы Гаусса:

$F = \frac{e^2}{R^3} r$. Под действием этой силы электрон совершает гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}$. Соответствующая амплитуда нулевых колебаний находится из условия $\frac{m\omega^2 A_0^2}{2} = \frac{3}{2} \hbar \omega$, откуда $A = \sqrt{\frac{3\hbar}{m\omega}}$. Из условия устойчивости $A_0 < a$ получаем $a > \frac{27\hbar^2}{4\pi m e^2 a^4} = \frac{27r_B}{4\pi a^4}$, где r_B — боровский радиус. Для концентрации электронов получаем $n = \frac{1}{a^3} \ll 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

3.93* $\mathcal{E}_c = -(W + \mathcal{E}_{св} + \frac{3}{5} \epsilon_F) = -15,16 \text{ эВ}$ от уровня вакуума, где $\epsilon_F = \Delta\mathcal{E}/2 = 7 \text{ эВ}$.

Решение. Считая, что энергия связи обусловлена исключительно изменением энергии электронов, мы получим, что энергия связи на один электрон составляет 3,26 эВ. Действительно,

$$\mathcal{E}_{св} = \frac{q + \Lambda}{N_A} = 3,26 \text{ эВ}$$



Рис. 227

Для элементов первой группы зона проводимости заполнена наполовину. Поэтому энергия Ферми $\epsilon_F = \Delta\mathcal{E}/2 = 7 \text{ эВ}$. Средняя энергия на один электрон в модели свободных электронов составляет $\frac{3}{5} \epsilon_F$ (см. задачу 3.3*). Разница между энергией электрона в атоме и уровнем средней энергии электрона в зоне проводимости (рис. 227) как раз и равна энергии связи. Таким образом, дно

зоны проводимости расположено на глубине $\mathcal{E}_c = -\left(W + \mathcal{E}_{св} + \frac{3}{5} \epsilon_F\right) = -(7,7 + 3,26 + 4,2) = -15,16 \text{ эВ}$ от уровня вакуума. Для простоты вычислений в условии задачи задан квадратичный закон дисперсии (модель свободных электронов). В то же время схема ионной структуры соответствует модели сильной связи (периодический закон дисперсии). Указанное упрощение незначительно изменяет числовой ответ.

3.94. $\mathcal{E}_c = -\left(|\mathcal{E}_{4s}| + \mathcal{E}_{св} + \frac{3}{5} \epsilon_F\right) = -6,55 \text{ эВ}$, где $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} (6\pi^2)^{2/3} = 2,12 \text{ эВ}$.

3.95. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\lambda\epsilon_F}{hc} = 0,126$, где $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} (6\pi^2)^{2/3} = 3,23 \text{ эВ}$.

3.96* Решение. Поскольку элементы первой группы имеют валентность равную единице, то в первой зоне Бриллюэна занята ровно половина состояний. В силу симметричного вида спектра половинное заполнение соответствует $\epsilon_F = 0$, откуда получаем уравнение границ ферми-поверхности:

$\cos \frac{k_x a}{2} = 0$, $i = x, y, z$ или $k_x a = \pi n$, $k_y a = \pi m$, $k_z a = \pi l$. Первой зоне Бриллюэна соответствуют значения $n = m = l = \pm 1$, и поэтому ферми-поверхность представляет собой куб с ребром $2\pi/a$. Таким образом, объем первой зоны Бриллюэна

$$V = 2 \left(\frac{2\pi}{a} \right)^3 = 6,52 \cdot 10^{24} \text{ см}^3.$$

Для объемноцентрированной решетки первая зона Бриллюэна представляет собой ромбический додекаэдр — правильный 12-гранник, состоящий из ромбов. При этом поверхность Ферми вписана в этот многогранник (рис. 228). Для данного закона дисперсии скорость электронов максимальна в центре каждого квадрата, а на ребрах обращается в нуль (см. задачу 3.35). Отметим, что в приближении свободных электронов ферми-поверхность натрия должна быть сферой. Экспериментальные исследования, например, при помощи циклотронного резонанса, показывают, что в натрии она очень близка к сфере, а эффективная масса электрона почти равна массе свободного электрона.

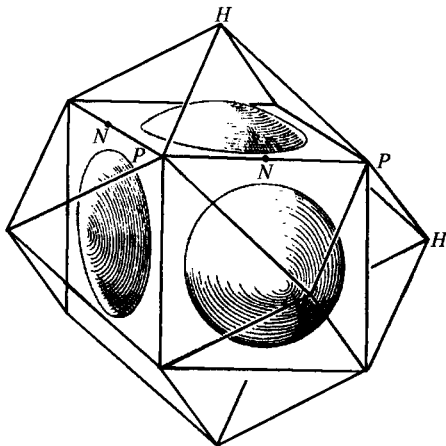


Рис. 228

3.97* Решение. Легко видеть, что в задаче 3.35 существует 4 вектора нестинга с длинами $|\mathbf{Q}| = \sqrt{2} \frac{\pi}{a}$ и направленным вдоль биссектрис координатных углов, а в ферми-кубе существует 6 векторов нестинга с длинами $|\mathbf{Q}| = 2 \frac{\pi}{a}$ и направленными вдоль трех осей координат. Указанные ситуации носят название полного нестинга.

3.98* Решение. Для проводящих тел эффективная диэлектрическая проницаемость имеет вид (см. задачу 3.68) $\epsilon_{эфф} = \epsilon_l + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}$, где проводимость $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$, $\sigma_0 = \frac{e^2 N \tau}{m^*} = eN\mu$, N — концентрация носителей, τ — время релаксации импульса (время свободного пробега). Показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\epsilon_{эфф}} = \sqrt{\epsilon_l \left[1 + i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 - i\omega\tau)} \right]},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{\epsilon_l m^*}$ — квадрат плазменной частоты.

По условию задачи $\omega\tau = \omega \frac{m^*}{e} = 10,1$. Поскольку $\omega\tau \gg 1$, то показатель

преломления дырки $n \simeq \sqrt{\epsilon_l \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$. Минимум отражения, естественно, достигается при $n = 1$, откуда

$$\omega_p^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{1}{\epsilon_l}\right) = \frac{4\pi e^2 N}{\epsilon_l m^*}. \text{ Т.о. } N = \frac{\omega^2 (\epsilon_l + 1) m^*}{4\pi e^2} = 2,4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}.$$

Конечно, n является комплексной величиной $n = n_0 + ix$ и поэтому наблюдается именно минимум отражения. Если бы мы имели диэлектрик, то

$R = \left(\frac{n_0 - 1}{n_0 + 1}\right)^2$, т. к. $x = 0$. Поэтому при $n_0 = 1$ мы имели бы $R = 0$. В общем

случае проводящей среды $R = \frac{(n_0 - 1)^2 + x^2}{(n_0 + 1)^2 + x^2}$, и при $n_0 = 1$ мы имеем минимум.

§ 4. Электроны в полупроводниках и низкоразмерных системах¹⁾

$$4.1^*: l_{DH} \approx \sqrt{\frac{\epsilon k_B T}{8\pi n_0 e^2}} \approx 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Решение. При помещении полупроводника в однородное электрическое поле, нормальное к поверхности, вблизи нее происходит перераспределение электронов и возникает неоднородная объемная плотность заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = e \delta n = e[n(\mathbf{r}) - n_0],$$

Это приводит к возникновению неоднородного потенциала $\varphi(\mathbf{r})$, определяемого уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) \equiv \Delta \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi e}{\epsilon} [n(\mathbf{r}) - n_0].$$

Для невырожденного электронного газа, подчиняющегося распределению Больцмана можно записать

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left[-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{k_B T}\right], \quad e > 0.$$

Считая, что внешнее поле слабо возмущает равновесное распределение электронов, т. е. $e\varphi(\mathbf{r}) \ll k_B T$, можно записать

$$n(\mathbf{r}) - n_0 \simeq -\frac{n_0 e}{k_B T} \varphi(\mathbf{r}), \text{ и}$$

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e^2 n_0}{\epsilon k_B T} \varphi(\mathbf{r}).$$

¹⁾ Во всех задачах этого раздела энергия электронов отсчитывается от дна зоны проводимости.

Направив ось x вглубь полупроводника нормально к его поверхности и считая внешнее поле однородным, получим

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon k_B T} \varphi(x).$$

Решение этого уравнения, затухающее вглубь полупроводника,

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-x/l_{\text{DH}}}, \text{ где } l_{\text{DH}} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{4\pi e^2 n_0}}$$

— радиус экранирования Дебая—Хюккеля или дебаевская длина экранирования, а φ_0 — потенциал на поверхности полупроводника. Подстановка числовых значений дает $l_{\text{DH}} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см.

Так как $E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}$, то внешнее поле спадает вглубь по тому же закону

$$E(x) = E_0 e^{-x/l_{\text{DH}}}, \text{ где } E_0 = \frac{\varphi_0}{l_{\text{DH}}} \text{ — поле на поверхности.}$$

Надо также учесть наличие в невырожденном (собственном) полупроводнике дырок с концентрацией $p_0 = n_0$ (соотношение электронейтральности), и тогда

$$l_{\text{DH}} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{8\pi e^2 n_0}} \approx 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Если рассматривать электроны в полупроводнике как электронную компоненту плазмы, то можно получить выражение для дебаевской длины экранирования иначе. Как известно, в этом случае существуют собственные колебания электронов с частотой $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e \varepsilon}$. В невырожденном случае ха-

рактерная скорость электронов $v_0 \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}$ (в вырожденном $v_0 \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{m_e}}$). Зная временной масштаб $\tau \approx \frac{1}{\omega_p}$, можно оценить характерный пространственный масштаб

$$v_0 \tau \approx \frac{v_0}{\omega_p} = \begin{cases} l_{\text{DH}} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{4\pi e^2 n_0}} & \text{— в невырожденном случае;} \\ l_{\text{TF}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_F}{4\pi e^2 n_0}} & \text{— в вырожденном случае.} \end{cases}$$

$$4.2. \mathcal{E}_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m^*}{m} \frac{1}{\varepsilon} R_y = -\frac{1}{n^2} \cdot 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ эВ;}$$

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon m}{m^*} r_B = n^2 \cdot 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

$$4.3. \mathcal{E}_{\text{ЭК}} = \frac{\mu e^4}{2\varepsilon^2 \hbar^2}; \quad r_{\text{ЭК}} = \frac{\varepsilon \hbar^2}{\mu e^2}; \quad M_{\text{ЭК}} = m_+^* + m_-^*, \text{ где } \mu = \frac{m_+^* m_-^*}{m_+^* + m_-^*} \text{ — приве-}$$

денная масса.

$$4.4^* n_{\text{пов}} = \frac{E^2}{8\pi k_B T \varepsilon} \approx 1,07 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

Решение. Если внешнее электрическое поле E перпендикулярно к поверхности пластинки, то поле $E_{\text{пл}}$ внутри пластинки в ϵ раз меньше ($D_{1n} = D_{2n}$ — граничное условие на вектор электрической индукции \mathbf{D}), т. е. $\epsilon E_{\text{пл}} = E$. Под воздействием электрического поля электроны начинают смещаться к одной из поверхностей пластинки. Кроме этого обычного потока электронов возникает встречный диффузионный, связанный с избытком частиц на одной из поверхностей пластинки. Этот поток в соответствии с законом Фика записывается как $eD \frac{dn}{dx}$, где D — коэффициент диффузии заряженной частицы (считаем, что все переменные величины меняются только вдоль оси Ox , направленной вглубь полупроводника, нормально к его поверхности). Далее и везде считаем $e > 0$. Условием равновесия является отсутствие в системе макроскопических потоков, т. е.

$$j = \sigma E_{\text{пл}} + eD \frac{dn}{dx} = 0$$

и, следовательно, в пластинке устанавливается неоднородное распределение электронов.

Проводимость полупроводника $\sigma = en\mu$, где μ — подвижность электрона, связанная с коэффициентом диффузии формулой Эйнштейна (для слабонервновесного случая):

$$\mu = \frac{eD}{k_B T}$$

Подставив это в первое уравнение, получим

$$-neE_{\text{пл}} = k_B T \frac{dn}{dx}$$

Из уравнения Пуассона

$$\text{div } \mathbf{E}_{\text{пл}} = \frac{4\pi\rho}{\epsilon} = -\frac{4\pi e}{\epsilon} n$$

следует, что

$$-ne = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{dE_{\text{пл}}}{dx}$$

Перемножая два уравнения, получаем дифференциальное уравнение

$$E_{\text{пл}} dE_{\text{пл}} = \frac{4\pi k_B T}{\epsilon} dn,$$

решение которого и дает искомую концентрацию электронов внутри полупроводника вблизи его поверхности

$$n_{\text{пов}} = \frac{\epsilon E_{\text{пл}}^2}{8\pi k_B T} = \frac{E^2}{8\pi k_B T \epsilon} = 1,07 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

$$4.5. n = \frac{2^{12} m^{*3} e^6}{3^4 \hbar^6 \pi^5 \epsilon} = 9,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

4.6* $n_- = Q_- e^{\mu/k_B T}$ ($\mu < 0$), где статистический фактор зоны проводимости $Q_- = 2 \frac{(2\pi m^* k_B T)^{3/2}}{(2\pi \hbar)^3}$. Выражение для Q_- можно переписать в форме,

$$\text{удобной для расчетов } Q_- = 2,51 \cdot 10^{19} \left(\frac{m^*}{m} \right)^{3/2} \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} \text{ см}^{-3}.$$

Решение. В основном состоянии собственного полупроводника при $T = 0$ К в зоне проводимости нет свободных электронов. При повышении температуры часть электронов из валентной зоны переходит в зону проводимости. На графике рис. 229 изображена функция распределения Ферми—Дирака. При $e^{-\mu/k_B T} \gg 1$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1} \approx \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right).$$

Это есть вероятность заполнения электронных состояний в полупроводнике при $T > 0$. Валентная зона почти полностью заполнена, а в зоне проводимости электронов мало, и они представляют собой практически невырожденный идеальный газ.

Если в зоне проводимости содержится N электронов, то

$$N = \int f(k) dN(k),$$

где $f(k)$ — вероятность заполнения состояния с квазиимпульсом k , $dN(k)$ — число возможных электронных состояний, приходящихся на интервал волновых чисел от k до $k + dk$. Оно вычисляется по известной формуле

$$dN(k) = 2 \frac{V 4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3},$$

где V — объем полупроводника. При подсчете N лучше перейти к энергиям

$$k^2 = \frac{2m^* \varepsilon}{\hbar^2}; \quad dk = \frac{d\varepsilon}{\hbar} \sqrt{\frac{m^*}{2\varepsilon}}.$$

Пределы интегрирования при этом будут $[0, W]$, где W — ширина зоны проводимости. Для большинства полупроводников $W \lesssim 1$ эВ, и при комнатной температуре $\exp(-W/k_B T) \ll 1$. Поэтому верхний предел в интеграле можно заменить на ∞ .

$$n_- = \frac{N}{V} = \frac{8\pi e^{\mu/k_B T} \sqrt{2m^*{}^3}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/k_B T} d\varepsilon = 2 \frac{(2\pi m^* k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} e^{\mu/k_B T}.$$

Полученный результат иногда записывают и так:

$$n_- = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{\mu/k_B T} m_-^{*3/2} = Q_- e^{\mu/k_B T},$$

где Q_- называется статическим фактором зоны проводимости.

Совершенно аналогично можно получить концентрацию n_+ дырок в валентной зоне (потолок валентной зоны находится при $\varepsilon = -\Delta$):

$$n_+ = \int_{-\infty}^{-\Delta} \varphi(\varepsilon) N_v(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где $\varphi(\varepsilon) = 1 - f(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1} \approx \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right)$ — вероятность появления дырки (отсутствие электрона) на уровне с энергией ε .

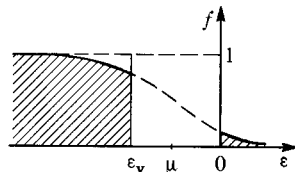


Рис. 229

$$N_V(\varepsilon) = \frac{2m_+^{3/2}}{\sqrt{2}\pi\hbar^3} \sqrt{-(\Delta + \varepsilon)}$$

— плотность состояний в валентной зоне. Вычисляя интеграл, получаем

$$n_+ = 2 \left(\frac{m_+^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu + \Delta}{k_B T}\right) = Q_+ \exp\left(-\frac{\mu + \Delta}{k_B T}\right),$$

где Q_+ — статистический фактор валентной зоны.

4.7. $n_+ n_- = Q_+ Q_- e^{-\Delta/k_B T} = n_i^2$, где $n_+ = n_- = n_i$ — концентрация носителей в полупроводнике без примесей (собственном полупроводнике), Q_+ и Q_- — статфакторы валентной зоны и зоны проводимости, $\Delta > 0$ — ширина запрещенной зоны.

$$\mu(T) = -\frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_+^*}{m_-^*}.$$

Таким образом при $T = 0$, а также при $m_-^* = m_+^*$ и $T \neq 0$, уровень химпотенциала (уровень Ферми) находится посередине запрещенной зоны.

$$\mathbf{4.8.} \quad \alpha = \frac{n_{+1}}{n_{+1} + n_{+2}} = \frac{m_{+1}^{3/2}}{m_{+1}^{3/2} + m_{+2}^{3/2}} \approx 0,04.$$

$$\mathbf{4.9.} \quad n_- = \frac{1}{2} n_d + \sqrt{\frac{1}{4} n_d^2 + n_i^2} \approx n_d = 6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3};$$

$$n_+ = -\frac{1}{2} n_d + \sqrt{\frac{1}{4} n_d^2 + n_i^2} \approx \frac{n_i^2}{n_d} = 0,67 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}.$$

4.10* Решение. При не слишком высоких температурах переходы электронов осуществляются главным образом с донорных уровней в зону проводимости.

$$n_-(T) = n_+(T) + n_d^+(T),$$

где $n_d^+(T)$ — концентрация ионизованных, т. е. потерявших электрон, доноров. Последняя находится следующим образом:

$$n_d^+ = n_d [1 - f(\mathcal{E}, T)] = \frac{n_d}{1 + \exp\left(\frac{\mathcal{E}_d + \mu}{k_B T}\right)}.$$

Здесь энергия донорного уровня $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_d$, где $\mathcal{E}_d > 0$. Используя результаты задачи 4.6, получаем

$$Q_- \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) = Q_+ \exp\left(-\frac{\mu + \Delta}{k_B T}\right) + \frac{n_d}{1 + \exp\left(\frac{\mathcal{E}_d + \mu}{k_B T}\right)}.$$

Обозначив $e^{\frac{\mu}{k_B T}} = x$, получаем уравнение

$$x^3 + x^2 e^{-\mathcal{E}_d/k_B T} - \left(\frac{n_d}{Q_-} e^{-\mathcal{E}_d/k_B T} + \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\Delta/k_B T}\right) x - \frac{Q_+}{Q_-} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_d + \Delta}{k_B T}\right) = 0.$$

Пусть температура настолько низкая, что $\mathcal{E}_d \geq k_B T$. Тогда переходы «зона-зона» подавлены и электроны в зоне проводимости имеют примесное происхождение. Следовательно можно пренебречь всеми членами, пропорциональными $\propto \exp(-\Delta/k_B T)$. Тогда получаем квадратное уравнение

$$x^2 + x e^{-\mathcal{E}_d/k_B T} - \frac{n_d}{Q_-} e^{-\mathcal{E}_d/k_B T} = 0.$$

Заметим, что это уравнение можно было сразу получить из условия электронейтральности, если в нем пренебречь $n_+(T)$ по сравнению с $n_d(T)$. Решение этого уравнения

$$x = -\frac{1}{2} e^{-\mathcal{E}_d/k_B T} + \sqrt{\frac{1}{4} \exp\left(-\frac{2\mathcal{E}_d}{k_B T}\right) + \frac{n_d}{Q_-} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_d}{k_B T}\right)}.$$

При очень низких температурах, когда $\frac{n_d}{Q_-} \gg \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_d}{k_B T}\right)$, $x \simeq$

$\simeq \sqrt{\frac{n_d}{Q_-} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_d}{2k_B T}\right)}$ и $\mu = -\frac{\mathcal{E}_d}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{n_d}{Q_-}$ — уровень химпотенциала расположен посредине между зонами проводимости и уровнем доноров (роль валентной зоны «перешла» к донорам), и в этой области температур мы имеем частичное заполнение донорных уровней электронами.

С повышением температуры, когда $\frac{n_d}{Q_-} \ll \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_d}{k_B T}\right)$, но $n_d \gg Q_+ \cdot \exp\left(-\frac{\Delta - \mathcal{E}_d}{k_B T}\right)$, $x \simeq \frac{n_d}{Q_-}$. Таким образом, $\mu = k_B T \ln \frac{n_d}{Q_-} < 0$, и в силу того, что $\ln \frac{n_d}{Q_-} < -\frac{\mathcal{E}_d}{k_B T} + \ln \frac{1}{4}$, $\mu < -\mathcal{E}_d$, т. е. видно, что химпотенциал при повышении температуры опускается ниже донорного уровня, что физически означает опустошение донорного уровня — все электроны с доноров уходят в зону проводимости: $n_-(T) = Q_- \cdot x = n_d$. Из закона действующих масс (или «правила рычага») $n_+ n_- = n_i^2$ найдем

$$n_+ = \frac{n_i^2(T)}{n_d}.$$

При дальнейшем повышении температуры уровень химического потенциала опускается вглубь запрещенной зоны и величина $x = e^{\mu/k_B T} \rightarrow 0$. Напомним также, что для полупроводников с шириной запрещенной зоны $\Delta \simeq 1$ эВ при любых разумных температурах $e^{-\Delta/k_B T} \ll 1$. В этом случае в исходном кубическом уравнении можно отбросить x^3 по сравнению с $x^2 e^{-\mathcal{E}_d/k_B T}$, так как $\Delta \gg \mathcal{E}_d$. Кроме того, если $n_d \gg Q_+ \exp\left(-\frac{\Delta - \mathcal{E}_d}{k_B T}\right)$, получим уравнение

$$x^2 - \frac{n_d}{Q_-} x - \frac{Q_+}{Q_-} e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} = 0,$$

решение которого есть $x = \frac{n_d}{2Q_-} + \sqrt{\frac{n_d^2}{4Q_-^2} + \frac{Q_+}{Q_-} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right)}$.

Если $\frac{n_d^2}{4Q_-} \gg \frac{Q_+}{Q_-} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right)$, т. е. $n_d^2 \gg 2Q_- Q_+ \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right) = 2n_i^2(T)$

(что соответствует не очень высоким температурам), то $x = \frac{n_d}{Q_-}$ и это совпадает с предыдущим случаем.

В обратном предельном случае, т. е. при высоких температурах, когда $2n_i^2(T) \gg n_d^2$ $x \simeq \sqrt{\frac{Q_+}{Q_-}} \exp\left(-\frac{\Delta}{2k_B T}\right)$, откуда $\mu = -\frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4}k_B T \ln \frac{m_+^*}{m_-^*}$, $n_-(T) = Q_- x = n_1(T)$, и мы приходим к случаю беспримесного полупроводника.

Итак, для полупроводника с примесью только одного типа выделяются три характерные температурные зависимости концентрации носителей:

- 1) «низкие» температуры $T \rightarrow 0$ $n_-(T) = \sqrt{n_d Q_-} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_d}{2k_B T}\right)$;
- 2) «средние» температуры $k_B T \gtrsim \mathcal{E}_d$ $n_-(T) = n_d = \text{const}$;
- 3) «высокие» температуры $\Delta \gg k_B T \gg \mathcal{E}_d$:

$$n_-(T) = n_i(T) = \sqrt{Q_+ Q_-} \exp\left(-\frac{\Delta}{2k_B T}\right).$$

Пренебрегая слабой степенной зависимостью $Q_-(T)$ по сравнению с экспонентой, получаем график $\ln n_-(T) = f\left(\frac{1}{T}\right)$, изображенный на рис. 230,

где обозначены углы такие, что $\text{tg } \alpha = -\frac{\Delta}{2k_B}$ и $\text{tg } \beta = -\frac{\mathcal{E}_d}{2k_B}$.

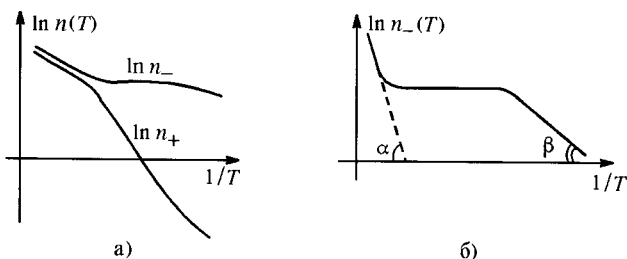


Рис. 230

Поскольку $n_+ = \frac{n_i^2(T)}{n_-(T)}$, то в тех же областях имеем:

- 1) $n_+(T) = Q_+ \sqrt{\frac{Q_-}{n_d}} \exp\left(-\frac{\Delta - \mathcal{E}_d/2}{k_B T}\right)$;
- 2) $n_+(T) = \frac{Q_+ Q_-}{n_d} \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right)$;
- 3) $n_+(T) = \sqrt{Q_+ Q_-} \exp\left(-\frac{\Delta}{2k_B T}\right)$.

$$4.11. \Phi = \frac{\varepsilon U_0}{8\pi e l} s v \Delta \approx 0,92 \text{ Вт.}$$

$$4.12. n_- = n_+ = \frac{(2\mu\Delta\varepsilon)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} = 0,329 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}, \text{ где } \mu \text{ — приведенная масса}$$

электрона и дырки; $\varepsilon_{\bar{F}} + \varepsilon_{\bar{F}}^{\dagger} = \Delta\varepsilon$, откуда $\varepsilon_{\bar{F}} = \Delta\varepsilon \frac{m_+^*}{m_+^* + m_-^*} = 0,015 \text{ эВ}$;

$$\varepsilon_{\bar{F}}^{\dagger} = \Delta\varepsilon \frac{m_-^*}{m_+^* + m_-^*} = 0,025 \text{ эВ.}$$

$$4.13. \mathcal{E}_{\text{ион}}^{\text{As}} = \frac{1}{2} \frac{m_-^*}{m} \mathcal{E}_{\text{ион}}^{\text{H}} = 0,0128 \text{ эВ.}$$

4.14. Согласно условию задачи электрон является медленным, т. е. $ka, k'a \ll 1$, где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновые векторы электрона до и после рассеяния, а a — постоянная решетки. Так как для длинноволновых фононов также $Ka \ll 1$, то закон сохранения импульса можно записать в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}' \pm \mathbf{K}$. Угол φ между \mathbf{p} и \mathbf{K} определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{s}{v} \pm \frac{K}{(2k)},$$

где верхний знак отвечает испусканию, а нижний — поглощению фонона.

$$4.15. p_{\text{F}} = \hbar (2\pi n_s)^{1/2} = 8,32 \cdot 10^{-21} \text{ г} \cdot \text{см/с.}$$

$$4.16. \Lambda = \frac{\hbar}{R_{\square} e^2} \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}} \approx 14,5 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 14,5 \text{ мкм.}$$

$$4.17. eV = -2k_{\text{B}}T \ln \frac{n_i}{n} = 0,77 \text{ эВ.}$$

$$4.18. \frac{\mathcal{J}_s(T-\Delta T)}{\mathcal{J}_s(T)} = \left(\frac{T-\Delta T}{T} \right)^3 \exp \left(-\frac{\Delta}{k_{\text{B}}T} \frac{\Delta T}{T-\Delta T} \right) \approx 0,106;$$

Выпрямление начнет исчезать при

$$T > T^* \simeq \frac{\Delta}{2k_{\text{B}}} \left\{ \ln \left[\frac{2}{n_{\text{пр}}} \left(\frac{m^* k_{\text{B}} T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right] \right\}^{-1} \approx 490 \text{ К.}$$

Решение. Оценим величину концентрации собственных носителей в материале диода (она будет одна и та же как в полупроводнике n -типа, так и p -типа) при 20°C

$$n_i = 2 \left(\frac{m^* k_{\text{B}} T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-\Delta/(2k_{\text{B}}T)} \approx 3,84 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

Таким образом, видно, что при комнатной температуре $n_i \ll n_{\text{пр}}$, и это означает, что по обе стороны ($p-n$) перехода основными носителями являются примеси (доноры в полупроводнике n -типа и акцепторы в полупроводнике p -типа). Концентрации неосновных носителей (дырок в n -области и электронов в p -области)

$$n_+ = n_- = \frac{n_i^2}{n_{\text{пр}}} = n = 4 \left(\frac{m^* k_{\text{B}} T}{2\pi \hbar^2} \right)^3 \frac{e^{-\Delta/(k_{\text{B}}T)}}{n_{\text{пр}}}.$$

Ток насыщения диода $\mathcal{J}_s(T)$ возникает при запертом напряжении, когда для основных носителей на границе ($p-n$)-перехода возникает потенциальный барьер, а для неосновных носителей — нет. Этот ток определяется произведением концентрации неосновных носителей n на их подвижность. Так как по условию задачи время жизни неосновных носителей, а значит и их подвижность, не зависит от температуры, то

$$\frac{\mathcal{J}_s(T-\Delta T)}{\mathcal{J}_s(T)} = \frac{n(T-\Delta T)}{n(T)} = \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right)^3 \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T} \frac{\Delta T}{T-\Delta T}\right) \approx 0,106.$$

Очевидно, что условием исчезновения эффекта выпрямления является равенство токов основных и неосновных носителей, т. е.

$$n = n_{\text{пр}} \text{ или } n_{\text{пр}} = n_i = 2 \left(\frac{m^* k_B T^*}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\Delta/(2k_B T^*)}.$$

Это трансцендентное уравнение, но главная зависимость от температуры — в экспоненте. Поэтому вне показателя экспоненты можно заменить T^* на T , и тогда искомое

$$T^* \approx \frac{\Delta}{2k_B} \left\{ \ln \left[\frac{2}{n_{\text{пр}}} \left(\frac{m^* k_B T^*}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \right] \right\}^{-1} \approx 490 \text{ К}.$$

(Для сравнения приведем точное решение: $T = 454 \text{ К}$).

$$4.19. j_s = \frac{k_B T}{eSR} = 1,29 \text{ А/м}^2.$$

$$4.20. \sigma \approx \frac{ne^2 a^2 v}{3k_B T} \approx 0,02 \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

Указание. Воспользоваться формулой Эйнштейна для подвижности носителей $\mu = \frac{eD}{k_B T}$, где D — коэффициент диффузии.

$$4.21. l_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{\mu k_B T \tau}{e}} \approx 0,23 \text{ см}.$$

4.22. Концентрацию доноров можно найти из уравнения

$$\alpha = \frac{n_d + [n_d^2 + 4n_i^2(T)]^{1/2}}{n_d + [n_d^2 + 4n_i^2(T_0)]^{1/2}},$$

где $n_i(T) \approx 1,18 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$; $n_i(T_0) \approx 1,4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$;

$$n_d \approx \frac{2n_i(T)}{2\alpha - 1} \approx 0,1n_i(T) \approx 1,2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

$$4.23. \frac{n'_+}{n_+} = \frac{n_{A1}}{n_a} = \frac{\sigma p N_A j t}{A S n_a} \approx 514.$$

$$4.24. H = \sqrt{\frac{\varepsilon V}{2\pi n e}} \approx 0,8 \text{ мкм}; C = \frac{\varepsilon S}{4\pi H} = 1,17 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3} \approx 0,013 \text{ мкФ}.$$

4.25*. Проводимость n -типа, концентрация электронов

$$n = Q_- \exp\left(-\frac{\Delta - \mathcal{E}_2}{k_B T}\right) = 8,34 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}.$$

Решение. При температуре $T = 0$ К электроны стремятся занять низшие энергетические состояния. Поскольку в валентной зоне все состояния заняты, но имеются свободные состояния на акцепторах, то электроны доноров перейдут туда. В результате образуются положительно и отрицательно заряженные ионы. При температурах больше нуля, но таких, что $\mathcal{E}_3 < k_B T \ll \Delta$ часть электронов с примесных уровней перейдет в зону проводимости, а собственные дырки в валентной зоне будут отсутствовать. В этом случае условие электронейтральности примет вид:

$$n_- + n_{\text{Au}}^{1-} + 2n_{\text{Au}}^{2-} = n_{\text{Sb}},$$

где n_- — концентрация электронов в зоне проводимости, n_{Au}^{1-} — концентрация атомов золота, захвативших один электрон (на уровень с энергией $(-\Delta + \mathcal{E}_1)$), n_{Au}^{2-} — захвативших два электрона (один на уровень с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_1$, другой на уровень с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_2$). При этом, конечно, эти атомы нужно рассматривать как различные

$$n_{\text{Au}}^{1-} + n_{\text{Au}}^{2-} = n_{\text{Au}}.$$

Из этих уравнений получаем:

$$n_- + n_{\text{Au}}^{2-} = n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}.$$

Вероятность заполнения электроном уровня с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_2$

$$f(-\Delta + \mathcal{E}_2) = \frac{n_{\text{Au}}^{2-}}{n_{\text{Au}}} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2 - \mu}{k_B T}\right)}.$$

Если $n_{\text{Sb}} < n_{\text{Au}}$, то уровень Au^{2-} с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_2$ заполнить нечем. Так как $n_- = Q_- e^{\mu/k_B T}$, то обозначив $x = e^{\mu/k_B T}$, получаем уравнение

$$Q_- x + n_{\text{Au}} \frac{x}{x + \exp\left(-\frac{\Delta - \mathcal{E}_2}{k_B T}\right)} = n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}.$$

откуда

$$x^2 + x \left[\exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_B T}\right) - \frac{n_{\text{Sb}} - 2n_{\text{Au}}}{Q_-} \right] - \frac{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}}{Q_-} \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_B T}\right) = 0.$$

Поскольку $\exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_B T}\right) \simeq e^{-30} \simeq 10^{-13} \ll \frac{n_{\text{Sb}} - 2n_{\text{Au}}}{Q_-} \sim 10^{-4}$, то

$$x = -\frac{2n_{\text{Au}} - n_{\text{Sb}}}{2Q_-} + \sqrt{\left(\frac{2n_{\text{Au}} - n_{\text{Sb}}}{2Q_-}\right)^2 + \frac{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}}{Q_-} \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_B T}\right)} \simeq \frac{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}}{2n_{\text{Au}} - n_{\text{Sb}}} \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_B T}\right),$$

откуда $\mu = -\Delta + \mathcal{E}_2 + k_B T \ln \frac{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}}{2n_{\text{Au}} - n_{\text{Sb}}}$.

При $n_{\text{Sb}} = 1,5 n_{\text{Au}}$ $\mu = -\Delta + \mathcal{E}_2 + k_{\text{B}}T \ln 1 = -\Delta + \mathcal{E}_2 = -0,2 \text{ эВ}$, т. е. уровень Ферми совпадает с уровнем $(-\Delta + \mathcal{E}_2)$. Заметим, что наше предположение о полной занятости первого уровня $(-\Delta + \mathcal{E}_1)$ оправдалось:

$$\mu - (-\Delta + \mathcal{E}_1) \simeq \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 0,35 \text{ эВ} \gg k_{\text{B}}T = 0,0066 \text{ эВ}.$$

Так как $-\mathcal{E}_3 - \mu \simeq \Delta - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 \approx 0,19 \text{ эВ} \gg k_{\text{B}}T$, то уровень доноров пуст, а первый уровень (с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_1$) заполнен полностью. Полупроводник является полупроводником n -типа, так как процесс перехода электрона со второго уровня $(-\Delta + \mathcal{E}_2)$ в зону проводимости намного более вероятнее процесса захвата электрона из валентной зоны на второй уровень и образования там дырки:

$$\exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_{\text{B}}T}\right) \simeq 10^{-13} \gg \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_2}{k_{\text{B}}T}\right) \simeq 2 \cdot 10^{-33}.$$

Концентрация электронов в зоне проводимости

$$n_- = Q_- \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_{\text{B}}T}\right) \approx 8,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}.$$

Заметим, что полупроводник с неравновесными концентрациями примесей обоих типов называется частично компенсированным.

Приведем другое решение. Вероятность заполнения первого уровня (с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_1$) равна 1, а уровня с энергией $-\Delta + \mathcal{E}_2$

$$f(-\Delta + \mathcal{E}_2) = \frac{n_{\text{Au}}^{2-}}{n_{\text{Au}}} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2 - \mu}{k_{\text{B}}T}\right)}.$$

Из закона сохранения числа электронов и «числа акцепторов» при условии $n_- \ll n_{\text{Au}}^{1-}, n_{\text{Au}}^{2-}$:

$$\begin{cases} n_{\text{Au}}^{1-} + 2n_{\text{Au}}^{2-} = n_{\text{Sb}}; \\ n_{\text{Au}}^{1-} + n_{\text{Au}}^{2-} = n_{\text{Au}}. \end{cases}$$

получаем совместно с определением $f(-\Delta + \mathcal{E}_2)$

$$\exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2 - \mu}{k_{\text{B}}T}\right) = \frac{n_{\text{Au}}}{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}} - 1 = \frac{2n_{\text{Au}} - n_{\text{Sb}}}{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}}$$

$$\text{или } \mu = -\Delta + \mathcal{E}_2 + k_{\text{B}}T \ln \frac{n_{\text{Sb}} - n_{\text{Au}}}{2n_{\text{Au}} - n_{\text{Sb}}}; \quad n_- = Q_- \exp\left(\frac{-\Delta + \mathcal{E}_2}{k_{\text{B}}T}\right).$$

$$4.26. \quad \frac{C_{\text{эл}}}{C_{\text{реш}}} = \frac{n_{\text{c}}}{N} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta}{k_{\text{B}}T}\right)^2 + \frac{\Delta}{2k_{\text{B}}T} + 1 \right] \approx 5,4 \cdot 10^{-4}.$$

$$4.27. \quad n_{\text{s}} \leq \frac{\mathcal{E}_0 m^*}{\pi \hbar^2} = 1,7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}.$$

$$4.28. \quad n_{\text{l}} \leq \frac{2}{\pi \hbar} \sqrt{2m^* \mathcal{E}_0} = 1,93 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}.$$

$$4.29. \sigma_0 \approx \frac{e^2}{\hbar} \approx 2,2 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ} \approx 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ см/м.}$$

$$4.30. R_{\square} = \frac{\hbar\sqrt{2\pi}}{e^2} \approx 10,3 \text{ кОм.}$$

$$4.31^* R = \frac{4\hbar}{e^2} \approx 16,4 \text{ кОм, } n_s \geq \frac{\pi}{2d^2} = 1,6 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}.$$

Решение. Дебройлевская длина волны электронов проводимости $\lambda \approx \lambda_F = 2\pi/k_F$, где $k_F = \sqrt{2\pi n_s}$ (см. задачу 4.15). «Мостик» работает как волновод. Если длина волны электрона $\lambda \geq 2d$, то электроны не могут его преодолеть. Условие прохождения

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi n}} \leq 2d, \text{ откуда } n_s \geq \frac{\pi}{2d^2} = 1,6 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}.$$

Приложение к «берегам» BB напряжения V вызовет появление на них разности концентраций $\Delta n_s \ll n_s$, и, как следствие, возникновение диффузионного тока.

Разность концентраций Δn_s вычислим, используя определение плотности состояний на единицу объема $\mathcal{D}(\epsilon) = \frac{dn}{d\epsilon} = \frac{\Delta n}{\Delta \epsilon}$, где $\Delta \epsilon = eV$. С другой стороны в двумерном электронном газе

$$\mathcal{D}(\epsilon) = 2 \frac{2\pi k dk}{(2\pi)^2 d\epsilon} = \left[\frac{1}{2\pi} \frac{d\epsilon}{d(k^2)} \right]^{-1} = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}, \text{ так как } \epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}.$$

Плотность тока электронов (при условии $\lambda \ll l$)

$$j \approx \frac{\Delta n v_F}{4} e \left[\frac{\text{заряд}}{\text{с} \cdot \text{см}} \right].$$

Коэффициент $1/4$ в последней формуле связан с двумерностью электронного газа (в 3-х мерном случае он был бы равен $1/6$, а в одномерном $1/2$). Таким образом

$$j \approx \frac{1}{4} e v_F \mathcal{D}(\epsilon) eV = \frac{e^2 V}{4} \frac{k_F d}{\pi \hbar}.$$

Ток через мостик $\mathcal{J} = jd = \frac{e^2 V}{4} \frac{k_F d}{\pi \hbar}$. При «открытии» мостика $\lambda \approx \lambda_F = 2d$

или $k_F d = \pi$. Отсюда величина появившегося тока $\mathcal{J} = \frac{e^2 V}{4\hbar}$. При этом иско-
мое сопротивление мостика

$$R = \frac{V}{\mathcal{J}} = \frac{4\hbar}{e^2} \approx 1,82 \cdot 10^{-8} \text{ с/см} \approx 16,4 \text{ кОм.}$$

$$4.32. T \approx \frac{e\hbar B}{10k_B m_e c} \approx 1,3 \text{ К.}$$

$$4.33^* \sigma = 2 \frac{n_2 e^2 \tau}{m^*} = 2250 \text{ эд. СГСЭ} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1},$$

где $n_2 = n_0 \exp\left(-\frac{\Delta \mathcal{E}_{12}}{2k_B T}\right) = 9,1 \cdot 10^3 \text{ см}^{-2}$, где $\Delta \mathcal{E}_{12} = g_s \mu_B n_0 \Phi_0$.

Решение. Конечная проводимость возникает из-за термического возбуждения следующего уровня Ландау. Щель между 1-м и 2-м уровнями характеризуются разными направлениями спина ($g_s = 2$ — спиновый g -фактор)

$$\Delta \mathcal{E}_{12} [\text{эрг}] = 2s g_s \mu_B B = 2\mu_B B = 1,854 \cdot 10^{-20} B [\text{Гс}].$$

По аналогии с собственными полупроводниками (щель играет роль запрещенной зоны) для концентрации электронов на 2-ом уровне можно записать

$$n_2 = n_0 \exp \left(- \frac{\Delta \mathcal{E}_{12}}{2k_B T} \right).$$

Магнитное поле B находится из условия, что фактор заполнения $\nu = 1$. Эффективная площадь, приходящаяся на один электрон, в этом случае равна

$$S_{\text{эфф}} = \frac{1}{n_0}.$$

Поскольку каждый электрон захватывает квант магнитного потока $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$, то искомое поле $B = n_0 \Phi_0 \approx 4 \cdot 10^5$ Гс. Тогда $\Delta \mathcal{E}_{12} = 7,67 \cdot 10^5$ эрг, и $n_2 = 8,875 \cdot 10^{-9} n_0$.

С учетом того, что на первом уровне Ландау образуются дырки после перехода электронов на второй уровень, запишем искомую проводимость

$$\sigma = 2 \frac{n_2 e^2 \tau}{m^*} = 2250 \text{ эд. СГСЭ} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}.$$

Строго говоря, поскольку магнитное поле влияет на проводимость (см. задачу 3.71), то приведенное выражение для σ не совсем точно: его надо поделить на $[1 + (\omega_c \tau)^2]$, где ω_c — циклотронная частота, а τ — время свободного пробега ($\tau \sim 10^{-10}$ с). Так как $(\omega_c \tau)^2 \sim 0,1$, то влияние магнитного поля на проводимость можно не учитывать.

4.34. $n_s = \frac{\nu B}{\Phi_0} = 3,63 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, где $\nu = \frac{R_0}{R_H}$, R_0 — квант холловского сопротивления, а Φ_0 — квант магнитного потока.

4.35. Поскольку $\frac{U}{\mathcal{E}} \propto \frac{1}{\sqrt{n_s}}$, то n_s надо уменьшить в 100 раз.

4.36* Решение. (см. задачу 4.37) Уровни энергии электрона

$$\mathcal{E}_n = \frac{e\hbar}{m^* c} \left(n + \frac{1}{2} \right) B.$$

Кратность вырождения (т. е. число мест на уровне) на единицу площади $g = \frac{B}{\Phi_0}$. При больших полях $g > n_s$, и все электроны находятся на уровне с $n = 0$

$$\mathcal{E} = \frac{N}{S} \mathcal{E}_n = n_s \frac{e\hbar}{2m^* c} B \text{ и } \mathfrak{M} = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B} = -n_s \frac{e\hbar}{2m^* c} = \text{const},$$

а химический потенциал как энергия, приходящаяся на одну частицу, совпадает с энергией Ферми при $T = 0$ К

$$\mathcal{E}_F = \frac{1}{S} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_s} = \frac{e\hbar}{2m^* c} B = \frac{1}{2} \hbar \omega_c, \text{ где } \omega_c \text{ — циклотронная частота.}$$

С уменьшением поля B при $1 < \frac{n_s}{g} < 2$ часть электронов перейдет на уровень с $n = 1$ и

$$\mathcal{E} = \frac{e\hbar}{2m^*c} \frac{B}{\Phi_0} + 3 \frac{e\hbar}{2m^*c} \left(n_s - \frac{B}{\Phi_0} \right) = \frac{e\hbar}{2m^*c} \left(3n_s B - 2 \frac{B^2}{\Phi_0} \right), \text{ откуда}$$

$$\mathfrak{M} = - \frac{e\hbar}{2m^*c} \left(3n_s - 4 \frac{B}{\Phi_0} \right), \quad \varepsilon_F = \frac{3}{2} \hbar \omega_c.$$

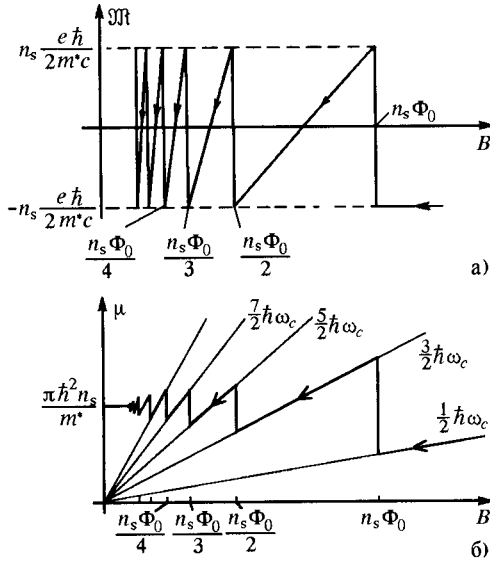


Рис. 231

Таким образом, при $B \rightarrow n_s \Phi_0$ магнитный момент $\mathfrak{M} \rightarrow \frac{e\hbar}{2m^*c} n_s$, т. е. меняется скачком. Следующий скачок произойдет при $B = \frac{n_s \Phi_0}{2}$, затем при $B = \frac{n_s \Phi_0}{3}$ и т. д. В промежутках \mathfrak{M} линейно зависит от B (рис. 231а). Аналогичным образом ведет себя и химический потенциал (рис. 231б).

$$4.37^* \quad \mathfrak{M} = - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B} = \mu_B \left[n_s - 4 \frac{B}{\Phi_0} - \frac{m}{m^*} \left(3n_s - 8 \frac{B}{\Phi_0} \right) \right] =$$

$$= 4,45 \cdot 10^{-10} \text{ эрг / (Гс} \cdot \text{см}^2 \text{)}.$$

Решение. Уровни энергии электрона в двумерном слое в магнитном поле B

$$\mathcal{E}_{n, m_s} = \frac{e\hbar}{m^*c} B \left(n + \frac{1}{2} \right) + g_s m_s \frac{e\hbar}{2mc} B, \quad \left(m_s = \pm \frac{1}{2} \right).$$

Эффективная площадь, приходящаяся на 1 электрон, $S_{\text{эфф}} = \frac{hc}{eB} = \frac{\Phi_0}{B}$, где $\Phi_0 = \frac{hc}{e} = 4,14 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ — квант магнитного потока. Число электронов,

приходящихся на 1 см^2 площади слоя (кратность вырождения) и имеющих энергию \mathcal{E}_{n, m_s} : $g = \frac{1}{S_{\text{эфф}}} = \frac{B}{\Phi_0} \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, откуда следует, что заняты $k = \frac{n_s}{g} = 2,4$, т. е. два нижних уровня Ландау заполнены полностью, а третий — на 40%. (см. рис. 232).

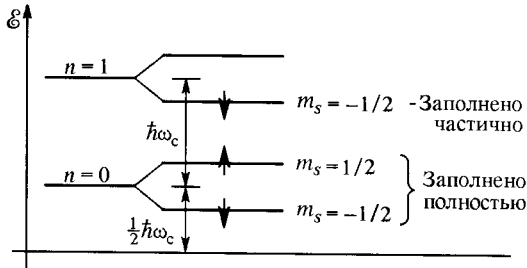


Рис. 232

Запишем энергию единицы площади электронного газа, учитывая, что спиновый g -фактор $g_s = 2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left(\frac{e\hbar}{m^*c} \frac{B}{2} - \frac{e\hbar}{2mc} B \right) \frac{B}{\Phi_0} + \left(\frac{e\hbar}{m^*c} \frac{B}{2} + \frac{e\hbar}{2mc} B \right) \frac{B}{\Phi_0} + \\ &+ \left(\frac{e\hbar}{m^*c} \frac{3B}{2} - \frac{e\hbar}{2mc} B \right) \left(n_s - 2 \frac{B}{\Phi_0} \right) = \left(n_s B - 2 \frac{B^2}{\Phi_0} \right) \left(3 \frac{e\hbar}{2m^*c} - \frac{e\hbar}{2mc} \right) + \\ &+ 2 \frac{e\hbar}{2m^*c} \frac{B^2}{\Phi_0} = \left(3n_s B - 4 \frac{B^2}{\Phi_0} \right) \frac{e\hbar}{2m^*c} - \left(n_s B - 2 \frac{B^2}{\Phi_0} \right) \frac{e\hbar}{2mc}. \end{aligned}$$

Магнитный момент единицы площади

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B} = - \left(3n_s - 8 \frac{B}{\Phi_0} \right) \frac{e\hbar}{2m^*c} + \left(n_s - 4 \frac{B}{\Phi_0} \right) \frac{e\hbar}{2mc} = \\ &= \mu_B \left[n_s - 4 \frac{B}{\Phi_0} - \frac{m}{m^*} \left(3n_s - 8 \frac{B}{\Phi_0} \right) \right] = 4,45 \cdot 10^{-10} \text{ эрг}/(\text{Гс} \cdot \text{см}^2). \end{aligned}$$

4.38* $d = \sqrt{\frac{2\Phi_0}{\pi \Delta B}} = 1,4 \text{ мкм}$, где $\Phi_0 = \frac{hc}{e} = 4,136 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ — квант магнитного потока.

Решение. В данном случае движение электрона можно рассматривать квазиклассически, так как его дебройлевская длина волны много меньше длины свободного пробега, определяемой дефектами решетки.

Рассмотрим движение электрона из точки A в точку A' (рис. 233а). В силу упругого рассеяния электронов на дефектах разупорядоченной металлической пленки, их движение будет диффузионным, как у броуновских частиц. При этом каждое упругое рассеяние приводит к изменению фазы волновой функции электрона на заданную величину. Неупругое рассеяние электронов, в частности на фононах, приводит к случайному неконтролируемому изменению фазы (сбою фазы) и потере когерентности. Однако та-

кие процессы крайне маловероятны в силу малого числа фононов (температура ~ 1 К).

Траектории электронов, движущихся в пленке под действием приложенного электрического поля с дрейфовой скоростью, много меньшей v_F , различны. Чтобы найти вероятность попадания в т. A' , надо сложить амплитуды вероятностей, соответствующие всем возможным траекториям, и вычислить квадрат модуля этой суммы. Указанный выше процесс сбой фазы определяет ту характерную длину, на которую влияние интерференционных членов существенно.

Все возможные траектории можно разбить на два класса: траектории с самопересечением (траектория I на рис. 233а) и без самопересечений (траектория II). При движении по любой траектории разность фаз равна

$$\Delta\varphi_i = \frac{1}{\hbar} \int_i \mathbf{p} d\mathbf{l} = \frac{m}{\hbar} \int_i \mathbf{v} d\mathbf{l} - \frac{e}{c\hbar} \int_i \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Для траектории без самопересечения интерференция не важна, так как они имеют разные длины (больше характерной) и поэтому разности фаз на них сильно отличаются. В результате суммирования по всем таким траекториям интерференционный член обратится в нуль.

Для траекторий с самопересечением ситуация кардинально меняется: каждой такой траектории можно сопоставить две волновые функции, соответствующие различным направлениям обхода замкнутой петли — по (кривая 1) и против (кривая 2) часовой стрелки, как это показано на рис. 233б, представляющем собой горизонтальную проекцию петли. Если длина петли меньше длины сбоя фазы, то интерференционный член не будет равен нулю. Это означает, что в отсутствии магнитного поля вероятность попадания электрона в т. A' увеличивается, а значит с большей вероятностью он там рассеивается. При этом сопротивление пленки также увеличивается.

Наличие магнитного поля, пронизывающего петлю, приведет к появлению разности фаз

$$\begin{aligned} \delta\varphi = \Delta\varphi(1) - \Delta\varphi(2) &= \frac{m}{\hbar} \oint \mathbf{v} d\mathbf{l} + \frac{2e}{c\hbar} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \\ &= \delta(0) + \frac{2e}{c\hbar} \Phi = \delta(0) + 2 \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \end{aligned}$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал, причем $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Phi$ — магнитному потоку, пронизывающему нить.

Таким образом возникает интерференция электронных волн с разностью фаз $\delta\varphi$. При этом интенсивность $I \propto 1 + \cos \delta\varphi = 1 +$

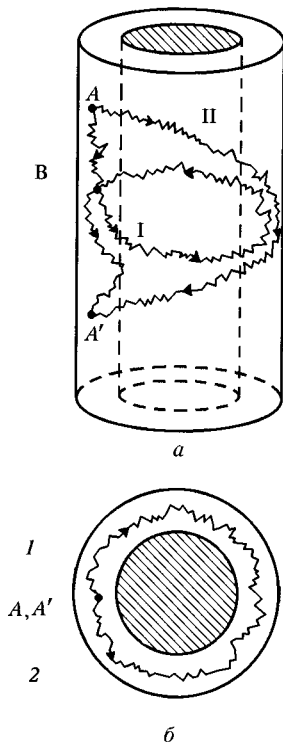


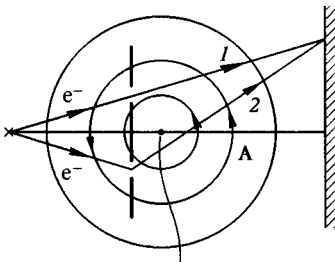
Рис. 233

+ $\cos \left(\delta(0) + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0/2} \right)$, что и вызывает осцилляции сопротивления с периодом по полю ΔB , соответствующему кванту магнитного потока $\Phi_0/2$.

Учет конечной толщины пленки приводит к затуханию осцилляций из-за отличия в величине магнитного потока через различные петли, а вклад петель, не охватывающих ось цилиндра, приводит к монотонному ходу кривой $\Delta R(B)$.

Отметим, что в данной задаче магнитное поле не «закручивает» электрон (радиус циклотронной орбиты фермиевских электронов составляет $\approx 2 \text{ мн} \gg d$), а только определяет разность фаз волновой функции электрона аналогично эффекту Ааронова — Боме.

Примечание. В соответствии с квазиклассическим приближением под словом «траектория» понимается не математическая линия, а трубка диаметром порядка $\lambda_{\text{дБ}} \sim h/p_F$. Соответственно точка самопересечения траектории не является точкой в математическом смысле, а представляет собой некоторую область.



Поле \mathbf{B}

Рис. 234

4.39* Разность фаз по результатам двух опытов составляет 0,6л, что соответствует сдвигу интерференционной картины на 0,3 периода.

Решение. Пусть магнит на рис. 79 имеет очень большой радиус и круглое сечение (для простоты). Поскольку все силовые линии поля \mathbf{B} проходят внутри магнита, то снаружи $B = 0$. На рис. 234 сечение магнита показано точкой. При этом вторая точка сечения кольца не показана в связи с большим радиусом кольцевого магнита. Однако в области, где $\mathbf{B} = 0$ существует поле векторного потенциала \mathbf{A} , причем $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Собственно, доказательству влияния поля \mathbf{A} на физические процессы (так называемом бессилловому воздействию) и посвящен опыт. Обобщенный импульс электрона в магнитном поле

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

При этом фаза электронной волны де Бройля при переходе из точки a в точку b изменяется на величину $(dI - \text{элемент пути траектории})$

$$\Delta\varphi(B) = \frac{1}{\hbar} \int_a^b \mathbf{p} d\mathbf{l} = \frac{m}{\hbar} \int_a^b \mathbf{v} d\mathbf{l} - \frac{e}{c\hbar} \int_a^b \mathbf{A} d\mathbf{l} = \Delta\varphi(0) - \frac{e}{c\hbar} \int_a^b \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

так как скорость частицы не меняется в магнитном поле. Разность фаз волн, прошедших путем 1 или 2 (рис. 234)

$$\Delta\varphi_1(B) = \Delta\varphi_1(0) - \frac{e}{c\hbar} \int_1 \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad \Delta\varphi_2(B) = \Delta\varphi_2(0) - \frac{e}{c\hbar} \int_2 \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Обозначив разность фаз в отсутствии поля $\delta(0) = \Delta\varphi_2(0) - \Delta\varphi_1(0)$, получаем что в присутствии поля \mathbf{B}

$$\delta(B) = \Delta\varphi_2(B) - \Delta\varphi_1(B) =$$

$$= \delta(0) + \frac{e}{c\hbar} \left[\int_1 \mathbf{A} d\mathbf{l} - \int_2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right] = \delta(0) + \frac{e}{c\hbar} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Согласно теореме Стокса $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi$, где Φ — магнитный поток через контур, ограниченный траекториями, т. е. поток через соленоид (нить). Обозначив $\Phi_0 = \frac{hc}{e} = 4,136 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ — квант магнитного потока, получим величину разности фаз электронных волн, приходящих в точку наблюдения

$$\delta(B) = \delta(0) + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

В данной задаче $\delta(B) = \delta(0) + 2\pi \cdot 2,8 = \delta(0) + 5,6\pi$.

При температуре ниже температуры перехода сверхпроводник «захватывает» целое число квантов магнитного потока $\Phi_0^{\text{сп}} = \frac{\Phi_0}{2} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$, в результате чего поток внутри контура будет равен $2,5\Phi_0 = 5\Phi_0^{\text{сп}}$. Следовательно

$$\delta^{\text{сп}}(B) = \delta(0) + 2\pi \frac{2,5\Phi_0}{\Phi_0} = \delta(0) + 5\pi,$$

и сдвиг фазы по двум опытам составит $0,6\pi$ или $0,3$ интерференционной полосы.

$$4.40. n_- = n_+ = Q_+ \exp\left(-\frac{\mu - \mathcal{E}_v}{k_B T}\right) = 9 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}, \text{ где } Q_+ =$$

$$= 2,51 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_+^*}{m_e}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{300}\right)^{3/2}; \quad \frac{\mu - \mathcal{E}_v}{k_B T} \approx 3.$$

$$4.41. \frac{\Delta \mathcal{E}_-}{\Delta \mathcal{E}_+} = \frac{A_-}{A_+} = \frac{m_+^*}{m_-^*} = \frac{\mu_-}{\mu_+} = 2.$$

$$4.42. \frac{V_1}{V_0} = \frac{R_d}{R_d + R} \approx 2,6 \cdot 10^{-4}, \text{ где } R_d = \frac{k_B T}{e(\mathcal{I} + \mathcal{I}_0)} = 25,9 \text{ Ом} — \text{ диффе-}$$

ренциальное сопротивление диода; $a = 20 \lg \frac{V_1}{V_0} \approx -52 \text{ дБ}$.

$$4.43. Q_+ = 2,51 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_+^*}{m_e}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{300}\right)^{3/2} \approx 1,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}, \text{ где } \frac{m_+^*}{m_e} =$$

$$= \varepsilon^2 \frac{\hbar \omega_0}{R_y} = 0,455.$$

$$4.44. n_s \text{ находится из условия } \frac{\bar{\Pi}}{\bar{K}} = \frac{6\sqrt{3}/2e^2 m^*}{\hbar^2 \varepsilon \pi \sqrt{n_s}} \gtrsim 50, \text{ откуда следует}$$

$$n_s \leq \frac{9\sqrt{3}}{2 \cdot 25^2 e^2 \pi^2 r_B^2} \left(\frac{m^*}{m_e}\right)^2 = 1,4 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}.$$

$$4.45^* \mathcal{E}_v(0) - \mathcal{E}_c(0) = \mu_B B_K \left(\frac{m_e}{m_-^*} - \frac{g_e}{2} - \frac{g_h}{2} + \frac{m_e}{m_+^*} \right) = 24,6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ.}$$

Решение. Если обозначить положение дна зоны проводимости при $B=0$ как $\mathcal{E}_c(0)$, а потолка валентной зоны — $\mathcal{E}_v(0)$, то при $B=0$:

$$\mathcal{E}_- = \mathcal{E}_c(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_-^*}; \quad \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_v(0) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_+^*}.$$

В магнитном поле возникают зеемановское расщепление по спину и квантование Ландау орбитального движения

$$\mathcal{E}_-(B) = \mathcal{E}_c(0) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_-^*} + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + g_e m_s \mu_B B;$$

$$\mathcal{E}_+(B) = \mathcal{E}_v(0) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_+^*} - \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + g_h m_s \mu_B B,$$

где $\omega_c = \frac{eB}{m_{-(+) }^* c}$; $m_s = \pm 1/2$.

Для дна зоны проводимости $k_z = 0$; $n = 1$ и $m_s = -1/2$, получим

$$\mathcal{E}_c(B) = \mathcal{E}_c(0) + \frac{\hbar\omega_c}{2} - \frac{1}{2} g_e \mu_B B = \mathcal{E}_c(0) + \mu_B B \left(\frac{m_e}{m_-^*} - \frac{g_e}{2} \right).$$

Поскольку $\frac{m_e}{m_-^*} - \frac{g_e}{2} = 5,03 > 0$, то дно зоны проводимости в магнитном поле поднимается.

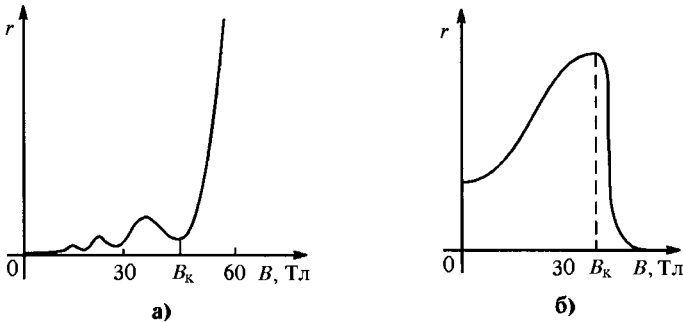


Рис. 235

Для потолка валентной зоны в магнитном поле B получаем

$$\mathcal{E}_v(B) = \mathcal{E}_v(0) + \frac{\hbar\omega_c}{2} + \frac{1}{2} g_h \mu_B B = \mathcal{E}_v(0) + \mu_B B \left(\frac{g_h}{2} - \frac{m_e}{m_+^*} \right).$$

В этом выражении $\frac{g_h}{2} - \frac{m_e}{m_+^*} = -4,09 < 0$, поэтому потолок валентной зоны опускается.

В соответствии с условием при $B > B_K = 46,5$ Тл перекрытие зон исчезает, и в спектре появляется щель (вещество становится диэлектриком). На рис. 235а изображена зависимость электрического сопротивления r образца при фазовом переходе в магнитном поле B — из металлического в диэлектрическое состояние. Если приравнять нулю разность: $\mathcal{E}_c(B_K) - \mathcal{E}_v(B_K) = 0$, то из полученного уравнения легко найти величину перекрытия зон в отсутствии магнитного поля

$$\mathcal{E}_v(0) - \mathcal{E}_c(0) = \mu_B B_K \left(\frac{m_e}{m_-^*} - \frac{g_e}{2} - \frac{g_h}{2} + \frac{m_e}{m_+^*} \right) = 24,6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ.}$$

$$4.46. \Delta(0) = \mathcal{E}_c(0) - \mathcal{E}_v(0) = \mu_B B \left(\frac{g_h}{2} - \frac{m_e}{m_-^*} - \frac{m_e}{m_+^*} + \frac{g_e}{2} \right) = 19,5 \text{ мэВ.}$$

На рис. 235б изображена зависимость сопротивления образца r от величины поля B при переходе его из полупроводникового в металлическое состояние.

$$4.47. \hbar\omega_{\text{пр}} = \Delta + \left(\frac{m_e}{m_-^*} + \frac{m_e}{m_+^*} - \frac{|g_e| + g_h}{2} \right) \mu_B B = 0,8525 \text{ эВ;}$$

$$\hbar\omega_{\text{лев}} = \Delta + \left(\frac{m_e}{m_-^*} + \frac{m_e}{m_+^*} + \frac{|g_e| + g_h}{2} \right) \mu_B B = 0,8535 \text{ эВ.}$$

$$4.48. l \geq \frac{2m^* d^2}{3\pi^2 \hbar} \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m^*}} = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ см} = 580 \text{ \AA.}$$

$$4.49. \frac{m^*}{m_{\text{He}}} = 1,96, \text{ где эффективная масса вакансиона } m^* = \frac{2\hbar^2}{a^2 \Delta} = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ г.}$$

$$4.50. n \approx \frac{1}{(2r_1)^3} = 5,8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}, \text{ где } r_1 = \varepsilon \frac{m}{m^*} r_B \approx 600 \text{ \AA.}$$

$$4.51. \Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{2ea^2 \Delta n}{c\hbar(3\pi)^{2/3}} = 2,85 \cdot 10^{-9} \text{ Гс}^{-1}, \text{ где } \Delta n = 1.$$

$$4.52^* \mathcal{J} = 4,4 \text{ нА.}$$

Решение. В силу периодического движения электрона, набег фазы его волновой функции при обходе бензольного кольца должен быть кратен 2π , т. е. $6ka = 2\pi n$, откуда $ka = \pi n/3$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, 3$ (всего шесть значений, лежащих в первой зоне Бриллюэна $-\pi/a < k \leq \pi/a$). Отсюда получаем уровни энергии электрона

$$\mathcal{E}(n=0) = \mathcal{E}_0 - 2A; \quad \mathcal{E}(n=\pm 1) = \mathcal{E}_0 - A; \quad \mathcal{E}(n=\pm 2) = \mathcal{E}_0 + A; \\ \mathcal{E}(n=3) = \mathcal{E}_0 + 2A.$$

В основном состоянии заполнены только три первых уровня, на каждом из которых находятся по два электрона с противоположными проекциями спинов. Скорость электрона в состоянии с волновым числом k равна

$v(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{E}(k)}{\partial k}$. Т.о. скорость электрона на уровне $\mathcal{E}(n=0) = \mathcal{E}_0 - 2A$ равна нулю, а на уровнях $\mathcal{E}(n=\pm 1) = \mathcal{E}_0 - A$ она равна $v_{\pm 1} = \pm \sqrt{3} Aa/2\hbar$. Следовательно, полный ток (как и полная скорость) равен нулю. Этот результат естественен. В силу симметрии распределения электронов в \mathbf{k} -пространстве ток отсутствует.

При помещении молекулы во внешнее магнитное поле волновое число меняется согласно уравнению

$$\hbar \frac{dk}{dt} = eE_{\text{инд}} = e \frac{1}{6ac} \frac{d\Phi}{dt} = e \frac{1}{6ac} 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{dH}{dt}.$$

Здесь использован закон индукции Фарадея $lE_{\text{инд}} = \frac{S}{c} \frac{dH}{dt}$, где l — длина контура, S — его площадь. Интегрируя это уравнение, получаем приращение волнового числа каждого электрона

$$\delta k = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{a} \frac{H_0 a^2}{\hbar c/e}.$$

Последний множитель есть отношение потока через площадь молекулы к кванту магнитного потока. Для $H_0 = 10$ кЭ это отношение порядка 10^{-5} . Т.о. изменение волнового вектора много меньше самого значения волнового вектора и поэтому изменение скоростей электронов можно записать в виде

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial k} \delta k = \frac{\partial^2 \mathcal{E}(k)}{\hbar \partial k^2} \delta k.$$

Вычисляя производную, получаем при $n = 0, \pm 1$ $\delta v_0 = \frac{2Aa^2}{\hbar} \delta k$,

$\delta v_{\pm 1} = \frac{Aa^2}{\hbar} \delta k$. В результате нарушения симметрии в распределении электронов в \mathbf{k} -пространстве, возникают токи:

$$\mathcal{J}_0 = \frac{2e}{T_0} = \frac{2e\delta v_0}{6a} = \frac{2Aae}{3\hbar} \delta k; \quad \mathcal{J}_{+1} = \frac{2e}{T_{+1}} = \frac{2e(v_{+1} + \delta v_{+1})}{6a} \quad \text{и}$$

$$\mathcal{J}_{-1} = \frac{2e}{T_{-1}} = \frac{2e(|v_{-1}| - \delta v_{-1})}{6a}.$$

Складывая все токи с учетом того, что \mathcal{J}_{+1} и \mathcal{J}_{-1} направлены в разные стороны, получаем суммарный ток

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_{+1} - \mathcal{J}_{-1} = \frac{2e\delta v_0}{6a} + \frac{4e\delta v_{\pm 1}}{6a} = 2 \frac{2Aa^2 e}{3\hbar} \delta k = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Aa^2 H_0}{\hbar}.$$

Подставляя числа, получаем $\mathcal{J} = 4,4 \cdot 10^{-9}$ А = 4,4 нА.

4.53* Решение. Наведенный кольцевой ток создает на ядрах водорода дополнительное (по отношению к внешнему) магнитное поле. Для оценки величины поля будем считать, что кольцевой ток эквивалентен магнитному моменту (диполь)

$$\mu = \frac{\mathcal{J}S}{c} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Aa^2 H_0}{\hbar} 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{1}{c} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Aa^4 H_0}{2\hbar c}.$$

Такой диполь создает в плоскости кольца на расстоянии $a + d$ от центра магнитное поле $|\delta H| = \frac{\mu}{(a+d)^3} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Aa^4 H_0}{2\hbar c(a+d)^3}$. При этом относительный сдвиг частоты

$$\frac{|\delta \omega|}{\omega} = \frac{|\delta H|}{H_0} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Aa^4}{2\hbar c(a+d)^3} \approx 1,3 \cdot 10^{-6},$$

что хорошо соответствует значению $1,46 \cdot 10^{-6}$, которое можно получить из имеющихся экспериментальных данных. Так как диамагнитный ток направлен так, чтобы уменьшить внешнее магнитное поле внутри кольца, то создаваемое этим током снаружи кольца магнитное поле будет параллельно внешнему полю. Это приведет к сдвигу резонанса либо в область больших частот ($\delta\omega > 0$), либо в область меньших внешних полей. Данный эффект является характерным свойством ароматических (циклических) углеводородов и служит для их идентификации.

4.54: Решение. Основное свойство кристаллов — их трансляционная симметрия. Поэтому для описания кристалла можно воспользоваться следующим приемом: взять кристалл конечных размеров и транслировать его для получения кристаллов произвольных размеров. При этом размер этого кристалла (т.н. основная область) должен быть выбран так, чтобы сохранилась трансляционная симметрия, т.е. на основных направлениях трансляции укладывалось целое число элементарных (примитивных) ячеек. При этом набег фазы волновой функции электрона вдоль соответствующего направления будет кратен 2π . Это приводит к дискретным значениям проекций квазиимпульса в зоне Бриллюэна, определяемым размерами основной области кристалла. Поскольку размер зоны Бриллюэна однозначно определяется размером примитивной ячейки, число разрешенных значений квазиимпульса в зоне Бриллюэна равно числу примитивных ячеек. Если кристалл графена состоит из N атомов, а в примитивной ячейке графена содержится два атома, то число разрешенных значений будет равно $N/2$. Каждому значению квазиимпульса, как следует из закона дисперсии, соответствует два уровня энергии: один в валентной зоне, другой — в зоне проводимости. Поэтому число мест для электронов с учетом спинового вырождения будет равно $2 \cdot 2 \cdot N/2 = 2N$. Из них N мест будет в валентной зоне и N — в зоне проводимости. Т.к. на один атом приходится по одному «свободному» электрону, то всего делокализованных электронов будет N . При нулевой температуре электроны занимают наименьшие энергетические состояния, поэтому вследствие симметричного характера спектра вся валентная зона будет заполнена, а зона проводимости будет пустой. Т.о. для указанного вида спектра химический потенциал графена, отсчитываемый от уровня энергии электрона в атоме, равен нулю и уравнение для определения формы ферми-поверхности имеет вид

$$1 + 4 \cos p_x a \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + 4 \cos^2 \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = 0.$$

Т.к. $\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} \neq 0$, то уравнение можно переписать так:

$$-4 \cos p_x a = 4 \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}}}.$$

Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом, правая часть уравнения ≥ 4 при $\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} > 0$, либо ≤ -4 при $\cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} < 0$.

Поскольку левая часть уравнения ограничена $-4 \leq 4 \cos p_x a \leq 4$, то равенство возможно только если одновременно

$$\begin{cases} \cos p_x a = 1 \\ \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos p_x a = -1 \\ \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} p_x a = 2\pi m \\ \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x a = \pi + 2\pi m \\ \frac{p_y a}{\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{3}\pi + 2\pi l \end{cases}$$

Подставляя данные, получаем, что

$$\begin{cases} p_x = \frac{4\pi\hbar}{3b}m \\ p_y = \pm \frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} + \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{3}b}s \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x = \frac{2\pi\hbar}{3b} + \frac{4\pi\hbar}{3b}m \\ p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} + \frac{4\pi\hbar}{\sqrt{3}b}l \end{cases}$$

Отбирая только те значения квазиимпульса, которые попадают в первую зону Бриллюэна, получаем уравнение прямых линий в \mathbf{p} -пространстве

$$\begin{cases} p_x = 0 \\ p_y = \pm \frac{4\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p_x = \pm \frac{2\pi\hbar}{3b} \\ p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}b} \end{cases}$$

Пересечение указанных линий дает вершины шестиугольника. Таким образом, поверхность Ферми графена состоит из шести точек и ее площадь равна нулю.

Как видно из закона дисперсии, для любого направления в обратном пространстве кроме диагоналей шестиугольника, на границе зоны Бриллюэна возникает щель (запрещенная зона) в спектре электронов. Она максимальна в середине сторон шестиугольника и уменьшается в стороны вершин, где исчезает вовсе (зона проводимости соприкасается с валентной зоной). С точки зрения своих электронных свойств, графен можно считать либо бесщелевым полупроводником, либо полуметаллом с нулевым перекрытием зон.

4.55* Решение. Если отсчитывать энергию от уровня энергии электрона в атоме, то раскладывая в ряд выражения для закона дисперсии вблизи какой-либо вершины шестиугольника, получаем

$$\delta\mathcal{E}(\delta p_x, \delta p_y) = \pm A \frac{3b}{2\hbar} \sqrt{\delta p_x^2 + \delta p_y^2} = \pm c^* \delta p,$$

где $\delta \mathbf{p} = (\delta p_x, \delta p_y)$ — двумерный вектор, отсчитываемый от данной вершины шестиугольника, $c^* = \frac{\partial \delta \mathcal{E}}{\partial \delta p} = A \frac{3b}{2\hbar} = 10^8$ см/с — скорость элементарных возбуждений. Т.о. изоэнергетические поверхности $\delta\mathcal{E}(\delta p_x, \delta p_y) = \text{const}$ представляют собой окружности — сечения конуса в пространстве $\delta p_x, \delta p_y, \delta\mathcal{E}$. В каждом углу шестиугольника сходятся три соседние зоны Бриллюэна. Поэтому каждая изоэнергетическая поверхность принадлежит

данной зоне на одну треть и полное число поверхностей, приходящихся на одну зону Бриллюэна равно $6 \cdot \frac{1}{3} = 2$. Т.к. число состояний на интервал значений квазиимпульса

$$dN_p = 2 \frac{S}{(2\pi\hbar)^2} d^2 \delta p = 2 \frac{S}{2\pi\hbar^2} \delta p d\delta p = 2 \frac{S}{2\pi(\hbar c^*)^2} 2|\delta\mathcal{E}| d\delta\mathcal{E},$$

где S — площадь кристалла, то плотность состояний $\mathcal{D}(\delta\mathcal{E}) \propto dN_p/d\delta\mathcal{E} \propto |\delta\mathcal{E}|$. Следовательно, на поверхности Ферми графена плотность состояний равна нулю.

4.56* Решение. Для сохранения кристаллической симметрии при сворачивании полосы в трубку, примитивная ячейка должна преобразоваться. В листе она содержит два атома углерода $\left(1 + 4 \cdot \frac{1}{4}\right)$ и является ромбом со стороной $\sqrt{3}b$ и углом 60° (показана штриховой линией на рис. 88) и поэтому не может обеспечить необходимую симметрию. Для трубки подходящей ячейкой является прямоугольник с размерами $\sqrt{3}b \times 3b$ (показанный штрих-пунктиром), одна из сторон которого параллельна оси трубки. Как видно из рисунка, этот прямоугольник содержит 4 атома углерода $(2 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2})$. Поскольку примитивная ячейка увеличилась в два раза, то число разрешенных значений квазиимпульса станет вдвое меньше, а число ветвей в законе дисперсии — вдвое больше (знак \pm под корнем). При этом первый знак \pm соответствует зоне проводимости и валентной зоне, а второй знак \pm соответствует старым (лист) и новым (полоса) ветвям закона дисперсии, возникающим из-за уменьшения зоны Бриллюэна вдвое. Это аналогично появлению оптической ветви при переходе от одноатомной к двухатомной цепочке.

При сворачивании листа в трубку, компонента квазиимпульса вдоль оси трубки остается непрерывной, а поперечная компонента будет квантоваться: $2\pi R p_i = n2\pi\hbar$. Здесь $i = (x, y)$, R — радиус нанотрубки, $n = 1, 2, \dots$ В связи с уменьшением числа степеней свободы электронов при сохранении полного числа электронных состояний, плотность состояний в нанотрубке должны измениться по сравнению с листом.

Условие гладкого сворачивания вдоль оси x (точка A должна совпасть с точкой A' или кратной ей) имеет вид $2\pi R = 3mb$, где $m = 1, 2, \dots, n$ (т.н. нанотрубка типа *armchair*). В этом случае закон дисперсии приобретает вид

$$\mathcal{E}_{m,n}(p_y) = \mathcal{E}_0 \pm A \sqrt{1 \pm 4 \cos \pi \frac{m}{n} \cos \frac{p_y a}{\sqrt{3}} + 4 \cos^2 \frac{p_y a}{\sqrt{3}}}.$$

Одномерными зонами Бриллюэна являются теперь отрезки прямых линий длиной $\frac{2\pi\hbar}{b\sqrt{3}}$ (от $-\frac{\pi\hbar}{b\sqrt{3}}$ до $\frac{\pi\hbar}{b\sqrt{3}}$), параллельные оси p_y ($p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3b} \frac{m}{n}$). Число этих подзон будет равно $2n$. Уровни с $m = k$ и $m = n - k$ оказываются вырожденными, т.к. $\pm \cos \pi \frac{k}{n} = \mp \cos \left(\pi - \pi \frac{k}{n}\right)$. Из-за этого вырождения число уровней будет меньше, чем $4n$.

Как видно из закона дисперсии нанотрубки *armchair*, при любых допустимых значениях квазиимпульса во всех подзонах с $m < n$ в размерно-

квантованном спектре существуют щели. При этом уровни энергии в валентной зоне полностью заполнены, а в зоне проводимости — пусты. Поэтому приложенное к нанотрубке напряжение не сможет вызвать электронный ток. Только для подзон с $m = n$, проходящих через точки ферми-поверхности графена ($p_x = \pm \frac{2\pi\hbar}{3b}$, $p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{3\sqrt{3}b}$), щель в этих точках обращается в нуль. Отметим, что согласно сказанному выше, в точках ферми-поверхности плотность состояний теперь отлична от нуля. Поэтому для электронов валентной зоны возможно сколь угодно малое изменение энергии, т.е. протекание тока под действием приложенного напряжения.

Условие гладкого сворачивания листа вдоль линии оси y (точка A должна совпадать с точкой A' или кратной ей) имеет вид $2\pi R = mbv\sqrt{3}$, где $m = 1, 2, \dots$. Из условия квантования получаем значения поперечной компоненты квазиимпульса $p_y = \pm \frac{2\pi\hbar}{bv\sqrt{3}} \frac{m}{n}$. В этом случае имеем нанотрубку типа *zigzag*. Здесь также возникают $2n$ одномерных подзон, а зонами Бриллюэна являются отрезки прямых линий длиной $2\pi/3b$ (от $-\pi/3b$ до $\pi/3b$), параллельные оси p_x .

Как было показано выше, металлическая проводимость возможна, если линии подзон будут проходить через точки ферми-поверхности (вершины шестиугольника). Это приводит в данном случае к условию $n = 3m$. Если же $n \neq 3m$, то в спектрах соответствующих подзон при любых разрешенных p_x имеются щели, и проводимость будет носить полупроводниковый характер.

§ 5. Сверхпроводимость

$$5.1. R = \frac{L}{c^2 t} \ln \frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}(t)} \approx 4,4 \cdot 10^{-13} \text{ Ом, где } L = 2\pi D \ln \frac{\pi D}{r}.$$

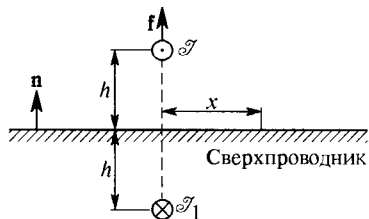


Рис. 236

$$5.2. R = \frac{L}{c^2 t} \ln \frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}(t)} \approx 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ Ом,}$$

где индуктивность единицы ленты $L \approx 4\pi^2 a^2$.

$$5.3. i(x) = \frac{\mathcal{I}h}{\pi(h^2 + x^2)}; \quad f = \frac{\mathcal{I}^2}{c^2 h} = 1 \text{ дин/см (рис. 236).}$$

Поверхностный ток направлен в соответствии с векторным произведением $\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{nB}]$, т.е. от нас (перпендикулярно плоскости рисунка).

$$5.4. \mathcal{I} \geq c \sqrt{\frac{mgh}{2\pi r}} = 6,49 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ} \approx 21,6 \text{ А.}$$

$$5.5. T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} = 0,3 \text{ с.}$$

$$5.6. \omega = \frac{5}{2} \frac{m_g c R B}{M e} = 1,42 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Примечание. В задачах 5.6 и 5.7 реально носителями тока являются куперовские пары, и для них гироманнитное отношение $\gamma = \frac{2e}{2 \cdot 2mc} = \frac{e}{2mc}$ совпадает с γ для отдельного электрона.

$$5.7. \varphi = \frac{m_e c H R h}{e \sqrt{2} a M} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

5.8. $W = \frac{c D^2}{16 l} B E = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ эрг/с} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Вт}$ при $\frac{D}{d} = \sqrt{e}$, где e — основание натурального логарифма.

$$5.9. \left(\frac{\Phi_n}{\Phi_1} \right)_{n \rightarrow \infty} = \frac{L}{l}.$$

$$5.10. \Lambda = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4 \pi n_{sc} e}} = 0,53 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Решение. Уравнение движения электрона в сверхпроводнике

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e \mathbf{E}.$$

Здесь мы заменили полную производную частной, что можно сделать, если пространственные изменения переменных малы ($\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)$, $\frac{1}{t} \gg \frac{\langle v \rangle}{l}$ или $\omega_p \gg \frac{v_F}{\Lambda}$, откуда $\frac{v_F}{c} \ll 1$).

Так как $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ и $\mathbf{j} = e n_{sc} \mathbf{v}$, то

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_{sc}}{m_e c} \mathbf{A} = -\frac{c}{4 \pi \Lambda^2} \mathbf{A}, \text{ где } \Lambda = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4 \pi n_{sc} e^2}} = \frac{c}{\omega_p}.$$

Это уравнение заменяет закон Ома в сверхпроводниках.

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{c}{4 \pi \Lambda^2} \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{c}{4 \pi \Lambda^2} \mathbf{B}.$$

Используя уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4 \pi}{c} \mathbf{j}$ (в сверхпроводниках $\mathbf{B} \approx \mathbf{H}$, а током смещения в металлах можно пренебречь), получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\mathbf{B} / \Lambda^2.$$

Поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$, то окончательно

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}}{\Lambda^2}.$$

Если однородное внешнее магнитное поле параллельно поверхности сверхпроводника, то уравнение переходит в $\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{B}{\Lambda^2}$, где x — координата, направленная вглубь сверхпроводника по нормали к поверхности. Решение этого уравнения $B(x) \propto e^{-x/\Lambda}$, т. е. магнитное поле экспоненциально затухает вглубь сверхпроводника. Поскольку частота внешнего поля не входит в Λ , то результат в полной мере относится к постоянному магнитному полю. Искомая глубина $\Lambda = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$

5.11. $B(x) = B_0 \frac{\text{ch}(x/\Lambda)}{\text{ch}[d/(2\Lambda)]}$; $j_s = -\frac{cB_0}{4\pi\Lambda} \frac{\text{sh}(x/\Lambda)}{\text{ch}[d/(2\Lambda)]}$, где $\Lambda = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi n_{sc} e^2}}$ — лондоновская глубина.

5.12. $\xi \approx \frac{\hbar v_F}{2\Delta} = 10^{-5}$ см.

5.13. $B \approx \frac{k_B T_c}{\mu_B} \approx 1,4 \cdot 10^6$ Гс.

5.14* Решение. В силу условий $D \gg d$ и $\Lambda(T_0) \gg d$ можно пренебречь магнитным потоком через пленку и считать, что поле в диэлектрике равно внешнему. Тогда можно записать

$$\oint (\mathbf{p}_s d\mathbf{l}) = \oint \left(2m\mathbf{v}_s - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = 2\pi n \hbar,$$

откуда, используя теорему Стокса, получаем

$$v_s = \frac{\hbar}{mD} \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0^{\text{сп}}} \right), \quad \text{где } \Phi = \frac{\pi D^2}{4} B, \quad \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \Phi_0^{\text{сп}} = \frac{\pi \hbar c}{e}.$$

Дополнительная плотность полной энергии сверхпроводника при температуре T_0 , обусловленная внешним полем B , равна

$$\Delta w = n_{\text{пар}}(T_0) \frac{2m v_s^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi},$$

где $n_{\text{пар}}$ — концентрация сверхпроводящих пар, равная $n_{sc}/2$ (n_{sc} — концентрация сверхпроводящих электронов).

При заданном поле B квадрат скорости сверхпроводящих электронов v_s^2 должен быть минимальным, чтобы обеспечить минимум полной энергии. Таким образом, при увеличении B должна меняться и величина n в условии квантования Бора—Зоммерфельда. Это приводит к периодической зависимости v_s^2 от B (рис. 237).

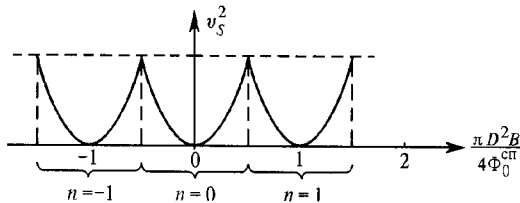


Рис. 237

Поскольку $|\Delta w| \propto k_B \Delta T_c(B)$, то периодическая зависимость v_s^2 приводит к периодической зависимости T_c , а член $B^2/(8\pi)$ приводит к монотонному изменению T_c (штриховая линия на рис. 82б к условию задачи). Как видно из рисунка, период осцилляций связан с «вхождением» (или «уходом») кванта магнитного потока $\frac{\Delta B \pi D^2}{4} = \Phi_0^{\text{сп}}$, откуда $D = \sqrt{\frac{4\Phi_0^{\text{сп}}}{\pi \Delta B}}$. Из гра-

фика находим $\Delta B \simeq 14$ Гс и, следовательно, $D \simeq 1,37 \cdot 10^{-4}$ см. Сравнить с задачей 4.38 (эксперимент Шарвиных).

$$5.15. j_{\max} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_{\max} = -\frac{cH_c}{4\pi\Lambda} = 8 \cdot 10^7 \text{ А/см}^2, \text{ т. е. ток затухает по тому же закону, что и поле.}$$

$$5.16^*: \mathcal{I}_{\Phi_0} \approx 0,7 \text{ мА.}$$

Решение. Магнитное поле проходит между двумя точечными контактами через поверхность, площадь которой практически равна произведению расстояния между контактами l_{AB} на сумму глубин проникновения в ниобий Λ_{Nb} и припой Λ_{PbSn} .

$$B = \frac{2\mathcal{I}}{cr_{Nb}}, \quad \Phi = BS = \frac{2\mathcal{I}}{cr_{Nb}} l_{AB} [\Lambda_{Nb} + \Lambda_{PbSn}],$$

$$\mathcal{I}_{\Phi_0} = \Phi_0^{сп} \frac{cr_{Nb}}{2l_{AB}[\Lambda_{Nb} + \Lambda_{PbSn}]} = 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ А} \approx 0,7 \text{ мА.}$$

$$5.17^*: \Phi = n\Phi_0 \frac{1}{1 + 2\Lambda^2/(Rd)}.$$

Решение. Поскольку $d \ll \Lambda$, ток будет распределен по толщине пленки однородно. В силу условия $R \gg d$ магнитное поле в диэлектрике равно

$$B = \frac{4\pi}{c} j_s d$$

(как в соленоиде: $j_s d$ — линейная плотность тока). По определению $j_s = en_{sc}v_s$, где n_{sc} — плотность сверхпроводящих электронов, v_s — скорость центра масс пар. В магнитном поле обобщенный импульс пары

$$\mathbf{p}_s = 2m\mathbf{v}_s - \frac{2e}{c}\mathbf{A}.$$

Используя условие квантования Бора—Зоммерфельда

$$\oint (\mathbf{p}_s \, d\mathbf{l}) = 2\pi n\hbar,$$

получаем

$$2\pi n\hbar = \frac{2m}{n_{sc}e} \frac{2\pi R}{c} j_s - \frac{2e}{c} \tilde{\Phi},$$

где $\tilde{\Phi} = \int (\text{rot } \mathbf{A} \, ds) = B\pi R^2$ — магнитный поток внутри цилиндра. Исключая j_s , находим:

$$\tilde{\Phi} = n \frac{\Phi_0^{сп}}{1 + 2\Lambda^2/(Rd)}.$$

Как видно из формулы, при $Rd \gg \Lambda^2$ квантование магнитного потока в тонкостенном цилиндре происходит так же, как и в массивном образце. Но, вообще говоря, «квант потока» всегда меньше $\Phi_0^{сп}$.

$$5.18. G = \frac{\mathcal{I}_c}{\mathcal{I}'_{\min}} = 2\pi N \frac{a}{L} \approx 6, \text{ где } \mathcal{I}_c \text{ — предельный ток прямого про-$$

да, создающий разрушающее критическое поле $B_c = \frac{2\mathcal{I}_c}{cr}$, \mathcal{I}'_{\min} — предель-

ное (минимальное) значение управляющего тока, переводящего проволоку в нормальное состояние.

$$5.19^* H_c \approx \frac{8 \cdot 2^{2/3} k_B T_c}{\hbar (3\pi^2)^{1/3}} \sqrt{\frac{m\pi}{a}} \approx 730 \text{ Гс.}$$

Решение. Плотность энергии сверхпроводника ниже плотности энергии нормального металла на величину плотности энергии связи куперовских пар.

Поскольку энергия связи одной пары равна 2Δ (по Δ

на каждый электрон), то $\mathcal{E}_{св} = n_{\text{пар}} 2\Delta = \frac{n_{sc}}{2} 2\Delta$, где

n_{sc} — плотность сверхпроводящих электронов. По

анalogии с теплоемкостью металла $n_{sc} \approx n \frac{2\Delta}{\epsilon_F}$ («раз-

мытие распределения» примерно 2Δ), где $n = 2/a^3$ —

плотность электронов проводимости. Считая, что

$\Delta \approx 2k_B T_c$ (в теории сверхпроводимости Бардина—

Купера—Шриффера: $\Delta = 1,76k_B T_c$), получаем

$$\mathcal{E}_{св} \approx \frac{16(k_B T_c)^2}{a^3 \epsilon_F} = \frac{32(k_B T_c)^2 m_e}{a \hbar^2 (3\pi^2)^{2/3} 2^{2/3}}.$$

Сверхпроводимость «разрушается», когда плот-

ность энергии магнитного поля сравнивается с плот-

ностью энергии связи

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \mathcal{E}_{св}, \text{ откуда } H_c \approx \frac{8 \cdot 2^{2/3} k_B T_c}{\hbar (3\pi^2)^{1/3}} \sqrt{\frac{m_e \pi}{a}} \approx 730 \text{ Гс.}$$

Отметим, что экспериментальное значение критического поля тантала составляет 830 Гс. Заметим также, что ответ можно выразить и в такой форме

$$H_c \approx \frac{\Phi_0^{сн}}{\pi \Lambda \xi}.$$

$$5.20. j_c \approx \frac{2k_B T_c n_{sc} e}{m_e v_F} \approx 10^8 \text{ А/см}^2.$$

$$5.21^* d \approx \sqrt{\frac{\Phi_0^{сн}}{B_2}} \approx 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ см, где } B_2 = 300 \text{ Гс.}$$

Решение. В первом случае при внешнем поле $H = H_{c1}$ $B_1 = H + 4\pi I_1 = 0$, откуда намагниченность $4\pi I_1 = -400$ Э. Во втором случае

(см. графики на рис. 238) во внешнем поле $H = 500$ Э $B_2 = H + \frac{1}{2} (4\pi I_1) =$

$= 500 - 200 = 300$ Гс. Поскольку $H > H_{c1}$, то сверхпроводник находится в

смешанном состоянии (полагаем, что $H < H_{c2}$). Плотность вихрей, т. е. их

число, приходящееся на единицу площади оценим как

$$n = \frac{B_2}{\Phi_0^{сн}}.$$

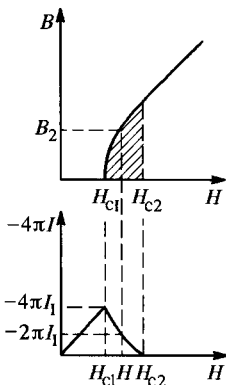


Рис. 238

Тогда расстояние между вихрями, магнитного потока, называемыми также вихрями Абрикосова,

$$d \approx \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Phi_0^{\text{сн}}}{B_2}} \approx 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

5.22. $B \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Phi_0^{\text{сн}} \theta^2}{\lambda^2} = 2430 \text{ Гс}$, где $\Phi_0^{\text{сн}} = \frac{hc}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$ — квант магнитного потока в сверхпроводнике.

$$\mathbf{5.23}^* \mathcal{E} = \frac{\pi n_{\text{sc}} \hbar^2}{4m} \ln \frac{\Lambda}{\xi}.$$

Решение. По правилу квантования проекции момента импульса $2m\nu(r)r = \hbar$ ($n = 1$) находим распределение скоростей центров масс пар в вихре

$$v(r) = \frac{\hbar}{2mr}.$$

Это выражение справедливо при $\xi \ll r \ll \Lambda$, когда можно пренебречь вкладом интеграла $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$ в правиле квантования Бора—Зоммерфельда (см. задачи 5.14 и 5.17). Если длина вихря равна L , то кинетическая энергия электронных пар в вихре

$$\mathcal{E}_L = \int \frac{2mv^2(r)}{2} \frac{n_{\text{sc}}}{2} dV = L \int_{\xi}^{\Lambda} \frac{\hbar^2}{8mr^2} n_{\text{sc}} 2\pi r dr,$$

откуда и следует ответ задачи.

5.24. $W_m = -\mathfrak{M}H$, где $\mathfrak{M} = \mu_B \int_{\xi}^{\Lambda} \frac{n_{\text{sc}}}{2} 2\pi r dr \approx \frac{\pi n_{\text{sc}}}{2} \Lambda^2$ — магнитный момент единицы длины вихря. Из условия $\mathcal{E} + W_m = 0$ находим $H_{c1} = \frac{c\hbar}{e\Lambda^2} \ln \frac{\Lambda}{\xi} = \frac{\Phi_0^{\text{сн}}}{2\pi\Lambda^2} \ln \frac{\Lambda}{\xi}$ (см. также задачу 5.25).

$$\mathbf{5.25.} \Lambda \approx \sqrt{\frac{\Phi_0^{\text{сн}}}{\pi H_{c1}}} \approx 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ см}; \quad \xi = \sqrt{\frac{\Phi_0^{\text{сн}}}{\pi H_{c2}}} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

$$\mathbf{5.26.} \omega = \frac{\pi^2 n_{\text{sc}} \Lambda^2 \hbar l B}{\Phi_0^{\text{сн}} M} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

$$\mathbf{5.27.} F = \frac{1}{c} \frac{\mathcal{E} \Phi_0^{\text{сн}}}{b} \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ дин.}$$

$$\mathbf{5.28}^* E = \frac{1}{c} vB = \frac{\Phi_0^{\text{сн}} jB}{\eta c^2}.$$

Решение. Условием равномерного движения вихря является равенство сил $|\mathbf{F}_{\text{тр}}| = |\mathbf{F}_A|$, где сила Ампера, действующая на единицу длины вихря

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \Phi_0^{\text{сн}}], \quad \Phi_0^{\text{сн}} = \frac{hc}{2e} \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Скорость вихря \mathbf{v} образует правую тройку с векторами \mathbf{j} и \mathbf{B} . При этом $v = \frac{1}{c} \frac{j\Phi_0^{\text{сп}}}{\eta}$. В системе вихря, движущегося со скоростью \mathbf{v} , присутствует только магнитное поле \mathbf{B} , следовательно в лабораторной системе отсчета имеется также макроскопическое электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} [\mathbf{Bv}].$$

Легко увидеть, что $\mathbf{E} \parallel \mathbf{j}$ и поэтому $E = \frac{1}{c} vB = \frac{\Phi_0^{\text{сп}} jB}{\eta c}$.

5.29* $\sigma_{\text{эфф}} = \sigma_n \frac{H_{c2}}{B}$, где σ_n — проводимость в сердцевине вихря, т. е. проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии.

Решение. Как следует из предыдущей задачи (5.28*), $\mathbf{j} = \sigma_{\text{эфф}}(B)\mathbf{E}$, где эффективная проводимость $\sigma_{\text{эфф}}(B) = \Phi_0^{\text{сп}}/(\eta c^2)$.

Поскольку при $B = H_{c2}$ сверхпроводимость исчезает и материал становится нормальным металлом, то

$$\sigma_{\text{эфф}}(H_{c2}) = \frac{\Phi_0^{\text{сп}} H_{c2}}{\eta c^2} = \sigma_n, \text{ откуда } \frac{\Phi_0^{\text{сп}}}{\eta c^2} = \frac{\sigma_n}{H_{c2}} \text{ или } \sigma_{\text{эфф}}(B) = \sigma_n \frac{B}{H_{c2}}.$$

5.30. $\bar{\xi} = \sqrt{6D\tau_{\text{кор}}} \approx \sqrt{\frac{\hbar^2 b}{m a k_B T_c}} \approx 1,8 \cdot 10^{-6}$ см, где коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3} v_F \lambda \approx \frac{1}{3} v_F b$, ($v_F \approx \frac{\hbar}{ma}$), $\tau_{\text{кор}} \approx \frac{\xi}{v_F}$ — время до того момента, когда сбивается фаза электронной волны.

$$\mathbf{5.31.} \quad H_{c2} = \frac{\hbar c}{2e\xi^2} = \frac{\Phi_0^{\text{сп}}}{2\pi\xi^2}.$$

$$\mathbf{5.32.} \quad V = \frac{\Delta}{e} \approx \frac{k_B T_c}{e} \approx 0,008 \text{ В. См. приложение II.}$$

5.33* Ответ задачи следует из уравнений

$$eV_1 = eV_{\text{max}} = \Delta_2 - \Delta_1$$

$$eV_2 = eV_{\text{min}} = \Delta_2 + \Delta_1.$$

Откуда следует:

$$\Delta_2 = e \frac{V_1 + V_2}{2} = 1,11 \text{ мэВ.}$$

$$\Delta_1 = e \frac{V_2 - V_1}{2} = 0,29 \text{ мэВ}$$

Критическую температуру определяем из соотношения $2\Delta = 3,52k_B T_c$, откуда $T_{c1} \approx 1,9$ К; $T_{c2} = 7,3$ К. Подробно эксперименты Гиавера рассмотрены в Приложении II.

$$\mathbf{5.34.} \quad \xi = \frac{\hbar\pi}{m_e s} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 1200 \text{ \AA.}$$

$$\mathbf{5.35.} \quad \lambda \leq \lambda_p = 2\pi \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi n_{sc} e^2}} = 2\pi\lambda, \text{ т. е. } \frac{\lambda}{\Lambda} \approx 2\pi.$$

5.36. $\Delta C \propto VT$.

$$5.37^* r \ll \frac{\hbar v_F}{2\Delta(T)} \simeq \xi(T); j(\xi) \simeq \frac{en_{sc}\Delta(T)}{\hbar\rho_F}.$$

Решение. Скорость движения центра масс куперовской пары при $r < \Lambda$ (лондоновской глубины) определим как (см. задачу 5.23)

$$v(r) = \frac{\hbar}{2mr}.$$

Если $v(r) \geq v_{\text{крит}} = \Delta(T)/\rho_F$, то сверхпроводимость «разрушается». Таким образом

$$\frac{\hbar}{2mr} \geq \frac{\Delta(T)}{\rho_F}, \text{ откуда } r \leq \frac{\hbar v_F}{2\Delta(T)} \simeq \xi(T).$$

Видно, что область нормальной фазы имеет размер порядка длины когерентности ξ . Плотность тока $j(r) = 2en_{\xi} v(r) = en_{sc} v(r)$. При $r = \xi$ получаем

$$j(\xi) = \frac{en_{sc}\hbar}{2m\xi} \simeq \frac{en_{sc}\Delta(T)}{\hbar\rho_F} \sim j_c,$$

где j_c — ток распаривания (см. задачу 5.20).

5.38. $B(r) = \frac{\Phi_0^{\text{сп}}}{2\pi\Lambda^2} \ln \frac{\Lambda}{r}$; $B(0) = B(\xi) = \frac{\Phi_0^{\text{сп}}}{2\pi\Lambda^2} \ln \frac{\Lambda}{\xi} = H_{c1}$. По теории Абрикосова точное выражение $B(0) = 2H_{c1}$ (рассматривается область $\xi < r < \Lambda$).

§ 6. Задачи заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике.

$$6.2. \alpha = \frac{\epsilon_{n-1}^{\text{кин}}}{\epsilon_n^{\text{кин}}} = \left(\frac{M+m}{M-m} \right)^2. \text{ Для нейтронов в графите: } 4 \cdot 10^7 = \left(\frac{13}{11} \right)^{2n}, \text{ от-}$$

куда $n = 52$.

$$6.3. m_n = 1,5m_p.$$

$$6.4. t \approx \frac{Mu_0}{2mv^2 nS} \approx 16 \text{ мкс.}$$

$$6.5. (\mathcal{E}_k)_{\min} = \frac{3}{2} W = 9,15 \text{ эВ.}$$

$$6.6. \text{Ионизация не произойдет т. к. } (\mathcal{E}_k)_{\min} = 4,37 \text{ эВ} > 4 \text{ эВ.}$$

$$6.7. v_{\text{Ar}} = \frac{m_{\text{Ne}}}{m_{\text{Ar}}} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_k}{m_{\text{Ne}}}} = 1,55 \text{ км/с.}$$

$$6.8. f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\pi} \sqrt{\frac{6m}{M}}.$$

У к а з а н и е. Применить для каждого шарика адиабатический инвариант $\oint p dx = \text{const}$, который дает $v_{1,2}(l \pm x) = 2vl^2 = \text{const}$, $v_0 = 2vl$, где $2l$ — длина всего цилиндра, v_1 и v_2 — скорости шариков в зависимости от смещения x поршня, v_0 — скорость шариков, когда поршень находится строго посередине.

6.9. Если направить ось OX перпендикулярно плоскости пластины, а ось OY параллельно плоскости пластины, то $V'_{1x} = 0$;

$$V'_{1y} = \begin{cases} V (\cos \varphi - k \sin \varphi) & \text{при } \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{1}{2k}; \\ \frac{V}{2} \cos \varphi & \text{при } \operatorname{tg} \varphi \geq \frac{1}{2k}. \end{cases}$$

$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$ (при этом значение угла $A_{\text{тр}}$ максимальна).

6.10. $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\mathcal{J}}{2acR^2\rho} \sqrt{\frac{mV}{2e}} = 0,618 \text{ рад/с}^2$.

6.11*: $T = \frac{L}{\sqrt{gH}} \simeq 10 \text{ с}$.

На рис. 239 изображена лента в движении. Если x — координата скользящего верхнего конца ленты, l — длина верхней части, то $2l + x = L$. Записав выражение для потенциальной энергии

$$U(x) = \frac{1}{2} \rho g H a (L - x),$$

где a — ширина ленты, мы легко определим силу, выпрямляющую ленту $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$, а, значит, и можем записать уравнение движения

$$\frac{d}{dt} [(L - x)\dot{x}] = gH,$$

откуда и определим искомое время T .

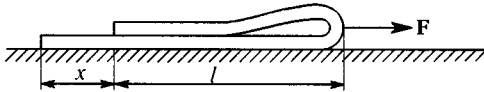


Рис. 239

6.12. $A = \frac{1}{2} \mu m g \frac{l^2}{L} = 0,15 \text{ Дж}$, где $l = 35 \text{ см}$ — длина части веревки, соприкасающейся с шероховатой поверхностью.

6.13. $\frac{\omega_{\text{грав}}}{\omega_{\text{магн}}} = \frac{3g^2}{\gamma B^2} \sim 10^{13}$.

6.14. Условие экранирования $E < \frac{mg}{e} \approx 10^{-9} \text{ В/см}$; $\frac{dB}{dz} < \frac{mg}{\mu_p} \sim 10^2 \text{ Гс/см}$, где m, e, μ_p — масса, заряд и магнитный момент протона.

6.15. Можно. $\frac{\Delta F}{F} \geq \frac{\eta}{\delta} = 10^{-6}$. Тогда радиус свинцового шара $R_c \geq 10^{-6} \frac{\rho_3}{\rho_c} R_3 \approx 3,1 \text{ м}$, где $\rho_3 \approx 5,5 \text{ г/см}^3$ — плотность Земли, $\rho_c = 11,3 \text{ г/см}^3$ — плотность свинца. Масса свинцового шара должна быть $M_c \approx 1400 \text{ т}$.

6.16. $V = \frac{maL}{e} \approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ В}$.

$$6.17. r = \frac{4}{B} \sqrt{\frac{2\pi EC}{c}} R_3 = 3,4 \cdot 10^4 \text{ а. е. (СГСЭ).}$$

$$6.18. \omega_{\text{изл}} = 6,1 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3; \omega_{\text{маг}} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3;$$

$$\omega_{\text{вещ}} = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ эрг/см}^3. \omega_{\text{изл}}: \omega_{\text{маг}}: \omega_{\text{вещ}} = 6,1: 1,6: 1,5 \cdot 10^4.$$

Гравитационный радиус Вселенной можно оценить из соотношения размерностей

$$R \sim \frac{c}{\sqrt{\gamma\rho}} \sim 10^{29} \text{ см} \sim 10^{11} \text{ св. лет.}$$

6.19. $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \frac{2h}{R} \simeq 6 \cdot 10^{-8}$. При этом в условии указана экспериментальная ошибка $\frac{\Delta g}{g} = 4 \cdot 10^{-9}$, что много меньше неоднородности поля.

$$6.20. \frac{\Delta g}{g} = 10^{-8}, \text{ где } \Delta g = 2\pi\gamma h (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}}) \simeq 10^{-5} \text{ дин/см}^2.$$

6.21. $\Delta P = g_0 \frac{\Delta g}{2\pi\gamma} \approx 0,24 \cdot 10^3 \text{ Па} = 1,8 \text{ мм рт. ст.}$, где γ — гравитационная постоянная.

$$6.22. \rho = \frac{2}{3} \rho_0 \left(1 - \delta \frac{R}{h} \right) = 0,453 \rho_0 = 2,54 \text{ г/см}^3.$$

$$6.23. v^2 - v_0^2 = 4g \ln \frac{M}{M_0}, \text{ откуда } v \approx 3,9 \cdot 10^4 \text{ м/с}; \frac{v}{v_0} = 0,977.$$

$$6.24. V = \sqrt[3]{\frac{8\sigma T^4}{\rho}} \simeq 30 \text{ км/с, где } \rho = \frac{P\mu}{RT_0} = 1,75 \cdot 10^{-8} \text{ кг/м}^3.$$

$$6.25. N = acM = 3 \cdot 10^{12} \text{ Вт} \approx 670 N_{\text{ГЭС}}.$$

$$6.26. k = \frac{g+a}{g} = k_0 \frac{M_0}{M} = 7,56, \text{ где } \frac{M_0}{M} = e^{-\frac{k_0+1}{k_0}} = 0,165.$$

$$6.27. \frac{V}{u} = \ln \frac{k}{k_0} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k_0} = 1,18.$$

$$6.28. z = \frac{\gamma M}{g(R+H)} \approx 14 \text{ см, где } M = \frac{4\pi}{3} (\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{п}}) R^3 = 167,6 \cdot 10^9 \text{ т.}$$

6.29. $t = \frac{x}{v} = 7,7 \text{ лет}$, где скорость таяния $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha \Delta T}{\rho_{\text{л}} \lambda} = 130 \text{ м/год}$, а $x = 1 \text{ км}$ — толщина растаявшего льда в момент поворота айсберга.

6.30. $\tau \approx 1,5 \text{ года}$ — время поворота настоящего айсберга.

6.31. $\frac{M_{\text{В}}}{M_3} = \frac{H_3}{H_{\text{В}}} \left(\frac{R_{\text{В}}}{R_3} \right) \approx 0,81$. Принимая $R_3 \approx 6370 \text{ км}$ и $g_3 = 9,81 \text{ м/с}^2$, получаем $M_3 \approx 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, $M_{\text{В}} = 4,83 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Соответственно плотность $\rho_3 \approx 5,52 \text{ г/см}^3$, $\rho_{\text{В}} \approx \rho_3 \frac{H_3 R_3}{H_{\text{В}} R_{\text{В}}} \approx 0,95 \rho_3 \approx 5,23 \text{ г/см}^3$.

6.32. $\alpha = \frac{M_0 - M}{M_0} = 1 - \exp\left(-\frac{V_2 - V_1}{u}\right) \approx 0,16$, где M_0 и M — начальная и конечная массы корабля, V_2 — вторая, а V_1 — первая космическая скорость для Луны (2,4 и 1,7 км/с). $T = \frac{u^2}{2c_p} \approx 3600 \text{ К}$.

$$6.33. \mu = \frac{mg\Delta h}{2Tuv} \approx 2 \text{ кг/сут, где } v \text{ — скорость станции.}$$

6.34. Потенциальная энергия космического аппарата, как функция его расстояния до центра Луны

$$U(x) = -\frac{\gamma m M_3}{L-x} - \frac{\gamma m M_{\text{Л}}}{x},$$

где $M_3 \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг; $M_{\text{Л}} \approx 7,4 \cdot 10^{22}$ кг и m — массы Земли, Луны и аппарата, $L = 3,84 \cdot 10^8$ м — расстояние между центрами Земли и Луны. Полагая, что в максимуме потенциальной энергии (это точка, где силы притяжения аппарата к Земле и Луне сравниваются), кинетическая энергия аппарата равна нулю, находим скорость аппарата у поверхности Луны

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}} \left[1 + \frac{M_3}{M_{\text{Л}}} \frac{R_{\text{Л}}}{L-R_{\text{Л}}} - \frac{R_{\text{Л}}}{L} \frac{(\sqrt{M_3} + \sqrt{M_{\text{Л}}})^2}{M_{\text{Л}}} \right]}$$

или

$$v_{\min} \approx \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}}} \left(1 - \sqrt{\frac{M_3}{M_{\text{Л}}}} \frac{R_{\text{Л}}}{L} \right) \approx 2,27 \text{ км/с.}$$

6.35. $R_0 = \frac{R_3 v_{1\text{к}}}{\sqrt{2\alpha W/m}} \approx 3,5 \cdot 10^5$ км, где $v_{1\text{к}}$ — первая космическая скорость.

6.36. $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} \approx 42,5$ час.

6.37. Импульс отдачи $p = \frac{H_m}{4} \sqrt{\frac{g}{R_3}} \approx 6,25 \cdot 10^3$ кг·м/с, энергия лазера

$W = \frac{p}{\alpha} \approx 2 \cdot 10^8$ Дж.

6.38. $v_{2\text{Л}} = 2,4$ км/с; $v_{2\text{T}} = 2,63$ км/с.

Наличие атмосферы на Титане связано с тем, что температура на поверхности Титана намного ниже температуры на поверхности Луны, что объясняется большим удалением Титана от Солнца. $T_{\text{T}} = T_3 \sqrt{\frac{r_3}{r_{\text{T}}}} \approx 90$ К, где r_3 и r_{T} — радиусы орбит Земли и Сатурна (Титана вместе с Сатурном). При такой температуре средние скорости молекул метана и аммиака недостаточны для их удаления в пространство.

6.39. $\delta T = \frac{2 \delta r}{r} \frac{\omega_1 T}{\omega_2 \sin \theta} \approx 17,2$ с, где ω_1 — угловая скорость вращения

Земли вокруг Солнца, ω_2 — угловая скорость вращения Земли вокруг оси.

6.40. $\epsilon = \pi \frac{T_{\text{Л}} - T_3}{4(T_{\text{Л}} + T_3)} = 0,015$. Табличное значение $\epsilon = 0,0167$.

6.41. $\varphi = \pi \left[1 - \frac{T_3}{T_{\text{М}}} \left(\frac{a}{R_3} \right)^{3/2} \right] = 0,778$ рад $\approx 44,6^\circ$, где T_3 и $T_{\text{М}}$ — пери-

оды обращения Земли и Марса вокруг Солнца, а $a = \frac{R_{\text{М}} + R_3}{2}$ — большая полуось эллипса перелета.

6.42. $\varphi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2T}{T_3} - 1 \right) = 0,65$ рад = $37,2^\circ$, где $T = \frac{T_3}{2} \left(\frac{R_{\text{М}} + R_3}{2R_3} \right)^{3/2} = 0,707$ года — время перелета.

6.43. Если M — масса звезды, m — масса планеты, то отношение масс

$$\frac{m}{M} = u_0 \left(\frac{T}{2\pi\gamma M} \right)^{1/3} = 0,425 \cdot 10^{-3}, \quad u_0 \text{ — скорость движения по кругу.}$$

$$\mathbf{6.44.} \quad N \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0 T_{10}^2}{4\pi^2 \rho r_0^2 \eta} \right)^{1/3} \approx 3600, \quad \text{где } \rho \text{ — плотность льда.}$$

6.45. Если направить ось OX по радиусу к центру Земли (точка O — положение корабля), ось OZ — по касательной к орбите корабля в направлении его движения, то в условиях задачи траектория крышки относительно корабля — это эллипс, причем $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$, а $z(t) = \frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$, где ω — угловая скорость колебательного движения крышки относительно корабля, совпадающая по величине с удвоенной скоростью вращения корабля вокруг Земли, т. е.

$$\omega = \sqrt{g \frac{R_0^2}{R_3^3}} \approx 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 4607 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 17 \text{ мин.}$$

Эллипс имеет малую полуось $b \approx 370$ м и большую полуось $a \approx 735$ м.

$$\mathbf{6.46.} \quad \frac{dr}{dt} = -2 \frac{C\gamma M}{m} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

$$\mathbf{6.47.} \quad T = \sqrt[4]{\frac{\rho v^3 (2-\eta)}{8\sigma\eta}}.$$

$$\mathbf{6.48.} \quad M_\Gamma = \frac{a_\Gamma R_\Gamma}{a_C R_C} M_C \sim 10^{13} M_C.$$

$$\mathbf{6.49.} \quad \tau = T \left(\frac{r}{R} \right)^2 \approx 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ с, где } r = 1,3 \cdot 10^{-13} \left(\frac{M}{m_n} \right)^{1/3} \text{ см} \approx 14 \text{ км.}$$

6.50* Решение. Энергия магнитного поля переходит в тепло

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{j^2}{\sigma} \tau, \quad j = \sigma E_{\text{инд}} \sim \sigma \frac{BR}{c\tau}, \quad \tau \sim \frac{8\pi\sigma R^2}{c^2} \sim 10^{22} \text{ с.}$$

Еще один подход: $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$; $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$; $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}$;

$$D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}; \quad D\tau \sim R^2, \quad \text{откуда } \tau \sim \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}.$$

6.51. $B = B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}$, где $\rho_0 \approx 1,4 \text{ г/см}^3$ — начальная средняя плотность звезды; $B_{\text{б. кар.}} \approx 3,7 \cdot 10^4 \text{ Гс}$, $B_{\text{н. зв.}} \approx 1,7 \cdot 10^9 \text{ Гс}$.

6.52. Зеемановское расщепление должно быть больше доплеровского уширения за счет теплового движения атомов (в основном водорода) и вращения звезды, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\mu_B B}{\hbar\omega_0} \geq \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{тепл}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{вращ}} = \frac{v_{\text{тепл}}}{c} + \frac{v_{\text{вращ}}}{c} \approx \frac{v_{\text{тепл}}}{c}.$$

Окончательно получим $B \geq \frac{\hbar\omega}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_p}} \approx 1,8 \text{ кГс}$.

6.53. Решение. Будем называть столкновением такой процесс, при котором центры звезд проходят относительно друг друга на расстоянии, не большем суммы их радиусов (в нашем случае — не большем $2R_C$).

Для определения сечения столкновений перейдем в систему центра масс сталкивающихся звезд. Пусть b — максимальный параметр удара (относительно центра масс), при котором происходит столкновение. Тогда, как видно из рис. 240 сечение столкновения $\sigma = \pi (2b)^2$. Из законов сохранения энергии и момента импульса имеем

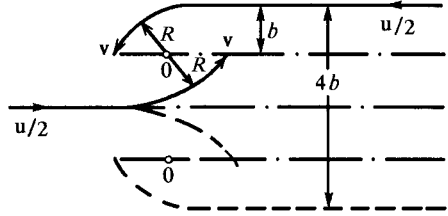


Рис. 240

$$2 \frac{M_C}{2} \left(\frac{u}{2} \right)^2 = 2 \frac{M_C v^2}{2} - \frac{\gamma M_C^2}{2R_C}, \quad M_C b \frac{u}{2} = M_C R_C v,$$

где v — скорость каждой из звезд относительно неподвижного центра O , когда они находятся на кратчайшем расстоянии друг от друга. Исключая отсюда v , получаем

$$\frac{b^2}{R_C^2} = 1 + \frac{2\gamma M_C}{R_C u^2} \approx \frac{2\gamma M_C}{R_C u^2} \approx 10^2.$$

Соответственно, сечение столкновения

$$\sigma = 4\pi b^2 = 8\pi \frac{R_C \gamma M_C}{u^2}.$$

А так как длина свободного пробега $L = 1/(n\sigma)$, где $n = N/(cT)^3$ (c — скорость света, $T = 1 \text{ год} \approx 3,2 \cdot 10^7 \text{ с}$), то время между столкновениями одной и той же звезды

$$\tau = \frac{1}{n\sigma} = \frac{u(cT)^3}{8\pi N R_C \gamma M_C} = 2,2 \cdot 10^{21} \text{ с} \approx 7 \cdot 10^{13} \text{ лет},$$

т. е. в одном кубическом световом годе происходит в среднем одно столкновение за время

$$t = \frac{\tau}{N/2} \sim 10^{13} \text{ лет}.$$

6.54. $\tau \approx \frac{1}{n\sigma} \approx 2,7 \cdot 10^9$ лет, т. е. за свою историю астероиды сталкиваются в среднем примерно 1 раз. Здесь $n \approx 0,75 \cdot 10^{-20} \text{ км}^{-3}$ — концентрация астероидов, $\sigma = 314 \text{ км}^2$ — сечение столкновений.

6.55. $\rho_{\text{кр}} = \frac{3H^2}{8\pi\gamma} \approx 10^{-29} \text{ г/см}^3$ (полная энергия $E = K + \Pi = 0$).

6.56. $R \leq \frac{\gamma M}{c^2} \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ см} = 1,5 \text{ км}$ (точный ответ $R \leq R_{\text{III}} = \frac{2\gamma M}{c^2}$ — радиус сферы Шварцшильда).

6.57. $R \gg \gamma \frac{M}{c^2} \approx 1,5$ км. (При сжатии бесконечно разреженного вещества

до звезды радиусом R выделяется энергия $\frac{\gamma M}{R^2}$, которая стремится к бесконечности при $R \rightarrow 0$. Но это невозможно, т. к. общая выделившаяся энергия не может превышать Mc^2 .)

6.58. $r \sim \frac{3j_3}{4c\rho g_C} \approx 0,6 \cdot 10^{-4}$ см, где $j_3 \approx 0,136 \cdot 10^6$ эрг/(с·см²) — солнечная постоянная (плотность потока энергии Солнца на Земной орбите), $\rho \approx 1$ г/см³ — плотность пылинки, $g_C \approx 0,6$ см/с² — ускорение свободного падения, создаваемое Солнцем на Земной орбите.

6.59. $mc^2 \leq \mathcal{E} \sqrt{\frac{cT}{L} \frac{\mathcal{E}}{\Delta \mathcal{E}}} \approx 28$ ГэВ. Размер излучающей области по крайней мере не должен быть меньше 1 свет. секунды (300 тыс. км). Однако это соответствует вращению объекта со сверхсветовой скоростью $v \sim 2\pi c$, т. е. ограничений на размер излучающей области нет.

$$\mathbf{6.60.} \quad \mathcal{E} = mc^2 \sqrt{\frac{L}{2c \Delta t}} \approx 560 \text{ кэВ.}$$

$$\mathbf{6.61.} \quad \Delta T = 5T \frac{\Delta R}{R} \approx 2,7 \text{ с.}$$

$$\mathbf{6.62.} \quad \omega_2 = \omega_0 \frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \beta\right)}, \text{ откуда релятивистская поправка}$$

к частоте $\left(\frac{\Delta \omega}{\omega}\right)_{\text{рел}} \approx \frac{v^2}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{-10}$. Разрешающая способность $R \geq 10^9$.

$$\mathbf{6.63.} \quad v = \frac{\mathcal{E}}{mc} (1 + R^2 + 2R \cos 2\varphi)^{1/2} \approx 1,3 \text{ мм/с.}$$

$$\mathbf{6.64.} \quad F = -\frac{\mathcal{J}}{c} \frac{2(n-1)}{n+1} = -1,33 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2.$$

Решение. Импульс фотона

$$p = \hbar k = \hbar \frac{\omega}{c} n,$$

где \hbar — постоянная Планка, ω — частота света, c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления.

Импульс падающего света (давления)

$$P_1 = N \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{\mathcal{J}}{c},$$

где N — число фотонов на единицу площади за единицу времени.

Импульс отраженного света

$$P_2 = -r^2 \mathcal{J}/c,$$

где $r = \frac{(n-1)}{(n+1)}$ — амплитудный коэффициент отражения.

Импульс прошедших фотонов

$$P_3 = (1 - r^2) N \frac{\hbar \omega}{c} = (1 - r^2) \mathcal{J} n.$$

Искомое давление:

$$F = P_1 - P_2 - P_3 = \frac{\mathcal{J}}{c} (1 + r^2 - n + nr^2) =$$

$$= - \frac{\mathcal{J}}{c} \frac{2(n-1)}{n+1} = -1,33 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2.$$

Т. е. сила давления направлена против волнового вектора падающего света. Именно этот результат кажется на первый взгляд парадоксальным, и, якобы, не совместимым с представлениями о давлении света.

6.65. $M = \frac{\pi D^2 d \mathcal{J}}{4c} \frac{n^2 - 1}{n(n^2 + 1)} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ дин} \cdot \text{см}$. Если свет падает на пластинку под углом Брюстера слева направо, то пластинка будет поворачиваться по часовой стрелке.

6.66. Если главные направления пластинки повернуты на $\pm 45^\circ$ относительно плоскости поляризации падающего света, то прошедший свет будет поляризован по кругу. При этом свет будет переносить за единицу времени момент импульса $L = \pm nh$, где n — число фотонов, прошедших пластинку за 1 с. Пластинка же будет испытывать противоположно направленный момент импульса отдачи

$$M = \mp nh = \mp \frac{W\lambda}{c} = \mp 6,28 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}.$$

Если одно из главных направлений пластинки будет совпадать с плоскостью поляризации света, то $M = 0$.

$$**6.67.** \eta \approx d \frac{h \sqrt{2fm}}{\pi^2 R^3}.$$

6.68. Уравнение колебаний: $M\ddot{x} + 16\pi\eta L\dot{x} + \rho g S x = 0$, откуда затухание $\delta = \frac{4\pi\eta}{\rho S} = 0,0143 \text{ с}^{-1}$, частота $\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{M}} = \sqrt{\frac{g}{2L}} = 3,13 \text{ с}^{-1}$; добротность $Q = \frac{\omega}{2\delta} \approx 110$.

$$**6.69.** F \sim 4RL\rho v^2 \simeq 4 \cdot 10^3 \text{ дин}.$$

6.70*. Решение. Для гравитационных волн скорость u и длина волны λ связаны соотношением $u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Поэтому волновые картины будут подобны, если все размеры изменить пропорционально квадрату скорости движения. Следовательно, скорость модели должна быть равной 3,6 км/ч = 1 м/с. Отметим, что в данной задаче безразмерными параметрами подобия являются отношения $u/v = \sqrt{g\lambda}/v$ и λ/L , где v — скорость корабля, L — его линейный размер.

6.71*. Решение. Дисперсионное соотношение для гравитационный волн на поверхности воды должно быть: $\omega = f(k, \rho, g)$. При этом размерности $[\rho] = \text{г/см}^3$; $[g] = \text{см/с}^2$; $[k] = 1/\text{см}$. Отсюда $\omega = A\sqrt{gk}$, где A — безразмерная константа. Фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k} = A\sqrt{\frac{g}{k}}$, а групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v}{2}.$$

$$**6.72.** \sin \alpha = \frac{v}{v_0} \sin \alpha_0 = 0,065.$$

6.73* Решение. Уравнение волны, распространяющейся по поверхности жидкости, вдоль оси x (ось канала), имеет вид (начальная фаза φ для простоты равна нулю)

$$y = A \sin(\omega t - kx); \quad k = \frac{\omega}{c} \propto \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Пусть при $x = 0$ происходит скачок глубины канала от H_1 ($x < 0$) до H_2 ($x > 0$). Тогда для волн, распространяющихся в положительном направлении, имеем при $x < 0$ суперпозицию падающей и отраженной волн

$$y = A_1 \sin(\omega t - k_1 x) + A_{-1} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{-1}),$$

а при $x > 0$ — проходящую волну

$$y = A_2 \sin(\omega t - k_2 x + \varphi_2).$$

На границе (при $x = 0$) должны выполняться условия непрерывности высоты волны и градиента высоты волны (последнее отражает непрерывность потока). Поэтому при любом t

$$A_1 \sin \omega t + A_{-1} \sin(\omega t + \varphi_{-1}) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2);$$

$$k_1 A_1 \cos \omega t - k_1 A_{-1} \cos(\omega t + \varphi_{-1}) = k_2 A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_{-1} = \varphi_2 = 0; \quad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1 = \frac{2\sqrt{H_2}}{\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}} A_1;$$

$$A_{-1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1 = \frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}} A_1.$$

В частности, при $H_2 = 4H_1$: $A_2 = \frac{4}{3} A_1$; $A_{-1} = \frac{1}{3} A_1$.

Таким образом, при переходе на глубокое место волны становятся выше и реже. Приведем также выражения для коэффициентов отражения R и прохождения T .

$$R = \left(\frac{A_{-1}}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}}\right)^2; \quad T = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = 4 \left(\frac{\sqrt{H_1 H_2}}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}}\right)^2; \quad R + T = 1.$$

6.74. $\frac{W}{u} = 1,2 \cdot 10^{-5}$, где $W = \frac{I_0}{s} 10^{B/10} = 30,2 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$ — плотность энергии в звуковой волне, $s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ = 331 м/с — скорость звука в воздухе, $u = \frac{5}{2} kTn = 2,5 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$ — плотность внутренней энергии воздуха.

6.75. $V_0 = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^\gamma = 98,7 \text{ м}^3$, где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5}$, конечный объем нефтехранилища $V = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^{\gamma - 1} = 342 \text{ м}^3$.

6.76. $\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2 a}{kT} = 1,2 \cdot 10^{-7}$. Давление в конденсаторе больше.

6.77. $T = T_0 \frac{CU^2}{12PV} = 2,97 \cdot 10^7 \text{ К}$. Нагрев обкладки может существенно снизить температуру газа.

$$6.78. W_1 - W_0 = N \frac{T_2 - T_1}{T_1} \approx 1,8 \text{ Вт.}$$

6.79. $N_{\max} = \alpha S \left(\frac{T_C^4 \alpha^2}{4} - T_H^4 \right) \left(1 - \frac{T_x}{T_H} \right) = 148 \text{ Вт}$, где T_H находится из уравнения $T_H^4 \left(T_H - \frac{3}{4} T_x \right) = \alpha^2 \frac{T_x T_C^4}{16}$. После подстановки данных: $T_H \approx 364 \text{ К}$.

$$6.80. N_{\max} = 2\alpha S T_x^4 \left(\frac{T_H}{T_x} - 1 \right) = 97 \text{ Вт}, T_x = \frac{3}{4} T_H = 225 \text{ К}.$$

$$6.81. T = \sqrt{T_1 T_2} = 400 \text{ К}; N_{\max} = \frac{a}{2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 = 100 \text{ кВт.}$$

$$6.82. c(T_0) = \frac{3Q_{12}T_0^3}{T_1(T_1^3 - T_3^3)m} = 1,6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

$$6.83. \Delta T = \frac{q_{\text{пл}}}{c} \frac{T_k - T_l}{T_l} \approx 7,9 \text{ К}.$$

6.84. $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_1}{T_2} = 6$, где v_1 и v_2 — число молей газа при температурах T_1 и T_2 соответственно.

$$6.85. \Delta S = \frac{5}{2} k \ln \frac{T_k}{T_H} - k \ln \frac{P_k}{P_H} \approx 0,16k \approx 0,22 \cdot 10^{16} \text{ эрг/К}.$$

$$6.86. A_{\max} = \frac{3}{2} Nk \left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} \left(\frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \right)^{1/3} \right].$$

З а м е ч а н и е. Условие равновесия двух сред есть равенство их химических потенциалов $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T)$, откуда следует равенство температур и давлений. Поэтому совершение работы можно представить в два этапа: сначала мы выравниваем температуры, а затем изотермически выравниваем и давления (которые различаются из-за разности концентраций).

6.87. $x \approx \frac{Pv - c \Delta T}{\lambda} \approx 2,6\%$, где v — удельный объем, а c — удельная теплоемкость воды.

6.88. $\Delta T \approx - \frac{2T_0 \Delta p}{c_p \rho_M \Delta t_M} \Delta P$, где c_p — удельная теплоемкость воды, ρ_M — плотность воды при 4°С , $\Delta t_M = 4^\circ \text{С}$. Конечная температура воды $t_k \approx 0,4^\circ \text{С}$.

6.89. Решение. а) Считая молекулу $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ жесткой, $c_V = \frac{3R}{\mu} = 0,54 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$; в предположении полного возбуждения всех колебательных степеней свободы молекулы (так же как и вращательных) $c_V = \frac{3+i}{\mu} R = 4,3 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$, где $i = 3(n - 2) = 21$.

б) Если считать справедливым соотношение Майера $c_p - c_V = \frac{R}{\mu}$, то, используя экспериментальные данные о теплоемкости спирта при постоянном давлении ($c_p = 2,42 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$), получим искомое $c_V = 2,24 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$.

в) Используя точное термодинамическое соотношение

$$c_p - c_v = - \frac{T(\partial V)/(\partial T)_p^2}{(\partial V/\partial p)_T} \equiv \frac{T\alpha^2}{\rho\beta_T} = 0,6 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К}),$$

получим $c_v \approx 1,82 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К})$.

Таким образом при комнатной температуре колебательные степени свободы молекул спирта в значительной степени заморожены ($\sim 70\%$).

$$6.90. T = T_0 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{1/3} \approx 217 \text{ К}.$$

$$6.91. P \approx \frac{\sqrt{2\pi mkT}}{a^2 t} = 9,66 \cdot 10^{-7} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 7,2 \cdot 10^{-10} \text{ мм рт. ст.}$$

6.92. $T_k = 2T_0 = 600 \text{ К}$ (газ в этой ситуации ведет себя как двумерный).

$$6.93. \frac{\Lambda_n}{\Lambda_0} \propto \frac{1}{n^4} = 10^{-4}.$$

$$6.94. T_{\text{пред}} \approx T_0 \left(\frac{kT_0}{P_0 \sigma d} \right)^{2(\nu-1)} \approx 0,7 \text{ К}.$$

6.95. Время перемешивания, обусловленное диффузией, $\tau \approx \frac{(\pi R_3)^2}{2\Lambda \bar{v}} \approx \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ с}$, где $\Lambda \sim 10^{-5} \text{ см}$ — длина свободного пробега молекулы при нормальных условиях, $\bar{v} \sim 10^3 \text{ м/с}$ — средняя скорость молекул. Турбулентность ускоряет процесс перемешивания примерно в 10^{11} раз.

$$6.96. v = \frac{EqR^2 \rho N_A}{6\pi\mu P} = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ см/с}.$$

6.97. $T \approx \frac{eE}{2k\sigma n} \sqrt{\frac{M}{m_e}} \approx 5000 \text{ К}$, где M — средняя масса молекул воздуха.

6.98. $\tau \approx \frac{\lambda^2}{4BkT} \approx 0,06 \text{ с}$. Здесь «4» в знаменателе — следствие не двумерности, а плоского характера фотографии.

$$6.99. v = \sqrt{\frac{\Lambda e E}{2m}} \approx 15 \text{ м/с}$$
, где m — масса иона Ag.

$$6.100. \langle r^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{kT\tau}{P\sigma} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2; \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2 \text{ мм},$$

где $\mu = 12,4 \text{ г/моль}$ — приведенная молярная масса Ag и H_2O .

6.101. Применяя формулу Стокса для силы сопротивления при вязком движении, получим

$$R \sim \left(\frac{729}{16\pi} \frac{kT\eta^2}{\rho(\rho-\rho_0)^2 g^2} \right)^{1/7} \sim 10^{-3} \text{ см}.$$

В осадок выпадут частицы, для которых средняя высота столба, оцененная по барометрической формуле, $h \sim \frac{kT}{mg} \leq R$ (m — масса частиц), что эквивалентно условию

$$R \geq \left(\frac{kT}{4(\rho-\rho_0)g} \right)^{1/4} \approx 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Следовательно, в краске выпадет осадок.

6.102. $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{\eta^2}{\rho \rho_{\text{воз}} \mathcal{E}}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$ см, при этом установившаяся скорость капли $v_{\text{уст}} = \frac{\eta}{2r \rho_{\text{воз}}} \approx 18$ см/с. Здесь обозначено ρ — плотность воды,

$\rho_{\text{воз}} = \frac{P\mu}{RT} = 1,16 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\eta = \frac{1}{3} \lambda \rho_{\text{воз}} \bar{v} = 15,7 \cdot 10^{-5}$ г/см·с — динамическая вязкость воздуха, $\bar{v} \approx 4,8 \cdot 10^4$ см/с — средняя скорость молекул.

6.103. $u = v - \frac{2gr^2}{9\eta} \rho_{\text{ч}} = 5,4$ см/с; $\text{Re} = \frac{\rho_{\text{г}}(v-u)r}{\eta} = 0,35$.

6.104. $\mu = \frac{j d}{\Delta P} = 0,75$ см²/(В·с).

6.105. Требуемое число столкновений $n = \frac{\mathcal{E}_1}{\Delta \mathcal{E}} \ln 10 \approx 16$, где \mathcal{E}_1 — кинетическая энергия атома аргона массой M_1 , $\Delta \mathcal{E}$ — передаваемая энергии атому гелия массой M_2 , $\Delta \mathcal{E} \sim \mathcal{E}_1 \frac{2M_2}{M_1 + M_2}$ (максимальная энергия при лобовом соударении вдвое больше). Требуемое расстояние $R = nl \frac{T}{T_{\text{ком}}} \frac{P_{\text{ком}}}{P} = 0,54$ мм.

6.106. Электрическое поле пробоя $E_{\text{пр}} = \frac{W_{\text{и}} P \pi r^2}{ekT} \approx 2,38$ ед. СГСЭ. В катушке электрическое поле складывается из осевого E_0 и циркулярного вихревого поля E_r . Полное поле $E = \sqrt{E_r^2 + E_0^2} \approx 1,89E_0$. Здесь $E_r = \frac{L \mathcal{J}_0 \omega}{2\pi R c^2}$,

$E_0 = \frac{L \mathcal{J}_0 \omega}{lc^2}$, индуктивность катушки $L \approx 200$ см.

При $E = E_{\text{пр}}$ $\mathcal{J}_0 \approx \frac{lc^2 E_{\text{пр}}}{1,89L\omega} = 4,51 \cdot 10^{11}$ ед. СГСЭ ≈ 150 А.

6.107. $x = \sqrt{\frac{DT}{\ln 2}} \ln 10^5 = 20,4$ см.

6.108. $T_2 - T_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho c} \approx 2,4$ К, где $c \approx 4,2$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды при 20 °С, а ρ — плотность воды.

6.110. $h = \frac{\kappa(T_0 - T_s)}{\varepsilon \sigma T_s^4} \approx 770$ м.

6.111. $Q = 4\pi \gamma \kappa \rho \frac{T_r - T_R}{P_r} \approx 2,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{с}}$;

$h = R_3 - \sqrt{R_3^2 - \frac{3}{2} \frac{P_r}{\pi \gamma \rho^2}} \approx 2880$ км,

где $T_r = T_{\text{пл}}$, а $T_R = 300$ К — температура Земли у поверхности.

6.112. $r_0 = \frac{\kappa}{\sigma} \frac{T_0 - T_R}{T_0^4 - T_R^4} \approx 0,43$ см.

6.113. $r_0 = \frac{2\kappa_{\infty}}{3\sigma T_0^{5/2} T_{\infty}^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{T_{\infty}}{T_0} \right)^{3/2} \right] \approx 0,153$ см.

6.114. $T_s = \left(\frac{j^2 a \rho}{\sigma} \right)^{1/4} = 77 \text{ K}$ — температура наружной поверхности;

$$\Delta T = \frac{\sigma T_s^4 b}{x} \approx 0,02 \text{ K}.$$

6.115. $v = \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{PT_{\kappa}}{(\rho q)^2 d} \approx 0,38 \text{ мм/с} \approx 1,37 \text{ м/ч}$, где $\Delta \rho$ — разность плотностей воды и льда.

6.116. $P = P_0 \left(1 + \frac{2\sigma\mu}{r\rho_{\text{ж}}RT} \right) \approx 1,09 \text{ атм}$, где $r = \sqrt[3]{\frac{3N\mu}{4\pi\rho N_A}} \approx 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ — радиус «минимальной» капли жидкости.

$$\mathbf{6.117.} \quad r = \frac{2\sigma T}{\rho_{\text{ж}}\lambda\Delta T} \approx 225 \text{ \AA}.$$

6.118. $s = \frac{s_0}{\sqrt{1 + \alpha \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{воз}}} \left(\frac{s_0}{v_{\text{зв}}} \right)^2}} \approx 180 \text{ м/с}$; где обозначено $\rho_{\text{в}}$ — плотность

воды, $\rho_{\text{воз}} = \frac{P\mu}{RT} = 1,2 \text{ кг/м}^3$, $\alpha = N \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 4,2 \cdot 10^{-3}$, $v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = 343 \text{ м/с}$ — скорость звука в воздухе при 20°C .

6.119. $\Delta T = \frac{\Delta F}{Mc} \left(\sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) = 1,65 \text{ K}$; $\Delta S = \Delta F \frac{d\sigma}{dT} \approx 10^5 \text{ эрг/К}$, где ΔF — изменение поверхности, $c = 4,19 \cdot 10^7 \text{ эрг/(г}\cdot\text{K)}$ — удельная теплоемкость воды.

6.120. $U = \frac{\sigma\delta}{2} = 300 \text{ эрг/см}^2$, где $\delta \approx 2\text{ \AA}$ — межатомное расстояние.

6.121* $\Delta T = \frac{RT^2\Delta P}{P_1\Lambda_1 + P_2\Lambda_2} \approx 3 \text{ K}$, т. е. температура кипения системы $t = 69^\circ \text{C}$. Здесь $P_1 \approx 0,27P_0$, $P_2 \approx 0,73P_0$, где P_0 — нормальное атмосферное давление.

Решение. Кипение начинается на границе соприкосновения жидкостей, когда сумма парциальных давлений паров обеих жидкостей равна внешнему давлению. Для паров воды парциальное давление:

$$P_1 = P_0 \exp \left[- \frac{\Lambda_1}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) \right] \approx 0,27P_0;$$

аналогично вычисляется парциальное давление для паров CCl_4 : $P_2 \approx 0,73P_0$.

При увеличении внешнего давления изменяются и парциальные давления паров

$\Delta P_1 = P_1 \frac{\Lambda_1}{RT^2} \Delta T$ и $\Delta P_2 = P_2 \frac{\Lambda_2}{RT^2} \Delta T$. Тогда $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = \frac{\Delta T}{RT^2} (P_1\Lambda_1 + P_2\Lambda_2)$, откуда и следует ответ.

6.122. $\lambda(0) = \frac{a}{b} = \frac{27}{8} RT_{\text{кр}} \approx 150 \text{ Дж/моль}$.

6.123. $P = P_0 \frac{T_c}{T_{\text{кип}}} \exp \left[\frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T_{\text{кип}}} - \frac{1}{T_c} \right) \right] = 0,945 \text{ атм} \approx 718 \text{ мм рт. ст.}$

(экспериментальное значение 715 мм рт. ст.); $P_0 = 1 \text{ атм}$.

6.124. Величина максимального количества жидкого азота находится из решения уравнения $A = \frac{5}{2}P_1V_1 \frac{\Delta T}{T_1} + x\lambda$, где $A = 2,33P_1V_1$ — работа в адиабатическом процессе Пауссона, равная изменению внутренней энергии газа, откуда $x = \frac{P_1V_2}{\lambda} \left(2,33 - 2,5 \frac{\Delta T}{T_1} \right) = 11,3 \text{ см}^3$.

6.125. $T_K = 0,0122 \text{ К}$; $x = \frac{S_{ж}(T_0) - S_{ж}(T_K)}{S_T(T_K) - S_{ж}(T_K)} = \frac{4,6(T_0 - T_K)}{\ln 2 - 4,6T_K} = 0,198$, где T_K — корень квадратного уравнения

$$\Delta P = \frac{2,3R}{V_{ж} - V_T} (T_K^2 - T_0^2) - \frac{R \ln 2}{V_{ж} - V_T} (T_K - T_0).$$

6.126. $\Delta S \approx \pm k_B$. Знак зависит от начальных условий. Если вначале маятник был неподвижен — и раскачался, то «+»; если вначале были колебания, а в конце маятник остановился, то знак «-».

6.127. $\tau = \frac{\pi a^{3/2}}{e} \sqrt{\frac{m}{2}} = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

6.128. $\Delta \varphi = Ed \left(1 - \frac{d}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{d} - 1 \right) \approx Ed \ln \frac{2L}{d} = 207 \text{ кВ}$.

6.129. $\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \right) \approx -2,6 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/см}^2$.

6.130. $V = \frac{ESRn}{2\pi} = 6,67 \cdot 10^{-4} \text{ ед. СГСЭ} = 0,2 \text{ В}$.

6.131. $L = 7,48 \text{ см}$; $r \approx 1,6 \text{ мкм}$ — радиус шариков.

6.132. $F \approx \frac{2aR^2V^2}{(l+R)^5} \sim 10^{-5} \text{ дин}$, где $a = \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 4r^3$.

6.133. $D = 4L \sqrt{\frac{hc/\lambda - A}{eV_a}} = 1,32 \text{ мм}$. При расчете полагалось, что диаметр светового пятна на фотокатоде $d \ll D$.

6.134. $E = \frac{4\mathcal{E}}{eL} = 1,33 \text{ ед. СГСЭ} = 400 \text{ В/см}$.

6.135. $Q \approx 4r^2 \sqrt{7\pi P} = 1,876 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ} = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$. (Формула справедлива при $r \gg \frac{\sigma}{P} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$). В случае $r \ll \frac{\sigma}{P}$ величина заряда $Q = 8 \sqrt{3\pi \sigma r^3}$. Параметры задачи соответствуют первому условию.

6.136. $V = \sqrt{\frac{8\pi Mgd}{a}} = 4,71 \text{ кВ}$.

6.137. $\tau = \frac{R^2}{2} \ln \left(\frac{R/r}{\mu V} \right) = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

6.138. Поскольку подвижности ионов постоянны, то постоянны их скорости v_1 и v_2 и ток меняется скачком в момент времени t_1 прихода одного из ионов на пластину. Обозначив через x путь первого иона, а $(d-x)$ — путь второго, получим

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 = \frac{|e|}{d} (v_1 + v_2), \quad 0 < t < t_1 = \frac{x}{v_1};$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_2 = \frac{|e|}{d} v_2, \quad t_1 < t < t_2 = \frac{d-x}{v_2}.$$

6.139. $T = \frac{Ne^2}{2r_0} = 0,72 \text{ МэВ}$; $v = c\sqrt{1 - (\mathcal{E}_0/\mathcal{E})^2} = 0,91c$, где \mathcal{E} — полная энергия, а \mathcal{E}_0 — энергия покоя электрона. Время расширения пучка можно оценить по пролетному времени $t \sim t_{\text{прол}} \approx r_0/c \approx 3 \cdot 10^{-11} \text{ с}$.

6.140. $n = \frac{UT}{Re} \approx 2 \cdot 10^7$.

6.141. $B = B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Гс}$; $P = \frac{B^2}{8\pi} = 0,995 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \approx 10^6 \text{ атм}$.

6.142. $B = \sqrt{8\pi P} = 5 \cdot 10^6 \text{ Гс}$; $B_0 = B \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ Гс}$.

6.143. $\tau = \frac{4c^2 \rho}{\sigma B^2} = 7,2 \text{ с}$.

6.144. $\Omega = \frac{q}{2mc} \mathbf{B}$. Заметим, что величина Ω не зависит от скорости вращения кольца ω и от угла между векторами \mathbf{B} и ω . Полученный результат соответствует ларморовской частоте прецессии. Рассматриваемая задача по существу является моделью поведения атома в магнитном поле (эффект Зеемана).

6.145. $\omega_0^2 = \frac{v}{c} \frac{pB}{I_0}$.

6.146. $\omega = \frac{(R_2^2 - R_1^2)VB l}{4Mc(R_1^2 + R_2^2) \ln(R_2/R_1)} = 8,1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. За 1 час угол поворота $\varphi = \omega t = 0,029 \text{ рад} \approx 1,66^\circ$.

6.147. $T \approx \frac{\pi c a^2}{2\mathcal{J}} \sqrt{\frac{\rho}{2|\kappa|}} \approx 1,2 \text{ с}$.

6.148.* $P_x \geq 10 \text{ атм}$.

Решение. Дадим краткое решение этой задачи. Магнитная восприимчивость $\kappa(\text{H}_2\text{O})$ воды (вода практически несжимаема) от давления не зависит. А вот $\kappa(\text{O}_2)$ газообразного кислорода зависит от давления. Полагая, что с ростом давления она растет прямо пропорционально, запишем ее величину при искомом давлении P_x как $\kappa(\text{O}_2) \frac{P_x}{P_0}$. Воспользуемся принципом суперпозиции: добавим и «вычтем» кислород в объеме капли. Тогда мы имеем однородный фон кислорода, на котором расположена капля воды с эффективной магнитной восприимчивостью

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa(\text{H}_2\text{O}) - \kappa(\text{O}_2) \frac{P_x}{P_0}$$

Определим магнитный момент капли воды

$$\mu = IV = \kappa_{\text{эфф}} HV \approx \kappa_{\text{эфф}} BV$$

Сила, действующая на магнитный момент капли в неоднородном магнитном поле равна

$$F_z = \mu \frac{dB}{dz} = \left(\kappa(\text{H}_2\text{O}) - \kappa(\text{O}_2) \frac{P_x}{P_0} \right) VB \frac{dB}{dz}$$

Далее, рассматривая равновесие капли в гравитационном поле в атмосфере кислорода (учитывая закон Архимеда), получаем ответ:

$$\frac{P_x}{P_0} = \frac{\rho(\text{H}_2\text{O}) g + \kappa(\text{H}_2\text{O}) B \frac{dB}{dz}}{\rho(\text{O}_2) g + \kappa(\text{O}_2) B \frac{dB}{dz}} \approx 10,3,$$

т. е. левитация капли наступает при давлениях $P_x \geq 10$ атм.

$$6.149. \mathcal{J} = \frac{6\mu\pi r^2 v}{CL^4 R} \approx 0,19 \text{ мА.}$$

6.150. $\frac{\Delta\Omega}{\Omega_T} = \pm \frac{IB}{\rho g l} \approx \pm 10,1$, где Ω_T — частота прецессии под действием силы тяжести. Два знака $\Delta\Omega$ означают, что есть два возможных направления намагниченности \mathbf{I} — Вдоль по вектору \mathbf{L} и против него.

$$6.151. B = I_0 \frac{\left(4\pi - \frac{2d}{R}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2d}{R}\right)^2}} \approx 5390 \text{ Гс, где } R = \frac{r_1 + r_2}{2} = 2 \text{ см.}$$

$$6.152. Q = \frac{4\pi I V n}{cR} \approx 3,75 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ} \approx 0,125 \text{ Кл.}$$

$$6.153. T = 2\pi l \sqrt{\frac{\pi\rho}{3B_0 B}} \approx 7,5 \text{ с.}$$

$$6.154. \mathcal{J} \geq \frac{2\pi c R^2 \rho g}{B} \approx 2400 \text{ А.}$$

$$6.155. \mathcal{J} = \frac{2\pi\hbar c^2}{Le} = 124 \text{ ед. СГСЭ} = 0,0413 \text{ А.}$$

$$6.156. \omega^2 \approx \frac{8b^2}{d^3 M}; d > \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi c}{\omega}, \text{ т. е. } d < \frac{8b^2}{\pi^2 M c^2}.$$

$$6.157. F = \frac{1}{h} \left[\frac{V^2}{4 \left(\ln \frac{4h}{d}\right)^2} - \frac{\mathcal{J}^2}{c^2} \right] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см} — \text{ провод притягивается к плоскости.}$$

$$6.158. Mg \leq \frac{3m^{2/3}}{8} \left(\frac{H_c}{2}\right)^{4/3} = 5,9 \cdot 10^4 \text{ дин} = 0,59 \text{ Н.}$$

$$6.159. \mu = \frac{q}{2mc} L = \frac{5e}{c} \sqrt{\frac{3kT}{10\pi\rho r}} = 1,12 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}} = 0,022 \mu_{\text{яд.}}$$

$$6.160. \frac{M}{q} = \frac{R_T^2 B^2}{c^2 V} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$6.161. v_0 = \frac{Be}{2\pi mc} = 164 \text{ кГц, } \Delta v = \frac{cE}{RB} \approx 30 \text{ кГц,}$$

где $m = 28 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$ г — масса иона азота.

$$6.162. \mathbf{S} = \frac{\pi r^2 j^3}{\pi c^2} \mathbf{e}_z, \text{ где } \mathbf{e}_z — \text{ единичный вектор в направлении тока.}$$

$$6.163. x_0 = \frac{QSV_0^2}{16\pi d^2 m \omega^2} = 0,11 \text{ мм.}$$

$$6.164. \frac{Q_\infty}{Q_R} = 1 + \frac{L}{CRr} \approx 34.$$

$$6.165. r_C = \frac{N_{\text{пот}}}{T^2} = 9,8 \text{ Ом}, \quad N_{\text{пот}} = \frac{U^2}{R} + \frac{S}{4\pi} V f = 9,81 \text{ Вт}; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} \approx$$

$$\approx 14,4 \text{ мкФ}, \text{ где } X_C = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - r_C^2} = 219,8 \text{ Ом}.$$

$$6.166. R = \frac{N_{\text{пот}}}{I^2} = 12 \text{ Ом}, \quad N_{\text{пот}} = I^2 r + N + N_{\text{пер}} = 12 \text{ Вт}; \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} =$$

$$= 0,7 \text{ Гн}, \quad \text{где } X_L = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = 219,7 \text{ Ом}, \quad \text{а также } N_{\text{пер}} = \frac{V f}{4\pi} \oint (\mathbf{H} d\mathbf{B}) - \text{мощность потерь на перемагничивание ферромагнетика}.$$

$$6.167. \frac{dT}{dt} = \frac{fA}{12\pi R\rho} \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ К/с} \approx 3,3 \text{ К/ч}.$$

$$6.168. t = \frac{\Delta T}{dT/dt} \approx 72 \text{ с}, \quad \text{где } \frac{dT}{dt} = \frac{\rho c^2 B_0^2}{32\pi^2 h \rho_{\text{Ag}} C l_{\text{ск}}} = 13 \text{ К/с} - \text{скорость од-}$$

нородного нагрева на скинковой глубине $l_{\text{ск}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{f}} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ см} \ll h$.

$$6.169. Q = \frac{\rho c^2}{2\pi^2 f D \delta} = 18 \text{ (формула записана в системе СГСЭ)}.$$

$$6.170. \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15.$$

$$6.171. \mathcal{J}_m = \frac{B c l_c}{4\pi N} \approx 8,45 \cdot 10^3 \text{ А}, \quad \text{где } B = 4\pi M \frac{D_{\text{ц}}^2}{D_c^2 - (D_{\text{ц}} - 2\delta)^2} \approx$$

$\approx 2,12 \cdot 10^4 \text{ Гс}$, $\delta \approx \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\sigma\mu}} c \approx 2,2 \text{ см}$ — глубина проникновения поля в цилиндр за время $\tau \approx \frac{l_c + l_{\text{ц}}}{2v} \approx 5,5 \text{ мс}$.

$$6.172. \mathcal{J}_m = \mathcal{J}_0 \frac{D_c^2}{D_c^2 - (D_{\text{ц}} - 2\delta)^2} \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ А}, \quad \text{где глубина проникновения}$$

δ поля за время пролета $\tau = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ оценивается по формуле $\delta = c \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\sigma}} = 0,28 \text{ см}$.

$$6.173. N = Q^2 = 10^4 \text{ витков}.$$

$$6.174. Q = \sqrt{\frac{R}{2r}} \approx 30.$$

6.175. $|\Delta C| > \frac{RCT^3}{16\pi^2 L \tau^2} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$, где $T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ — период колебаний; $\left| \frac{\Delta C}{C} \right| \approx 2,4 \cdot 10^{-2}$.

6.176. Решение. Наличие пучка приводит к диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\omega') = 1 - \left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega'}\right)^2 = 1 - \frac{4\pi l e^2}{m \omega'^2} = 1 - \frac{4\pi \mathcal{J} e}{S \sqrt{2m\varepsilon} \omega'^2} = 1 - \alpha \left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{4\pi \mathcal{J} e}{S \omega_0^2 \sqrt{2m\varepsilon}} = 1,06.$$

Поскольку искомое соотношение

$$\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \left(1 - \alpha \left(\frac{\omega_0}{\omega'} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

то отсюда следует: $\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{1 + \alpha} = 1,435$.

6.177. Решение. При грамотном включении волновое сопротивление кабеля равно сопротивлению излучения антенны и входному сопротивлению телевизора, так что отраженного сигнала не возникает. Параллельное подключение к одному кабелю двух телевизоров эквивалентно подключению активного сопротивления, равного половине волнового. Из-за неточного сопряжения сигнал будет частично отражаться от разветвления, однако повторного его отражения от антенны не будет. Если обозначить амплитуды напряжений и токов в прямой волне как U_0 и \mathcal{I}_0 , а в отраженной — U_1 и \mathcal{I}_1 , то в точке разветвления

$$U = U_0 + U_1 = \frac{R\mathcal{I}}{2} = (\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1) \frac{R}{2} =$$

$$= \left(\frac{U_0}{R} - \frac{U_1}{R} \right) \frac{R}{2},$$

откуда

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = \frac{1}{3}.$$

Мощность отраженного сигнала будет равна 1/9, а рассеивающаяся на половинном сопротивлении — 8/9 от первоначальной. В каждый телевизор попадает 4/9 первоначальной мощности при амплитуде в 2/3 от исходной (или $10 \lg \frac{N_1}{N_2} = 10 \lg \frac{4}{9} = -3,52$ дБ).

Можно предложить еще и такое решение. При оптимальном согласовании кабеля и телевизора $R_k = R_T$ (рис. 241) мощность в нагрузке

$$N_0 = \left(\frac{U_0}{2R} \right)^2 R = \frac{U_0^2}{4R}.$$

А при $R_T = \frac{R_k}{2}$ выделяемая мощность

$$N_1 = \left(\frac{U_0}{3R/2} \right)^2 \frac{R}{2} = \frac{2}{9} \frac{U_0^2}{R} = \frac{8}{9} N_0.$$

6.178. $E_0^2 = \frac{16QN\lambda}{Vc}$; $E_0 \approx 4,6$ ед. СГСЭ = 1,4 кВ/см.

6.179. $N = \frac{E_0^2 h a c}{16\sqrt{2}Q} = 0,4 \cdot 10^9$ эрг/с = 40 Вт, — предельная мощность определяется пробоем в электрическом поле E_0 .

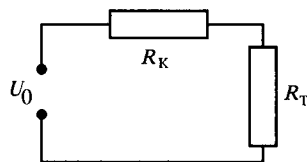


Рис. 241

$$6.180. E_{\max} = \frac{2cH_c}{\omega_0 r_0} = \frac{1}{6} \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ} = 5 \cdot 10^5 \text{ В/см.}$$

$$6.181. \Delta d = 2d \frac{\Delta f}{f_0} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

$$6.182. \Delta_{\max} = \Delta(z_0 = \frac{l}{2}) = \frac{\pi a^3 h E_0^2}{8mgl} = 0,049 \text{ см} \approx 0,5 \text{ мм, где } z_0 \text{ — координата центра шарика.}$$

$$6.183. H_0 = \sqrt{\frac{16mgl\Delta_{\max}}{\pi a^3 h}} = 14,3 \text{ Э, где } \Delta_{\max} \text{ — максимальное отклонение шарика при } z_0 = \frac{l}{2} \text{ (положение центра шарика).}$$

$$6.184. E_0 = Ee^{Ll_{\text{ск}}} = 455 \text{ мкВ/см, где скинговая глубина проникновения поля } l_{\text{ск}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} = \frac{c}{2\pi\sigma f} = 820 \text{ см.}$$

$$6.185. d = r_f^2 \frac{\hbar\omega - A}{4e} = 1,5 \text{ В} \cdot \text{см}^2.$$

$$6.186. n_e = \frac{2aj}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{me}{\hbar\omega - A}} \approx 1,22 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

$$6.187. A = \hbar\omega - \frac{4ed}{r_f^2} = 4 \text{ эВ.}$$

$$6.188. L \approx \frac{ld}{\lambda} \approx 10 \text{ км, где } l \approx 1 \text{ м — расстояние между фарами, } d \approx 5 \text{ мм — диаметр зрачка глаза.}$$

$$6.189. a = \frac{4fd}{D} \approx 15 \text{ см.}$$

$$6.190. L \approx \frac{D^2}{2,44\lambda} \approx 1200 \text{ км (более грубая оценка } L \sim D^2/\lambda).$$

$$6.191. \text{Размер антенны должен быть равным минимальному размеру ширины фронта } \Delta x_{\min} = \sqrt{1,22\lambda L} \approx 110 \text{ м.}$$

$$6.192. W_0 \approx \frac{c}{4} \left(\frac{E\lambda L}{D} \right)^2 \approx 8 \text{ ГВт.}$$

$$6.193. L \approx \frac{cd}{\lambda\Delta f} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см} = 2 \text{ км.}$$

$$6.194. V_{\text{кор}} \approx \frac{\pi\lambda^3}{\psi} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3.$$

6.195. При восстановлении плоской волной с длиной волны λ действительному изображению, т.е. сходящейся волне, соответствует граничное условие $\exp\left(-i \frac{\pi r^2}{\lambda_0 L_0}\right) = \exp\left(-i \frac{\pi r^2}{\lambda L} \cdot \frac{\lambda L}{\lambda_0 L_0}\right)$, откуда следует условие, что предел разрешения $\delta \sim \frac{\lambda}{D} L \ll \lambda L = \lambda_0 L_0$. Это означает, что предел разрешения не изменится. Здесь L — расстояние от голограммы до действительного изображения предмета, D — размер голограммы.

6.196. Здесь возникают биения разностной частоты, регистрируемые низкочастотной системой. Частота биений

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{2\nu_{\text{отн}}}{c} = \nu_0 \frac{2\omega_3 R_3}{c} \approx 31 \text{ кГц.}$$

$$6.197. m > \frac{\delta}{f} \frac{a}{N\delta\lambda} = 2,5, \text{ т. е. } m \geq 3.$$

$$6.198. l < \frac{Da\delta\lambda}{2\lambda^2}. \text{ Кроме того } l_{\min} \gg D \text{ (условие малости углов).}$$

$$6.199. |\sin \theta| = \left| \frac{c}{v} - \frac{m\lambda}{d} \right| \leq 1.$$

$$6.200. \frac{v}{c} \geq \frac{d}{L} = 2 \cdot 10^{-4}.$$

6.201. Расстояние между главными максимумами, также как и интенсивность света в нулевом максимуме, уменьшается в два раза.

$$6.202. \tau = \frac{D}{c} = 100 \text{ пс.}$$

$$6.203. Q = \frac{Q_1 \tau_1 c}{R\lambda} \approx 10.$$

$$6.204. D_{\min} \approx \frac{1,22}{N} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1,5 \text{ см.}$$

$$6.205. \Delta n \approx \frac{1}{N} \text{ (изменение показателя преломления); } \Delta P \approx 3300 \text{ Па} \approx \frac{1}{3} \text{ атм.}$$

$$6.206. \text{ Распределение интенсивности } \mathcal{J}(x) = 2\mathcal{J}_0 \left[\frac{\sin(kDx/2F)}{kDx/2F} \right]^2 \times \left(1 + \cos \frac{kdx}{F} \right). \text{ Число интерференционных полос (рис. 242) } N \approx 1 + 2 \frac{\Delta x}{\Delta l} \approx 1 + \frac{2d}{D}.$$

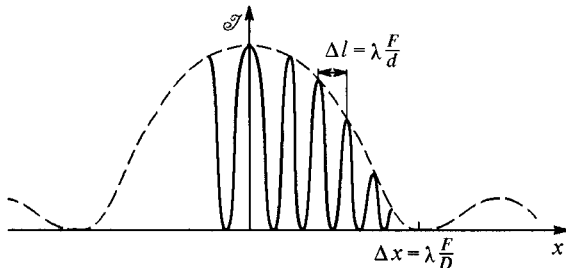


Рис. 242

$$6.207. \tau \approx \pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1,5\%.$$

$$6.208. \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)} \approx 2 \text{ \AA}.$$

6.209. Длина когерентности $l_{\text{ког}} \approx \frac{c}{\Delta\nu} \approx 0,3 \text{ см.}$ Поэтому будет виден лишь нулевой порядок: вначале при отражении от передней грани при $\Delta x = 0$, затем от задней грани при $x = 2dn = 2 \text{ см.}$ Затем будут появляться следующие порядки интерференции убывающей интенсивности.

$$6.210. \tau \approx \frac{\lambda n}{c(n_e - n_o)} \approx 3,4 \cdot 10^{-13} \text{ с.}$$

$$6.211. M = \frac{dL}{dt} = \frac{2\lambda S}{\pi c} = 5,3 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см.}$$

$$6.212. \frac{E_2}{E_1} = 2.$$

6.213. $B = E \sim \frac{4m_e c^2}{\lambda e}$. Здесь $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 3/4$ и ускорение электрона происходит в течении периода изменения поля в световой волне. Числовая оценка для поля $B \sim 1,1 \cdot 10^8$ Гс; $W \approx \frac{c}{4\pi} E^2 \lambda^2 \sim \frac{m_e^2 c^5}{e^2} \approx 9 \cdot 10^9$ ГВт.

$$6.214. E \approx \sqrt{\frac{4\pi \mathcal{E} C}{c}} \frac{D}{F \alpha_C} \approx 360 \text{ В/см.}$$

$$6.215. r_\phi \approx \frac{\lambda}{D} F \approx 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ см, } l_\phi \approx 4\lambda \left(\frac{F}{D}\right)^2 \approx 2 \text{ см.}$$

6.216. $\frac{\Phi_{\text{отр}}}{\Phi_0} = [\Phi_1 + \Phi_2 + \sqrt{\Phi_1 \Phi_2} \cos(\Delta\varphi - \pi)] \frac{1}{\Phi_0} = 0,26$, где $\Delta\varphi = \frac{4n_1 d}{\lambda} \pi = \pi$. (Отраженный поток от первой поверхности $\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}\right)^2 = 0,17$, прошедший поток $\Phi'_0 = 0,83\Phi_0$, а отраженный от второй границы $\Phi_2/\Phi'_0 = 0,03$).

6.217. $R \approx 0,034$, где $R = r_1^2 + r_2^2$, $r_1 = \frac{n_n - 1}{n_n + 1} = 0,13$, $r_2 = \frac{n_n - n_c}{n_n + n_c} = -0,13$, $n_c = n_n^2 = 1,69$. Здесь r_1 и r_2 — амплитудные коэффициенты отражения от границ: вакуум — пленка, пленка — стекло.

$$6.218. F = \frac{\pi I R^4}{4c f^2} = 0,42 \text{ дин} = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

6.219. $r = 0$, т. е. наблюдается полное прохождение излучения без отражения.

6.220. $\mathcal{E} = Q \approx \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{\lambda F}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{3R}{A}} \chi_{\text{тр}} \Delta T \approx 700 \text{ эрг} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$, где $\Delta T \approx \approx t_{\text{пл}} = 2200$ °С, A — атомная масса алюминия.

$$6.221. \alpha = k \left(\frac{D}{d}\right)^4 = 8 \cdot 10^3.$$

6.222. $\varphi \approx \frac{D}{R} \frac{Z \rho N_A e^2 \lambda^2}{\pi A m_e c^2} \approx 10^{-6}$ рад. Дифракционная расходимость $\Delta\varphi \sim \sim \frac{\lambda}{D} \sim 10^{-9}$ рад $\ll \varphi$.

6.223. $\varphi = 4\lambda \sqrt{\frac{N r_{\text{кл}}}{\pi}} \approx 5 \cdot 10^{-2}$ рад, где $\lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}}$ — длина волны рентгеновских лучей, $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона, $N = \frac{Z N_A \rho}{A} \approx 4,9 \cdot 10^{23}$ см⁻³ — концентрация электронов.

$$6.224. L = \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} \frac{v_1^2 v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} v_1^2 \approx 7 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 700 \text{ св. лет.}$$

$$6.225. \frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta \omega}{\omega} = 10^{-14}; \left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right| = \alpha \Delta T, \Delta T = 10^{-8} \text{ К.}$$

$$6.226. \Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \delta \lambda = 50 \text{ нм.}$$

$$6.227. \tau = \frac{L}{c(1 + \lambda R/L)} = 5,37 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

6.228. Появление спутников при комбинационном рассеянии обусловлено процессами рассеяния фотонов с поглощением и испусканием колебательного кванта $\hbar\omega_{\text{кол}} = \frac{2\pi c \hbar}{\lambda}$. Отношение интенсивностей $\frac{I_{\text{фиол}}}{I_{\text{крас}}} =$

$$= \frac{\bar{n}(\omega, T)}{\bar{n}(\omega, T) + 1} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\text{кол}}}{k_B T}\right) \approx e^{-1,04} \approx 0,34. \text{ В этой формуле обозначено}$$

$$\bar{n}(\omega, T) = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} - \text{среднее число колебательных квантов.}$$

6.229. Учитывая то обстоятельство, что не весь резонатор заполнен поглощающим веществом, эффективная длина пути, которую свет проходит за время генерации, будет равна $L_{\text{эфф}} = \kappa a = 5,4 \cdot 10^9 \text{ см}$. Интенсивность волны $I(\omega_0, L) = I_0(\omega_0) e^{-\kappa L_{\text{эфф}}}$, откуда $\kappa \approx \frac{1}{L_{\text{эфф}}} \frac{\Delta I}{I_0} \sim 10^{-11} \text{ см}^{-1}$.

$$6.230. \text{Изотопический сдвиг } \frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{m_e(M_{41} - M_{39})}{M_{41} M_{39}} = 0,86 \cdot 10^{-6} < < \frac{1}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{M}} \approx 1,05 \cdot 10^{-6}. \text{ Резонансное поглощение будет наблюдаться.}$$

$$6.231. T \leq \frac{Mc^2}{k_B} \left[\frac{m_e(M_{23} - M_{22})}{M_{23} M_{22}} \right]^2 = 275 \text{ К.}$$

$$6.232. T \leq \left(\frac{m_e}{M}\right) \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 \frac{Mc^2}{k_B} = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

$$6.233. v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{cB\omega}{4\pi Ne}} = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ см/с}; v_{\text{гр}} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2v_{\text{ф}} = 10^{10} \text{ см/с.}$$

$$6.234. N = \frac{c}{8e\nu d^2} \frac{B_1 B_2}{(\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1})^2} = \frac{9B_1 c}{8e\nu d^2} = 7,67 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

$$6.235. \tau = \frac{m_e \omega^2}{\mu \pi c e^2}.$$

$$6.236. d_1 = \frac{\nu \ln 10}{4\pi\nu\kappa} \approx 13,5 \text{ м}, d_2 = 2d_1 \approx 27 \text{ м} (\kappa = 0,508).$$

$$6.237. n = \frac{\pi(1-\varepsilon)m_e f_0^2}{e^2} = 9,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-3}, \text{ где } \varepsilon = \frac{c}{\nu} \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{4}.$$

6.238. Коэффициент поглощения излучения

$$A_{\omega} = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{l_{\omega}} \propto \frac{n^2}{\omega^2 T^{3/2}}.$$

Установившаяся ситуация соответствует постоянству оптической толщины слоя $A_{\omega}d = \text{const}$. Откуда следует $T \propto n^{4/3}d^{2/3}\omega^{-4/3}$.

$$6.239. \sigma = \frac{ne^2}{m\nu_e}$$

$$6.240. B = \sqrt{8\pi nk_B T} \approx 60 \text{ кГц.}$$

$$6.241. T = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2 \pi R^2 nk_B} = 1,47 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

$$6.242. v \approx \frac{\mathcal{E}}{c} \sqrt{\frac{8l}{\pi M}} \approx 16 \text{ км/с.}$$

$$6.243. v \approx \frac{2\mathcal{E}}{c} \sqrt{\frac{l}{M} \ln \frac{D_1}{D_2}} \approx 27,4 \text{ км/с, где } M = \frac{3\pi D_1^3 \rho}{32} = 3,68 \text{ мг.}$$

$$6.244. \epsilon = \frac{1}{3} [4 - \epsilon(0)] \approx 0,83, n = \sqrt{\epsilon} \approx 0,91.$$

$$6.245^* P_{\min} = 4,6 \text{ атм.}$$

Решение. При скорости частицы $v > \frac{c}{n}$ — фазовой скорости света в среде — возникает коническая поверхность, ограничивающая световой поток излучения, исходящего от движущегося электрона (рис. 243). При этом угол θ определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{\frac{c}{n} t}{vt} = \frac{1}{\beta n} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \text{ где } \theta = 3^\circ \text{ — заданный угол. Отсюда}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{n(1 - \theta^2/2)}.$$

По условию задачи $n - 1 = a \ll 1$, тогда

$$\beta = \frac{1}{(1+a)(1 - \theta^2/2)} \approx 1 - a + \frac{\theta^2}{2} = \frac{v}{c} \leq 1,$$

откуда следует $a \geq \frac{\theta^2}{2} = 0,00137$, т. е.

показатель преломления n_x , при котором реализуется указанный процесс, отвечает условию $n_x - 1 \geq 0,00137$.

Показатель преломления воздуха $n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi N\alpha$, где α — поляризуемость молекул, N — концентрация молекул, $N = \frac{P}{kT}$. Поскольку показатель преломления $n = \sqrt{1 + 4\pi N\alpha} \approx$

$\approx 1 + 2\pi N\alpha$, то $n - 1 \approx 2\pi N\alpha = \frac{2\pi\alpha}{kT} P$. Таким образом, при данной температуре $n - 1 \propto P$. Отсюда следует отношение

$$\frac{n_x - 1}{n_0 - 1} = \frac{P_x}{P_0}, \text{ т. е. } P_x = P_0 \frac{n_x - 1}{n_0 - 1} = 4,6 \text{ атм} = P_{\min}.$$

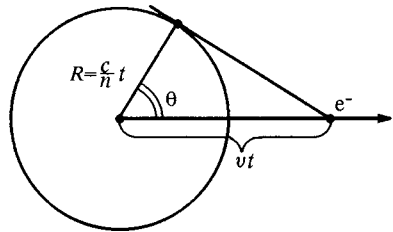


Рис. 243

Давление воздуха (при $t = 0^\circ\text{C}$), при котором реализуется черенковское излучение под углом $\theta = 3^\circ$, должно быть больше 4,6 атм.

6.246. $P = P_0 \frac{n-1}{n_0-1} \approx 40,3$ атм, где $n \geq \frac{c}{v} = 1,01812$ — условие возникновения черенковского излучения.

6.247. $T = mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right) = 4,54$ ГэВ, где $n = 1 + \frac{P}{P_0} (n_0 - 1) = 1,015$.

6.248. $\sqrt{1 + \left(\frac{m_\mu c}{p} \right)^2} > n > \sqrt{1 + \left(\frac{m_e c}{p} \right)^2}$, т. е. $1,414 > n > 1,254$.

6.250* Решение. Потенциальная энергия атома в неоднородном поле $U(r) = -\frac{\alpha}{2} \mathbf{E}^2(r)$, откуда сила, действующая на единицу объема

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha N_A \rho}{2} \nabla \mathbf{E}^2(r).$$

В условиях задачи эта сила направлена по радиусу к центру. Условие равновесия жидкости приводит к уравнению $\frac{dP}{dr} = F$. Интегрируя его с граничным условием $P(\infty) = 0$, получим

$$P(r) = \frac{\alpha N_A \rho}{2} E^2(r).$$

Из условия задачи следует, что $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha N_A \frac{\rho}{\mu} \approx 1$, откуда $E = \frac{e}{r^2}$. Учитывая граничное условие на поверхности шарика $P(R) = P_{\text{ТВ}}$, находим радиус шарика

$$R = \left(\frac{\alpha N_A e^2 \rho}{2 \mu P_{\text{ТВ}}} \right)^{1/4} \approx 6,8 \text{ \AA}.$$

6.251* $H = \frac{8\mu_B^2 B^2}{3m_0 g k_B T} \approx 40$ см, где m_0 — масса молекулы кислорода.

Решение. Проекция магнитного момента молекулы O_2 (в пренебрежении вращением молекулы как целого) на направление внешнего магнитного поля \mathbf{B} квантуется по правилу

$$\mu_J = g_J m_J \mu_B.$$

Здесь g_J — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора, $m_J \in \{-J, -J+1, \dots, J\}$ — проекция полного момента количества движения неспаренных электронов J . Так как $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ и по условию задачи $\mathbf{L} = 0$, то $J = S = 1$ и $g_J = 2$. Следовательно, возможны три значения проекции магнитного момента: $-2\mu_B$; 0 ; $2\mu_B$. Вероятность того, что молекула находится в состоянии с проекцией $m_J 2\mu_B$

пропорциональна $\exp\left(-\frac{m_J 2\mu_B B}{k_B T}\right)$. Тогда средняя энергия молекулы

$$\bar{U}_B = \sum_{m_J=-1}^1 \frac{m_J 2\mu_B B \exp\left(-\frac{m_J 2\mu_B B}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{m_J 2\mu_B B}{k_B T}\right)}.$$

Безразмерный параметр $\frac{2\mu_B B}{k_B T} = 1,69 \cdot 10^{-2} \ll 1$ и поэтому

$$\bar{U}_B \approx \frac{1}{3} \left[-2\mu_B B \left(1 + \frac{2\mu_B B}{k_B T} \right) + 2\mu_B B \left(1 - \frac{2\mu_B B}{k_B T} \right) \right] = -\frac{8(\mu_B B)^2}{3k_B T}.$$

Так как $\bar{U}_B < 0$, то молекуле O_2 выгодно «втягиваться» в магнитное поле (как всякому парамагнетику). Умножая \bar{U}_B на число втянутых молекул N , получим полный выигрыш в энергии.

Пусть x — высота столба втянутой жидкости, S — его сечение. Тогда $N = \frac{\rho S x}{m_0}$, где ρ — плотность жидкого кислорода, m_0 — масса молекулы O_2 . Таким образом

$$U = U_B N = -\frac{8}{3} \frac{(\mu_B B)^2}{k_B T} \frac{\rho S}{m_0} x,$$

и втягивающая сила $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{8}{3} \frac{(\mu_B B)^2}{k_B T} \frac{\rho S}{m_0}$. Приравнявая эту силу весу столба втянутой жидкости высотой H , получаем

$$H = \frac{8}{3} \frac{(\mu_B B)^2}{k_B T m_0 g} \approx 40 \text{ см.}$$

6.252. Требуемая мощность $N \geq \frac{B^2}{8\pi t} 2\pi R S \approx 26,2 \text{ МВт}$, где $B \approx \frac{mc^2}{eR} \approx 13 \text{ кГс}$.

6.253. Для измерения степени поляризации с точностью 10^{-8} требуется наблюдать 10^{16} распадов (закон $1/\sqrt{N}$). Необходимое время $t = \frac{10^{16}}{10^{12}} = 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч}$.

6.254. $\Delta S = kN \ln 2 \sim 10^{-10} \text{ эрг/К}$.

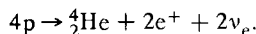
6.255. $S \approx \frac{4m_e^4 c^7}{\pi e^2 \hbar^2} \approx 7,5 \cdot 10^{30} \text{ Вт/см}^2$.

6.256. $\mathcal{E}_{\min} \approx \frac{\pi^2 m c^2}{r_{\text{кл}}} \text{ ст} = 9 \cdot 10^4 \text{ эрг} \sim 10 \text{ мДж}$, где $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{m c^2}$ — классический радиус электрона.

Заметим, что движение электрона можно считать релятивистским, если приобретенный им импульс $p \sim mc$. Чтобы эффективно использовать лазер, необходимо, чтобы вся энергия излучения падала на площадку размером $\sim \lambda$.

6.257. $\frac{j_\nu}{j_\gamma} \leq \frac{2\bar{\mathcal{E}}_\gamma}{Q} \approx 0,9 \cdot 10^{-7}$, где $\bar{\mathcal{E}}_\gamma = 2,7 k_B T$, а $Q = 25 \text{ МэВ}$ — энерговыделение водородного цикла.

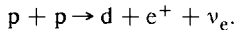
Решение. Запишем сначала протон-протонный цикл образования α -частицы



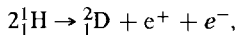
Используя табличные значения избытков масс, можно получить выделяемую в реакциях этого цикла энергию

$$Q = 24,68 \text{ МэВ} \approx 25 \text{ МэВ}.$$

Определим подробнее энерговыделение в реакциях образования нейтрино



Если добавить слева и справа по два электрона, то получим



где ^1_1H и ^2_1D — нейтральные атомы. Используя табличные данные для избытков масс, получим

$$Q = (2 \cdot 0,07825 - 0,014102) \cdot 931,5016 - 2 \cdot 0,511 \approx 0,42 \text{ МэВ}.$$

Однозначно определить энергию нейтрино нельзя. Однако можно утверждать, что она не превосходит полученного значения 0,42 МэВ. Таким образом, энергия, уносимая нейтрино, составляет менее 1,7% $\left(\frac{0,42}{24,58} \cdot 100\%\right)$ от энерговыделения цикла. При этом нейтрино сразу покидает звезду. Остальная энергия, выделяющаяся в реакциях протонного цикла в центральной части Солнца, поглощается окружающими слоями и в конце концов уносится фотонами с поверхности Солнца. При этом мы пренебрегаем энергией, уносимой корпускулами (например, солнечным ветром).

На каждый акт полного цикла рождаются два нейтрино. Определим теперь среднее число фотонов, выделяющихся за полный цикл. Очевидно оно равно

$$n = \frac{Q}{\bar{\mathcal{E}}_\gamma},$$

где $\bar{\mathcal{E}}_\gamma$ — средняя энергия одного фотона, улетающего с поверхности звезды. Полная энергия излучения

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega,$$

где $\mathcal{D}(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$ — число осцилляторов поля в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$. Число фотонов

$$N = \int_0^\infty \frac{\mathcal{D}(\omega) d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}.$$

Тогда искомая средняя энергия фотона

$$\bar{\mathcal{E}}_\gamma = \frac{\mathcal{E}}{N} = \hbar \frac{\int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}}{\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}} = k_B T \frac{\pi^4/15}{2,404} = 2,7k_B T,$$

Поскольку скорости нейтрино и фотона одинаковы, и можно считать, что они вылетают изотропно, то искомое отношение потоков нейтрино и фотонов

$$\frac{j_\nu}{j_\gamma} \approx \frac{2\bar{\mathcal{E}}_\gamma}{Q} \approx \frac{5,4k_B T}{Q} = 0,93 \cdot 10^{-7}.$$

$$6.258. j_v = \frac{\sigma T^4 a^2}{Q} = 8,83 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-2}.$$

Здесь надо воспользоваться результатом решения предыдущей задачи, приравняв $j_v \bar{\epsilon}_v = \sigma T^4$ и приведя поток на поверхности Солнца к потоку на орбите Земли.

$$6.259. n_+ = n_- = 2 \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{-mc^2/k_B T} \approx 90 \text{ см}^{-3}.$$

$$6.260. \omega \sim 10^{-18}.$$

Решение. В квазиклассическом приближении можно считать, что полная энергия электрона есть $\mathcal{E}(z) = \pm \sqrt{p^2(z)c^2 + (mc^2)^2} - |e|Ez$. При этом «точки поворота» $p(z) = 0$ определяются уравнениями $\mathcal{E}(z_1) = -mc^2 - |e|Ez_1$ и $\mathcal{E}(z_2) = +mc^2 - |e|Ez_2$ (рис. 244). Электрон должен протуннелировать от z_1 до z_2 через барьер. Вероятность туннелирования ω равна проходимости барьера

$$\omega \approx D = \exp \left[- \frac{2}{\hbar c} \int_{z_1}^{z_2} |p(z)| dz \right] = \exp \left\{ - \frac{2}{\hbar c} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(mc^2)^2 - [\mathcal{E}(z) + |e|Ez]^2} dz \right\}.$$

Вводя переменную $x = \frac{\mathcal{E}(z) + |e|Ez}{mc^2}$, получим

$$\omega = \exp \left[- \frac{2}{\hbar c} \frac{(mc^2)^2}{|e|E} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \right] = \exp \left(- \frac{\pi m^2 c^3}{\hbar |e|E} \right) = \exp \left\{ - \frac{\pi mc^2}{\lambda_e |e|E} \right\},$$

где $\lambda_e = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см}$ — комптоновская длина волны электрона. Тогда

$$\omega \approx \exp(-41,6) \approx 10^{-18}.$$

$$6.261. \frac{r_0}{r} \approx 11; P_0 = P \cdot 11^5 \approx 8 \cdot 10^{11} \text{ атм}.$$

Решение. Цепная реакция произойдет, когда длина свободного пробега будет порядка размеров системы. Начальная плотность ядер $n_0 = \rho N_A / A$, изменяется как $n = n_0 (r_0/r)^3$, где $r_0^3 = 3m / (4\pi\rho)$.

Таким образом, при взрыве

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = n_0 r_0 \sigma = \frac{\sigma N_A}{A} \sqrt[3]{\frac{3m\rho^2}{4\pi}} \approx 0,008.$$

и радиус надо уменьшить в ≈ 11 раз.

Давление преимущественно определяется электронным газом; при нормальных условиях в металле

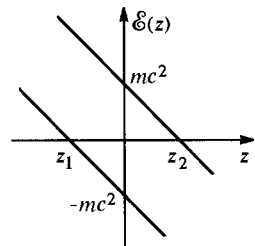


Рис. 244

$$P \approx \frac{2}{5} n_e \varepsilon_F \approx \frac{9\hbar^2}{5m_e} \left(2\rho \frac{N_A}{A} \right)^{5/3} = 4,4 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2 \approx 4,5 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

где $n_e = 2n_0$ — концентрация электронного газа, 2 — валентность урана.
Уравнение адиабаты $PV^{5/3} = \text{const}$, поэтому при взрыве

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{5/3} = \left(\frac{r_0}{r} \right)^5.$$

Таким образом $P = P_0 \cdot 11^5 = 7,25 \cdot 10^{10}$ атм.

$$6.262^* H_{c2} = \frac{mca k_B T_c}{3e\hbar N^{-1/3}} \approx 2500 \text{ Э.}$$

Решение. Согласно условию задачи должно выполняться следующее условие

$$\bar{\xi} = \sqrt{\xi b} > R,$$

где $b = N^{-1/3}$ — среднее расстояние между атомами примеси, а R — лармовский радиус закручивания пары как целого. Так как циклотронная частота для пары $\omega = \frac{2eB}{2mc} = \frac{eB}{mc}$, то радиус закручивания пары (v — мгновенная скорость центра масс пары)

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{vmc}{eB} = \frac{p_{\text{пар}} c}{2eB}.$$

Поскольку координата центра масс пары локализована на расстояниях порядка $\bar{\xi}$, то импульс центра масс пары $p_{\text{пар}}$ не может иметь определенного значения. Т. к. среднее значение импульса равно нулю, то согласно соотношению неопределенностей

$$(p_{\text{пар}})_{\text{max}} \approx \Delta p \sim \frac{\hbar}{\bar{\xi}}.$$

откуда $B_{\text{min}} = H_{c2} = \frac{\hbar c}{2e\xi^2} = \frac{\hbar c}{2e\xi b}$. Используя известные соотношения

$$\xi \approx \frac{\hbar v_F}{\Delta}; \quad \Delta \approx 2k_B T_c; \quad v_F = \frac{(3\pi^2 n)^{1/3} \hbar}{m} \approx \frac{3\hbar}{ma},$$

получаем

$$H_{c2} \approx \frac{mca k_B T_c}{3e\hbar N^{-1/3}} \approx 2500 \text{ Э.}$$

$$6.263. \frac{\Delta t}{t} = \sqrt{(\Delta\theta)^2 \text{ctg}^2 \theta + \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2} = 1,3 \cdot 10^{-3}.$$

$$6.264. F = \frac{D^2}{4\Delta n L} \approx 25 \text{ см, где } \Delta n = \delta n_0 \frac{\Delta T}{T_0} = 10^{-5}, \delta n_0 = n_0 - 1.$$

6.265. Так как разность хода между осевыми и периферийными лучами равна $\Delta \approx L\chi J_0$, то число колец $N = 1 + \frac{\Delta}{\lambda} = 3$. При этом центральный максимум считаем за кольцо нулевого радиуса.

6.266. Волновой фронт сразу за нелинейным образцом станет не плоским, а выпуклым и его форма вдоль по оси z примет вид

$z(r) = L\chi I_0 \exp(-r^2/w^2)$. Максимальный угол $2\alpha_{\max}$ — угол между нормальными к волновому фронту и есть искомая угловая расходимость θ . При этом

$$d\alpha_{\max} = \pi - \operatorname{arctg} \left(\frac{dz}{dr} \Big|_{r=r_{\max}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{e}} \cdot \frac{L\chi I_0}{w} \right); \theta = 2\alpha_{\max} = 0,2 \text{ рад.}$$

6.267. Плотность записи $\rho \sim \left(\frac{\alpha}{kT} \right)^{2/3} = 4 \cdot 10^{13} \text{ бит/см}^2$. Заметим, что более аккуратный подход состоит в учете срока хранения информации τ , который составляет примерно 10 лет, т. е. $\tau \sim 10^9 \text{ с}$. Он определяется временем поворота магнитного момента $\tau \approx \tau_0 \exp \left(\frac{\alpha V}{k_B T} \right)$. Здесь характерное время

$$\tau_0 \sim 10^{-9} \text{ с. Отсюда следует, что } \alpha V \approx 40 k_B T \text{ и } S \approx V^{2/3} \approx \left(\frac{40 k_B T}{\alpha} \right)^{2/3} \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2, \text{ что дает плотность записи } \rho \approx \frac{1}{S} \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}.$$

Последовательность заполнения состояний в атомах и ядрах

Составные части атома: электроны, нейтроны, протоны являются фермионами, и поэтому как заполнение электронами квантовых состояний атома, так и структура нуклонных состояний в ядре, полностью определяются принципом Паули. Однако форма атомного потенциала отличается от таковой для ядерного потенциала. В атоме электроны связаны с ядром кулоновским взаимодействием, а связанное состояние нуклонов в ядре возникает за счет сильного взаимодействия. Поэтому, с одной стороны, структуры квантовых состояний в этих системах во многом подобны, а, с другой стороны, последовательности заполнения состояний в этих двух системах оказываются различными.

а) Атом водорода и водородоподобные атомы

Электрон в атоме водорода и водородоподобных атомах движется в чисто кулоновском поле ядра с зарядом Ze . Поскольку при движении в центрально-симметричном поле момент импульса сохраняется, то стационарные состояния электронов можно характеризовать заданием энергии состояния \mathcal{E} , квадрата момента импульса l и его проекции m_l , а также проекцией спина электрона m_s (так называемый полный набор квантовых чисел). При этом энергии стационарных состояний определяются формулой

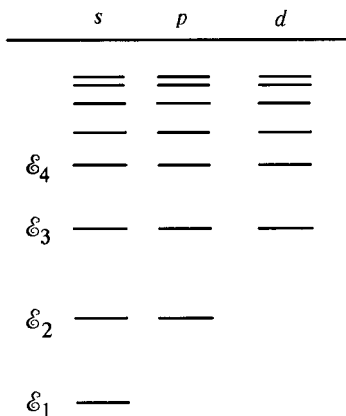


Рис. 245

$$\mathcal{E}_n = - \frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

где $n > 0$ — целое число. Это число называется *главным квантовым числом*, так как оно полностью определяет энергию состояния. При заданном n орбитальное квантовое число l может принимать значения от 0 до $n - 1$.

Независимость энергии состояния от величины l носит название «случайное» вырождение и присуща только кулоновскому и осцилляторному потенциалам. В общем случае (даже в центрально-симметричном поле) это не имеет места.

В отсутствие внешнего магнитного поля энергия состояния не зависит ни от магнитного квантового числа $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, ни от спинового $m_s = \pm 1/2$. Поэтому число состояний с одинаковой энергией при заданном n (кратность вырождения) равна

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2 \quad (2)$$

Состояния, соответствующие различным значениям l принято обозначать буквами латинского алфавита

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$s, p, d, f, g, h, \dots$$

Спектр атома водорода без учета тонкой структуры изображен на рис. 245.

б) Заполнение электронных оболочек сложных атомов

Поведение электронов в многоэлектронных атомах определяется не только полем ядра, но также и полем всех остальных электронов, что усложняет задачу нахождения энергии электронных состояний. Однако в первом приближении такая многоэлектронная задача может быть сведена к задаче о поведении одного электрона в эффективном центральном поле, которое называется самосогласованием. Оставшаяся часть межэлектронного взаимодействия, которая не сводится к центральному потенциалу, является малой величиной и может быть учтена как поправка наряду с релятивистским взаимодействиями (главным образом спин-орбитальным).

Так как в центрально-симметричном поле сохраняется момент импульса, то состояние электрона можно характеризовать орбитальным квантовым числом l и его проекцией m_l . При заданном l состояния электрона в порядке возрастания энергии принято нумеровать числом n , принимающим значения $l + 1, l + 2, \dots$. Число n по аналогии с атомом водорода называется *главным квантовым числом*. Однако у сложных атомов порядок заполнения зависит уже от двух квантовых чисел — n и l .

Состояние отдельного электрона в атоме, заданное квантовыми числами n, l, m_l, m_s , принято обозначать цифрой, соответствующей главному квантовому числу n , и буквой, соответствующей орбитальному квантовому числу l . Если в состоянии с данными n и l имеется k электронов, то такая конфигурация обозначается как $(nl)^k$ или просто nl^k . Так, например, сокращение $3p^2$ означает, что имеется два электрона с $n = 3$ и $l = 1$. Об электронах, имеющих одинаковые квантовые числа n и l , говорят как об эквивалентных электронах. Для этих электронов справедлив принцип Паули: в каждом состоянии $nlm_l m_s$ может находиться только один электрон. Таким образом, при заданных n и l в атоме имеется не более $2(2l + 1)$ электронов, которые образуют s, p, d, f, \dots оболочки.

Термином *оболочка* часто обозначаются состояния с данным квантовым числом n , она может быть заполненной или незаполненной, в зависимости от того, все или не все состояния в ней заняты электронами. Оболочка с $n = 1$ называется K -оболочкой (она с держит состояния $1s$), с $n = 2$ называется L -оболочка (содержит $2s$ и $2p$ состояния), и далее следуют по алфавиту M -оболочка с состоянием $3s, 3p, 3d$ и далее N -, O -, P -оболочки.

В приближении центрального поля задание электронной конфигурации, т. е. величин n и l всех электронов, полностью определяет энергию атома. При этом состояния, отличающиеся проекциями m_l и m_s различных электронов являются вырожденными — энергия атома в этом приближении не зависит от взаимной ориентации орбитальных и спиновых моментов электронов. Учет нецентральной части межэлектронного взаимодействия, называемого остаточным взаимодействием, и релятивистских добавок к энергии (главным образом спин-орбитального взаимодействия) приводит к снятию этого вырождения.

Чтобы описать состояние атома, надо знать его полный, орбитальный, и спиновый моменты. Опыт показывает, что в легких и в средних атомах

остаточное взаимодействие больше спин-орбитального. В этом случае орбитальные моменты отдельных электронов складываются в суммарный орбитальный момент атома

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i, \quad (3)$$

а спиновые — в спиновый

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i, \quad (4)$$

и полный момент атом равен векторной сумме \mathbf{L} и \mathbf{S} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (5)$$

Указанное приближение, при котором орбитальные моменты отдельных электронов рассматриваются независимо от их спиновых моментов, носит название приближения Рассела-Саундерса. Говорят также, что имеет место (LS)-связь или рассел-саундерсовская связь.

Состояния атома, характеризующиеся данными L и S , образуют так называемый терм и обозначаются большими латинскими буквами S, P, D, F, G, H, \dots , которые означают, что полный орбитальный момент L равен соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, Слева вверху указывается число $2S + 1$, называемое мультиплетностью термина, внизу справа — величина полного момента J . Такая запись называется спектроскопическим символом термина. Так, например, символ ${}^2P_{1/2}$ означает, что это терм с $L = 1, S = 1/2, J = 1/2$ (при заданных L и S полный момент J может принимать и значение $3/2$, тогда это будет терм ${}^2P_{3/2}$).

В пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием интегралами движения являются орбитальный и спиновый моменты, а также их проекции на ось квантования. Таким образом, полным набором являются n, L, S, M_L, M_S . Энергия термина зависит только от L и S , но не зависит от их проекций (т. е. имеется вырождение по величине полного момента J). Так, например, энергии указанных выше термов ${}^2P_{1/2}$ и ${}^2P_{3/2}$ одинаковы.

Поэтому все уровни термина имеют степень вырождения

$$(2S + 1)(2L + 1) \quad (6)$$

Учет спин-орбитального взаимодействия, которое в этом приближении трактуется как связь между моментами \mathbf{L} и \mathbf{S} , приводит к расщеплению состояний термина по величине J (мультиплетное расщепление), но оставляет их вырожденными по проекции M_J . При этом число состояний, относящихся к данному терму, сохраняется. Действительно,

$$\sum_{J=|L-S|}^{L+S} (2J + 1) = (2S + 1)(2L + 1). \quad (7)$$

Однако теперь интегралами движения являются полный момент, его проекция на выделенную ось и абсолютные значения орбитального и спинового моментов (полный набор есть nJM_JLS). Что касается проекций моментов, то они по отдельности не сохраняются, а сохраняется только их сумма. На языке векторной модели это означает переход от независимой проекции векторов \mathbf{L} и \mathbf{S} вокруг оси квантования к их прецессии вокруг направления вектора \mathbf{J} , который в свою очередь прецессирует вокруг оси квантования.

Относительное расположение уровней с разными J определяется *правилом интервалов Ланде*:

$$\Delta E_{J, J-1} = E_J - E_{J-1} = AJ \quad (8)$$

и зависит от знака константы спин-орбитального взаимодействия A . При $A > 0$ ниже лежит уровень с наименьшим $J = |L - S|$ (нормальный мультиплет), при $A < 0$ уровень с наибольшим $J = L + S$ (обращенный мультиплет).

Для определения основного состояния атома (или иона), т. е. состояния термина с наименьшей энергией, пользуются *правилом Хунда*: *наименьшей энергией обладает уровень с наибольшим возможным для данной электронной конфигурации значением S и наибольшим (при данном S) значением L .*

Требование максимальности S может быть обосновано следующим образом. Рассмотрим вначале систему из двух электронов. В силу принципа Паули волновая функция системы должна быть антисимметричной по отношению к перестановке электронов. Если спины электронов параллельны (максимально возможный суммарный спин), то спиновая часть волновой функции симметрична относительно перестановки электронов, а поэтому координатная часть $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ должна быть антисимметричной, и при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ такая функция обращается в нуль. Другими словами, в состоянии с $S = 1$ вероятность нахождения обоих электронов вблизи друг от друга мала, что приводит к значительно меньшему их электростатическому отталкиванию, а потому и к меньшей энергии. Аналогично, для системы из нескольких электронов наибольшему спину соответствует «наиболее антисимметричная» координатная часть волновой функции, что и приводит к минимуму энергии электронной системы.

Для определения J основного состояния используют следующее правило: $J = |L - S|$, если заполнено меньше половины оболочки, и $J = L + S$, если больше половины оболочки; при половинном заполнении $J = S$ ($L = 0$). Например, для конфигураций np^2 и np^4 возможны термы 1S , 3P , 1D . Основному состоянию будет соответствовать терм 3P , а соответствующим спектроскопическим символом для состояния np^2 является 3P_0 , а для np^4 соответственно 3P_2 . Аналогично, для конфигурации np^3 возможны термы 4S , 2P , 2D ; термом основного состояния является 4S , а его спектроскопический символ $^4S_{3/2}$.

По мере увеличения атомного номера наблюдается переход к другому предельному случаю, когда спин-орбитальное взаимодействие оказывается много больше остаточного взаимодействия. Действительно, кулоновское взаимодействие электронов примерно пропорционально Z^2 (Z электронов взаимодействуют с зарядом ядра Z), а спин-орбитальное $\propto Z^4$.

Однако, когда спин-орбитальное взаимодействие оказывается большим, понятие спинового и орбитального моментов электрона в отдельности теряют смысл, определяющим является только полный момент электрона $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$. Поэтому полный момент атома равен векторной сумме полных моментов составляющих его электронов

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{j}_i. \quad (9)$$

Такой вид связи называется *jj-связью*.

В таблице приведены квантовые характеристики легких атомов вплоть до аргона.

Элемент	Электронная конфигурация	Основное состояние	Число электронов в оболочке		
			$K (1s)$	$L (2s, 2p)$	$M (3s, 3p, 3d)$
${}^1_1\text{H}$	$1s$	${}^2S_{1/2}$	1		
${}^2_2\text{He}$	$1s^2$	1S_0	2		
${}^3_3\text{Li}$	$1s^2 2s$	${}^2S_{1/2}$	2	1	
${}^4_4\text{Be}$	$1s^2 2s^2$	1S_0	2	2	
${}^5_5\text{B}$	$1s^2 2s^2 2p$	${}^2P_{1/2}$	2	2 1	
${}^6_6\text{C}$	$1s^2 2s^2 2p^2$	3P_0	2	2 2	
...
${}^{10}_{10}\text{Ne}$	$1s^2 2s^2 2p^6$	1S_0	2	2 6	
${}^{11}_{11}\text{Na}$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$	${}^2S_{1/2}$	2	2 6	1
...
${}^{18}_{18}\text{Ar}$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$	1S_0	2	2 6	2 6

Таблица показывает, что до бора у всех элементов (He, Li, Be) полностью заполнена K -оболочка, а у L -оболочки заполнена $2s$ -подоболочка. Тем самым у всех тяжелых элементов от бора до неона остовом служит электронная конфигурация $1s^2 2s^2$. В боре начинается заполнение p -состояний, в которых проекция орбитального момента $m_l = 0, \pm 1$, а проекция спина может быть $\pm 1/2$. Поэтому возникает вопрос о том, с какими значениями m_l и m_s электроны будут последовательно заполнять p -оболочку? Здесь вступает в игру уже рассмотренное нами выше правило Хунда для определения L, S, J основного состояния, что иллюстрируется следующей таблицей.

A	m_s	m_l	S	L	J	${}^{2S+1}L_J$
${}^5_5\text{Be}$	1/2	1	1/2	1	1/2	${}^2P_{1/2}$
${}^6_6\text{C}$	1/2, 1/2	0, 1	1	1	0	3P_0
${}^7_7\text{N}$	1/2, 1/2, 1/2	0, 1, -1	3/2	0	3/2	${}^4S_{3/2}$
${}^8_8\text{O}$	1/2, 1/2, 1/2, -1/2	0, 1, -1, 1	1	1	2	3P_2
${}^9_9\text{F}$	1/2	1	3/2	${}^2P_{3/2}$
${}^{10}_{10}\text{Ne}$	0	0	0	1S_0

Правда, не все обстоит так просто с порядком заполнения электронных подоболочек у более тяжелых атомов, так как с ростом числа электронов в атоме существенную роль начинает играть экранирование поля ядра внутренними электронами. Действительно, с ростом квантового числа l , из-за увеличения отталкивающего действия центробежного потенциала, s -электроны могут подходить ближе к ядру, чем d - или p -электроны и, например, состояние $4s$ лежит ниже по энергии состояния $3d$, а $6s$ ниже, чем $4f$. Эмпирически установлено следующее правило (т.н. правило Клечковского), справедливое в подавляющем большинстве случаев: *электроны в сложных атомах располагаются в порядке возрастания величины $n + l$; при одина-*

ковых $n + 1$, сначала заполняется уровень с меньшим n (или, что то же самое, с большим l). Эта ситуация хорошо видна из приведенной ниже таблицы, в которой показан порядок расположения атомных уровней в реалистичном атомном потенциале и число электронов в оболочках:

$1s - 2$
 $2s\ 2p - 8$
 $3s\ 3p - 8$
 $4s\ 3d\ 4p - 18$
 $5s\ 4d\ 5p - 18$
 $6s\ 4d\ 5d\ 6p - 32$
 $7s\ 6d\ 5f...$

В качестве иллюстрации на рис. 246 схематично показана последовательность электронных уровней в атоме натрия. Кружками показаны электроны в основном состоянии атома Na.

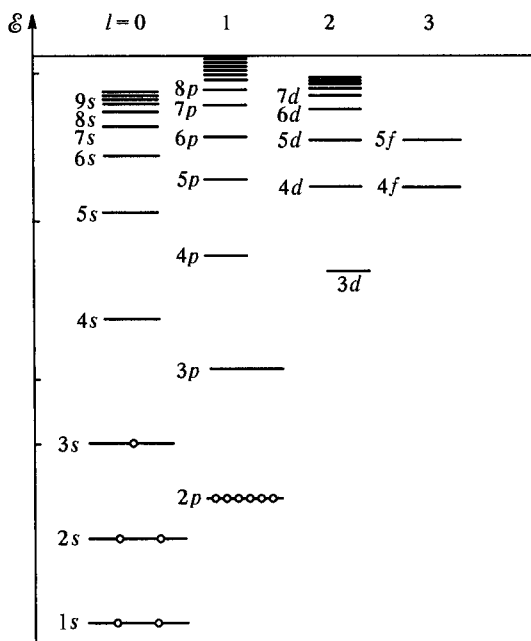


Рис. 246

Отметим следующее обстоятельство. В состоянии $4f$ электрон находится в среднем значительно ближе к ядру, чем в состояниях $5p$ и $6s$. Поэтому заполнение оболочки $4f$ (при полностью или частично занятых оболочках $5p$ и $6s$) у редкоземельных элементов практически не меняет их химических свойств.

Особое место в таблице Менделеева занимают благородные газы. Благородными называются газы химически почти полностью инертные, их потенциал ионизации — энергия отрыва одного электрона — оказывается наибольшим по сравнению с соседними элементами.

Атомные номера инертных элементов 2, 10, 18, 36, 54 иногда называют магическими числами, ибо, казалось бы, в них нет никакой закономерности. Однако с точки зрения квантовой механики благородные газы — это элементы, у

которых полностью заполнена соответствующая p -оболочка и им соответствует основное состояние с $S = L = J = 0$. Химическая инертность благородных элементов обусловлена тем, что их электронные s -оболочки расположены близко к ядру и не являются внешними, а химические свойства определяются именно внешними электронами. Как видно из таблицы на стр. 462, после заполнения n -той p -оболочки начинает заполняться $(n + 1)$ -я s -оболочка, что и приводит к периодичности химических свойств.

в) Нуклонные состояния в ядрах

Задача о структуре энергетических уровней ядра отличается от аналогичной задачи о сложном атоме прежде всего тем, что в атоме имеется центральное тело — ядро, и достаточно хорошим приближением является задача о движении электрона в заданном потенциале. Для ядра сведение задачи многих тел к одночастичной представляется на первый взгляд безнадежным делом, ибо взаимодействие между нуклонами весьма велико и отсутствие центрального тела не позволяет решать задачу по аналогии с атомом.

Однако квантовые свойства нуклонов накладывают свои особенности на их движение. В основном состоянии ядра все нейтроны и протоны по одному заполняют все наименее энергетические состояния. Изменить состояние одного нуклона можно, только сообщив ему энергию, достаточную для перехода вверх на одно из незанятых состояний. Если мы внесем в нашу сложившуюся систему добавочный нуклон, то он может занять только высележающийся незанятый уровень. Двигаясь в поле ядра, добавочный нуклон, конечно будет сталкиваться с нуклонами ядра, но в большинстве своем эти столкновения не могут привести к изменению состояния ядра, т. е. к передаче импульса, и пробег добавочного нуклона в такой системе будет достаточно велик. Таким образом, задача о спектре состояний нуклона может быть сведена к одночастичной задаче движения нуклона в эффективном самосогласованном поле, образованном другими нуклонами. Соответственно состояние ядра в целом задается указанием состояний отдельных нуклонов аналогично электронной конфигурации в атоме. Такая модель называется *одночастичной оболочечной моделью*, она достаточно правильно описывает структуру одночастичных состояний, но, естественно, не описывает многочастичные (коллективные) возбуждения, возможные в системе конечных размеров, в частности, поверхностные и объемные колебания ядерной материи, вращательные состояния.

Как и в атоме, взаимодействия нуклона с эффективным самосогласованным нуклонным полем можно представить в виде суммы центрального потенциала и малой нецентральной добавки (остаточного взаимодействия). При этом центр поля совпадает с центром инерции ядра, а вследствие короткодействующего характера ядерных сил форма этого потенциала должна быть похожа на форму распределения плотности нуклонов в ядре. В средних и тяжелых ядрах хорошим приближением реалистичного ядерного потенциала является потенциал трехмерного изотропного гармонического осциллятора

$$U(r) = -U_0 + \frac{1}{2} M\omega^2 r^2. \quad (10)$$

В декартовой системе координат гамильтониан задачи распадается на сумму трех независимых гамильтонианов, соответствующих колебаниям вдоль осей x , y , z . Каждый одномерный осциллятор имеет энергетические

уровни $\mathcal{E}_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$, и поэтому энергия трехмерного гармонического осциллятора равна

$$\mathcal{E}_N = \hbar\omega(N + 3/2) - U_0, \quad (11)$$

где квантовое число $N = n_x + n_y + n_z$ (n_x, n_y, n_z — целые числа). Нуклоны в ядре располагаются в виде оболочек. Это понятие заимствовано из теории атомов. Однако ядерные оболочки означают группы уровней, разделенных большими энергетическими промежутками. При переходе от одной оболочки к другой происходят резкие изменения в таких ядерных свойствах, как энергии связи, спине ядра (в ядерной физике спином ядра называется полный момент ядра), сечении захвата нейтронов. Эти свойства аналогичны периодичности химических свойств элементов в таблице Д. И. Менделеева, и поэтому числа нуклонов, соответствующие заполненным оболочкам, называются магическими.

В случае трехмерного осциллятора группы уровней с разными N как раз и соответствуют разным оболочкам. Уровни трехмерного гармонического осциллятора сильно вырождены, так как одно и то же значение энергии (соответствующее одной и той же величине N) можно получить при различных комбинациях чисел n_x, n_y, n_z . Кратность вырождения N -го уровня S равна числу способов, которыми число N может быть представлено в виде суммы трех целых (включая значение 0) положительных чисел. Другими словами, это есть число способов, которыми N одинаковых шаров могут быть разложены по трем ящикам; оно равно

$$S = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad (12)$$

Если еще учесть спиновое вырождение, то отсюда сразу следует, что магическими должны быть числа 2, 8, 20, 40, 70, 112, как это показано на рис. 247.

При решении задачи о трехмерном гармоническом осцилляторе в сферической системе координат движение частицы характеризуется орбитальным моментом l , и квантовым числом m , определяющим величину проекции l на какую-либо ось. В гармоническом потенциале уровни энергии эквидистантны, но каждому энергетическому уровню соответствует несколько нуклонных состояний с разными значениями l . При этом каждому N соответствуют значения l : $N, N-2, \dots, 1(0)$ — в зависимости от четности N (см. рис. 247). Различные значения орбитального момента обозначаются буквами s, p, d, f, \dots , как это принято в спектроскопических обозначениях атомных электронов. Принято нумеровать уровни гармонического осциллятора с помощью пары чисел (n, l) , где n означает, что данное значение l появляется в последовательности уровней n -й раз, например, $1s, 1p, 1d, 2p, 2s, 1f$, и т. д.

Конкретное расположение уровней после снятия вырождения зависит от вида поправки к потенциалу (10). Однако наибольший вклад в смещение уровней дает центробежная энергия: чем больше l , тем ниже лежит уровень, что хорошо видно на рис. 247. Таким образом, в отличие от классификации уровней энергии атомов, где число n , стоящее перед обозначением состояния (например, $2s$) является главным квантовым числом, определяющим энергию состояния, в ядре числа, стоящие перед обозначением состояния, указывают порядок расположения уровней.

В гармоническом потенциале лишь числа нуклонов в первых трех оболочках совпадают с экспериментальной последовательностью 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Если в ядре магическими оказываются как число протонов, так и нейтронов, то такие ядра называются дважды магическими, они обладают наибольшей устойчивостью (наибольшей энергией связи). Такими дважды магическими ядрами являются, например, ядро гелия (альфа-частица) с

двумя протонами и двумя нейтронами, ядро кислорода $^{16}_8\text{O}$, изотопы кальция $^{48}_{20}\text{Ca}$ и $^{40}_{20}\text{Ca}$, изотоп свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$.

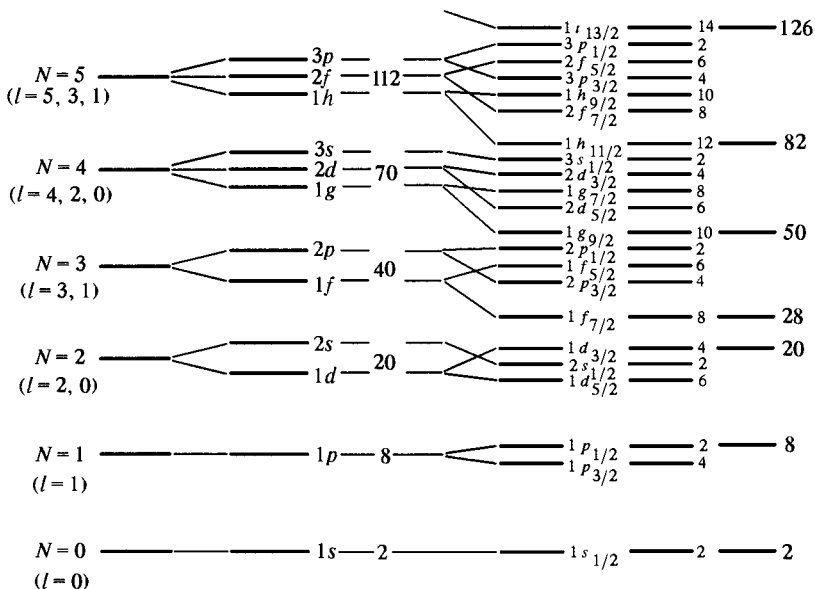


Рис. 247

Правильное «магическое» заполнение всех оболочек получается, если допустить, что в ядрах существует достаточно сильное спин-орбитальное взаимодействие, которое сосредоточено в основном вблизи поверхности ядра, поэтому оно более существенно именно для тяжелых ядер, для которых и получается неверная последовательность магических чисел в простой модели трехмерного осциллятора.

В ядрах спин-орбитальное взаимодействие оказывается больше остаточного, поэтому классификация ядерных уровней соответствует jj -связи: спиновый \mathbf{s} и орбитальный \mathbf{l} моменты каждого нуклона складываются в полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, а векторы \mathbf{j} отдельных нуклонов складываются в суммарный момент ядра \mathbf{J} (спин ядра). Для определения J основных состояний ядер необходимо учитывать остаточное взаимодействие. В модели оболочек считается, что оно приводит к спариванию одинаковых нуклонов с противоположными \mathbf{j} . В результате у четно-четных ядер полный момент равен нулю, поскольку моменты всех нуклонов компенсируются, а у четно-нечетных ядер полный момент ядра определяется моментом нуклона сверх заполненных оболочек или нуклона, недостающего до заполненных. С учетом спин-орбитального взаимодействия сферически-симметричный потенциал следует записывать в виде

$$U = U(r) + V(r) \cdot (\mathbf{s}, \mathbf{l}), \quad (13)$$

где член $U(r)$ может быть взят в виде потенциала трехмерного симметричного гармонического осциллятора, а второй член описывает вклад спин-орбитального взаимодействия. Знак и вид потенциала $V(r)$ подбирается из соответст-

вия экспериментальным данным. При этом оказывается, что если спин нуклона s параллелен орбитальному моменту l , то это приводит к «притяжению» нуклона (увеличению его потенциальной энергии); потенциальная яма как бы уширяется и нуклон с такой ориентацией спина понижает свою энергию («опускается ко дну потенциальной ямы»). При антипараллельной ориентации векторов s и l энергия нуклонного состояния повышается (эффективная ширина ямы становится меньше). Таким образом появляется расщепление уровней с заданным l на два подуровня с $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$ и состояния с большим j имеют меньшую энергию. Это расщепление невелико, пока мало значение l , но уже при $l \geq 4$ оно оказывается настолько существенным, что раздвигает два подуровня в разные оболочки, т. е. в разных оболочках оказываются уровни $1g_{7/2}$ и $1g_{9/2}$, $1h_{9/2}$ и $1h_{11/2}$, $1i_{11/2}$ и $1i_{13/2}$ (величина j указывается справа внизу). В состоянии с заданными n , l , j может находиться одновременно не более $2j + 1$ протонов и столько же нейтронов.

Рассмотренные закономерности приводят к последовательности заполнения нуклонами состояний в ядре, показанной на рис. 247. На этом рисунке слева показаны осцилляторные оболочки и уровни, получаемые при снятии случайного вырождения при небольшом изменении вида потенциала, указаны квантовые характеристики уровней и полное число нуклонов, которыми можно заполнить яму вплоть до данной оболочки включительно. Справа приведена последовательность уровней с учетом спин-орбитального взаимодействия, указаны характеристики уровней, число нуклонов на каждом уровне, а также их суммарное число по мере заполнения оболочек.

Как видно, одночастичная оболочечная модель объясняет природу нуклонных состояний и правильно воспроизводит все магически ядерные числа.

В заключение отметим, что нейтроны и протоны независимо заполняют соответствующие ядерные состояния, однако, если для легких ядер нейтронный и протонный потенциал практически совпадают, то в тяжелых ядрах глубина протонного потенциала оказывается существенно меньше в силу их кулоновского расталкивания. Именно поэтому в легких ядрах число протонов и нейтронов практически одинаково, а в тяжелых нейтронов примерно в полтора раза больше числа протонов. Заполнение нейтронных и протонных состояний происходит так, что их верхние заполненные уровни практически совпадают по энергии. Ядра, у которых нейтронный (либо протонный) уровень оказывается выше по энергии, обладают большей энергией, чем при равенстве по энергии верхних состояний. Такие ядра нестабильны и переходят в более устойчивую конфигурацию путем бета-распада.

Туннелирование электронов в сверхпроводниках

Процесс квантового туннелирования — это подбарьерное проникновение частицы из одного вещества в другое. Эксперименты по измерению туннельных свойств сверхпроводящих структур обычно проводятся следующим образом (рис. 248). На стеклянную пластинку с заранее подготовленными контактами наносится узкая полоска пленки первого металла. Затем эта полоска окисляется так, чтобы пленка оказалась покрытой слоем изолирующего окисла толщиной в несколько десятков ангстрем (барьерный слой). После этого в поперечном направлении наносится узкая полоска пленки второго металла. Место пересечения этих двух полосок (площадью порядка 1 мм^2) и представляет собой туннельный переход.

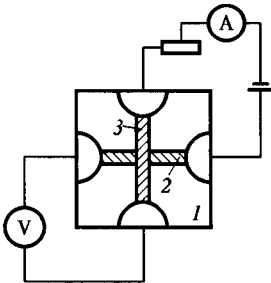


Рис. 248. Схема экспериментальной установки для изучения туннельного эффекта: 1 — стеклянная пластинка, 2 — пленка первого металла, 3 — пленка второго металла

Обсудим теперь какой вид будут иметь вольт-амперные характеристики для разных случаев туннельных переходов.

Прежде всего рассмотрим различие в схемах энергетических уровней электронов в сверхпроводнике и нормальном металле. В металле электроны являются независимыми частицами и поэтому в одноэлектронном приближении энергия уровня не зависит от того, заняты другие уровни или нет. В отличие от нормального металла, в сверхпроводнике электроны не являются независимыми частицами и их вклад в полную энергию зависит от того, образуют они пары или нет.

Из-за сильной корреляции между спаренными электронами все куперовские пары при $T = 0 \text{ К}$ находятся в конденсате в силу того, что они являются бозонами. Они описываются единой волновой функцией и имеют минимально возможную энергию, как это показано схематично на рис. 249а.

При ненулевой температуре некоторые электронные пары распадаются, образуя по две квазичастицы, энергия системы увеличивается как минимум

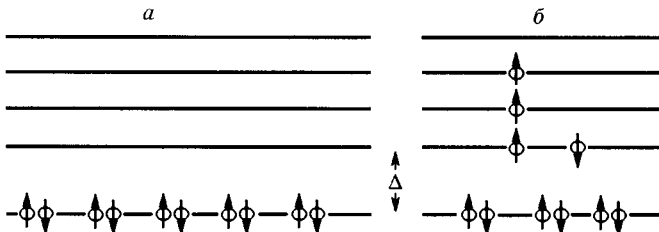


Рис. 249. а — температура $T = 0 \text{ К}$, все электронные пары сконденсированы на нижайшем энергетическом уровне; б — температура $T > 0 \text{ К}$, за счет теплового возбуждения некоторые электронные пары разрываются и электроны заполняют более высоко расположенные по энергии состояния

на величину связи пары 2Δ . Свойства квазичастиц практически не отличаются от свойств независимых электронов, поэтому их уровни энергии можно представить в виде квазинепрерывной системы уровней, отделенных от энергетического уровня пар на величину щели Δ . Эти уровни при $T > 0$ К частично заполняются в соответствии с функцией распределения Ферми-Дирака (рис. 249б).

Пусть $T > 0$ К и мы ввели в сверхпроводник добавочный электрон. Если состояние с противоположными импульсом и спином свободно, то введенный электрон ведет себя как возбужденная квазичастица, занимающая один из соответствующих уровней. Если же такое состояние занято (в системе есть электрон с противоположными импульсом и спином), то образуется пара и полная энергия понижается минимум на 2Δ по сравнению с предыдущим случаем. Аналогично для перевода при $T = 0$ К электрона из сверхпроводника в нормальный металл нужно «разорвать» пару, т. е. увеличить энергию системы на 2Δ .

Отметим, что мы не рассматриваем возможность туннелирования пар как целого (эффект Джозефсона), поскольку пара имеет удвоенный заряд и удвоенную массу и поэтому, при используемых в экспериментах по туннелированию толщинах барьеров, много больших длины когерентности, вероятность туннелирования пары пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью туннелирования квазичастиц.

Изложенное позволяет понять суть часто используемой для качественных рассуждений «полупроводниковой модели» энергетических уровней сверхпроводника. В этой модели считается, что при $T = 0$ К все энергетические уровни от 0 до $\epsilon_F - \Delta$ заняты электронами, а все уровни выше $\epsilon_F + \Delta$ — свободны. Полоса шириной 2Δ является как бы запрещенной зоной. Таким образом в этой модели учитывается, что для перевода электрона через барьер из сверхпроводника или в сверхпроводник ему нужно сообщить дополнительную энергию Δ . При этом можно не думать о происхождении этой энергии (т. е. о парах) и рассматривать только независимые квазичастицы (электроны).

Наша задача — качественно описать вольт-амперные характеристики туннельных контактов нормальный металл—изолятор—сверхпроводник (NIS) и сверхпроводник—изолятор—сверхпроводник (SIS). Вид этих характеристик существенным образом зависит от плотности электронных состояний. Так как состояния пар строятся из состояний отдельных электронов, то при сверхпроводящем переходе число состояний не может измениться, но изменяется плотность состояний. Появление энергетической щели означает, что часть состояний «выдавливается» из области $\epsilon_F \pm \Delta$ и тем самым плотность состояний вблизи щели резко возрастает. Для наглядности обычно говорят о появлении давления на ферми-поверхность

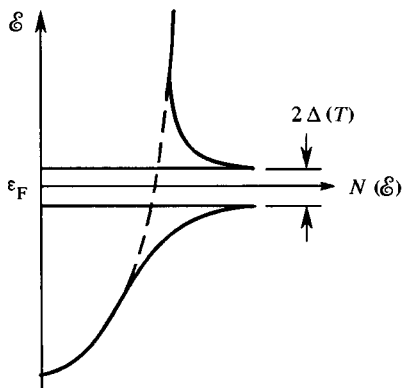


Рис. 250. Энергетическая зависимость плотности состояний в сверхпроводнике в полупроводниковой модели; пунктиром показана плотность состояний свободных электронов, которая пропорциональна $\sqrt{\epsilon}$, за счет теплового возбуждения некоторые электронные пары разрываются и электроны заполняют более высоко расположенные по энергии состояния

электронов в металле, находящихся в сверхпроводящем состоянии, и это давление приводит к деформации плотности состояний вблизи щели. Напомним, что в образовании щели участвуют в основном лишь электроны из узкой области энергии $\sim \hbar\omega_D$ вблизи ϵ_F . На рис. 250 схематично показано, как изменяется плотность состояний электронов в сверхпроводнике по сравнению с таковой в нормальном металле.

Рассмотрим на основе полупроводниковой модели энергетическую диаграмму перехода NIS, т. е. функцию распределения квазичастиц (электронов) по энергии (рис. 251). Напомним, что функция распределения есть произведение плотности состояний на вероятность заполнения (функцию Ферми-Дирака). В состоянии теплового равновесия уровни Ферми металлов должны совпадать. При приложении разности потенциалов, такой что $eV \ll \epsilon_F$, происходит сдвиг всех энергетических уровней на величину eV . При нулевой температуре ток через переход не возникает до тех пор, пока $V < \Delta/e$, так как находящиеся слева электроны не могут попасть на свободные места справа.

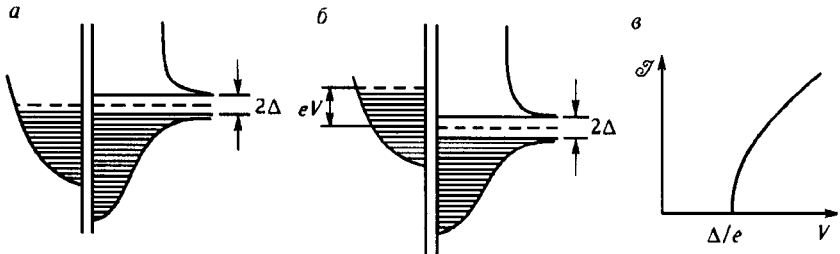


Рис. 251. Энергетическая диаграмма NIS-перехода согласно полупроводниковой модели при нулевой температуре: *a* — напряжение на переходе $V = 0$; *b* — $V \neq 0$; *в* — вольт-амперная характеристика перехода

При $V = \Delta/e$ происходит резкое увеличение тока, и это происходит не только потому, что теперь электроны могут туннелировать, но и из-за большой плотности состояний, на которые они могут переходить. При дальнейшем увеличении напряжения на переходе ток продолжает возрастать, как это видно из рис. 251, так как увеличивается и число электронов, которые могут туннелировать, и число свободных мест.

Конечно, при $T > 0$ К и конечном напряжении имеется небольшой число электронов, для которых $\epsilon > \epsilon_F + \Delta$, и тем самым конечный туннельный ток есть и при $V < \Delta/e$, но он очень мал, как это схематично показано на рис. 252.

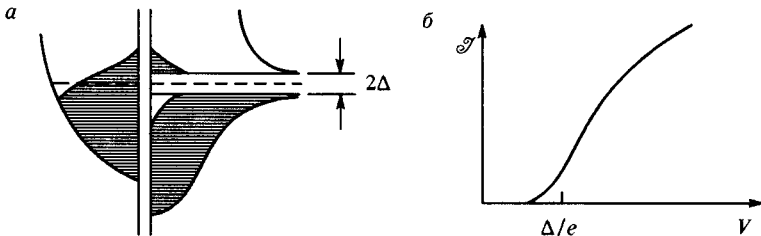


Рис. 252. Энергетическая диаграмма NIS-перехода в тепловом равновесии при конечной температуре: *a* — напряжение на переходе $V = 0$; *б* — вольт-амперная характеристика при конечной температуре $V \neq 0$

Рассмотрим теперь систему SIS. Вначале обсудим случай двух одинаковых сверхпроводников, разделенных туннельным барьером (рис. 253).

При нулевой температуре тока нет, пока $V < 2\Delta/e$, и он резко появляется при $V = 2\Delta/e$, так как напротив друг друга оказываются области с очень большой плотностью состояний. При конечной температуре вольт-амперная характеристика немного сглаживается в области $V \sim \Delta/e$, аналогично тому, как это происходит и в системе NIS.

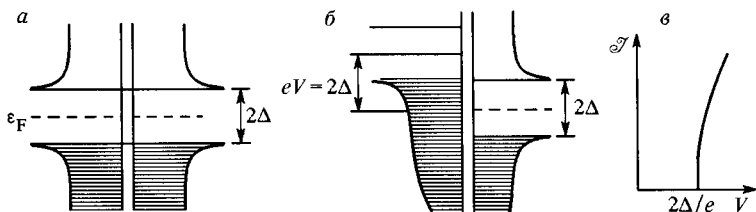


Рис. 253. Энергетическая диаграмма SIS-перехода при нулевой температуре и при $V = 0$ — а; $V = 2\Delta$ — б; вольт-амперная характеристика перехода — в

В том случае, если мы имеем SIS-структуру с различными сверхпроводниками, то, как и в предыдущем случае, при $T = 0$ К ток отсутствует, пока величина приложенного напряжения недостаточна для «поднятия» занятых состояний слева над верхним краем щели справа.

При $T > 0$ К (см. рис. 254) ситуация немного сложнее. Чтобы получить более наглядную картину вольт-амперной характеристики в этом случае, будем считать, что величина щелей существенно разная, и пусть $\Delta_1 < k_B T \ll \Delta_2$. При этом условии можно пренебречь термически возбужденными состояниями справа. При подаче напряжения ток начинает протекать сразу и возрастает с ростом напряжения, пока напряжение не достигнет величины $V = (\Delta_2 - \Delta_1)/e$. При дальнейшем увеличении напряжения число возбужденных электронов слева, способных туннелировать, остается постоянным, а плотность состояний, в которые они переходят, уменьшается. В результате туннельный ток падает. Это происходит до тех пор, пока напряжение не достигнет величины $V = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$, когда для

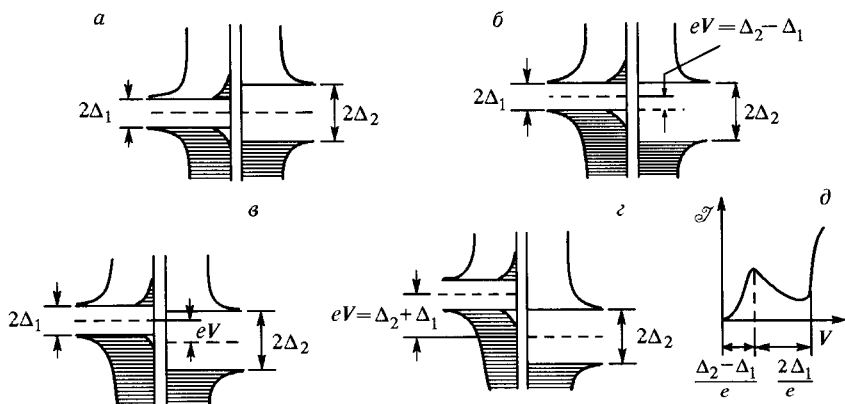


Рис. 254. Энергетическая диаграмма и вольт-амперная характеристика SIS-перехода при конечной температуре: а — $V = 0$; б — $V = (\Delta_2 - \Delta_1)/e$; в — $(\Delta_2 + \Delta_1) > eV > (\Delta_2 - \Delta_1)$; г — $eV = \Delta_2 + \Delta_1$; д — вольт-амперная характеристика

электронов слева под щелью становятся доступными свободные состояния справа над щелью, и ток резко возрастает.

Полупроводниковая модель очень наглядна, в ней разрешенные переходы всегда «горизонтальны», что соответствует закону сохранения энергии при туннелировании, но она как бы игнорирует тот факт, что сверхпроводящие электроны спарены. Поэтому рассмотрим, как нужно рассматривать процесс туннелирования на языке куперовских пар. При таком подходе пара, находящаяся на уровне Ферми, разрывается и одна из квазичастиц «подымается» в одно из незаполненных состояний в том же сверхпроводнике, а вторая квазичастица при этом получает возможность перейти в свободное состояние справа, как это схематически показано на рис. 255. Конечно, такой процесс происходит только тогда, когда это энергетически возможно.

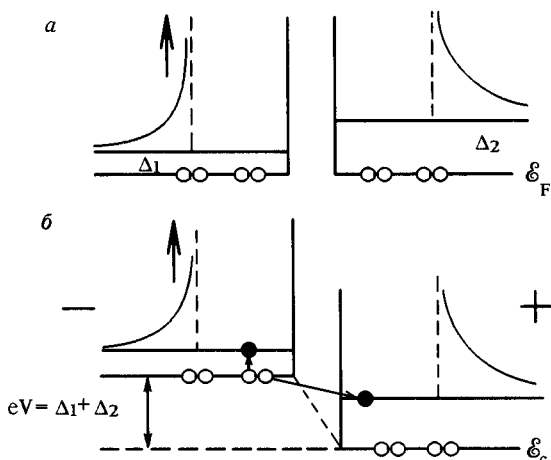


Рис. 255. Схематическое изображение туннельного эффекта между сверхпроводниками, имеющими различные величины щели Δ_1 и Δ_2 с помощью куперовских пар и «возбужденных» квазичастиц; ϵ_c — энергия конденсации пар; а — нулевое напряжение на переходе; б — на переход подано напряжение, знаками «+» и «-» указана его полярность

Еще раз подчеркнем, что в рассматриваемой модели каждый сверхпроводник характеризуется, с одной стороны, наличием куперовских пар и, с другой стороны, набором состояний, доступных для единичных электронов, образующихся в результате разрыва этих пар. Отметим, что приходится на одной схеме одновременно изображать состояния пар, т. е. коллективные состояния, и состояния неспаренных частиц, т. е. одноэлектронные состояния.

Образование зонной структуры электронного спектра в кристаллах

Хорошо известно, что спектр электронов в свободных атомах является дискретным. Уровни энергии электронов находятся из решения стационарного уравнения Шредингера в заданном потенциале. Точное решение такой задачи возможно только в случае атома водорода, в остальных атомах приходится использовать приближенные методы.

В кристаллах среднее расстояние между атомами становится сравнимым с характерным радиусом орбит внешних валентных электронов, и волновые функции этих электронов перекрываются. В результате электроны перестают быть локализованными вблизи своего атома и получают возможность перемещаться по кристаллу. При этом задача о нахождении спектра электронов сильно усложняется: надо учитывать не только кулоновское взаимодействие электронов с ионами решетки, но также кулоновские взаимодействия электронов (и ядер) между собой. Это делает задачу практически неразрешимой, что приводит к необходимости создания различных приближений.

На первом этапе обычно рассматривают задачу о движении электронов в поле неподвижных ионов. Это можно сделать в силу малости отношения масс электрона и иона. Такой подход называется *адиабатическим приближением* (см. задачу 5.24).

На втором этапе, как и в многоэлектронных атомах, производят замену межэлектронного взаимодействия на некоторое эффективное внешнее поле, действующее на данный электрон со стороны остальных электронов. Такое поле называется самосогласованным, поскольку для его нахождения надо знать волновую функцию электрона, которая в свою очередь должна найдаться из уравнения Шредингера с заданным эффективным полем. В результате этих приближений сложную многочастичную задачу удастся свести к одноэлектронной задаче во внешнем потенциале.

На третьем этапе можно ограничиться рассмотрением модельной задачи о движении электрона в пространственно периодическом поле. Периодичность поля означает, что потенциальная энергия электрона не меняется при смещении на любой вектор, $U(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r})$, где $\mathbf{a} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — базисные векторы (периоды) кристаллической решетки, а n_1, n_2, n_3 — целые числа. Это означает, что если $\Psi(\mathbf{r})$ — решение уравнения Шредингера, то и $\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$ — тоже решение.

Поскольку плотность вероятности нахождения электрона не зависит от того, вблизи какого узла решетки он находится, то $\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = C(\mathbf{a})\Psi(\mathbf{r})$, причем $|C(\mathbf{a})|^2 = 1$. Тем самым $C(\mathbf{a}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a})$, где \mathbf{k} — произвольный вектор. Таким образом $\Psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{a})\Psi(\mathbf{r})$. Как следует из этого выражения, если к вектору \mathbf{k} прибавить вектор \mathbf{b} , такой, что $\exp(i\mathbf{b}\mathbf{a}) = 1$, то эти состояния будут отвечать одной и той же волновой функции, т.е. будут физически эквивалентны. Если представить вектор \mathbf{b} в виде $\mathbf{b} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3$, где m_1, m_2, m_3 — целые числа, а $\mathbf{b}_i\mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$, то векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ образуют решетку, называемую обратной решеткой (см.

задачу 2.9). Элементарная ячейка обратной решетки носит название зоны Бриллюэна.

Если мы рассматриваем кристалл конечного размера l_x, l_y, l_z , то для сохранения трансляционных свойств надо ввести периодические граничные условия $\Psi(x_i + l_i) = \Psi(x_i)$ — так называемые условия Борна-Кармана. Это приводит к тому, что число разрешенных значений волнового вектора в зоне Бриллюэна равно числу элементарных (примитивных) ячеек кристалла. В случае простой кубической решетки оно совпадает с числом атомов в кристалле.

Общий вид волновой функции электрона в кристалле может быть представлен в виде $\Psi_{\mathbf{k}n} = u_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где $u_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = u_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r})$. Такая функция называется *функцией Блоха*. В этом выражении мы фактически имеем дело с плоской волной промодулированной решеточным потенциалом. Постоянный вектор $\hbar\mathbf{k}$ играет роль импульса электрона. Однако он не является импульсом в строгом понимании этого слова. Действительно, волновая функция свободно-го электрона $\Psi = C \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar)$ является собственной функцией оператора импульса $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ и соответствует состоянию с определенным импульсом. Это есть следствие симметрии пространства относительно сдвига на сколь угодно малый вектор. В кристалле это свойство отсутствует, так как решетка симметрична только относительно сдвигов на дискретные вектора (периоды решетки). Поэтому волновая функция Блоха не является собственной функцией оператора импульса и величину $\hbar\mathbf{k}$ принято называть *квазиимпульсом*. Что касается целочисленного квантового числа n , характеризующего другие решения уравнения Шредингера при заданном \mathbf{k} , то оно носит название зонного индекса.

Закон дисперсии электрона в кристалле $\mathcal{E}_n(\mathbf{k})$ обладает свойствами периодичности и четности в обратном пространстве $\mathcal{E}_n(\mathbf{k} + \mathbf{b}) = \mathcal{E}_n(\mathbf{k})$ и $\mathcal{E}_n(-\mathbf{k}) = \mathcal{E}_n(\mathbf{k})$. Сохранение квазиимпульса электрона в периодическом поле отражает тот факт, что при рассеянии на решетке последняя может принимать импульс только квантованными порциями $\hbar\mathbf{k}' - \hbar\mathbf{k} = \hbar\mathbf{b}$ (см. задачу 2.15). Если это условие не выполняется, то рассеяние не происходит и квазиимпульс электрона сохраняется. Указанное условие соответствует брэгговской дифракции и, как будет показано ниже, определяет положение грани зоны Бриллюэна.

Для качественного объяснения возникновения зонного характера электронного спектра рассмотрим два предельных случая.

Приближение почти свободных электронов

В этом приближении периодический потенциал считается «малым» по сравнению с кинетической энергией электрона $\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$, где m_0 — масса свободного электрона. Для значений квазиимпульса, лежащих далеко от границы зоны Бриллюэна, волновые функции практически совпадают с плоской волной, а энергия — с энергией свободного электрона. Когда же величина вектора \mathbf{k} почти совпадает с одним из векторов обратной решетки, т.е. когда $(\mathbf{k} + \mathbf{b})^2 \approx k^2$ или $(\mathbf{k}\mathbf{b}) = -b^2/2$ происходит брэгговское рассеяние и распространение плоской волны с данным \mathbf{k} невозможно. Это условие определяет плоскость в k -пространстве и указывает на способ построения зоны Бриллюэна: из данного узла обратной решетки надо провести векторы ко всем узлам и через середины этих векторов провести перпендикулярные им плоскости. Многогранник минимального объема, ограниченный этими плоскостями, называется *ячейкой Вигнера-Зейтца* и соответствует первой зоне Бриллюэна.

Если рассматривать одномерный случай, то при $k = \pm(n\pi/a)$ волновая функция электрона является суммой падающей и отраженной плоских волн. В зависимости от сдвига фаз при отражении получаем две стоячие волны: $\sin kx$ или $\cos kx$. Эти волны отличаются распределением плотности вероятности нахождения электрона в решетке: одна максимальна в области узлов решетки, другая — между ними (отметим, что в случае плоской волны плотность вероятности везде одинакова). Это приводит к тому, что при $k = \pm(n\pi/a)$ мы имеем две различающиеся по знаку добавки к энергии электрона и спектр терпит разрыв. На границах зон Бриллюэна возникают щели в спектре и парабола «разбивается» на ряд энергетических полос энергетических зон (рис. 256). На границах зоны Бриллюэна групповая скорость электрона обращается в нуль, так как мы имеем дело со стоячей волной. В двумерном и трехмерном случаях на границах зоны Бриллюэна должна зануляться нормальная компонента групповой скорости электрона (при условии, что имеется плоскость зеркальной симметрии параллельная этой границе).

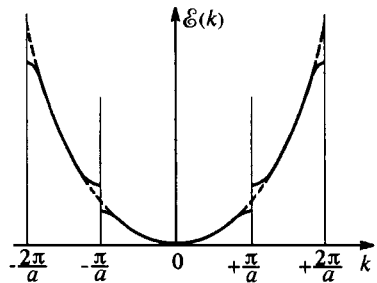


Рис. 256. Энергетический спектр электрона в модели почти свободных электронов. Одномерный случай

Приближение сильной связи

В этом подходе рассматривается другой предельный случай — в нулевом приближении электроны локализованы на своих атомах и их волновые функции не перекрываются. При учете слабого перекрытия потенциальная энергия электрона в кристалле видоизменяется (рис. 257) и электрон получает возможность протуннелировать через барьер и перейти на соседний атом. Отметим, что это туннелирование отличается от задачи, например, об α -распаде. Там первоначальное стационарное состояние становится нестационарным за счет ухода α -частицы на бесконечность. При этом уровень приобретает конечную ширину. В кристалле же, состоящем из N атомов, состояние электрона остается стационарным и происходит расщепление первоначально N -кратно вырожденного атомного уровня на N подуровней.

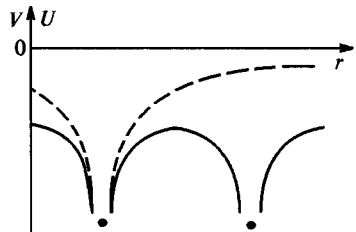


Рис. 257. Пунктирной линией обозначен потенциал $V(r)$ изолированного атома; сплошной — кристаллический потенциал $U(r)$ вдоль двух соседних узлов решетки

Рассмотрим сначала задачу о двух симметрично расположенных одномерных ямах. При слабом перекрытии волновых функций решение уравнения Шредингера можно искать в виде линейной комбинации решений для изолированных ям $\Psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. В силу симметрии потенциала $c_1 = \pm c_2$. Рассмотрим поведение полной волновой функции на стенках ям, обращенных друг к другу. Для четного решения ее кривизна уменьшается, а для нечетного — увеличивается. Поскольку $\hat{p}_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$, то это означает, что для четного решения кинетическая энергия уменьшится, а для нечетного — увеличится. По-

этому четный уровень опустится относительно исходного, а нечетный — поднимется. В результате вместо двух вырожденных состояний мы получим два расщепленных невырожденных (рис. 258). Можно также говорить, что при объединении ям область локализации электрона для четного решения увеличилась (вероятность обнаружить его между ямами стала больше), а для нечетного — уменьшилась. Иногда говорят, что изменилась эффективная ширина ям. Согласно соотношению неопределенностей изменение области локализации ведет к изменению кинетической энергии — делокализация энергетически выгодна. Расчет показывает, что величина расщепления пропорциональна \sqrt{D} , где D — коэффициент туннелирования через барьер. Такую зависимость можно качественно объяснить тем, что поскольку волновая функция электрона является суперпозицией состояний в отдельных ямах, то для попадания в соседнюю яму электрону достаточно преодолеть только половину расстояния между ямами, (см. задачу 3.1) При рассмотрении задачи об N ямах волновая функция электрона ищется в виде линейной комбинации атомных волновых функций, причем коэффициенты этой комбинации подбираются такими, чтобы полная волновая функция имела блоховский вид. В результате для исходных s -состояний с волновыми функциями $\varphi_{ат}(\mathbf{r})$ с энергией $\epsilon_{ат}$ можно получить следующее выражение для закона дисперсии электронов:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_{ат} - C - \sum_n A(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_n).$$

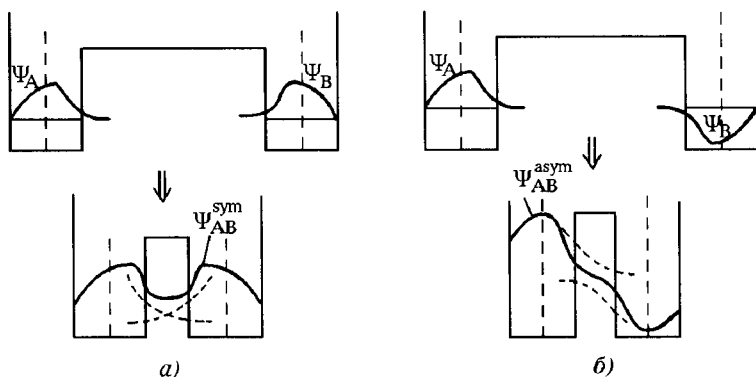


Рис. 258. Схема образования симметричного (а) и антисимметричного (б) состояний электронов при сближении изолированных потенциальных ям

Здесь $C = \int |\varphi_{ат}(\mathbf{r})|^2 [U(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})] dV > 0$ — разность энергий электрона в поле решетки $V(\mathbf{r})$ и изолированного атома $U(\mathbf{r})$ (интеграл перекрытия на одном атоме); $A(\mathbf{r}) = \int \varphi_{ат}^*(\mathbf{r}) [U(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)] \varphi_{ат}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) dV > 0$ — интеграл перекрытия с другими атомами (интеграл переноса). Т.о. в кристалле атомные уровни сначала понижают свою энергию (за счет слагаемого C), а затем расщепляются в зону (за счет слагаемого A).

В приближении ближайших соседей $A(\mathbf{r}_n) = A = \text{const}$ мы получаем:

а) для простой кубической решетки

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \epsilon_{ат} - C - 2A (\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a),$$

б) для объемноцентрированной кубической решетки

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_{\text{ат}} - C - 8A \cos \frac{k_x a}{2} \cos \frac{k_y a}{2} \cos \frac{k_z a}{2},$$

в) для гранецентрированной кубической решетки

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_{\text{ат}} - C - 4A \left(\cos \frac{k_x a}{2} \cos \frac{k_y a}{2} + \cos \frac{k_z a}{2} \cos \frac{k_x a}{2} + \cos \frac{k_y a}{2} \cos \frac{k_z a}{2} \right).$$

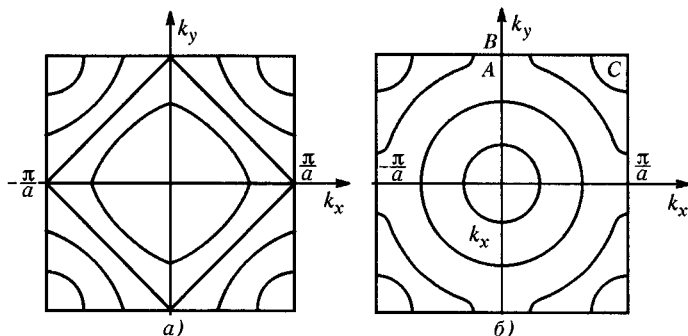


Рис. 259. Изоэнергетические линии энергетической зоны s -типа
 а) приближение сильной связи; б) приближение почти свободных электронов

На рис. 259 в качестве иллюстрации приведены изоэнергетические линии в приближении сильной связи (а) и приближении почти свободных электронов (б).

1. Фундаментальные физические константы

Постоянные СИ

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

Скорость света в вакууме

$$c = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Постоянная Планка

$$h = 6,6261 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}; \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

Гравитационная постоянная

$$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2 = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

Постоянная Больцмана

$$k_B \equiv k = 1,3807 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К} \approx 0,8617 \cdot 10^{-10} \text{ МэВ/К}$$

Постоянная Авогадро

$$N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,3145 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{моль} \cdot \text{К}) = 8,3145 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

Постоянная Стефана-Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} = 5,6705 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4} = 5,6705 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

Постоянная в законе смещения Вина

$$b = \lambda_{\max} T = 0,2898 \text{ см} \cdot \text{К}$$

Элементарный заряд

$$e = 4,8032 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ} = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Электрон-вольт

$$1 \text{ эВ} = 1,60218 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

Температура, соответствующая 1 эВ

$$T_{\text{эВ}} = 11\,606 \text{ К}$$

Атомная единица массы

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,66054 \cdot 10^{-24} \text{ г} (931,494 \text{ МэВ})$$

Квант магнитного потока (сверхпроводящий)

$$\Phi_0^{\text{сп}} = \frac{hc}{2e} = 2,0678 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

Квант холловского сопротивления

$$R_0 = \frac{h}{e^2} = 25812,806377 \text{ Ом}$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 0,92740 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$$

Ядерный магнетон

$$\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 0,50508 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}$$

Постоянная тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 7,2973 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{137,036}$$

Постоянная Ридберга

$$R_\infty = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c} = \frac{a^2}{4\pi\Lambda_e} = 109737,31 \text{ см}^{-1}$$

Боровский радиус

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\Lambda_e}{\alpha} = 0,52918 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Атмосфера стандартная

$$1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} = 1,01325 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$$

Объем моля идеального газа при нормальных условиях ($P = 101325 \text{ Па}$;

$T = 273,15 \text{ К}$)

$$V_{\text{моль}} = 22,4141 \text{ л/моль}$$

Ускорение силы тяжести

$$g = 9,80665 \text{ м/с}^2$$

Электрон

Масса

$$m_e = 9,10939 \cdot 10^{-28} \text{ г}$$

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$$

Удельный заряд

$$\frac{e}{m_e} = -5,2728 \cdot 10^{17} \text{ ед СГСЭ} = -1,7588 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,8616 \cdot 10^{-11} \text{ см}; \quad \Lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2,4263 \cdot 10^{-10} \text{ см}$$

Классический радиус

$$r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8179 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Протон

Масса

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1,007276 \text{ а. е. м.}$$
$$m_p c^2 = 938,272 \text{ МэВ}$$

Отношение массы протона к массе электрона

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836,1527$$

Удельный заряд

$$\frac{e_p}{m_p} = 2,8716 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГСЭ} = 9,5788 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda_p = \frac{\hbar}{m_p c} = 2,103 \cdot 10^{-14} \text{ см}; \quad \Lambda_p = \frac{h}{m_p c} = 1,3214 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Магнитный момент

$$\mu_p = 2,7928 \cdot \mu_{\text{яд}} = 1,4106 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}$$

Нейтрон

Масса

$$m_n = 1,6746 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1,00866 \text{ а. е. м.}$$
$$m_n c^2 = 939,565 \text{ МэВ}$$

Отношение массы нейтрона к массе протона

$$\frac{m_n}{m_p} = 1,001378$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda_n = \frac{\hbar}{m_n c} = 0,210 \cdot 10^{-13} \text{ см}; \quad \Lambda_n = \frac{h}{m_n c} = 1,31959 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Магнитный момент

$$\mu_n = -1,9130 \cdot \mu_{\text{яд}} = -0,9662 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}$$

2. Некоторые астрофизические постоянные и единицы

$$1 \text{ год} = 3,1557 \cdot 10^7 \text{ с,}$$

$$1 \text{ св. год} = 9,46053 \cdot 10^{17} \text{ см,}$$

$$1 \text{ а. е.} = 1,496 \cdot 10^{13} \text{ см}$$

Солнце

Масса Солнца

$$M_C = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г,}$$

Радиус Солнца

$$R_C = 6,96 \cdot 10^{10} \text{ см,}$$

Средняя плотность Солнца

$$\rho_C = 1,409 \text{ г/см}^3$$

Угловой диаметр Солнца на среднем расстоянии от Земли
 $\alpha_C = 31'59,26'' \approx 0,0093$ рад.

Температура поверхности Солнца (эффективная температура)
 $T_C = 5770$ К

Энергия, излучаемая Солнцем в 1 с, или светимость
 $L_C = 3,826 \cdot 10^{33}$ эрг/с = $3,826 \cdot 10^{26}$ Вт

Солнечная постоянная (плотность потока излучения Солнца на среднем расстоянии от Земли до Солнца вне атмосферы Земли)

$$J_C = 1,373 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2) = 1373 \text{ Вт}/\text{м}^2$$

Земля и Луна

Масса Земли

$$M_3 = 5,974 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Средний радиус Земли

$$R_3 = 6,378 \cdot 10^8 \text{ см} = 6378 \text{ км}$$

Средняя плотность Земли

$$\rho_3 = 5,517 \text{ г}/\text{см}^3$$

Среднее расстояние от Земли до Солнца

$$L_3 = 1 \text{ а. е.} = 1,496 \cdot 10^{13} \text{ см} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ км}$$

Среднее расстояние от Земли до Луны

$$L_D = 3,844 \cdot 10^{10} \text{ см} = 3,844 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Средняя скорость движения Земли по орбите

$$v_3 = 29,79 \text{ км}/\text{с} = 2,979 \cdot 10^6 \text{ см}/\text{с}$$

Угловая скорость вращения Земли

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$$

Первая и вторая космические скорости

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_3}{R_3}} = \sqrt{g R_3} = 7,91 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с} = 7,91 \text{ км}/\text{с}.$$

$$v_2 = \sqrt{2} v_1 = 11,19 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с} = 11,19 \text{ км}/\text{с}.$$

Масса Луны

$$M_D = 7,350 \cdot 10^{25} \text{ г}$$

Средняя плотность Луны

$$\rho_D = 3,341 \text{ г}/\text{см}^3$$

Средний радиус Луны

$$R_D = 1,7382 \cdot 10^8 \text{ см} = 1738,2 \text{ км}$$

Период обращения Луны вокруг Земли

$$T_D = 29,531 \text{ сут}$$

Планеты

Планета	Большая полуось, а. е.	Орбитальный период	Период вращения	Масса в M_{\oplus}	Радиус в R_{\oplus}	Средняя плотность, $г/см^3$	Ускорение своб. падения на поверхности, $см/с^2$	Альbedo*
Меркурий	0,387	87,97 сут.	58,7 сут	0,055	0,382	5,4	370	0,06
Венера	0,723	224,7 сут.	243,0 сут	0,815	0,949	5,3	887	0,75
Земля	1,0	365,256 сут.	23,9 ч	1,0	1,0	5,5	980	0,36
Марс	1,52	1,88 года	24,6 ч	0,107	0,533	3,9	370	0,24
Юпитер	5,20	11,9 года	9,92 ч	318,0	11,2	1,3	2490	0,50
Сатурн	9,54	29,5 года	10,7 ч	95,2	9,45	0,7	1050	0,76
Уран	19,2	84,0 года	23,9 ч	14,6	4,10	1,2	852	0,62
Нептун	30,1	165,0 лет	17,8 ч	17,2	3,88	1,6	1117	0,50
Плутон	39,4	248,0 лет	6,39 сут	~ 0,002	~ 0,24	0,8	~ 300	0,09

*) Альbedo — отношение количества света, отраженного поверхностью планеты, к количеству падающего на нее света

3. Соотношение некоторых физических величин в СИ и СГСЭ

Длина	L, l	метр (м)	10^2 см
Масса	m	килограмм (кг)	10^3 г
Время	t	секунда (с)	1 с
Сила	F	ньютон (Н)	10^5 дин
Работа, энергия	A, \mathcal{E}	джоуль (Дж)	10^7 эрг
Мощность	N, W	ватт (Вт)	10^7 эрг/с

Давление	P	паскаль (Па)	10 дин/см^2
Плотность потока энергии	I	(Вт/м^2)	$10^3 \text{ эрг/(с}\cdot\text{см}^2)$
Сила электрического тока	\mathcal{I}	ампер (А)	$3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ}$
Электрический заряд	Q, q	кулон (Кл)	$3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГСЭ}$
Электрический потенциал, напряжение	φ, V	вольт (В)	$\frac{1}{300} \text{ ед. СГСЭ}$
Напряженность электрического поля	E	(В/м)	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ ед. СГСЭ}$
Электрическая емкость	C	фарада (Ф)	$9 \cdot 10^{11} \text{ ед. СГСЭ}$
Электрическое сопротивление	R	ом (Ом)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ с/см}$
Удельной электрическое сопротивление	ρ	(Ом·м)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \text{ с}$
Электрическая проводимость	$\Lambda = 1/R$	сименс (См)	$9 \cdot 10^{11} \text{ см/с}$
Удельная электрическая проводимость	$\sigma = 1/\rho$	(См/м)	$9 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$
Магнитный поток	Φ	вебер (Вб)	$10^8 \text{ Гс}\cdot\text{см}^2 \text{ (максвелл)}$
Магнитная индукция	B	тесла (Тл)	10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	H	(А/м)	$4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Э (эрстед)}$
Индуктивность	L	генри (Гн)	10^9 см
Намагниченность	I, M	(А/м)	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4 \text{ Гс (гаусс)}$
Вектор поляризации	P	(Кл/м^2)	$3 \cdot 10^5 \text{ ед. СГСЭ}$
Электрическое смещение (индукция)	D	(Кл/м^2)	$12\pi \cdot 10^5 \text{ ед. СГСЭ}$

4. Лептоны

Все лептоны — фермионы. Нейтрино имеют только отрицательную спиральность (левоспиральные частицы), а антинейтрино — только положительную (правоспиральные).*)

Поколение	Частица	Символ		Масса, МэВ	Время жизни τ	Лептонный заряд			Преобладающая схема распада
		Частица	Анти-частица			L_e	L_μ	L_τ	
I	электрон	e^-	e^+	0,511	$> 4,3 \cdot 10^{23}$ лет	+1	0	0	—
	электронное нейтрино	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< (2 \div 2,5) \text{ эВ}$	$\frac{\tau}{m_{\nu_e}} > 300 \frac{c}{\text{эВ}}$	+1	0	0	—
II	мюон	μ^-	μ^+	105,658 207,767 m_e	$2,197 \cdot 10^{-6}$ с	0	+1	0	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
	мюонное нейтрино	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	$< 0,17$	$\frac{\tau}{m_{\nu_\mu}} > 15,4 \frac{c}{\text{эВ}}$	0	+1	0	—
III	таон	τ^-	τ^+	1777,0	$0,290 \cdot 10^{-12}$ с	0	0	+1	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau; e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$
	таонное нейтрино	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	$< 18,2$?	0	0	+1	—

*) Спиральностью частицы называется косинус угла между векторами спина и импульса частицы. Для ультрарелятивистских фермионов спиральность может принимать только два значения: ± 1 .

5. Кварки

Все кварки — фермионы (спин $1/2$), с барионным зарядом $1/3$. Антикварки имеют квантовые числа с противоположными знаками.

Поколение	Название	Сим-вол	Электр. заряд, ед. e	«Токовая» масса	Проекция изоспина, I_3	Заряд			Блоковая масса (в составе адрона), ГэВ
						c	s	t	
I	верхний (up)	u	$+2/3$	$1,5-4$ МэВ	$+1/2$	0	0	0	$0,33$
	нижний (down)	d	$-1/3$	$4-8$ МэВ	$-1/2$	0	0	0	$0,33$
II	очарованный (charm)	c	$+2/3$	$1,1-1,4$ ГэВ	0	$+1$	0	0	$1,8$
	странный (strange)	s	$-1/3$	$80-130$ МэВ	0	0	-1	0	$0,51$
III	t-кварк (top)	t	$+2/3$	$174,3 \pm 5,1$ ГэВ	0	0	0	$+1$	$*$)
	b-кварк (bottom)	b	$-1/3$	$4,1-4,4$ ГэВ	0	0	0	0	$5,0$

$*$) t — кварк имеет такое малое время жизни, что он распадается до образования t — адронов, поэтому блоковой массы не имеет. Токовая масса t — кварка $174,3 \pm 5,1$ ГэВ.

6. Адроны

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	Время жизни, с	Преобладающие каналы распада
Мезоны				
π^\pm	$(u\bar{d}); (d\bar{u})$	139,567	$2,603 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$
π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})\sqrt{2}$	134,976	$8,4 \cdot 10^{-17}$	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$
K^\pm	$(u\bar{s}); (\bar{u}s)$	493,677	$1,239 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \begin{cases} \mu^+ \nu_\mu \\ \pi^+ \pi^0 \end{cases}$
K^0	$(d\bar{s})$	497,672	$K_S^0: 0,893 \cdot 10^{-10}$ $K_L^0: 5,17 \cdot 10^{-8}$	$K_S^0 \rightarrow \begin{cases} \pi^+ \pi^- \\ \pi^0 \pi^0 \end{cases}$ $K_L^0 \rightarrow \begin{cases} \pi^\pm e^\mp \nu_e \\ \pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu \\ 3\pi^0 \\ \pi^+ \pi^- \pi^0 \end{cases}$
D^\pm	$(c\bar{d}); (\bar{c}d)$	1869,3	$1,057 \cdot 10^{-12}$	$D^+ \rightarrow \begin{cases} K^- \pi^+ \pi^+ \\ \bar{K}^0 e^+ \nu_e \\ \bar{K}^0 \mu^+ \nu_\mu \end{cases}$
D^0	$(c\bar{u})$	1864,5	$4,15 \cdot 10^{-13}$	$D^+ \rightarrow \begin{cases} K^- \pi^+ \\ K^- e^+ \nu_e \\ \bar{K}^0 \pi^+ \pi^- \end{cases}$
D_s^\pm (был F^\pm)	$(c\bar{s}); (\bar{c}s)$	1968,5	$4,67 \cdot 10^{-13}$	Множество почти равновероятных каналов
B^\pm	$(u\bar{b}); (\bar{u}b)$	5278,9	$1,65 \cdot 10^{-12}$	«
B^0	$(d\bar{b})$	5279,2	$1,56 \cdot 10^{-12}$	«
$\eta_c(1s)$	$(c\bar{c})$	2979,8	полная ширина $\Gamma = 13,2$ МэВ	«
$J/\psi(1s)$	$(c\bar{c})$	3096,9	полная ширина $\Gamma = 87$ МэВ	«
$\Upsilon(1s)$	$(b\bar{b})$	9460,4	полная ширина $\Gamma = 52,5$ кэВ	«

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	Время жизни, с	Преобладающие каналы распада
Барионы (нуклоны и гипероны)				
p	(uud)	938,27231	$> 1,6 \cdot 10^{25}$ лет	—
n	(udd)	939,56563	887	$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$
$\Lambda^0(\Lambda)$	(uds)	1115,68	$2,632 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \rightarrow \begin{cases} p \pi^- \\ n \pi^0 \end{cases}$
Σ^+	(uus)	1189,37	$7,99 \cdot 10^{-11}$	$\Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} p \pi^0 \\ n \pi^+ \end{cases}$
Σ^0	(uds)	1192,65	$7,4 \cdot 10^{-20}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma$
Σ^-	(dds)	1197,44	$1,479 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$
Ξ^0	(uss)	1314,9	$2,90 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$
Ξ^-	(dss)	1321,32	$1,639 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$
Ω^0	(sss)	1672,45	$8,22 \cdot 10^{-11}$	$\Omega^- \rightarrow \begin{cases} \Lambda K^- \\ \Xi^0 \pi^- \\ \Xi^- \pi^0 \end{cases}$
Λ_c^+	(udc)	2284,9	$2,06 \cdot 10^{-13}$	$\Lambda_c^+ \rightarrow \begin{cases} p K^- \pi^+ \\ \Lambda \pi^+ \pi^+ \pi^- \end{cases}$
Σ_c^0	(ddc)	2452,1	?	$\Sigma_c^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^-$
Ξ_c^+	(usc)	2465,6	$3,5 \cdot 10^{-13}$	$\Xi_c^+ \rightarrow \begin{cases} \Lambda K^- \pi^+ \pi^+ \\ \Sigma^0 K^- \pi^+ \pi^+ \end{cases}$
Ξ_c^0	(dsc)	2470,3	$0,98 \cdot 10^{-13}$	$\Xi_c^0 \rightarrow \begin{cases} \Xi^- \pi^+ \\ p K^- \tilde{K}^{*0} \end{cases}$
Ω_c^0	(ssc)	2704	$0,064 \cdot 10^{-12}$	$\Omega_c^0 \rightarrow \Sigma^+ K^- K^- \pi^+$
Λ_B^0	(udb)	5624	$1,24 \cdot 10^{-12}$	$\Lambda_B^0 \rightarrow \Lambda_c^+ e^- \bar{\nu}_e$

7. Масса некоторых нейтральных атомов (в а. е. м. за вычетом энергии связи электронов) и энергия связи ядер.

Ядра	$M_{ат}$ (а. е. м.)	$\mathcal{E}_{св}$ (МэВ)			
^1_1H	1,00782522	—	$^{15}_8\text{O}$	15,003072	111,9
^2_1H	2,01410222	2,2	$^{16}_8\text{O}$	15,994915	127,6
^3_1H	3,01604971	8,5	$^{17}_8\text{O}$	16,999133	131,8
^3_2He	3,01602968	7,7	$^{18}_9\text{F}$	18,000950	137,4
^4_2He	4,0026033	28,3	$^{19}_9\text{F}$	18,998405	147,8
^6_3Li	6,0151232	32,0	$^{20}_9\text{F}$	19,999985	154,4
^7_3Li	7,0160044	39,2	$^{20}_{10}\text{Ne}$	19,992440	160,6
^8_3Li	8,0224874	41,3	$^{23}_{11}\text{Na}$	22,989773	186,6
^7_4Be	7,0169295	37,6	$^{24}_{12}\text{Mg}$	23,985044	198,3
^8_4Be	8,0053052	56,5	$^{27}_{12}\text{Al}$	26,981535	225,0
^9_4Be	9,0121829	58,2	$^{28}_{14}\text{Si}$	27,976927	236,5
$^{10}_5\text{B}$	10,0129385	64,7	$^{31}_{15}\text{P}$	30,972074	262,9
$^{11}_5\text{B}$	11,009305	76,2	$^{32}_{16}\text{S}$	31,972074	271,8
$^{11}_6\text{C}$	11,011431	73,4	$^{35}_{17}\text{Cl}$	34,968854	398,2
$^{12}_6\text{C}$	12,000000	92,2	$^{37}_{17}\text{Cl}$	36,965896	317,1
$^{13}_6\text{C}$	13,003354	97,1	$^{40}_{18}\text{Ar}$	39,362384	343,8
$^{14}_6\text{C}$	14,003242	105,3	$^{39}_{19}\text{K}$	38,963714	333,7
$^{13}_7\text{N}$	13,005739	94,1	$^{208}_{82}\text{Pb}$	207,97664	1636,4
$^{14}_7\text{N}$	14,003074	104,7	$^{234}_{92}\text{U}$	234,04090	1778,6
$^{15}_7\text{N}$	15,000108	115,5	$^{235}_{92}\text{U}$	235,04393	1783,8
			$^{238}_{92}\text{U}$	238,05076	1801,7

8. Дебаевская температура и плотность некоторых элементов и соединений

Вещество	θ , К	ρ , г/см ³
алмаз	2250	3,25 ± 3,50
алюминий	433	2,6889
аргон (тв.)	92	1,40 (при 87,15 К)
бериллий	1481	1,848
пара-водород	122	0,0708 (жидк. при 20,37 К)

Вещество	θ , К	ρ , г/см ³
вольфрам	383	19,35
германий (крист)	373	5,323 (при 25°C)
графит	413	1,9 ÷ 2,3
орто-дейтерий	114	1,104 (тяжелая вода D ₂ O)
диспрозий	183	8,550
железо	477	7,874
золото	162	19,32
индий	112	7,31
иттербий	118	6,965
кадмий	210	8,65
калий	91	0,862
кальций	229	1,55
α -кислород	126	1,14 (жидк. при 90,25 К)
кобальт	460	8,90
кремний (крист)	645	2,33 (при 25°C)
криптон	72	2,155 (жидк. при 120 К)
ксенон	64	3,52 (жидк. при 164,15 К)
литий	344	0,534
магний	403	1,738
марганец	409	7,21-7,44
медь	347	8,96
молибден	423	10,22
мышьяк (крист)	282	5,73
натрий	156	0,971
неон	75	2,205 (жидк. при 27,15 К)
никель	477	8,91
олово	199	5,85 (серое, α)
платина	237	21,45
ртуть	72	13,5461 (жидк.)
свинец	105	11,336
селен (крист)	152	4,79
серебро	227	10,50
титан	420	4,505
уран	248	19,040
хром	606	7,18 ÷ 7,20
цинк	329	7,133
GaAs	345	5,35
KBr	174	2,76
KCl	230	1,99
NaCl	275	2,165 (при 25°C)

9. Электронные параметры ряда металлов, вычисленные в модели свободных электронов

[Все значения приведены для комнатной температуры, за исключением Na, K, Rb., Cs (при 5 К) и Li (при 78 К)]

Пояснение: Концентрация электронов N/V определяется произведением валентности металла на число атомов в 1 см^3 . Если выражать k_F в см^{-1} , v_F — в см/с , V — в см^3 , то получим следующие соотношения: $k_F = (3\pi^2 N/V)^{1/3} = (29,609 N/V)^{1/3}$; $v_F = \hbar k_F/m = 1,157 k_F$; $\epsilon_F = mv_F^2/2$, или, если ϵ_F выразить в эВ, то $\epsilon_F(\text{эВ}) = 0,284 \cdot 10^{-15} v_F^2$; $T_F(\text{К}) = 1,16 \cdot 10^4 \epsilon_F(\text{эВ})$.

Валентность	Металл	Концентрация электронов $N/V, 10^{22} \text{ см}^{-3}$	Волновой вектор Ферми $k_F, 10^8 \text{ см}^{-1}$	Скорость Ферми $v_F, 10^8 \text{ см/с}$	Энергия Ферми $\epsilon_F, \text{эВ}$	Температура Ферми $T_F = \epsilon_F/k_B, 10^4 \text{ К}$
1	Li	4,70	1,11	1,29	4,72	5,48
	Na	2,65	0,92	1,07	3,23	3,75
	K	1,40	0,75	0,86	2,12	2,46
	Rb	1,15	0,70	0,81	1,85	2,15
	Cs	0,91	0,64	0,75	1,58	1,83
	Cu	8,45	1,36	1,57	7,00	8,12
	Ag	5,85	1,20	1,39	5,48	6,36
	Au	5,90	1,20	1,39	5,51	6,39
2	Be	24,20	1,93	2,23	14,14	16,41
	Mg	8,60	1,37	1,58	7,13	8,27
	Ca	4,60	1,11	1,28	4,68	5,43
	Sr	3,56	1,02	1,18	3,95	4,58
	Ba	3,20	0,98	1,13	3,65	4,24
	Zn	13,10	1,57	1,82	9,39	10,90
	Cd	9,28	1,40	1,62	7,46	8,66
3	Al	18,06	1,75	2,02	11,63	13,49
	Ga	15,30	1,65	1,91	10,35	12,01
	In	11,49	1,50	1,74	8,60	9,98
4	Pb	13,20	1,57	1,82	9,37	10,87
	Sn (бел)	14,48	1,62	1,88	10,03	11,64

10. Некоторые свойства полупроводников

	Ширина запрещенной зоны, эВ		Постоянная решетки a , Å	Эффективная масса	
	Δ (0 К)	Δ (300 К)		$\frac{m^*}{m_e}$ — электрон	$\frac{m^*}{m_e}$ — дырка
Si	1,166	1,11	5,43	0,98(∥) 0,19(⊥)	0,52
Ge	0,744	0,664	5,66	1,58(∥) 0,08(⊥)	0,3
GaAs	1,520	1,43	5,653	0,07	0,5
InSb	0,235	0,17	6,4787	0,0133	0,18
CdSe	1,85	1,74	a : 4,499 c : 7,010	0,13	2,5(∥) 0,4(⊥)
PbSe	0,15	0,26	6,124	0,07(∥) 0,039(⊥)	0,06(∥) 0,03(⊥)
PbTe	0,19	0,29	6,460	0,24(∥) 0,22(⊥)	0,3(∥) 0,02(⊥)

здесь a и c — оси решетки; ∥ — вдоль оси эллипсоида; ⊥ — перпендикулярно его оси.

11. Значения некоторых определенных интегралов

$$1. \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n = \frac{1}{2}; \\ n!, & n > 0, \text{ целое.} \end{cases}$$

$$2. \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n = 0; \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!, & n \text{ — целое нечетное;} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2^{n/2}}, & \end{cases}$$

$$3. \int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & \alpha = 1; \\ 1,18 & \alpha = 2; \\ 2,56, & \alpha = 3; \\ 4,91, & \alpha = 5; \\ 6,43, & \alpha = 10. \end{cases}$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n = 1/2; \\ \pi^2/6 & n = 1; \\ 2,405, & n = 2; \\ \pi^4/15, & n = 3; \\ 24,9, & n = 4. \end{cases}$$

Учебное пособие

ОВЧИНКИН Владимир Александрович
РАЕВСКИЙ Александр Осипович
ЦИПЕНЮК Юрий Михайлович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ
Часть 3. Атомная и ядерная физика. Строение вещества.

Компьютерная верстка *В. П. Нагирный*
Художники *М. В. Ивановский, В. П. Нагирный*

Подписано в печать 30.06.2009. Формат 60×88/16.
Усл. печ. л. 31,3. Уч.-изд. л. 33,8. Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Тираж 3000 экз. Заказ № 1158.

Издательство «Физматкнига»
141700, г. Долгопрудный Московской обл, Институтский пер., д. 66
Тел.: (495) 410-24-63, тел./факс 408-76-81
E-mail: publishers@mail.mipt.ru

Интернет-магазины литературы по фундаментальным и прикладным наукам
WWW.FIZMATKNIGA.RU

Отпечатано в ППП Типография «Наука» АИЦ «Наука» РАН.
121099, Москва Г-99, Шубинский пер., д. 6

Периодическая система элементов Д. И. Менделеева

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			
I	1	H ¹ 1,00797 ВОДОРОД										2 He 4,002602 ГЕЛИЙ
	2	Li ³ 6,941 ЛИТИЙ	Be ⁴ 9,01218 БЕРИЛЛИЙ	B ⁵ 10,811 БОР	C ⁶ 12,011 УГЛЕРОД	N ⁷ 14,0067 АЗОТ	O ⁸ 15,9994 КИСЛОРОД	F ⁹ 18,998403 ФТОР				10 Ne 20,197 НЕОН
III	3	Na ¹¹ 22,98977 НАТРИЙ	Mg ¹² 24,305 МАГНИЙ	Al ¹³ 26,98154 АЛЮМИНИЙ	Si ¹⁴ 28,0855 КРЕМНИЙ	P ¹⁵ 30,97376 ФOSФОР	S ¹⁶ 32,066 СЕРА	Cl ¹⁷ 35,453 ХЛОР				18 Ar 39,948 АРГОН
IV	4	K ¹⁹ 39,0983 КАЛИЙ	Ca ²⁰ 40,078 КАЛЬЦИЙ	Sc ²¹ 44,95591 СКАНДИЙ	Ti ²² 47,88 ТИТАН	V ²³ 50,9415 ВАНАДИЙ	Cr ²⁴ 51,9961 ХРОМ	Mn ²⁵ 54,9380 МАРГАНЕЦ	Fe ²⁶ 55,847 ЖЕЛЕЗО	Co ²⁷ 58,9332 КОБАЛЬТ	Ni ²⁸ 58,69 НИКЕЛЬ	
	5	Cu ²⁹ 63,546 МЕДЬ	Zn ³⁰ 65,39 ЦИНК	Ga ³¹ 69,723 ГАЛЛИЙ	Ge ³² 72,59 ГЕРМАНИЙ	As ³³ 74,9216 МЬДЬЯК	Se ³⁴ 78,96 СЕЛЕН	Br ³⁵ 79,904 БРОМ				36 Kr 83,80 КРИПТОН
V	6	Rb ³⁷ 85,4678 РУБИДИЙ	Sr ³⁸ 87,62 СТРОНЦИЙ	Y ³⁹ 88,9059 ИТРИЙ	Zr ⁴⁰ 91,224 ЦИРКОНИЙ	Nb ⁴¹ 92,9064 НИОБИЙ	Mo ⁴² 95,94 МОЛИБДЕН	Tc ⁴³ 97,9072 ТЕХНЕЦИЙ	Ru ⁴⁴ 101,07 РУТЕНИЙ	Rh ⁴⁵ 102,9055 РОДИЙ	Pd ⁴⁶ 106,42 ПАЛЛАДИЙ	
	7	Ag ⁴⁷ 107,8682 СЕРЕБРО	Cd ⁴⁸ 112,41 КАДМИЙ	In ⁴⁹ 114,82 ИНДИЙ	Sn ⁵⁰ 118,710 ОЛОВО	Sb ⁵¹ 121,75 СУРЬМА	Te ⁵² 127,60 ТЕЛЛУР	I ⁵³ 126,9045 ИОД				54 Xe 131,29 КСЕНОН
VI	8	Cs ⁵⁵ 132,9054 ЦЕЗИЙ	Ba ⁵⁶ 137,33 БАРИЙ	La-Lu ⁵⁷⁻⁷¹	Hf ⁷² 178,49 ГАФНИЙ	Ta ⁷³ 180,9479 ТАНТАЛ	W ⁷⁴ 183,85 ВОЛЬФРАМ	Re ⁷⁵ 186,207 РЕНИЙ	Os ⁷⁶ 190,2 ОСМИЙ	Ir ⁷⁷ 192,22 ИНДИЙ	Pt ⁷⁸ 195,08 ПЛАТИНА	
	9	Au ⁷⁹ 196,9665 ЗОЛОТО	Hg ⁸⁰ 200,59 РУТУТЬ	Tl ⁸¹ 204,383 ТАЛЛИЙ	Pb ⁸² 207,2 СВИНЕЦ	Bi ⁸³ 208,9804 ВАСМУТ	Po ⁸⁴ 208,9824 ПОЛОНИЙ	At ⁸⁵ 209,9871 АСТАТ				86 Rn 222,0176 РАДОН
VII	10	Fr ⁸⁷ 223,0197 ФРАНЦИЙ	Ra ⁸⁸ 226,0254 РАДИЙ	Ac-(Lr) ⁸⁹⁻¹⁰³	Rf ¹⁰⁴ [261] РЕЗЕРФОРДИЙ	Db ¹⁰⁵ [262] ДУБИЙ	Sg ¹⁰⁶ [266] СИБОРГИЙ	Bh ¹⁰⁷ [267] БОРИЙ	Hs ¹⁰⁸ [269] ГАССИЙ	Mt ¹⁰⁹ [268] МЕЙТНЕРИЙ	Ds ¹¹⁰ [271] ДАРМШТАТИЙ	
	11	Rg ¹¹¹ [272] РЕНТГЕНИЙ									

Лантаноиды	La ⁵⁷ 138,9055 ЛАНТАН	Ce ⁵⁸ 140,115 ЦЕРИЙ	Pr ⁵⁹ 140,90765 ПРАЗЕОДИМ	Nd ⁶⁰ 144,24 НЕОДИМ	Pm ⁶¹ 144,9127 ПРОМЕТИЙ	Sm ⁶² 150,36 САМАРИЙ	Eu ⁶³ 151,965 ЕВРОПИЙ	Gd ⁶⁴ 157,25 ГАДОЛИНИЙ	Tb ⁶⁵ 158,92534 ТЕРБИЙ	Dy ⁶⁶ 162,50 ДИСПРОЗИЙ	Ho ⁶⁷ 164,93032 ГОЛЬМИЙ	Er ⁶⁸ 167,26 ЭРБИЙ	Tm ⁶⁹ 168,9342 ТУЛИЙ	Yb ⁷⁰ 173,04 ИТТЕРБИЙ	Lu ⁷¹ 174,967 ЛЮТЕЦИЙ
------------	-----------------------------------------------	---------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------	-------------------------------------------------	----------------------------------------------	-----------------------------------------------	------------------------------------------------	------------------------------------------------	------------------------------------------------	-------------------------------------------------	--------------------------------------------	----------------------------------------------	-----------------------------------------------	-----------------------------------------------

Актиноиды	Ac ⁸⁹ 227,0278 АКТИНИЙ	Th ⁹⁰ 232,0381 ТОРИЙ	Pa ⁹¹ 231,03588 ПРОТАКТИНИЙ	U ⁹² 238,0289 УРАН	Np ⁹³ 237,0482 НЕПТУНИЙ	Pu ⁹⁴ 244,0642 ПЛУТОНИЙ	Am ⁹⁵ 243,0614 АМЕРИЦИЙ	Cm ⁹⁶ 247,0703 КУРИЙ	Bk ⁹⁷ 247,0703 БЕРКЛИЙ	Cf ⁹⁸ 242,0587 КАЛИФОРНИЙ	Es ⁹⁹ 252,083 ЭЙНШТЕЙНИЙ	Fm ¹⁰⁰ 257,0951 ФЕРМИЙ	Md ¹⁰¹ 258,10 МЕНДЕЛЕВИЙ	No ¹⁰² 259,1009 НОБЕЛИЙ	Lr ¹⁰³ 260,105 ЛОУРЕНСИЙ
-----------	------------------------------------------------	----------------------------------------------	-----------------------------------------------------	--------------------------------------------	-------------------------------------------------	-------------------------------------------------	-------------------------------------------------	----------------------------------------------	------------------------------------------------	---------------------------------------------------	--------------------------------------------------	------------------------------------------------	--------------------------------------------------	-------------------------------------------------	--------------------------------------------------