

## СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ.

### Часть 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика

Первая часть сборника включает в себя более 1700 задач различной степени трудности. Авторами большей части задач являются преподаватели кафедры общей физики Московского физико-технического института. Эти задачи предлагались студентам на экзаменах, контрольных работах и студенческих физических олимпиадах. Книга содержит также классический методический материал, необходимый в учебном процессе. Некоторые задачи имеют оценочный характер и охватывают сразу несколько разделов физики. Около 10% задач приведены с решениями. В сборнике не отдано предпочтение какой-либо одной системе единиц, так как реально в различных областях науки и техники применяются единицы, наиболее адекватные рассматриваемому вопросу.

Для студентов физических специальностей вузов, а также преподавателей физики высшей и средней школ.

#### Содержание

От составителей	5	
	Задачи	Ответы
<b>МЕХАНИКА</b>		
§ 1. Кинематика материальной точки	8	264
§ 2. Динамика материальной точки. Статика	12	267
§ 3. Движение тел с переменной массой	22	271
§ 4. Работа, энергия, импульс. Законы сохранения импульса и энергии. Столкновения	30	276
§ 5. Гармонические колебания материальной точки	45	283
§ 6. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса	55	287
§ 7. Гравитация	59	288
§ 8. Специальная теория относительности	80	303
§ 9. Плоское движение твердого тела	88	310
§ 10. Колебания твердого тела. Волны	117	325
§ 11. Пространственное движение твердого тела. Гироскопы	130	330
§ 12. Неинерциальные системы отсчета	135	333
§ 13. Упругие деформации	147	340
§ 14. Элементы гидродинамики	152	343
<b>ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА</b>		
§ 1. Идеальный газ. Работа, теплота, внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Теплоемкость	158	346
§ 2. Скорость звука. Истечение газов	172	354
§ 3. Циклы. Расчет работы, внутренней энергии, тепловых эффектов и КПД	174	355
§ 4. Энтропия. Обратимые и необратимые процессы	181	358
§ 5. Термодинамические потенциалы	191	364
§ 6. Реальные газы. Газ Ван-дер-Ваальса	197	368
§ 7. Распределение Максвелла	206	374

§ 8. Распределение Больцмана	215	379
§ 9. Флуктуации. Статистический смысл энтропии	222	382
§ 10. Явления переноса. Теплопроводность. Броуновское движение	226	387
§11. Фазовые превращения	244	398
§ 12. Поверхностные явления	255	404
Приложения		411

## От составителей

Предлагаемая читателю книга является первой частью Сборника задач по общему курсу физики, состоящего из трех книг (частей).

В первую часть сборника вошли задачи по механике, термодинамике и молекулярной физике, во вторую книгу — задачи по электричеству и оптике, а в третью — задачи по атомной физике, физике элементарных частиц и ядерной физике, физике твердого тела и сверхпроводимости.

В сборнике представлены задачи, предлагавшиеся студентам Московского физико-технического института на семестровых контрольных работах, письменных экзаменах и олимпиадах по общему курсу физики в течение пятидесяти лет. Каждый семестр кафедры общей физики предлагает студентам на письменном экзамене *новые задачи*. Именно поэтому «архив» кафедры столь велик. Как правило, это задачи, приближенные к реальным физическим проблемам, родившиеся под влиянием научной работы преподавателей. Конечно, в сборнике содержится много стандартных учебных задач, отличающихся простотой и ясностью. Но каждая из них не лишена своей «изюминки». Часть задач носит оценочный характер. Они должны способствовать развитию у студентов ясности физического мышления и ощущения масштабов физических величин и явлений. При решении большинства задач требуется не только формальное знание законов, но и достаточно широкий физический кругозор. Большинство задач ориентировано на получение численного ответа, ибо численный ответ является важным критерием разумности получаемых результатов, приближает задачу к реальной физической ситуации.

Некоторые задачи приведены с решениями. Такие задачи помечены звездочкой. Количество задач, снабженных решениями, невелико (около 10% от общего числа). Как правило, это типовые задачи или задачи глубокие, имеющие фундаментальное значение. Так или иначе наличие решений у некоторой части задач носит чисто методический характер.

Составители сборника не придерживались какой-либо одной системы единиц и обозначений. Это отражает точку зрения кафедры общей физики МФТИ — будущий физик должен свободно ориентироваться в любой системе единиц, без труда переходя от одной единицы к другой.

Первая часть сборника состоит из двух самостоятельных разделов, соответствующих программе I и II семестров в МФТИ. Раздел I — механика и раздел II — термодинамика и молекулярная физика. Каждый из разделов разбит на соответствующее количество тем. Так, «Механика» включает четырнадцать тем, а «Термодинамика» — двенадцать. Столь подробное разбиение представляет определенное удобство как для преподавателей, так и для студентов.

В конце настоящей книги приведены соотношения между некоторыми единицами СИ и гауссовой системы, актуальные для данной части сборника, а также некоторые внесистемные единицы и мировые константы и важнейшие физические величины.

Часть задач первой книги уже была опубликована в ранее вышедших изданиях: сборнике задач по физике под ред. Д. А. Заикина (МФТИ, 1982), сборнике задач по физике под ред. С. М. Козела (М.: Наука, 1987), в «Общем курсе физики» Д. В. Сивухина (М.: Наука, 1989). И, наконец, еще часть задач взята из части I сборника задач по общему курсу физики (Механика) под ред. И. А. Яковлева (М.: Наука, 1977) и Части II того же сборника (Термодинамика и молекулярная физика) под ред. Д. В. Сивухина. (М.: Наука, 1976).

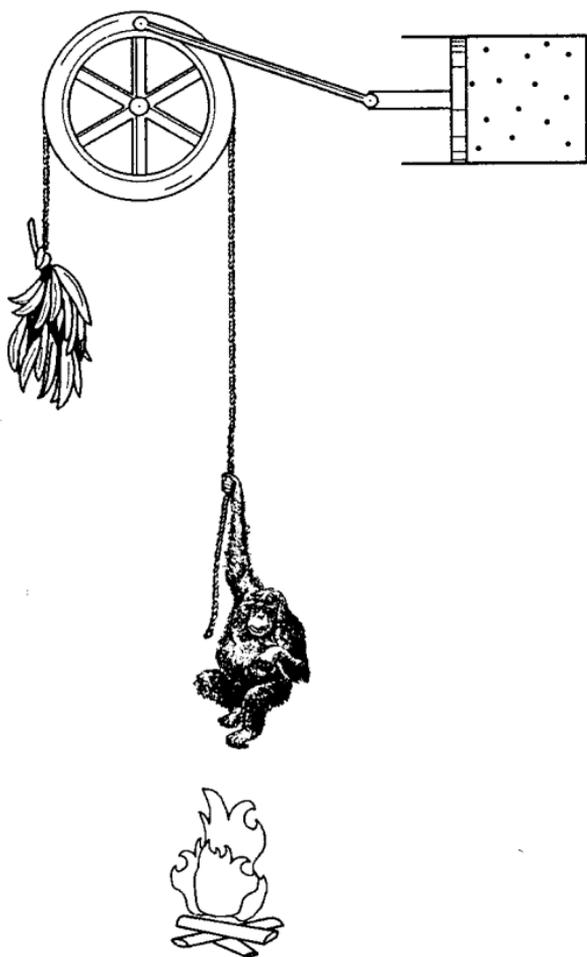
Соавтором и редактором трех частей последнего из указанных сборников (всего было издано 5 частей) был профессор МФТИ Д. В. Сивухин. Значительное количество задач во всех пяти частях указанного Сборника было составлено преподавателями МФТИ. Заимствованные из «Сборника И. А. Яковлева» задачи помечены маленькой буквой «я» внизу номера.

Над составлением задач трудился весь многочисленный коллектив кафедры общей физики МФТИ. Конечно, невозможно перечислить всех авторов сборника, ибо это очень трудная задача. И тем не менее приведем список достоверно известных людей, придумавших задачи для этой части сборника: *Д. В. Сивухин, В. Г. Аверин, Ю. В. Афанасьев, В. Е. Белонучкин, Л. Л. Гольдин, Д. Б. Диатроптов, Д. А. Заикин, В. Г. Зацепин, Ф. Ф. Игошин, С. П. Капица, К. В. Караджев, А. С. Кингсеп, А. П. Кирьянов, С. Л. Кленов, Ю. И. Колесов, П. Ф. Коротков, В. П. Корявов, К. А. Котельников, М. Г. Кремлев, С. И. Крючков, С. Д. Кузьмичев, Л. Б. Луганский, Е. З. Мейлихов, В. Г. Никольский, В. А. Овчинкин, А. П. Овчинников, О. А. Ольхов, А. Я. Паршин, Э. В. Прут, Э. Н. Свириденков, М. В. Свиридов, А. И. Смирнов, А. В. Степанов, О. А. Судаков, Г. Н. Фрейберг, Ю. М. Ципенюк, В. И. Чивилев.*

Нельзя особо не сказать о тех, кто вложил в дело составления задач колоссальный редакторский труд, работая в комиссиях по подготовке экзаменационных письменных работ в разные годы. Это Д. В. Сивухин, М. Д. Галанин, А. Д. Гладун, Л. Л. Гольдин, Д. Б. Диатроптов, Б. Г. Ерозолимский, Д. А. Заикин, С. П. Капица, А. П. Кирьянов, С. М. Козел, И. П. Крылов, Г. Р. Локшин, Л. Б. Луганский, Л. А. Микаэлян, В. Г. Никольский, А. Я. Паршин, Э. И. Рашба, С. А. Славатинский, А. И. Смирнов, А. В. Степанов, И. Ф. Щеголев, А. В. Францессон, В. Е. Белонучкин, А. С. Кингсеп, М. Г. Кремлев, Е. З. Мейлихов, В. А. Овчинкин, О. А. Ольхов, Э. В. Прут, М. В. Свиридов, О. А. Судаков, Ю. М. Ципенюк.

Техническую работу комиссий многие годы выполняли старшие преподаватели Л. П. Баканина, Г. Е. Иванникова, Г. А. Никитаева, а также Н. С. Берюлева, М. А. Тулайкова, Н. И. Петеримова.

Составители сборника с благодарностью примут все замечания, которые неизбежно возникнут у читателей, и советы по его улучшению.



**З**адачи

## § 1. Кинематика материальной точки

**1.1я.** Начертить графики зависимости скорости некоторых тел от времени, если графики ускорения  $a$  этих тел имеют вид, представленный на рис. 1 (начальная скорость тел во всех случаях равна нулю)<sup>1</sup>.

**1.2я.** Начертить графики зависимости от времени пути и ускорения некоторого тела, если скорость этого тела как функция времени представлена графиком на рис. 2 (см. примечание к задаче 1.1).

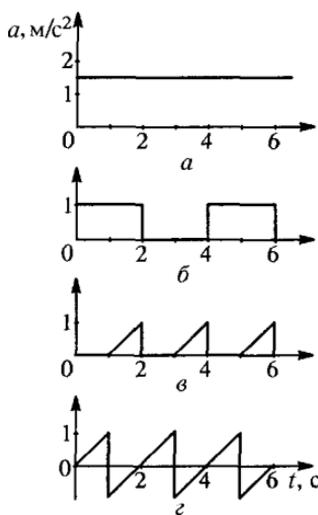


Рис. 1

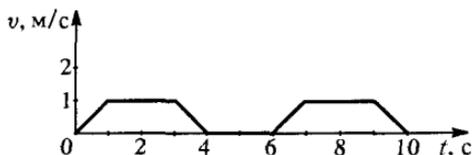


Рис. 2

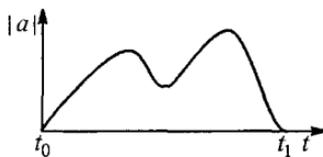


Рис. 3

**1.3.** На рис. 3 изображен график зависимости модуля ускорения  $a$  от времени  $t$  для прямолинейно движущегося тела. Определить

<sup>1</sup> На приведенных графиках зависимость ускорения от времени схематизирована: предполагается, что ускорение в некоторые моменты времени меняется скачком. Такой характер придан рисункам для упрощения дела. В действительности же ускорения могут изменяться очень быстро, но все же не скачком, поскольку являются непрерывными функциями времени. Предположение о скачкообразных изменениях ускорений приводит к тому, что графики скорости имеют изломы. Аналогичные соображения относятся к задаче 1.2.

значение времени  $t_x$ , соответствующее максимальному значению модуля скорости движения тела.

**1.4.** Минометная батарея расположена у подножья горы с наклоном к горизонту  $45^\circ$ . Под каким углом  $\alpha$  к горизонту надо установить ствол орудия, чтобы мина достигла склона на максимальной высоте? Сопротивление воздуха не учитывать.

**1.5.** Под каким углом  $\varphi$  к горизонту следует бросить камень с вершины горы с уклоном  $45^\circ$ , чтобы он упал на склон на максимальном расстоянии?

**1.6.** Атлет толкает ядро с разбега. Считая, что скорость ядра относительно атлета в момент броска равна по величине скорости разбега, найти угол  $\alpha$ , под которым следует выпустить ядро по отношению к земле, чтобы дальность полета была максимальной. Высоту самого атлета не учитывать.

**1.7.** На одну пару обкладок электронного осциллографа подается синусоидальное, на другую — пилообразное напряжение. Какая картина будет видна на экране, если периоды синусоиды и «пилы» связаны соотношениями:  $T_c/T_n = 2; 1; 1/2; 3/2$ ? Что будет, если  $T_c$  чуть-чуть больше, чем  $T_n$ ?

**1.8.** Тело движется по горке, имеющей форму, изображенную на рис. 4. В момент  $t = 0$  тело находится в точке  $x = 0, z = 0$  и имеет скорость  $v = v_0$ . Нарисовать траекторию тела в фазовой плоскости с осями координат  $z, dz/dt$ . Скорость  $v_0$  принимает два значения:

$$(v_0)_1 = 5 \text{ м/с}, \quad (v_0)_2 = 7 \text{ м/с}.$$

**1.9.** В массивный цилиндр с внутренним диаметром  $D$  забрасывают шарик (рис. 5). Определить, при каких значениях  $v_0$  и  $\alpha$  траектория подъема шарика после удара о дно цилиндра будет симметрична траектории его падения и шарик не выскочит из цилиндра.

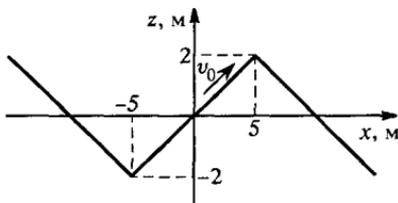


Рис. 4

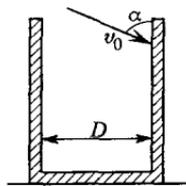


Рис. 5

Найти число соударений шарика с цилиндром за период его движения в цилиндре. Все удары считать абсолютно упругими.

**1.10я.** Как показали радиолокационные измерения, Венера вращается вокруг своей оси в направлении, обратном ее орбитальному движению. Период осевого вращения Венеры (относительно звезд)  $T_1 = 243$  земных суток. Венера обращается вокруг Солнца с периодом  $T_2 = 225$  земных суток. Определить продолжительность солнечных суток на Венере, т.е. время  $T$  между двумя последовательными

прохождениями Солнца через один и тот же меридиан на этой планете (время от полудня до полудня).

**1.11.** Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения, если оно наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что Солнце, Земля и Луна находятся в одной плоскости, а земная ось к этой плоскости перпендикулярна. Скорость света считать бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями. Радиус лунной орбиты  $R_{\text{л}} = 3,8 \cdot 10^5$  км.

**1.12я.** В открытом море на экваторе стоит высокая вертикальная скала. Как будет двигаться по этой скале тень, отбрасываемая сферической поверхностью Земли при заходе Солнца? Найти ускорение такого движения. Радиус Земли  $R = 6400$  км. За какое время тень переместится от основания до вершины скалы, если высота последней  $h = 1$  км?

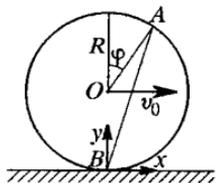


Рис. 6

**1.13я.** Колесо радиуса  $R$  катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью  $v_0$  (рис. 6). Найти горизонтальную компоненту  $v_x$  линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальную компоненту  $v_y$  этой скорости и модуль полной скорости для этой же точки. Найти значение угла  $\alpha$  между вектором

полной скорости точек на ободе колеса и направлением поступательного движения его оси. Показать, что направление вектора полной скорости произвольной точки  $A$  на ободе колеса всегда перпендикулярно к прямой  $AB$  и проходит через высшую точку катящегося колеса. Показать, что для точки  $A$   $v_{\text{полн}} = |BA|\omega$ . Построить график распределения скоростей для всех точек на вертикальном диаметре (в данный момент времени) катящегося без скольжения колеса. Выразить все искомые величины через  $v_0$ ,  $R$  и угол  $\varphi$ , составленный верхним вертикальным радиусом колеса и радиусом, проведенным из центра колеса  $O$  в исследуемую точку его обода  $A$ .

**У к а з а н и е.** Движение точек обода колеса можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью  $v_0$  оси колеса и вращения вокруг этой оси. Для этих точек при отсутствии скольжения колеса модули векторов скорости поступательного движения и линейной скорости, обусловленной вращением, равны друг другу.

**1.14я.** Найти выражение для радиуса кривизны циклоиды в ее вершине (см. задачу 1.17).<sup>1</sup>

**1.15.** Пользуясь общими результатами, полученными в задаче 1.13, найти величину и направление векторов скорости  $v_1$  и  $v_2$  для двух точек обода катящегося колеса, расположенных в данный момент на противоположных концах горизонтального диаметра колеса. Как будут направлены ускорения этих точек?

<sup>1</sup> Задачи, помеченные звездочкой, снабжены решением в данном сборнике.

**1.16.** Колесо радиуса  $R$  равномерно катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью  $v$ . Найти координаты  $x$  и  $y$  произвольной точки  $A$  на ободе колеса, выразив их как функции времени  $t$  или угла поворота колеса  $\varphi$ , полагая, что при  $t=0$   $\varphi=0$ ,  $x=0$ ,  $y=0$  (рис. 7). По найденным выражениям для  $x$  и  $y$  построить график траектории точки на ободе колеса.

**1.17.** Пользуясь выражением для полной скорости точек, лежащих на ободе катящегося колеса (см. задачи 1.13 и 1.16), найти длину полного пути каждой точки обода колеса между двумя ее последовательными касаниями полотна дороги.

**1.18.** Автомобиль с колесами радиуса  $R$  движется со скоростью  $v$  по горизонтальной дороге, причем  $v^2 > Rg$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту  $h$  может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колес автомобиля? Указать положение той точки на крышке колеса, с которой при данной скорости движения автомобиля грязь будет забрасываться выше всего. Сопротивление воздуха движению отброшенной вверх грязи не учитывать.

**1.19.** Используя условия качения колеса из задачи 1.13 и результаты ее решения, найти горизонтальную и вертикальную компоненты вектора ускорения произвольной точки на ободе колеса. Указать величину и направление вектора полного ускорения точек, лежащих на ободе колеса.

**1.20.** Колесо радиуса  $R$  движется горизонтально со скоростью  $v_0$  и вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Точка  $A$  на ободе (рис. 8) описывает в пространстве некоторую траекторию. Найти радиус ее кривизны  $\rho$  в момент, когда точка находится на уровне центра колеса.

**1.21.** Диск радиуса  $R$ , вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ , брошен под углом  $\alpha$  к горизонту со скоростью  $v_0$ . Точка  $A$  на ободе описывает в пространстве некоторую траекторию (рис. 9).

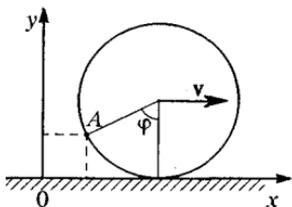


Рис. 7

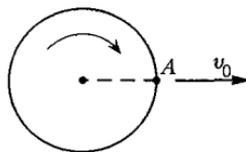


Рис. 8

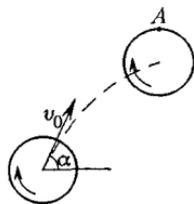


Рис. 9

Найти радиус ее кривизны  $\rho$  в момент наибольшего подъема, если точка  $A$  находится при этом над центром колеса.

**1.22.** Горизонтальный диск вращается с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг вертикальной оси. В некоторой точке на этом диске на расстоянии  $R$  от его оси установлен второй диск, ось которого также вертикальна. Второй диск вращается вокруг своей оси в ту же

сторону, что и первый диск, но с угловой скоростью  $\omega_2$ . Где располагается та мгновенная ось вращения, движение вокруг которой второго диска будет эквивалентно его участию в двух описанных вращательных движениях с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ? С какой угловой скоростью  $\omega$  должен вращаться второй диск вокруг этой мгновенной оси?

**1.23.** Вращение от двигателя автомобиля передается ведущим колесам через дифференциал — устройство, благодаря которому каждое из ведущих колес может вращаться с разной скоростью. Зачем нужен дифференциал? Почему нельзя оба ведущих колеса закрепить жестко на одной оси, которой передается вращение от двигателя?

**1.24я.** На основании общих соображений о движении автомобиля по криволинейному пути, развитых в предыдущей задаче, рассчитать скорости колес автомобиля на закруглении. Автомобиль с шириной колеи 1,2 м и радиусом колес  $r = 30$  см движется по закруглению дороги с радиусом кривизны  $R = 50$  м. Скорость центра автомобиля 36 км/ч. Найти линейные скорости  $v_{\text{ин}}$  внутренних (по отношению к центру кривизны дороги) и внешних  $v_{\text{ех}}$  колес автомобиля.

## § 2. Динамика материальной точки. Статика

**2.1я.** На гладкий горизонтальный стол положена однородная палочка  $AC$  массы  $m$  и длины  $l$  (рис. 10). Постоянная сила  $F$  толкает правый конец палочки. С какой силой  $F_1$  мысленно выделенный отрезок палочки  $AB = 4l/5$  действует на отрезок  $BC$  той же палочки?

**2.2.** На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы  $M$  (рис. 11). Другое тело массы  $m$  подвешено на нити, перекинутой через блок и привязанной к телу массы  $M$ . Найти ускорения тел и натяжение нити. Трением тела массы  $M$  о плоскость и трением в блоке, а также массами блока и нити пренебречь.

**2.3я.** Два одинаковых тела связаны нитью и лежат на идеально гладком столе, так что нить представляет собой прямую линию

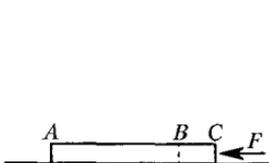


Рис. 10

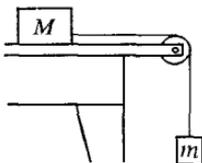


Рис. 11

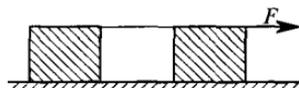


Рис. 12

(рис. 12). Нить может выдерживать натяжение не более 20 Н. Какую горизонтальную силу  $F$  следует приложить к одному из тел, чтобы нить оборвалась? Изменится ли сила, необходимая для разрыва нити, если между телами и столом есть трение и коэффициент трения одинаков для обоих тел?

**2.4я.** На идеально гладкую горизонтальную плоскость помещены три массы  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , связанные нитями между собой и с массой  $M$ , привязанной к нити, перекинутой через блок (рис. 13). Найти ускорение  $a$  системы. Найти натяжения всех нитей. Трением в блоке, а также массами блоков и нитей пренебречь.

**2.5.** На верхнем краю идеально гладкой наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить (рис. 14). На одном ее конце привязан груз массы  $m_1$ , лежащий на наклонной плоскости.

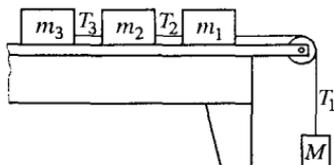


Рис. 13

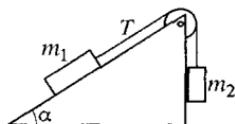


Рис. 14

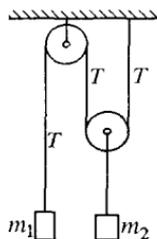


Рис. 15

На другом конце висит груз массы  $m_2$ . С каким ускорением  $a$  движутся грузы и каково натяжение  $T$  нити? Наклонная плоскость образует с горизонтом угол  $\alpha$ .

**2.6я.** Найти ускорения  $a_1$  и  $a_2$  масс  $m_1$  и  $m_2$  и натяжение нити  $T$  в системе, изображенной на рис. 15. Массой блоков и нитей пренебречь.

**2.7я.** Найти ускорение массы  $m_1$  и натяжения нитей  $T_1$  и  $T_2$  в системе, изображенной на рис. 16. Массой блоков и нитей пренебречь, силу трения не учитывать.

**2.8.** Три груза висят на блоках (рис. 17). Крайние блоки неподвижны, а средний может передвигаться. Считая заданными  $m_1$  и  $m_2$ ,

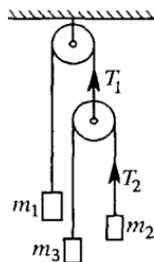


Рис. 16

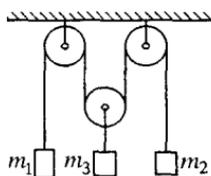


Рис. 17

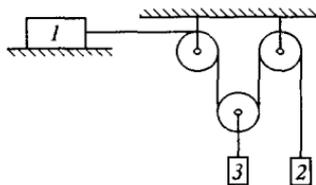


Рис. 18

определить массу груза  $m_3$ , при которой средний блок будет оставаться неподвижным. Трением и массами блоков и веревки пренебречь.

**2.9.** Два груза висят на блоках, а третий лежит на горизонтальной плоскости (рис. 18). Крайние блоки неподвижны, а средний может передвигаться. Считая заданными  $m_1$  и  $m_2$ , определить  $m_3$ , при

котором груз 3 будет оставаться неподвижным. Трением и массами блоков и веревки пренебречь.

**2.10.** Два груза соединены весомой нерастяжимой однородной нитью длины  $l$  (рис. 19). Массы грузов  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m/3$ , нити  $m_n = m/3$ . При какой длине вертикального отрезка нити  $x_1$  силы,

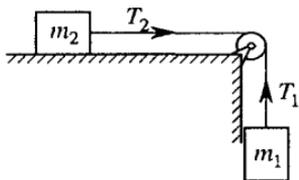


Рис. 19

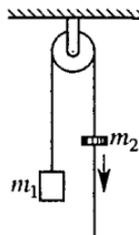


Рис. 20

действующие на грузы со стороны нити, окажутся равными? Чему равны эти силы? Каково ускорение системы в этом случае?

**2.11я.** Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. На одном ее конце привязан груз массы  $m_1$ . По другому концу нити с постоянным относительно нее ускорением  $a_2$  скользит кольцо массы  $m_2$  (рис. 20). Найти ускорение  $a_1$  массы  $m_1$  и силу трения  $R$  кольца о нить. Массой нити пренебречь.

**2.12.** Камень массы  $M$  лежит на горизонтальной плоскости на расстоянии  $L$  от края пропасти. К камню прикреплена веревка, перекинута через гладкий уступ; по веревке лезет обезьяна массы  $m$ . С каким постоянным (относительно земли) ускорением она должна лезть, чтобы успеть подняться раньше, чем упадет камень? Начальное расстояние обезьяны от уступа равно  $H < \frac{M}{m} L$ . Коэффициент трения камня о плоскость равен  $k$ .

**2.13я.** Через блок, ось которого горизонтальна, перекинута нерастяжимая веревка длины  $l$ . За концы веревки держатся две обезьяны, находящиеся на одинаковых расстояниях  $l/2$  от блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх, причем одна из них поднимается относительно веревки со скоростью  $v$ , а другая со скоростью  $2v$ . Через сколько времени каждая из обезьян достигнет блока? Массой блока и веревки пренебречь; массы обезьян одинаковы.

**2.14я.** Обезьяна, движущаяся с большей скоростью (см. условие предыдущей задачи), обладает вдвое большей массой, чем другая. Которая обезьяна достигнет блока раньше?

**2.15я.** Обезьяны, о которых шла речь в задаче 2.13, начинают подниматься вверх с постоянным ускорением относительно веревки, причем одна из них поднимается с ускорением  $a$ , а другая с ускорением  $2a$ . Через какой промежуток времени каждая из обезьян достигнет блока?

**2.16.** Через неподвижный невесомый блок перекинута невесомая нерастяжимая веревка. К одному концу ее привязан шест длины  $l$ ,

за который ухватилась обезьяна, масса которой равна массе шеста. Вся система уравновешена грузом, подвешенным к другому концу веревки. В начальный момент обезьяна находится в нижней точке шеста. На той же высоте находится груз. Обезьяна поднимается из нижней точки шеста в верхнюю. На какую высоту обезьяна и груз поднимутся относительно земли и на сколько опустится шест, если не учитывать трение в блоке? Тела подвешены на такой высоте, что движения их могут происходить беспрепятственно.

**2.17я.** Обезьяна массы  $m$  уравновешена противовесом на подвижном блоке  $B$  (рис. 21). Блок  $B$  уравновешен грузом массы  $2m$  на неподвижном блоке  $C$ . В начале система была неподвижна. С какой скоростью будет подниматься груз  $2m$ , если обезьяна начнет выбирать веревку с произвольной скоростью  $v$  (относительно себя)? Массой обоих блоков пренебречь.

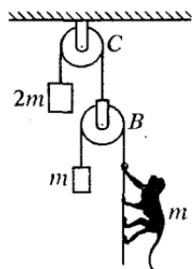


Рис. 21

**2.18.** На столе лежит доска массы  $M = 1$  кг, а на доске — груз массы  $m = 2$  кг. Какую силу  $F$  нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской  $0,25$ , а между доской и столом —  $0,5$ .

**2.19.** Груз массы  $m$  лежит на доске массы  $M$ . Коэффициент трения между доской и грузом равен  $k_1$ , а между доской и опорой —  $k_2$ . По доске наносят горизонтальный удар, и она начинает двигаться с начальной скоростью  $v_0$ . Определить время, через которое прекратится скольжение груза по доске.

**2.20.** Груз массы  $m$  лежит на доске массы  $M$ . Коэффициент трения между доской и грузом равен  $k$ . По грузу производят горизонтальный удар, после чего он начинает двигаться с начальной скоростью  $v_0$ . Определить время, через которое прекратится скольжение груза по доске. Трением доски о нижнюю опору можно пренебречь.

**2.21я.** По наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, ускоренно скользит доска массы  $M$  (рис. 22). Коэффициент трения доски о наклонную плоскость равен  $k$ . На доску кладут тело массы  $m$ , которое скользит по доске без трения. Какова должна быть минимальная масса тела  $m_{\min}$ , чтобы движение доски по наклонной плоскости стало равномерным?

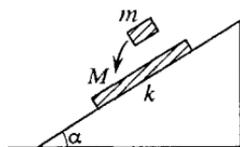


Рис. 22

**2.22.** По наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  соскальзывает брусок массы  $m_1$ , на котором находится второй брусок массы  $m_2$ . Коэффициент трения нижнего бруска о наклонную плоскость равен  $k_1$ , а коэффициент трения между брусками равен  $k_2$ , причем  $k_1 > k_2$ . Определить, будет ли двигаться верхний брусок относительно нижнего и каковы ускорения обоих брусков. Как изменится результат, если  $k_1 < k_2 < \text{tg } \alpha$ ?

**2.23.** Плоская шайба массы  $M$  лежит на тонкой пластине на расстоянии  $L$  от ее края (рис. 23). Пластину с большой постоянной скоростью выдергивают из-под шайбы, которая при этом практически не успевает сместиться. Найти зависимость  $x(t)$  расстояния, пройденного шайбой, от времени ее скольжения по поверхности стола. На какое расстояние в итоге сместится шайба? Считать, что сила трения между шайбой и доской, шайбой и столом прямо пропорциональна скорости с коэффициентом пропорциональности  $\gamma$ .

**2.24.** Хоккейная шайба падает на лед со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  и продолжает скользить по льду. Найти скорость скольжения как функцию времени, если коэффициент трения шайбы о лед  $k$  не зависит от скорости и силы давления шайбы на лед.

**2.25.** На какой угол  $\alpha$  наклонится автомобиль при торможении (рис. 24)? Центр масс расположен на равном расстоянии от передних и задних колес на высоте  $h = 0,4$  м над землей. Коэффициент трения

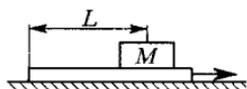


Рис. 23



Рис. 24



Рис. 25

$k = 0,8$ ; расстояние между осями  $l = 5h$ . Упругость всех пружин подвески одинакова и такова, что у неподвижного автомобиля на горизонтальной площадке прогиб их  $\Delta = 10$  см.

**2.26.** При торможении всеми четырьмя колесами тормозной путь автомобиля равен  $S_0$ . Найти тормозные пути этого же автомобиля при торможении только передними и только задними колесами. Коэффициент трения скольжения  $k = 0,8$ . Центр масс автомобиля расположен на равном расстоянии от передних и задних колес и на высоте  $h = l/4$ , где  $l$  — расстояние между осями.

**2.27.** Длинная однородная балка массы  $M$  и длины  $l$  перевозится на двух коротких санях (рис. 25). Какую силу тяги нужно приложить для равномерного перемещения этого груза по горизонтали? Коэффициент трения для передних саней  $k_1$ , для задних —  $k_2$ . Сила тяги горизонтальна и приложена к балке на высоте  $h$  от поверхности земли. Массами саней пренебречь.

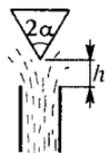


Рис. 26

**2.28.** Алюминиевый конус, масса которого  $m = 10$  г и угол при вершине  $2\alpha = 60^\circ$ , парит в вертикальной струе воды, вытекающей из фонтана со скоростью  $v = 3,5$  м/с через патрубок диаметра  $d = 3$  см (рис. 26). Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая сечение струи у вершины конуса приблизительно постоянным, оценить высоту  $h$ , на которой конус будет парить.

**2.29я.** Лодка под парусом развила скорость  $v_0$ . Как будет убывать во времени скорость движения лодки по стоячей воде после спуска паруса, если сопротивление воды движению лодки можно считать пропорциональным квадрату скорости? Как долго будет двигаться лодка? Какой путь она пройдет до полной остановки?

**2.30я.** Рассмотреть вопросы, поставленные в предыдущей задаче, в предположении, что сопротивление воды движению лодки пропорционально первой степени ее скорости.

**2.31я.** Пусть сила сопротивления воды при движении лодки пропорциональна скорости лодки. Как скорость лодки после спуска паруса будет зависеть от пройденного лодкой пути?

**2.32.** Парусный буер массой 100 кг начинает движение под действием ветра, дующего со скоростью  $v = 10$  м/с. Вычислить время, через которое мощность, отбираемая буером у ветра, будет максимальной, если сила сопротивления паруса ветру пропорциональна квадрату относительной скорости между буером и ветром с коэффициентом пропорциональности  $k = 0,1$  кг/м. Силой трения пренебречь.

**2.33я.** Парашютист совершает затяжной прыжок. До раскрытия парашюта он падает со скоростью 60 м/с, после раскрытия приземляется со скоростью 4 м/с. Подсчитать, каково было бы максимальное натяжение  $T$  строп парашюта, если бы в конце затяжного прыжка он раскрывался мгновенно. Масса парашютиста 80 кг, а силу сопротивления воздуха движущемуся парашюту считать пропорциональной квадрату скорости. Считать массу парашюта и его строп малой по сравнению с массой парашютиста.

**2.34я.** Два шарика падают в воздухе. Шарик сплошные, сделаны из одного материала, но диаметр одного из шариков вдвое больше другого. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости.

**2.35я.** Стальной шарик радиуса 0,05 мм падает в широкий сосуд, наполненный глицерином. Найти скорость  $v$  установившегося (равномерного) движения шарика. Коэффициент внутреннего трения в глицерине равен  $\eta = 14$  дин·с/см<sup>2</sup>, плотность глицерина  $d_1 = 1,26$  г/см<sup>3</sup>, плотность стали  $d_2 = 7,8$  г/см<sup>3</sup>.

**У к а з а н и е.** Для решения задачи воспользоваться гидродинамической формулой Стокса, выражающей силу сопротивления, испытываемую шариком, движущимся в вязкой жидкости:  $f = 6\pi r v \eta$ .

**2.36.** Воздушный шар имеет сферическую оболочку радиуса  $R$ , которая заполнена газом плотности  $\rho_r$ . Плотность воздуха —  $\rho_v$ , вязкость —  $\eta$ ; масса оболочки, оснастки и гондолы в сумме равна  $M$ . Шар снижается с постоянной скоростью. Чтобы ее уменьшить, в некоторый момент времени за борт выбрасывается без начальной скорости мешок с песком массы  $m$ . Определить скорость шара  $v$  как функцию времени. (См. указание к предыдущей задаче.)

**2.37я:** Как будет изменяться скорость тела, движущегося вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$ , если предположить, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела?

**2.38.** Тело бросают вертикально вверх в вязкой среде. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения тела. Вычислить

время  $t_1$  подъема тела на максимальную высоту его полета вверх и сравнить его со временем  $t_0$  подъема в отсутствие трения. Начальная скорость тела в обоих случаях одинакова.

**2.39.** Из зенитной установки выпущен снаряд вертикально вверх со скоростью  $v_0 = 600$  м/с. Сила сопротивления воздуха  $F = -kv$ . Определить максимальную высоту  $H$  подъема снаряда и время его подъема  $\tau$  до этой высоты, если известно, что при падении снаряда с большой высоты его установившаяся скорость  $v_1 = 100$  м/с.

**2.40.** Из одного неподвижного облака через  $\tau$  секунд одна за другой начинают падать две дождевые капли. Как будет изменяться со временем расстояние между ними? Решить задачу в двух случаях: 1) полагая, что сопротивление воздуха отсутствует; 2) полагая, что сопротивление воздуха пропорционально скорости капель.

**2.41.** С палубы яхты, бороздящей океан со скоростью 10 узлов (18 км/ч), принцесса роняет в воду жемчужину массы  $m = 1$  г. Как далеко от места падения в воду может оказаться жемчужина на дне океана, если при ее движении в воде сила сопротивления  $F = -\beta v$ ;  $\beta = 10^{-4}$  кг/с?

**2.42.** Колобок, желая полакомиться подсолнечным маслом из бочонка, свалился туда и через  $\Delta t = 2$  с достиг дна. Масса Колобка  $m = 200$  г, плотность его в 1,05 раза больше плотности масла, а сила сопротивления при перемещении Колобка в масле  $F = -\beta v$ ,  $\beta = 0,1$  кг/с. Оценить высоту бочонка  $H$ , если он был залит до краев.

**2.43.** Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$  и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (рис. 27). Определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус забора  $R$ , коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора  $k$ . Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска много меньше  $R$ .

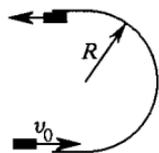


Рис. 27

**2.44.** Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения  $k$  между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль мог пройти закругление с радиусом  $R = 200$  м на скорости  $v = 100$  км/ч?

**2.45.** Автомобиль движется с постоянной скоростью 90 км/ч по замкнутой горизонтальной дороге, имеющей форму эллипса с полуосями 500 м и 250 м. На каких участках дороги ускорение автомобиля максимально и минимально? Чему равны максимальное и минимальное ускорения? Каков должен быть коэффициент трения между полотном дороги и шинами автомобиля, чтобы автомобиль при движении по эллипсу не заносило?

**2.46.** Автомобиль движется с постоянной скоростью вдоль извилистой горизонтальной дороги. Принимая дорогу за синусоиду (с периодом  $l = 628$  м и амплитудой  $A = 50$  м), найти максимальную скорость, которую может развивать автомобиль, чтобы не было заноса. Коэффициент трения между полотном дороги и колесами автомобиля  $\mu = 0,2$ .

**2.47.** Велосипедист при повороте по кругу радиуса  $R$  наклоняется внутрь закругления так, что угол между плоскостью велосипеда и землей равен  $\alpha$ . Найти скорость  $v$  велосипедиста.

**2.48.** Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью  $v$  на одной и той же высоте. Определить радиус  $r$  этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом  $\alpha$ .

**2.49.** Метатель посылает молот на расстояние  $L = 70$  м по траектории, обеспечивающей максимальную дальность броска при данной начальной скорости. Какая сила действует на спортсмена при ускорении молота? Вес ядра молота 50 Н. Разгон ведется по окружности радиуса  $R = 2$  м. Соппротивление воздуха не учитывать.

**2.50.** Шарик, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити, лежит на поверхности гладкой сферы радиуса  $R$ . Точка подвеса находится на вертикальном стержне  $AO$ , жестко связанном с центром сферы (рис. 28). Для неподвижной сферы отношение силы натяжения нити и реакции сферы равно  $\alpha$ , а отношение силы тяжести и натяжения нити —  $\beta$ . Вычислить угловую скорость вращения системы вокруг вертикальной оси, при которой сила давления шарика на сферу станет равной нулю. Шарик считать точечным.

**2.51.** Шарик, подвешенный на нити длины  $l$ , лежит на поверхности гладкой сферы радиуса  $R$ . Расстояние от точки подвеса до центра сферы равно  $d$  (рис. 29). Вычислить натяжение нити и реакцию сферы для неподвижного шарика. Определить скорость  $v$ , которую надо сообщить шарiku в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, чтобы реакция сферы стала равной нулю. Шарик считать точечным. Нить невесома и нерастяжима.

**2.52я.** Шарик радиуса  $R$  висит на нити длиной  $l$  и касается вертикального цилиндра диаметра  $2r$ , установленного на оси цент-

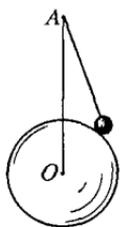


Рис. 28

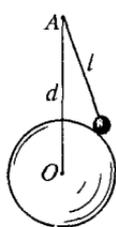


Рис. 29

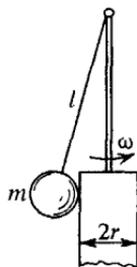


Рис. 30

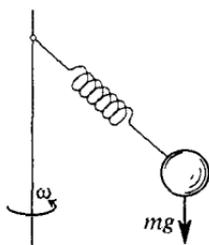


Рис. 31

робежной машины (рис. 30). При какой угловой скорости  $\omega$  вращения центробежной машины шарик перестанет давить на стенку цилиндра?

**2.53.** Шарик массы  $m$  подвешен на идеальной пружине жесткости  $k$  и начальной длины  $l_0$  над центром платформы центробежной машины (рис. 31). Затем шарик начинает вращаться вместе с

машиной с угловой скоростью  $\omega$ . Какой угол  $\alpha$  образует при этом пружина с вертикалью?

**2.54.** На внутренней поверхности конической воронки с углом  $2\alpha$  при вершине (рис. 32) на высоте  $h$  от вершины находится малое тело. Коэффициент трения между телом и поверхностью воронки равен  $k$ . Найти минимальную угловую скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси, при которой тело будет неподвижно в воронке.

**2.55.** Металлическое кольцо, подвешенное на нити к оси центробежной машины (рис. 33), равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Нить составляет угол  $\alpha$  с осью. Найти расстояние  $x$  от центра кольца до оси вращения.

**2.56.** На врытый в землю столб навита веревка. За один конец веревки тянут с силой  $F = 10\,000$  Н. Какую силу надо приложить

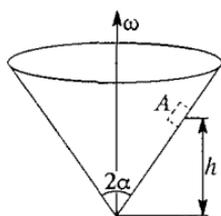


Рис. 32

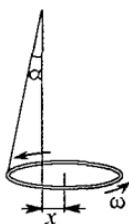


Рис. 33

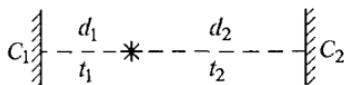


Рис. 34

к другому концу веревки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения веревки о столб  $k = 1/\pi$ . Веревка обвита вокруг столба 2 раза.

**2.57.** Нить перекинута через бревно. На концах нити укреплены грузы, имеющие массы  $m_1$  и  $m_2$ . Считая заданным коэффициент трения  $k$  нити о бревно, найти условие, при котором грузы будут оставаться в покое. Определить ускорение  $a$  системы грузов при нарушении условий равновесия.

**2.58.** Ядра  $^{252}\text{Cf}$  спонтанно делятся на две части (на два осколка). Деление ядер сопровождается эмиссией нейтронов. Осколки регистрируются двумя счетчиками (рис. 34)  $C_1$  и  $C_2$ , расположенными на расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  от малого источника осколков. Пренебрегая эмиссией нейтронов, определить, для какого отношения масс осколков  $m_1/m_2$  разность времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  пролета осколков будет минимальной?

**2.59.** На гладком столе лежит пружина с жесткостью  $k$  с начальной длиной  $l_0$ . Масса пружины  $M$ . К одному ее концу привязан лежащий на столе брусок массы  $m$ , а за другой пружину тянут с силой  $F$ . Определить относительное удлинение пружины, полагая жесткость ее достаточной, чтобы в любом сечении удлинение было мало в сравнении с первоначальной длиной.

**2.60.** Пружина жесткости  $k$  и массы  $M$  лежит на гладком горизонтальном столе. К одному из ее концов привязана тонкая нерастяжимая нить, перекинутая через неподвижный блок, укрепленный на краю стола. Нить свисает с него вертикально. К свисающему концу нити прикрепляют грузик массы  $m$ , который в определенный момент отпускают без начальной скорости. Определить удлинение пружины. Жесткость ее считать достаточной, чтобы удлинение было мало в сравнении с первоначальной длиной.

**2.61.** Журнальный столик сделан в форме равностороннего треугольника (рис. 35), в вершинах которого укреплены ножки. Если в центр столика поставить гирию массы  $M$ , то ножки у него сломаются. В какие точки на такой столик можно поставить гирию массы  $M/2$ ?

**2.62.** Теннисист подбрасывает ракеткой теннисный мяч таким образом, что мяч все время подскакивает на одну и ту же высоту  $h = 1$  м (от уровня ракетки). Найти скорость ракетки к моменту удара, если коэффициент восстановления  $k_h$  при падении мяча на неподвижную ракетку (т.е. отношение последовательных высот  $h_n/h_{n-1}$ ) составляет 0,9.

**2.63.** Бревно массы  $m$  и радиуса  $R$  пытаются удержать на весу при помощи двух скрепленных шарниром досок массы  $M$  и длины  $l$  каждая (рис. 36). При каких значениях коэффициента трения между бревном и досками это возможно?

**2.64.** Катушку ниток радиуса  $R$  пытаются, прислонив к стене, удержать на весу с помощью собственной нитки, отмотанной на длину  $l$  (рис. 37). При каких значениях коэффициента трения между катушкой и стеной это возможно?

**2.65я.** Шнур, положенный на доску, пропущен одним концом в отверстие, просверленное в доске (рис. 38). Найти, с какой

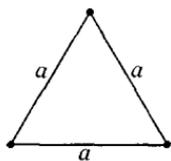


Рис. 35

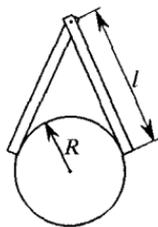


Рис. 36

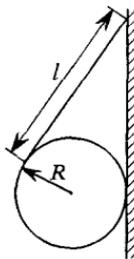


Рис. 37

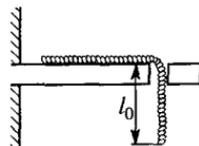


Рис. 38

скоростью  $v$  соскользнет с доски конец шнура, если известна длина всего шнура  $l$  и длина его конца  $l_0$ , свешивающегося в момент начала движения. Найти зависимость от времени длины свисающего с доски отрезка шнура. Трение между шнуром и столом не учитывать.

### § 3. Движение тел с переменной массой<sup>1</sup>

**3.1.** Найти выражение ускорения и скорости платформы, движущейся под действием постоянной горизонтальной силы  $f$  (рис. 39), если на платформе лежит песок, который высыпается через отверстие в платформе. За 1 с высыпается масса  $\Delta m$  песка, в момент времени  $t = 0$  скорость платформы  $v$  равна нулю, а масса песка и платформы вместе равна  $M$ .

**3.2.** Платформа длины  $L$  катится без трения со скоростью  $v_0$  (рис. 40). В момент времени  $t = 0$  она поступает к пункту погрузки

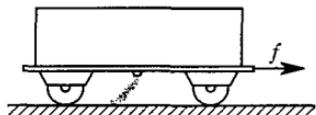


Рис. 39

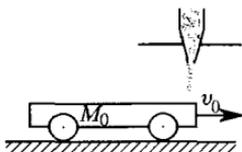


Рис. 40

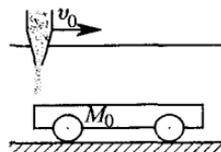


Рис. 41

песка, который высыпается со скоростью  $\mu$  [кг/с]. Какое количество песка будет на платформе, когда она минует пункт погрузки? Масса платформы равна  $M_0$

**3.3.** Бункер с песком движется с постоянной скоростью  $v_0$  над рельсами (рис. 41). На рельсах стоит платформа длины  $L$  и массы  $M_0$ . Когда бункер начинает проходить над краем платформы, его открывают, и песок начинает высыпаться со скоростью  $\alpha$  [кг/с]. Пренебрегая трением, определить скорость платформы к моменту, когда бункер ее обгонит.

**3.4.** Руда насыпается из бункера в вагон, катящийся по рельсам без трения. Начальная скорость вагона  $v_0$ , масса пустого вагона  $m_0$ , вес загруженной руды  $m_1$ . Подача руды из бункера происходит таким образом, что руда ложится на пол вагона слоем постоянной высоты. Найти время загрузки  $T$ .

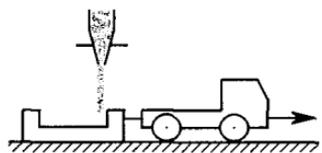


Рис. 42

**3.5.** Тягач тянет «волоком» сани длины  $l = 10$  м массы 50 т (рис. 42) с постоянной скоростью  $v = 5$  км/ч. При  $t = 0$  передний край саней поступает под погрузку песком, который насыпается сверху со скоростью  $\mu = 100$  кг/с, причем тягач продолжает тянуть сани с той же скоростью. До начала погрузки натяжение каната вдвое меньше того, при котором он обрывается. Оборвется ли канат в процессе погрузки, если коэффициент трения  $k = 10^{-3}$ ?

<sup>1</sup> Заметим, что название раздела «движение тел с переменной массой» является скорее традиционным, чем физически точным. Дело в том, что в этих задачах масса системы в целом не меняется, но меняется масса ракеты, тележки с песком и т. п.

**3.6я.** В одном изобретении предлагается на ходу наполнять платформы поезда углем, падающим вертикально на платформу из соответствующим образом устроенного бункера. Какова должна быть приложенная к платформе сила тяги, если на нее погружают 10 т угля за 2 с, и за это время она проходит равномерно 10 м? Трением при движении платформы пренебречь.

**3.7я.** Подсчитать работу, совершенную паровозом за время погрузки на платформу некоторой массы угля  $\Delta m$  (см. предыдущую задачу), и сравнить ее с кинетической энергией, которую получила погруженная масса угля.

**3.8\*** Реактивный корабль массы  $M$  приводится в движение насосом, который забирает воду из реки и выбрасывает ее назад с кормы корабля. Скорость струи воды относительно корабля постоянна и равна  $u$ , а масса ежесекундно выбрасываемой насосом воды также постоянна и равна  $\mu$ . Найти модуль скорости корабля  $v$  как функцию времени и коэффициент полезного действия системы  $\eta$  как функцию величин  $u$  и  $v$ . Исследовать выражение для коэффициента полезного действия на максимум. Силы трения в насосе и сопротивление воды движению корабля не учитывать.

**3.9.** Буксир тянет баржу массы  $M_0 = 50$  т с постоянной скоростью  $v = 5$  км/ч, и при этом натяжение веревки вдвое меньше того, при котором она обрывается. При  $t = 0$  в барже открывается течь, и в нее начинает поступать вода со скоростью  $\mu = 100$  кг/с. Через какое время оборвется веревка, если буксир продолжает тянуть баржу с той же скоростью? Считать, что сила сопротивления воды растет пропорционально весу баржи из-за увеличения ее лобового сопротивления при погружении; коэффициент пропорциональности  $\alpha = 10^{-3}$ .

**3.10.** Водометный катер стартует из состояния покоя. В единицу времени двигатель катера прогоняет массу воды  $\mu$ , забирая ее со стороны борта и выбрасывая назад со скоростью  $u$ . Масса катера  $M$ , ширина его  $D$ , силу сопротивления воды считать равной  $-(A\eta D)v$ , где  $\eta$  — вязкость воды, считающаяся известной,  $A$  — коэффициент порядка единицы. Найти зависимость скорости катера от времени. Оценить ее, в частности, в самом начале, сразу после старта.

**3.11.** По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. На тележки падает  $\mu$  [г/с] снега. В момент времени  $t = 0$  массы тележек равны  $m_0$ , а скорости —  $v_0$ . Начиная с момента  $t = 0$ , один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса ее в дальнейшем останется постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Определить скорости тележек. Какая тележка будет двигаться быстрее? Почему?

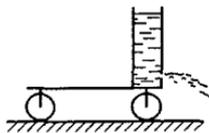


Рис. 43

**3.12.** На краю массивной тележки (рис. 43), покоящейся на горизонтальной плоскости, укреплен цилиндрический сосуд радиуса  $r$  и высоты  $H$ , в нижней части которого имеется небольшое отверстие с пробкой. Сосуд наполнен жидкостью плотности  $\rho$ . В момент времени  $t = 0$  пробку вынимают.

Найти максимальную скорость, которую приобретает тележка, считая, что  $H \gg r$  и  $M \gg \pi r^2 \rho H$ , где  $M$  — масса тележки с сосудом. Пояснить смысл этих ограничений. Трением в подшипниках тележки, трением качения и внутренним трением жидкости пренебречь.

**3.13.** Сосуд конической формы, наполненный водой, может перемещаться без трения вдоль горизонтальных рельсов. Вблизи дна сосуда (рис. 44) сбоку сделано малое отверстие, закрытое пробкой.

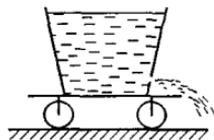


Рис. 44

Если вынуть пробку, то через отверстие будет вытекать струя жидкости. Определить скорость, которую приобретает сосуд после открытия отверстия, когда вся жидкость вытечет из него. Первоначальная высота уровня жидкости  $h_0$ . Массой сосуда по сравнению с массой жидкости, находящейся в нем, пренебречь в течение всего времени вытекания жидкости. В конце истечения условие

малости массы сосуда по сравнению с массой жидкости выполняться не может. Как это обстоятельство повлияет на точность окончательного результата?

**3.14.** Два ведра с водой висят на веревке (рис. 45), перекинутой через блок. Масса одного ведра  $M_0$ , масса другого ведра  $M_0 + \Delta m$ . В начальный момент более легкому ведру сообщается скорость  $v_0$ ,

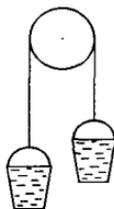


Рис. 45

направленная вниз. В этот момент начинается дождь, и в результате масса каждого ведра увеличивается с постоянной скоростью. Через какое время  $t$  скорость ведер обратится в ноль? Трением, массами веревки и блока пренебречь.

**3.15.** При выстреле из безоткатного орудия и из длинноствольной пушки снарядами равной массы  $M = 10$  кг использовалась одинаковая масса  $m = 1$  кг одного и того же пороха. Полагая, что при выстреле из пушки внутренняя энергия продуктов сгорания практически целиком используется для ускорения снаряда, найти отношение начальных скоростей полета снарядов  $v_n/v_{60}$ . За начальную скорость снаряда безоткатного орудия принять скорость, полученную реактивным снарядом после сгорания пороха.

**3.16.** Космический корабль стартует с начальной массой  $m_0$  и нулевой начальной скоростью в пространстве, свободном от поля тяготения. Масса корабля меняется во времени по закону:  $m = m_0 \exp(-\lambda t)$ , скорость продуктов сгорания относительно корабля постоянна и равна  $u$ . Какое расстояние  $x$  пройдет корабль к моменту, когда его масса уменьшится в 1000 раз?

**3.17.** Наблюдая пролетающий мимо Земли космический корабль, земные астрономы установили, что скорость его меняется во времени по закону  $v = -v_0 \ln(1 - vt)$ . Определить, как должна зависеть от времени масса корабля в предположении постоянства скорости истечения газов из сопла относительно корабля. Тяготением пренебречь.

**3.18.** Для поражения цели с самолета запускают ракету. Самолет летит горизонтально на высоте  $H = 8$  км со скоростью  $v_0 = 300$  м/с. Масса ракеты изменяется по закону  $m(t) = m_0 \exp(-t/\tau)$  и уменьшается за время полета к цели в  $e$  раз. Скорость истечения газов относительно ракеты  $u = 1000$  м/с, корпус ракеты во время ее полета горизонтален. Каково расстояние  $L$  от цели до точки, над которой находился самолет в момент запуска ракеты? Сопротивление воздуха не учитывать.

**3.19.** Две ракеты массы  $m_0$  каждая стартуют одновременно в свободном пространстве, где силой тяжести можно пренебречь. Первая ракета движется с постоянным расходом топлива  $\mu$ , вторая — с постоянным ускорением  $a$ . Определить отношение их масс и скоростей в момент, когда масса первой ракеты уменьшится в два раза. Относительные скорости истечения газов у обеих ракет одинаковы, постоянны и равны  $u$ .

**3.20.** Ракета массы  $m_0$  стартует в свободном пространстве, где силой тяжести можно пренебречь. В течение времени  $\tau$  ракета движется с постоянным расходом топлива  $\mu$ , при этом масса ракеты уменьшается в два раза. Затем ракета движется в течение такого же времени  $\tau$  с постоянным ускорением  $a$ . Определить массу и скорость ракеты в момент  $t = 2\tau$ , если относительно ракеты скорость истечения газов постоянна и равна  $u$ .

**3.21.** Найти связь между массой ракеты  $m(t)$ , достигнутой ею скоростью  $v(t)$  и временем  $t$ , если ракета движется вертикально вверх в поле тяжести Земли. Скорость газовой струи относительно ракеты  $u$  считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения  $g$  с высотой не учитывать. Какую массу газов  $\mu(t)$  должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной относительно Земли?

**3.22.** По какому закону должна меняться во времени масса ракеты (вместе с топливом), чтобы она во время работы оставалась неподвижной в поле тяжести Земли, если скорость  $u$  газовой струи относительно ракеты постоянна? Определить время, через которое полная масса системы уменьшится вдвое, а также время, по истечении которого ракета израсходует весь запас топлива, если масса ракеты без топлива  $m_1 = 1000$  кг, а масса топлива  $m_2 = 9000$  кг. Скорость газовой струи  $u = 2$  км/с.

**3.23.** Человек поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью небольшого реактивного двигателя за спиной. Двигатель выбрасывает струю газов вертикально вниз со скоростью относительно человека  $u = 1000$  м/с. Расход топлива автоматически поддерживается таким, чтобы в любой момент, пока работает двигатель, реактивная сила уравновешивала вес человека с грузом. Сколько времени человек может продержаться на постоянной высоте, если его масса  $m_1 = 70$  кг, масса двигателя без топлива  $m_2 = 10$  кг, начальная масса топлива  $m_0 = 20$  кг? Какое расстояние  $l$  в горизонтальном направлении может преодолеть человек, если он

разбежался по земле, приобрел горизонтальную скорость  $v = 10$  м/с, а затем включил двигатель, поддерживающий его в воздухе на постоянной высоте?

**3.24.** Со стартовой площадки в поле тяжести Земли ракета движется вверх с первоначальным ускорением  $a_0 = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Скорость истечения газов относительно ракеты  $u = 2000$  м/с. Какое ускорение  $a$  и какая скорость  $v$  будут у этой ракеты через  $t = 50$  с движения вверх без учета сопротивления воздуха? Расход топлива в единицу времени постоянный.

**3.25.** На сколько процентов уменьшится масса ракеты, которая в течение 10 мин поднималась с поверхности Земли вертикально вверх с постоянной скоростью  $v = 5$  км/с? Скорость истечения продуктов сгорания относительно ракеты  $u = 2$  км/с. Радиус Земли  $R_3 = 6400$  км. Трением о воздух пренебречь.

**3.26.** Поднимаясь вертикально вверх от поверхности Земли с постоянной скоростью  $v = 5$  км/с, ракета достигла высоты  $h = 2R_3$ . На сколько процентов уменьшилась при этом масса ракеты, если скорость истечения газовой струи относительно ракеты  $u = 2$  км/с. Радиус Земли  $R_3 = 6400$  км. Трением о воздух пренебречь.

**3.27.** По какому закону должен изменяться расход топлива  $\mu(t)$ , чтобы в поле тяжести с постоянным  $g$  ракета двигалась вертикально вверх с постоянным ускорением  $a$ ? Скорость истечения газовой струи относительно ракеты постоянна и равна  $u$ .

**3.28.** Ракета летит вертикально вверх в поле тяготения Земли. В течение интервала времени длительностью  $T$  скорость истечения газов из двигателя относительно ракеты равномерно уменьшалась от значения  $u$  до  $u/2$ . Определить величину  $T$ , если за это время масса ракеты уменьшилась вдвое, а ее скорость осталась постоянной. Считать поле тяготения однородным.

**3.29.** Двигатель метеорологической ракеты дважды запускается на короткое время: при взлете и при возвращении на Землю для обеспечения мягкой посадки. Масса ракеты перед стартом  $M$ , после посадки —  $m$ . Какова масса ракеты после старта? Сопротивлением воздуха во все время полета пренебречь.

**3.30.** Ракета с космонавтом стартует вертикально и поднимается вверх с постоянным ускорением, так что космонавт испытывает все время перегрузку  $n = 2$ . Скорость истечения газов относительно ракеты постоянна и равна  $u = 1000$  м/с. Вычислить скорость  $v$  и высоту  $H$ , которых она достигнет в момент, когда будет израсходовано все топливо, составляющее 95% стартового веса. Перегрузкой  $n$  называется отношение  $n = (P - P_0)/P_0$ , где  $P_0$  — вес космонавта на Земле,  $P$  — «вес», который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в полете. Сопротивлением воздуха и зависимостью  $g$  от высоты пренебречь.

**3.31.** Для мягкой вертикальной посадки космического корабля с космонавтом используются тормозные реактивные двигатели с постоянной скоростью истечения газов относительно корабля  $u = 1000$  м/с. Корабль опускается с постоянным ускорением  $3g$ . Вычислить высоту

$H$ , на которой надо включить двигатель, если израсходованное топливо составляет 33% от начального веса. Сопротивлением воздуха и зависимостью  $g$  от высоты пренебречь.

**3.32.** Ракета с космонавтом стартует в поле тяжести и движется вертикально вверх с постоянным ускорением, так что космонавт испытывает трехкратную перегрузку. Во сколько раз скорость ракеты, достигнутая после сжигания заданного количества топлива, будет меньше максимальной скорости, которой могла бы достичь ракета при произвольно большом ускорении? Скорости истечения газа относительно ракеты в обоих случаях одинаковы; сопротивлением воздуха и изменением  $g$  с высотой пренебречь.

**3.33.** Космическая станция движется со скоростью  $v_0 = 2,1$  км/с по направлению к центру Луны. Для осуществления мягкой посадки на поверхность Луны включается двигательная установка на время  $\tau = 60$  с, выбрасывающая газовую струю со скоростью  $u = 2$  км/с относительно станции в направлении скорости станции. В конце торможения скорость уменьшилась практически до нуля. Во сколько раз уменьшилась масса станции за это время, если торможение осуществлялось вблизи поверхности Луны, где ускорение свободного падения можно считать постоянным и равным  $g/6$  ( $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>).

**3.34.** Найти скорости вблизи Земли ракет, запускаемых вертикально, при обычном старте и при пролете через воображаемую шахту, проходящую по диаметру Земли (рис. 46). Вторая ракета вначале свободно падает до центра Земли, после чего срабатывает двигатель. Для обеих ракет время сгорания топлива очень мало, скорость истечения газов относительно ракеты  $v_0 = 2,7$  км/с, отношение конечной массы к стартовой  $M_k/M_0 = 1/20$ . Землю считать однородным шаром.

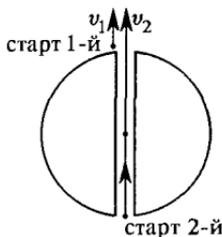


Рис. 46

**3.35.** На ракете установлены два двигателя с различным топливом. Один дает газовую струю со скоростью  $u_1$  относительно ракеты, другой — со скоростью  $u_2$ . Сначала работает один двигатель, пока не израсходует весь запас топлива. Затем включается второй, пока в нем тоже не будет израсходован запас топлива. Что выгоднее: сначала включить двигатель с большей скоростью газовой струи, а затем с меньшей или поступить наоборот? Величины  $u_1$  и  $u_2$  считать постоянными.

**3.36.** Двухступенчатая ракета состоит из двух одинаковых ракет с одним и тем же отношением массы топлива  $M_T$  к массе конструкции  $M_K$ , равном  $\alpha_0 = M_T/M_K = 10$ . При каком отношении  $\alpha$  одноступенчатая ракета достигнет той же конечной скорости, что и двухступенчатая? Скорости истечения газов относительно ракет равны.

**3.37.** На сколько максимальная скорость, достижимая в свободном космическом пространстве с помощью двухступенчатой ракеты, больше, чем в случае одноступенчатой ракеты? Масса второй

ступени двухступенчатой ракеты составляет  $M_2/M_1 = \alpha = 0,1$  от массы первой ступени, а отношение массы горючего к полной массе ступени во всех случаях равно  $M_r/M = k = 0,9$ . Относительно ракет скорости истечения газов в сравниваемых ракетах одинаковы и равны  $u = 2000$  м/с.

**3.38.** Двухступенчатая ракета запускается с поверхности Земли вертикально вверх. Масса второй ступени составляет  $M_2/M_1 = \alpha = 0,1$  от массы первой ступени. Масса горючего в обеих ступенях составляет  $M_r/M = k = 0,9$  от полной массы ступени. Найти минимальную скорость  $u_{\min}$  выбрасываемых газов относительно ракеты, необходимую для достижения второй космической скорости  $v_2$ , рассмотрев для этого предельный случай сколь угодно малой общей массы ракеты ( $M \rightarrow 0$ ). Считать, что на всем протяжении пути разгона ускорение поля тяжести постоянно, количество выбрасываемых в единицу времени газов также постоянно. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**3.39.** Каким должно быть отношение стартовой массы одноступенчатой ракеты к массе ее конструкции  $m_0/m_k$  при вертикальном разгоне ракеты с поверхности Земли до первой космической скорости  $v_1 = 7,8$  км/с? Какова при этом масса конструкции ракеты? Время работы двигателя  $T = 12$  мин, относительная скорость истечения газов  $u = 3$  км/с, а расход топлива  $\mu = 300$  кг/с. Считать ускорение свободного падения равным  $10$  м/с<sup>2</sup> и не зависящим от высоты над поверхностью Земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

**3.40:** С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета. При каком отношении масс первой ( $m_1$ ) и второй ( $m_2$ ) ступеней скорость контейнера с полезным грузом (массы  $m$ ) получится максимальной? Относительные скорости истечения газов  $u$  в двигателях обеих ступеней постоянны и одинаковы. Отношения массы топлива к массе ступени равны соответственно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  для первой и второй ступеней. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

**3.41.** Ракета начинает двигаться в облаке пыли. Пылинки неподвижны и прилипают к ракете при ударе. Начальная скорость ракеты равна нулю, скорость истечения газов относительно ракеты равна  $u$ , массой корпуса ракеты по сравнению со стартовой массой топлива можно пренебречь. Кроме того известно, что в любой момент полета ракеты масса израсходованного топлива равна массе налипшей пыли. Найти в таком облаке максимальную скорость ракеты.

**3.42.** Космический корабль движется с постоянной по величине скоростью  $v$ . Для изменения направления его полета включается двигатель, выбрасывающий струю газа со скоростью  $u$  относительно корабля в направлении, перпендикулярном к его траектории. Определить угол  $\alpha$ , на который повернется вектор скорости корабля, если начальная масса его  $m_0$ , конечная  $m$ , а скорость  $u$  постоянна.

**3.43.** Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по величине. Для этого предлагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. В каком из этих двух способов потребуется меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

**3.44.** Ракета массы  $M_0 = 10$  кг стартует с вершины горы высоты  $h = 2$  км и летит так, что газы все время выбрасываются горизонтально. Пренебрегая сопротивлением воздуха, подсчитать кинетическую энергию ракеты во время удара о землю. Скорость газов относительно ракеты  $u = 300$  м/с, расход топлива  $\mu = 0,3$  кг/с.

**3.45.** Ракета запускается с небольшой высоты и летит все время горизонтально с ускорением  $a$ . Под каким углом к горизонту направлена реактивная струя? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**3.46я.** В ракете продукты сгорания (газы) выбрасываются со скоростью  $u = 3$  км/с относительно ракеты. Найти отношение  $\eta$  ее кинетической энергии  $K_p$  к кинетической энергии продуктов сгорания  $K_r$  в момент достижения ракетой скорости  $v_k = 12$  км/с.

**3.47я.** Определить коэффициент полезного действия ракеты, т.е. отношение кинетической энергии  $K$ , приобретенной ракетой, к энергии сгоревшего топлива  $Q$ . Скорость, достигнутая ракетой,  $v = 9$  км/с. Теплота сгорания топлива  $q = 4000$  ккал/кг, скорость выбрасываемых продуктов сгорания относительно ракеты  $u = 3$  км/с.

**3.48.** Ракета движется прямолинейно под действием реактивной силы. В начальный момент ракета покоилась, а ее масса равнялась  $m_0$ ; относительная скорость истечения газов  $u$  постоянна; действием внешних сил можно пренебречь. 1) При каком значении скорости кинетическая энергия, приобретенная ракетой, будет максимальной? 2) При каком значении массы ракеты импульс, приобретенный ракетой, будет максимальным?

**3.49.** На некотором расстоянии от вертикальной стенки на гладкой горизонтальной поверхности лежит игрушечная ракета (рис. 47). Из состояния покоя ракета начинает двигаться перпендикулярно стенке по направлению к ней. Через промежуток времени  $T_1$  происходит абсолютно упругий удар ракеты о стенку. При этом ракета не меняет своей ориентации относительно стенки. Определить, через какое минимальное время  $T_2$  после удара скорость ракеты окажется равной нулю. Считать, что скорость истечения газов относительно ракеты постоянна, а масса ракеты зависит от времени по закону  $m(t) = m_0 - at$ . Время удара о стенку мало по сравнению с  $T_1$ . Выполнить вычисления для  $m_0 = 1$  кг;  $a = 0,01$  кг/с;  $T_1 = 10$  с.

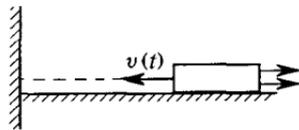


Рис. 47

**3.50.** В игрушечную ракету наливается вода, занимающая малую часть внутренней полости ракеты. В остальную часть полости накачивается воздух до давления  $P$ . Оценить высоту подъема ракеты, считая, что масса воды  $m$  много меньше массы ракеты  $M$ , время истечения воды много меньше времени полета, сечение сопла ракеты много меньше сечения полости.

**3.51.** Оценить скорость, приобретаемую моделью водяной ракеты, в которой вода выбрасывается через небольшое отверстие с помощью поршня под давлением пружины с коэффициентом жесткости  $k$ . Длина водяной камеры  $l$ , масса заключенной в ней воды  $m$ . Масса ракеты  $M \gg m$ . При полном опорожнении камеры пружина находится в несжатом состоянии.

**3.52.** Оценить скорость, которую приобретает модель водяной ракеты, в которой вода выбрасывается через небольшое отверстие с помощью поршня под действием пружины специальной формы, сила сжатия которой меняется по закону  $F = kx^2$ , где  $x$  — величина деформации пружины. Длина водяной камеры  $l$ , масса заключенной в ней воды  $m$ , масса ракеты  $M \gg m$ . При полном опорожнении камеры пружина находится в несжатом состоянии.

**3.53я.\*** Сферическая капля воды свободно падает в атмосфере пересыщенного водяного пара. Считая, что скорость возрастания массы капли  $dm/dt$  пропорциональна ее поверхности и пренебрегая силой сопротивления среды, определить движение капли. Предполагается, что в момент зарождения капли ( $t = 0$ ) скорость ее падения равна нулю.

## § 4. Работа, энергия, импульс.

### Законы сохранения импульса и энергии. Столкновения

**4.1.** На частицу массы 1 г действует сила  $F_x(t)$ , график которой (рис. 48) представляет собой полуокружность. Найти изменение скорости  $\Delta v_x$ , вызванное действием силы, и работу этой силы, если

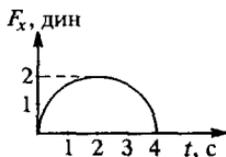


Рис. 48

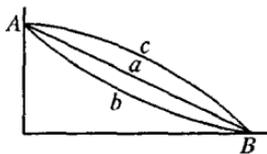


Рис. 49

начальная скорость  $v_{0x} = 4$  см/с. Почему работа зависит от начальной скорости?

**4.2.** Санки могут спускаться с горы из точки  $A$  в точку  $B$  по путям  $AaB$ ,  $AbB$  и  $AcB$  (рис. 49). В каком случае они придут в точку  $B$  с большей скоростью? Считать, что сила трения, действующая на санки, пропорциональна нормальному давлению их на плоскость, по которой они скользят.

**4.3.** Какую работу надо затратить, чтобы втащить (волоком) тело массы  $m$  на горку с длиной основания  $L$  и высотой  $H$ , если коэффициент трения между телом и поверхностью горки равен  $k$ ? Угол наклона поверхности горки к горизонту может меняться вдоль горки, но его знак остается постоянным.

**4.4.** Какую полезную работу можно получить при соскальзывании тела массы  $m$  с горки, длина основания которой равна  $L$ , а высота  $H$ , если коэффициент трения между телом и поверхностью горки равен  $k$ ? Угол наклона поверхности горки к горизонту может меняться вдоль горки, но его знак остается постоянным.

**4.5.** Автомобиль «Жигули» способен на скорости  $v = 50$  км/час двигаться вверх по дороге с наибольшим уклоном  $\alpha = 16^\circ$ . При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на той же скорости мощность, расходуемая двигателем, составляет  $N = 20$  л.с. (1 л.с. = 736 Вт). Найти максимальную мощность двигателя, если масса автомобиля 1200 кг.

**4.6.** Автомашина с грузом весит 7,5 тонн. Максимальная мощность двигателя  $N = 400$  л.с. На скорости  $v = 36$  км/час машина способна двигаться вверх по дороге с наибольшим уклоном  $\alpha = 20^\circ$ . Найти величину силы трения, действующей на автомобиль.

**4.7.** Модель автомобиля с пружинным заводом набирает скорость  $v_0$  и, соответственно, кинетическую энергию  $K_0$ , при этом пружина, раскручиваясь, теряет часть своей потенциальной энергии, которая в предположении отсутствия потерь на тепло равна  $\Delta U = K_0$ . Для наблюдателя, движущегося равномерно со скоростью  $v_0$  навстречу, изменение кинетической энергии модели составит, очевидно,  $3K_0$ , а потеря энергии пружины по-прежнему  $K_0$ . Исследуйте вопрос о перераспределении энергии в замкнутой системе, вызванном работой пружины, с точки зрения покоящегося и движущегося наблюдателей.

**4.8.** Отчаянно газуя и пробуксовывая всеми четырьмя ведущими колесами, автомобилист на «Ниве» пытается въехать по заснеженной и обледенелой дороге, на которой, к счастью, выбита устойчивая колея, на длинный крутой подъем, перед которым установлен знак 10% (т.е. угол подъема  $\alpha = \arcsin 0,1$ ). После предварительного разгона на горизонтальном участке (также с пробуксовкой) ему это удастся. На обратном пути по уже размякшей дороге он отмечает по спидометру, что длина разгона оказалась равной пути подъема. Пользуясь этими данными, найти коэффициент трения шин об обледенелую дорогу.

**4.9я.** Определить силу, с которой винтовка действует на плечо стрелка при выстреле, если считать, что со стороны винтовки действует постоянная сила и смещает плечо стрелка на  $S = 1,5$  см, а пуля покидает ствол мгновенно. Масса винтовки 5 кг, масса пули 10 г, и скорость ее при вылете равна  $v = 500$  м/с.

**4.10.** Из пушки, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь  $l$ , производится выстрел в горизонтальном направлении. Какова должна быть скорость  $v$  снаряда для

того, чтобы пушка остановилась после выстрела? Выразить искомую скорость  $v$  снаряда через его массу  $m$ , массу пушки  $M$  и угол  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту. Учесть, что  $m \ll M$ .

**4.11я.** Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте  $h = 19,6$  м на две одинаковые части. Через секунду после взрыва одна часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии  $S_2$  от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии  $S_1 = 1000$  м от места выстрела? Силу сопротивления воздуха при решении задачи не учитывать.

**4.12.** Три лодки одинаковой массы  $m$  идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью  $v$ . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью  $u$  относительно лодки грузы массы  $m_1$ . Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

**4.13я.** Человек, стоящий в лодке, подтягивает вторую лодку за веревку до их соприкосновения и далее удерживает их вместе (рис. 50). Где будут находиться обе лодки, когда их движение в результате трения о воду прекратится? Трение лодок о воду считать

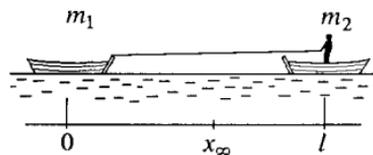


Рис. 50

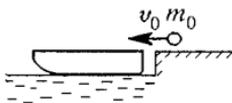


Рис. 51

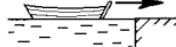


Рис. 52

пропорциональным их скорости и одинаковым для обеих лодок, массы лодок  $m_1$  и  $m_2$ , начальное расстояние между центрами их масс  $l$ .

**4.14я.** Две лодки идут навстречу параллельным курсом. Когда лодки находятся друг против друга, с каждой лодки на встречную перебрасывается мешок массы 50 кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идет со скоростью 8,5 м/с в прежнем направлении. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны 500 кг и 1 т соответственно?

**4.15.** На покоящуюся баржу вдоль нее с берега забрасывается груз массы  $m_0$  с горизонтальной составляющей скорости  $v_0$  (рис. 51). Найти конечную скорость баржи с грузом и расстояние  $S$ , пройденное грузом вдоль поверхности баржи (относительно баржи), если масса баржи  $m$ , а коэффициент трения между грузом и поверхностью баржи равен  $k$ .

**4.16.** Лодка длины  $L_0$  наезжает, двигаясь по инерции, на отмель и останавливается из-за трения, когда половина ее длины оказывается на суше (рис. 52). Какова была начальная скорость лодки  $v$ ? Коэффициент трения равен  $k$ .

**4.17.** Поезд при подходе к концу тупика со скоростью  $v$  тормозится пружинным буфером. Коэффициент упругости пружины  $k$  остается постоянным при сжатии пружины. Найти минимальную величину допустимого сжатия пружины  $\Delta L$ , чтобы максимальное

замедление не превысило  $a_{\max}$ . Найти величину  $k$ , при которой такой режим торможения реализуется, если масса поезда равна  $M$ .

**4.18я.** Ледокол, ударяясь о льдину массы  $M$ , отбрасывает ее, сообщив ей скорость  $v$ . Положим, что давление ледокола на льдину нарастает равномерно во времени при сближении ледокола со льдиной и так же равномерно убывает, когда они расходятся. Найти при этих условиях максимальную силу давления льдины на борт корабля, если удар продолжается время  $t$ .

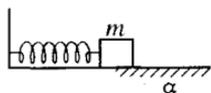


Рис. 53

**4.19.** Когда прикрепленная к пружине масса  $m$  находится в равновесном положении, справа от нее поверхность шероховатая (коэффициент трения равен  $\alpha$ ), а слева — гладкая (коэффициент трения равен 0) (рис. 53). На сколько нужно сместить влево массу  $m$  от положения равновесия, чтобы она остановилась после одного колебания в точке равновесия? Жесткость пружины равна  $k$ .

**4.20.** На покоящейся тележке массы  $M$  укреплен пружина жесткости  $k$ , которая находится в сжатом состоянии, соприкасаясь с покоящимся грузом массы  $t$  (рис. 54). Пружина сжата на расстояние  $x_0$  от равновесного положения, а расстояние от груза до правого открытого края тележки равно  $L$  (длина пружины в несжатом состоянии меньше  $L$ ).

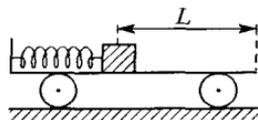


Рис. 54

Пружину освобождают, и она выталкивает груз с тележки. Какова будет скорость  $v$  груза, когда он соскользнет с тележки? Коэффициент трения груза о тележку равен  $\alpha$ , трением тележки о поверхность пренебречь.

**4.21я.** Лодка массы  $M$  с находящимся в ней человеком массы  $t$  неподвижно стоит на спокойной воде. Человек начинает идти вдоль по лодке со скоростью  $u$  относительно лодки. С какой скоростью  $w$  будет двигаться человек относительно воды? С какой скоростью  $v$  будет при этом двигаться лодка относительно воды? Сопротивление воды движению лодки не учитывать.

**4.22я.** Человек прошел вдоль по лодке, описанной в предыдущей задаче, путь  $l$ . Каковы при этом будут смещения лодки  $S_1$  и человека  $S_2$  относительно воды?

**4.23я.** Человек, находящийся в лодке, начинает бежать вдоль по лодке с ускорением  $a$  относительно нее. С какими ускорениями  $a_1$  и  $a_2$  будут при этом двигаться соответственно человек и лодка относительно воды? С какой силой  $F$  бегущий человек будет действовать на лодку в горизонтальном направлении?

**4.24я.** На противоположных концах лодки стоят два человека одинаковой массы  $t$  и перебрасываются мячом массы  $\Delta t$ . Скорость брошенного мяча относительно воды  $u$ . Найти скорость движения лодки  $v$  в течение времени перелета мяча с одного конца лодки на другой. Найти смещения лодки  $S_1$  и мяча  $S_2$  относительно воды после каждого перелета мяча вдоль лодки, если длина пути мяча вдоль лодки равна  $l$ .

**4.25.** На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки  $l$ . Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

**4.26.** На прямоугольный трехгранный клин  $ABC$  массы  $M$ , лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин  $BED$  массы  $m$  (рис. 55). Определить, на какое расстояние  $x$  сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка  $D$  совместится с  $C$ . Длины катетов  $AC$  и  $BE$  равны соответственно  $a$  и  $b$ .

**4.27.** На носу лодки длины  $l$  стоит человек, держа на высоте  $h$  ядро массы  $m$ . Масса лодки вместе с человеком равна  $M$ . Человек бросает горизонтально ядро вдоль лодки. Какую скорость по горизонтали должен сообщить человек ядру, чтобы попасть в корму лодки? Сопротивление воды движению лодки не учитывать.

**4.28.** Гимнаст падает с высоты  $H = 12$  м на упругую сетку. Во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше его веса, если прогиб сетки под действием веса гимнаста  $a = 1$  м?

**4.29.** При приземлении парашютист гасит скорость, приседая на максимально напружиненных ногах. Оценить, во сколько раз можно уменьшить площадь парашюта, если под ногами парашютиста укрепить дополнительный амортизатор (рис. 56). Длину сжатия пружины амортизатора  $L_{\text{пр}}$  принять равной высоте приседания человека

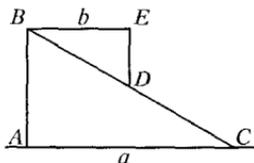


Рис. 55



Рис. 56

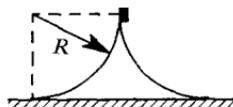


Рис. 57

$L_{\text{ног}}$ , а максимальную силу сжатия пружины  $k_{\text{пр}}L_{\text{пр}}$  равной постоянному усилию ног  $F_{\text{ног}}$ . Считать, что при приземлении с амортизатором сначала сжимается пружина, а после ее полного сжатия начинают сгибаться ноги парашютиста. Силу сопротивления движению парашюта считать пропорциональной его площади.

**4.30.** Гладкие боковые поверхности стоящего на плоскости однородного клина представляют собой четверть окружности радиуса  $R = 1$  м (рис. 57). Из верхней точки клина без начальной скорости скользит небольшое тело, масса которого равна массе клина. Определить, на какие расстояния сместятся по горизонтали оба тела к

моменту, когда соскользнувшее тело прекратит движение. Коэффициент трения между соскользнувшим телом и плоскостью  $k = 0,2$ , а трением между клином и плоскостью можно пренебречь.

**4.31.** На нити длины  $l$  подвешен груз массы  $m$ . Определить, на какую минимальную высоту надо поднять груз  $m$ , чтобы он, падая, разорвал нить, если минимальный покоящийся груз  $M$ , разрывающий нить, растягивает ее перед разрывом на 1%. Считать, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до ее разрыва.

**4.32.** Математическому маятнику с гибкой нерастяжимой нитью длины  $l$  сообщают в начальный момент горизонтальную скорость  $v_0$ . Определить максимальную высоту его подъема  $h$ , как маятника, если  $\sqrt{5lg} > v_0 > \sqrt{2lg}$ . По какой траектории будет двигаться шарик маятника после того, как он достиг максимальной высоты  $h$  на окружности? Определить максимальную высоту  $H$ , достигаемую при этом движении шарика.

**4.33я.** Механическая система (рис. 58), находится в положении равновесия в поле силы тяжести. Расстояние между осями блоков равно  $l$ , а отношение масс грузов равно  $m_1/m_2 = \sqrt{2}$ . Среднему грузу толчком сообщают скорость, направленную вниз, после чего он опускается, а затем начинает подниматься вверх. Какую скорость следует сообщить среднему грузу, чтобы при последующем движении

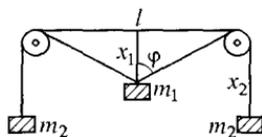


Рис. 58



Рис. 59

он мог подняться до высоты уровня осей блоков? На сколько в результате толчка должен опуститься средний груз? Размерами и массами блоков и трением пренебречь. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

**4.34.** Два шкива, находящиеся на одном уровне, соединены ремнем; первый шкив — ведущий (рис. 59). В каком случае предельная мощность, которую можно передать ремнем при определенном числе оборотов, будет больше: когда шкивы вращаются по часовой стрелке или против?

**4.35.** Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута замкнутая тяжелая веревка массы  $M$ . В начальный момент времени за точку веревки, расположенную между блоком и нижним заворотом ее, цепляется обезьяна массы  $m$  и начинает карабкаться вверх так, чтобы удержаться на неизменной высоте. Какую мощность  $N$  должна для этого развивать обезьяна? Через какое время она перестанет справляться со своей задачей, если максимальная мощность, которую она может развивать, равна  $N_{\max}$ ?

**4.36.** Небольшое тело начинает двигаться с вершины гладкой полусферы радиуса  $R$  с горизонтальной скоростью  $v_0$ . На какой высоте оно оторвется от поверхности?

**4.37.** Малое тело скользит без начальной скорости из точки  $C$  по гладкому желобу в виде мертвой петли с разрывом (рис. 60). При

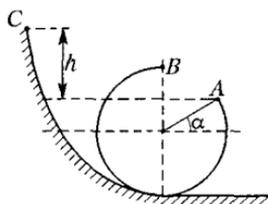


Рис. 60

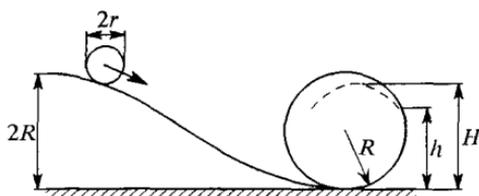


Рис. 61

каких начальных высотах (относительно точки  $A$ ) тело, достигнув этой точки, пролетит после свободного полета ниже верхней точки  $B$  петли, т.е. сможет попасть обратно в желоб?

**4.38.** Небольшой шарик движется вверх по гладкой поверхности неподвижного шара радиуса  $R$ . В начале подъема скорость шарика  $v_0$  направлена под углом  $\varphi_0$  к горизонтальной поверхности. На какой высоте шарик оторвется от поверхности? Считать, что  $v_0^2 > Rg$ .

**4.39.** С высоты  $2R$  по желобу катится без проскальзывания маленький шарик (рис. 61). Желоб образует петлю радиуса  $R$ . На какой высоте  $h$  шарик, радиус которого  $r \ll R$ , оторвется от желоба? На какую высоту  $H$  он еще поднимется после отрыва?

**4.40.** На проволочное кольцо радиуса  $R$  надето маленькое колечко. Коэффициент трения колечка о проволочку  $k = 1/(4\pi)$ . В момент времени  $t = 0$  колечку сообщили скорость  $v_0 = 10$  м/с относительно проволочки. Считая проволочку неподвижной, определить, какую скорость будет иметь колечко, совершив два полных оборота по кольцу. Силу тяжести не учитывать.

**4.41.** На горизонтальной поверхности лежит полусфера массы  $M = 200$  г. С ее верхней точки в противоположных направлениях без трения с начальными нулевыми скоростями скользят два тела массы  $m_1 = 20$  г и  $m_2 = 15$  г. Из-за трения между полусферой и поверхностью движение полусферы начинается только при  $\alpha = 10^\circ$  (рис. 62). Найти коэффициент трения.

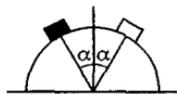


Рис. 62

**4.42.** Оцените, каков был бы рекордный прыжок в высоту в спортивном зале на Луне, если на Земле для закрытых помещений он равен 2 м 30 см. Считать, что радиус Луны  $R_{\text{Л}} \approx 0,275R_3$ , а плотность  $\rho_{\text{Л}} \approx 0,6\rho_3$ . Центр тяжести прыгуна находится примерно на высоте 0,8 м. Сопротивлением атмосфер Земли и Луны пренебречь. Считать, что при прыжке сила тяжести мало влияет на скорость, полученную при прыжке.

**4.43.** Человек, стоящий на Земле, сгибая колени, опускает центр тяжести на 50 см и резко прыгает, поднимая центр тяжести

на 60 см выше нормального положения. Как высоко человек подпрыгнет в аналогичном прыжке на Луне? Радиус Луны равен  $0,275R_3$ ; плотность Луны  $0,6\rho_3$ . При резком прыжке сила тяжести мало влияет на скорость, полученную при прыжке. Сопротивлением атмосфер Земли и Луны пренебречь.

**4.44.** Футболист забивает гол с одиннадцатиметрового штрафного удара точно под перекладину. Какую минимальную энергию необходимо было для этого сообщить мячу? Под каким углом в этом случае должен вылететь мяч? Считать, что высота ворот  $h = 2,5$  м, масса мяча 0,5 кг.

**4.45.** Однородная доска длины  $L$  горизонтально лежит на двух одинаковых цилиндрических опорах, вращающихся в противоположных направлениях (рис. 63). Направления вращений таковы, что верхние точки цилиндров движутся в противоположные стороны от центра системы, а оси цилиндров неподвижны. В силу различных случайных толчков доска выходит из положения равновесия. Каков будет характер ее дальнейшего движения? Найти скорость  $v$ , которую приобретет доска в момент времени, когда один из ее концов соскользнет с опоры, если  $L = 2l = 4$  м. Коэффициент трения между доской и опорами  $k = 0,5$ .

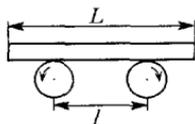


Рис. 63

**4.46.** Тело массы  $M$  через невесомый блок соединено нерастяжимой невесомой нитью с однородной доской массы  $m$  и длины  $L$ , лежащей на горизонтальной поверхности (рис. 64). В начальный момент доска лежит на гладкой части поверхности (коэффициент трения  $k = 0$ ) так, что с началом движения она попадает на шероховатую поверхность (коэффициент трения  $k = k_0$ ). Определить скорость доски к тому моменту, когда она целиком окажется на шероховатой поверхности.

**4.47.** Брусок 1 лежит на таком же бруске 2 (рис. 65). Оба они как целое скользят по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$  и сталкиваются с аналогичным покоящимся бруском 3. Удар бруска 2 о брусок 3 абсолютно неупругий (бруски

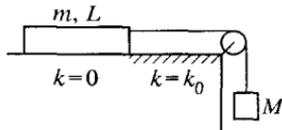


Рис. 64

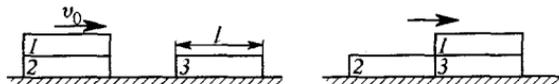


Рис. 65

2 и 3 слипаются, рис. 65). Чему равна длина брусков  $l$ , если известно, что брусок 1 прекратил свое движение относительно брусков 2 и 3 из-за трения после того, как он полностью переместился с 2 на 3? Коэффициент трения между брусками 1 и 3 равен  $k$ . Трением о поверхность, а также между брусками 1 и 2 пренебречь.

**4.48.** Куб с массой  $M$  и длиной ребра  $4L$  лежит горизонтально на двух опорах 1 и 2 таким образом, что его центр  $O$  расположен посередине между опорами, расстояние между которыми равно  $2L$ . Воздействуя на куб горизонтально направленной силой, приложенной в точке  $A$  (рис. 66) его передвигают с постоянной скоростью до тех пор, пока правый конец куба не окажется на опоре 2. Коэффициенты трения на опорах различны и равны  $k_1$  и  $k_2 = 3k_1$ . Найти совершенную при этом работу.

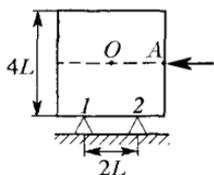


Рис. 66

**4.49.** Склон горки, плавно переходящей в горизонтальную поверхность, представляет собой (в сечении) двенадцатую часть окружности радиуса  $R$  (рис. 67). Какую минимальную работу надо затратить, чтобы втащить на горку санки с грузом общей массы  $m$ ? Первоначально санки находятся у подножия горки, их тянут за веревку, составляющую постоянный угол  $\alpha$  с направлением скорости. Коэффициент трения скольжения между санками и горкой  $k$ .

Указание. За переменную интегрирования взять угол  $\varphi$ .

**4.50.** Тяжелый шар радиуса  $R$  лежит на горизонтальной плоскости, а в верхней точке шара покоится малое тело. По шару наносят удар, и он начинает двигаться со скоростью  $v$ . На какую высоту подпрыгнет тело после упругого отскока от нижней плоскости? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

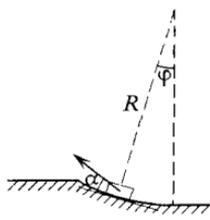


Рис. 67

**4.51.** Для натягивания тетивы на лук лучнику необходимо приложить усилие  $F_1 = 800$  Н. Перед выстрелом лучник удерживает стрелу с силой  $F_2 = 200$  Н. Определить максимальную дальность поражения цели на высоте, равной росту лучника. Масса стрелы  $m = 50$  г. Тетива представляет собой легкую нерастяжимую нить длины  $l_0 = 1,5$  м. Изменением деформации лука в процессе выстрела пренебречь.

**4.52.** Мальчик стреляет из рогатки. Он растягивает резину вдвое, доведя усилие до  $F_0 = 10$  Н. Определить скорость камешка массой  $m = 10$  г, если длина резинки  $2l = 20$  см, а ее масса  $M = 30$  г.

**4.53.** На снежном склоне, составляющем с горизонтом угол  $\alpha$ , стоят санки, и на них сидит мальчик ( $\operatorname{tg} \alpha = k$ , где  $k$  — коэффициент трения санок о снег). Мальчик стреляет из игрушечного ружья в направлении, нормальном к склону. Пулька привязана на невесомой, абсолютно упругой короткой нити. После того, как ниточка натянулась и пулька повернула назад, мальчик ловит пульку. Определить скорость санок после этого. Масса пульки  $m$ , мальчика и санок —  $M$ , скорость пульки относительно ружья  $v$ .

**4.54.** Цепочка массы  $m = 0,5$  кг и длины  $l = 65$  см висит на нити, касаясь своим нижним концом поверхности стола. После

пережигания нити цепочка падает на стол и передает ему свой импульс. Найти полный импульс цепочки, переданный столу.

**4.55.** Кусок однородного каната висит вертикально, причем нижний конец каната доходит до горизонтального стола. Показать, что если верхний конец каната освободить, то в любой момент падения каната сила его давления на стол будет в три раза больше веса части каната, уже лежащей на столе.

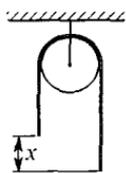


Рис. 68

**4.56.** Тяжелая однородная веревка длины  $l$  перекинута через невесомый блок (рис. 68). Определите скорость веревки в зависимости от расстояния  $x$  между ее концами, если в начальный момент оно равно  $\Delta l$  (при этом веревка неподвижна).

**4.57я.** На клин, составляющий угол  $45^\circ$  с горизонтом, вертикально падает шарик. Какова будет траектория шарика после удара о клин? Поверхность клина гладкая, удар вполне упругий.

**4.58.** На наклонной плоскости стоит ящик с песком; коэффициент трения  $k$  ящика о плоскость равен тангенсу угла  $\alpha$  наклона плоскости. В ящик вертикально падает некоторое тело и остается в нем. Будет ли двигаться ящик после падения в него тела?

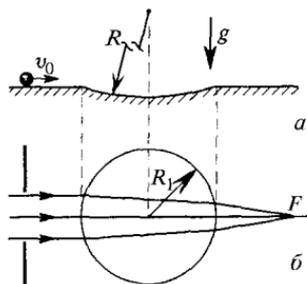


Рис. 69

**4.59.** По наклонной плоскости под углом  $\alpha$  к горизонту движется брусок. В тот момент, когда его скорость равна  $V$ , на брусок вертикально падает со скоростью  $v$  пластилиновый шарик такой же массы, как и брусок, и прилипает к нему. Определить время  $\tau$ , через которое брусок с шариком остановятся. Коэффициент трения равен  $k$ . При каком значении  $k$  это возможно?

**4.60.** Если на сферическую лунку (рис. 69) направить поток маленьких шариков, движущихся с некоторой скоростью  $v_0$  без трения, то такая система при определенных условиях обладает фокусирующим действием. Считая поток шариков сильно задиафрагмированным (ширина потока много меньше  $R_1$ ), определить положение фокуса  $F$  такой системы. Принять, что радиус лунки в плане (б)  $R_1 = 5$  см много меньше радиуса сферы  $R = 150$  см, а  $v_0 = 30$  см/с.

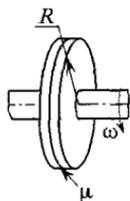


Рис. 70

**4.61.** Ведущий диск фрикционного сцепления вращается с угловой скоростью  $\omega$  и прижимается к ведомому диску с силой  $F$  (рис. 70). Какую максимальную мощность  $N_{\max}$  можно передать с помощью такого сцепления, если радиус дисков равен  $R$  и коэффициент трения  $\mu$ ?

**4.62.** Диск радиуса  $R$  и толщины  $\delta$  насажен на вал радиуса  $r$  таким образом, что оказывает на единицу поверхности соприкосновения

давление  $P$  (рис. 71). Коэффициент трения соприкасающихся поверхностей  $\mu$ . Какую силу надо приложить к диску, чтобы снять его, двигая со скоростью  $v$ , с вала, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ ?

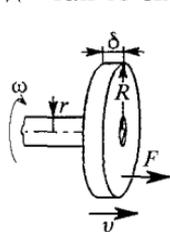


Рис. 71

Во сколько раз она отличается от силы, с которой придется снимать диск с неподвижного вала? (Вал прокручивается относительно диска, диск движется поступательно.)

**4.63.** Какой максимальной кинетической энергией  $K$  может обладать маховик, объем которого  $V = 1 \text{ м}^3$ , если прочность материала на разрыв  $T = 10^{10} \text{ дин/см}^2$ ? Всю массу маховика считать заключенной в его обод (тонком по сравнению с его радиусом). Показать, что при неизменной прочности

материала маховика максимальная кинетическая энергия зависит только от объема, но не от массы маховика.

**4.64.** Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической  $\bar{K}$  и потенциальной  $\bar{U}$  энергии.

**4.65.** Ядерные силы определяются взаимодействием между нуклонами (протонами и нейтронами). Потенциальная энергия взаимодействия двух нуклонов на расстоянии  $r$  с хорошей точностью может быть представлена формулой, предложенной японским физиком Юкава:  $U(r) = -(r_0/r)U_0 \exp(-r/r_0)$ , где  $U_0 \approx 50 \text{ МэВ}$ , а  $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ . Найти выражение для соответствующей силы  $F(r)$ . На каком расстоянии  $r_1$  сила уменьшится до 1% от величины, которую она имеет при  $r = r_0$ ?

**4.66.** Баллистический маятник — это маятник, используемый для определения скорости снаряда. Принцип его действия заключается в том, что снаряд, скорость которого следует измерить, ударяется в тело маятника (рис. 72). Если известны условия удара и массы снаряда и маятника, то по углу отклонения маятника  $\alpha$  можно вычислить скорость  $v$  снаряда до удара. Показать, как это сделать для следующих различных случаев: 1) снаряд после удара застревает в маятнике; 2) снаряд отскакивает после удара со скоростью  $v'$  назад; 3) снаряд падает вниз, потеряв свою скорость. Масса маятника

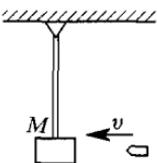


Рис. 72

$M$  и масса снаряда  $m$  известны; маятник можно рассматривать как математический длины  $l$ .

**4.67.** Два маятника в виде шариков разных масс  $m_1$  и  $m_2$  свободно подвешены на нитях разной длины  $l_1$  и  $l_2$  так, что шарики соприкасаются. Первый маятник отводят в плоскости нитей на угол  $\alpha$  от первоначального положения и отпускают. Происходит центральный удар шариков. На какие углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  относительно отвесной линии отклонятся маятники после удара (углы считать малыми, удар — упругим)?

**4.68.** На пружине жесткости  $k$  висит чашка веса  $P_1$  с гирей веса  $P_2$ . Снизу в дно чашки неупруго ударяется (но не прилипает) шарик из пластилина массы  $m$ . Найти скорость  $v_0$  шарика перед соударением, если известно, что после соударения при движении чашки наименьшая сила давления гири на чашку равна  $P_2/2$ .

**4.69я.** На стенку налетает тело массы  $m$ , скорость  $v$  которого составляет угол  $\alpha$  с нормалью к стенке. Найти импульс  $p$ , получаемый стенкой. Удар упругий.

**4.70я.** Найти изменение кинетической энергии  $\Delta K$  и импульса  $\Delta p$  тела, движущегося со скоростью  $v$ , при упругом ударе его о стенку, движущуюся в том же направлении равномерно со скоростью  $u < v$ . При каком соотношении между скоростью тела  $v$  и скоростью стенки  $u$  тело остановится?

**4.71.** Пучок атомов гелия (плотность в пучке  $n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , энергия  $E = 1 \text{ кэВ}$ , сечение пучка  $S = 0,1 \text{ см}^2$ ) падает нормально на «зеркальную» стенку массой  $M = 1 \text{ г}$ , движущуюся навстречу с начальной скоростью  $u_0 = 10 \text{ см/с}$ . Через какое время  $t$  стенка остановится?

**4.72.** Маленький шарик движется со скоростью  $v$  в пространстве между неподвижной стенкой и массивным поршнем, находящимися на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 73). Соударения шарика с поршнем и стенкой происходят упруго. Найти адиабатический инвариант движения, т.е. вид функции  $f(v, L)$ , сохраняющейся постоянной при медленном движении поршня.

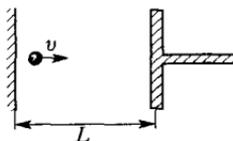


Рис. 73

**4.73.** Два идеально упругих шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Во время столкновения шарики начинают деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации  $\Pi$  в момент, когда она максимальна.

**4.74.** Навстречу друг другу летят два шара с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Между шарами происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия одного шара в 20 раз больше кинетической энергии другого. При каких условиях шары после удара будут двигаться в сторону движения шара, обладавшего меньшей энергией?

**4.75.** Шайба массы  $m$ , скользя по льду, сталкивается с неподвижной шайбой массы  $3m$ . Считая удар упругим и центральным, определить, на какое расстояние  $S$  разлетятся шайбы, если скорость первой шайбы перед ударом была  $v$ , а коэффициент трения между шайбами и льдом равен  $k$ .

**4.76.** Пуля массы  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $v$ , пробивает насквозь лежащий на воде деревянный шар и продолжает лететь в том же направлении со скоростью  $v/2$ . Определить, на какое расстояние в результате переместится шар, если известно, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости шара  $F = \alpha v_{ш}$ .

**4.77.** Сталкиваются два тела одинаковой массы, одно из которых неподвижно. При ударе часть движущегося тела прилипает к неподвижному, а оставшая часть отскакивает назад со скоростью, по величине равной скорости тела до столкновения. При каких отношениях массы прилипшей части тела к его полной массе это возможно? Известно, что при ударе внутренняя энергия тел не уменьшается.

**4.78.** Сталкиваются два тела одинаковой массы, одно из которых было неподвижно. При ударе часть движущегося тела прилипает к неподвижному, а оставшая часть после удара останавливается. При каком отношении массы прилипшей части тела к его полной массе 25% энергии переходит в тепло?

**4.79.** При движении в очень разреженных слоях атмосферы метеорит испаряется за счет столкновений с молекулами воздуха, которые передают веществу метеорита всю свою кинетическую энергию, но к поверхности не прилипают. Определить изменение скорости метеорита  $v$  при уменьшении его массы в 10 раз. Начальная скорость  $v_0 = 40$  км/с, энергия для нагрева и испарения вещества метеорита  $Q = 8 \cdot 10^6$  Дж/кг.

**4.80.** По теории, разработанной Г. Герцем (1882 г.), при столкновении упругих шаров сила взаимодействия пропорциональна деформации в степени  $3/2$ , т.е.  $F = kx^{3/2}$ . Рассмотреть лобовое столкновение шаров одинакового радиуса с одинаковой упругой константой  $k$  но разными массами  $m$  и  $m/3$ . Начальные скорости  $v_0$  и  $-v_0$ . Определить величину максимальной деформации шаров  $x_{\max}$ .

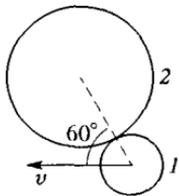


Рис. 74

**4.81.** Шар 1, летящий со скоростью  $v$ , ударяется в покоящийся шар 2, масса которого в 3 раза больше массы налетающего (рис. 74). Найти скорости шаров после удара, если в момент столкновения угол между линией, соединяющей центры шаров, и скоростью налетающего шара до удара равен  $60^\circ$ . Удар абсолютно упругий. Трения нет.

Удар абсолютно упругий. Трения нет.

**4.82:** Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться частицы после лобового столкновения?

**4.83.** Два протона с энергией  $E = 0,5$  МэВ каждый летят навстречу друг другу и испытывают лобовое столкновение. Как близко они могут сойтись, если учитывать только электростатическое взаимодействие между ними?

**4.84.** Альфа-частица с кинетической энергией  $E_0 = 4$  МэВ упруго рассеивается на первоначально покоящемся протоне. Определить расстояние  $r_{\min}$  между этими частицами в момент максимального сближения, а также максимальные ускорения частиц  $a_p$  и  $a_\alpha$  во время столкновения. Столкновение считать центральным.

**4.85.** При бомбардировке гелия  $\alpha$ -частицами с энергией 1 МэВ найдено, что налетающая частица отклонилась на  $60^\circ$  по отношению

к первоначальному направлению полета. Считая удар упругим, определить энергию частицы и энергию ядра отдачи.

**4.86.** Определить долю энергии, теряемую частицей массы  $m_1$  при упругом столкновении ее с неподвижной частицей массы  $m_2$ , если после столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда  $m_1 > m_2$ ) или прямо противоположном (когда  $m_1 < m_2$ ) направлениях. Показать, что доля теряемой энергии не зависит от того, какая частица движется, а какая покоится. При каком соотношении масс  $m_1/m_2$  потеря энергии максимальна? Используя полученные результаты, объяснить, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких (дейтерий, углерод), а не тяжелых атомов.

**4.87.** Альфа-частица, летящая со скоростью  $v_0$ , испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом  $90^\circ$  к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс  $\alpha$ -частицы  $m$  и ядра  $M$  это возможно? Определить скорости  $\alpha$ -частицы  $v$  и ядра  $V$  после столкновения. Определить угол  $\theta$  между направлением скорости вылетающего ядра и первоначальным направлением движения  $\alpha$ -частицы.

**4.88.** Лазер излучает направленный поток света в виде короткого импульса. Какова скорость отдачи кристалла лазера, если его масса равна 100 г, а излученная энергия равна  $10^3$  Дж?

**4.89.** Определить импульс отдачи ядра  $^{57}\text{Fe}$  при излучении  $\gamma$ -кванта с энергией 14,4 кэВ.

**4.90.** Две частицы, массы которых равны  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями. После упругого столкновения тяжелая частица отклоняется от направления своего первоначального движения на угол  $\alpha = 30^\circ$  в лабораторной системе отсчета или на угол  $\beta = 60^\circ$  в системе центра масс. Определить отношение  $m_1/m_2$ .

**4.91.** Две одинаковые частицы, одна из которых неподвижна, испытывают упругое столкновение. Налетающая частица рассеивается на угол  $\theta$  к направлению своего первоначального движения. Найти угол рассеяния  $\gamma$  этой частицы в системе центра масс.

**4.92.** Определить долю энергии  $\alpha$ , теряемую протоном при упругом рассеянии под углом  $180^\circ$  на протоне, дейтроне, ядре гелия и ядре углерода.

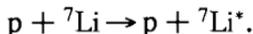
**4.93.** Каков максимальный угол  $\theta$  рассеяния  $\alpha$ -частицы и дейтрона при упругом рассеянии на водороде?

**4.94.** Протон, летящий горизонтально со скоростью  $V$ , сталкивается с невозбужденным неподвижным атомом массы  $M$ , после чего отскакивает и летит в прямо противоположном направлении с половиной скоростью  $V/2$ , а атом переходит в возбужденное состояние, т.е. в состояние с более высокой внутренней энергией. Определить скорость атома  $v$  после столкновения и энергию  $E$ , которая пошла на возбуждение атома. Для каких невозбужденных атомов описанный процесс невозможен?

**4.95.** Атомное ядро с массой  $m$  и кинетической энергией  $E$  сталкивается с другим ядром, которое до столкновения покоилось. Происходит ядерная реакция, в результате которой образуются две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , причем на реакцию затрачивается энергия  $Q$ . При каких условиях скорости образовавшихся частиц будут направлены вдоль или против скорости падающей частицы?

**4.96.** Может ли произойти ионизация атома  $^{133}\text{Cs}$  ударом атома  $^{16}\text{O}$  с энергией  $E_0 = 4$  эВ? Энергия ионизации  $E_1 = 3,9$  эВ.

**4.97.** Ядра лития возбуждаются потоком протонов, падающим на неподвижную литиевую мишень. При этом происходит реакция

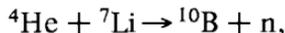


При каких отношениях энергии налетающего протона к энергии возбуждения лития возможно возникновение протонов, движущихся в обратном к потоку направлении?

**4.98.** Ядерная реакция  ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n$  (литий неподвижен) имеет порог  $E_{\text{пор}} = 1,88$  МэВ, т.е. может идти только тогда, когда энергия протона равна или превосходит величину  $E_{\text{пор}}$ . При каких энергиях бомбардирующих протонов  $E_p$  нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

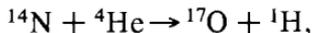
**4.99.** При каких энергиях  $\alpha$ -частиц  $E$  возможно их неупругое рассеяние на ядрах  $^{14}\text{N}$ , если энергия первого возбужденного состояния этого ядра  $E_0 = 2,31$  МэВ? Какова энергия  $\alpha$ -частицы  $E_1$ , если ядро  $^{14}\text{N}$  переходит в это возбужденное состояние, а сама  $\alpha$ -частица останавливается?

**4.100.** Вычислить минимальное значение  $K_\alpha$  кинетической энергии  $\alpha$ -частиц, необходимой для осуществления реакции



если реакция идет с поглощением энергии  $Q = 2,85$  МэВ (литий неподвижен).

**4.101.** Какова энергия  $\alpha$ -частицы, если при попадании в ядро азота  $^{14}\text{N}$  происходит реакция

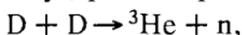


сопровождающаяся поглощением энергии  $Q = 1$  МэВ, а образовавшийся протон покоится в лабораторной системе координат?

**4.102.** Ядра дейтерия и трития летят навстречу друг другу таким образом, что центр масс этих частиц остается неподвижным. Суммарная кинетическая энергия обеих частиц равна  $K = 150$  кэВ. До какой энергии надо ускорять ядро дейтерия, оставляя тритий неподвижным, чтобы получить тот же самый выход реакции?

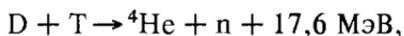
**4.103.** Ядро дейтерия сталкивается и вступает в реакцию с ядром трития. Предполагается осуществить этот процесс, ускорив перед столкновением лишь одну частицу до энергии  $K = 100$  кэВ, оставляя вторую неподвижной. Что выгоднее для осуществления реакции: ускорить легкую или тяжелую частицу? Предполагается, что удар между частицами центральный. Определить выигрыш в энергии.

**4.104.** Ядра дейтерия с энергией  $E_D = 0,17$  МэВ движутся навстречу друг другу. При соударении происходит реакция



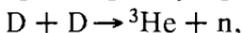
при которой выделяется дополнительная энергия  $E$ . Определить  $E$ , если нейтрон уносит кинетическую энергию  $E_n = 2,7$  МэВ.

**4.105.** Ядра дейтерия  $D$  и трития  $T$  могут вступать в реакцию



в результате которой образуются нейтроны и  $\alpha$ -частицы. В каждой реакции выделяется энергия 17,6 МэВ. Определить, какую энергию уносит нейтрон и какую  $\alpha$ -частица. Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

**4.106.** Ядро дейтерия с энергией  $E_D = 3,25$  МэВ сталкивается с таким же неподвижным ядром. При соударении происходит реакция



в которой выделяется дополнительная энергия  $E$ . Определить  $E$ , если в лабораторной системе отсчета  ${}^3\text{He}$  покоится.

**4.107.** При реакции соударения протона с неподвижным ядром  ${}^7\text{Li}$  образуются две  $\alpha$ -частицы и выделяется энергия за счет небольшого изменения массы частиц в результате реакции. Известна кинетическая энергия протона  $K_p = 2$  МэВ, кинетическая энергия одной из  $\alpha$ -частиц  $K_{1\alpha} = 10,5$  МэВ и угол вылета этой  $\alpha$ -частицы  $\theta_1 = 60^\circ$ . Определить количество энергии  $E$ , выделившееся при реакции.

**4.108.** Ядро с массовым числом  $A$  и кинетической энергией  $K_0 = 7$  МэВ налетает на неподвижное ядро с массовым числом  $A/6$ . В результате неупругого рассеяния налетающее ядро остается неизменным, а ядро мишени оказывается возбужденным с энергией возбуждения  $E^* = 0,75$  МэВ. Определить максимальный угол рассеяния  $\theta_{\max}$  падающего ядра в лабораторной системе отсчета.

## § 5. Гармонические колебания материальной точки

**5.1.** Под действием веса прыгуна упругая доска статически прогибается на  $h = 0,5$  м. Пренебрегая массой доски, найти период малых колебаний рассматриваемой системы около положения равновесия (рис. 75).

**5.2.** Период малых колебаний шарика, подвешенного на спиральной пружине, равен  $T = 0,5$  с. Пренебрегая массой пружины, найти статическое удлинение пружины  $x$  под действием веса того же шарика.

**5.3.** Небольшой шарик массы  $m$ , летящий горизонтально со скоростью  $v$ , ударяется в вертикально расположенную упругую сетку. Считая, что деформация сетки пропорциональна приложенной силе с коэффициентом пропорциональности  $k$ , найти время  $t$ , за которое сетка получит максимальную деформацию.



Рис. 75

**5.4.** Материальная точка совершает одномерные колебания в треугольной потенциальной яме  $U(x) \propto |x|$  (рис. 76) с периодом  $T_0$ . Найти период гармонических колебаний  $T$  этой точки в параболической потенциальной яме  $U(x) \propto x^2$ , если максимальная потенциальная энергия точки и амплитуда колебаний в обоих случаях одинаковы.

**5.5.** Шарик массы  $m$  подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с коэффициентами упругости  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 77). Определить период его вертикальных колебаний.

**5.6\*** На доске лежит груз массы 1 кг. Доска совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом  $T = 1/2$  с и амплитудой  $A = 2$  см. Определить величину силы давления  $F$  груза на доску.

**5.7.** С какой амплитудой  $A$  должна колебаться доска с грузом в предыдущей задаче, чтобы груз начал отскакивать от доски?

**5.8я.** Горизонтальная мембрана совершает синусоидальные колебания с круговой частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ . На мембране лежит маленький грузик. При каком условии грузик будет колебаться вместе с мембраной и при каком начнет подскакивать?

**5.9я.** Доска совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с периодом  $T = 5$  с. Лежащее на ней тело начинает скользить, когда амплитуда колебаний достигает  $A = 0,6$  м. Каков коэффициент трения покоя  $k$  между грузом и доской?

**5.10.** На чашку весов, подвешенную на пружине, падает с высоты  $h$  груз массы  $m$  и остается на чашке (рис. 78), не подпрыгивая

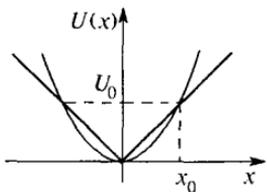


Рис. 76

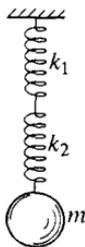


Рис. 77

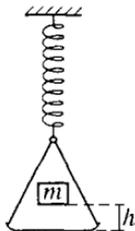


Рис. 78



Рис. 79



Рис. 80

относительно нес. Чашка начинает колебаться. Коэффициент упругости пружины  $k$ . Определить амплитуду  $A$  колебаний (массой чашки и пружины по сравнению с массой груза пренебречь).

**5.11\*** На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик (рис. 79). Масса чашки равна  $m$ , масса грузика пренебрежимо мала. Ко дну чашки подвешен груз массы  $M$ . Вся система находится в равновесии. При каком соотношении между массами  $M$  и  $m$  грузик на чашке начнет подскакивать, если быстро снять груз  $M$ ?

**5.12.** К пружине прикреплена нить, на которой висит груз массы  $m = 1$  кг (рис. 80). Оттягивая груз вниз и отпуская, приводят его в

колебания. На какое расстояние  $x$  можно оттянуть вниз груз, чтобы при колебаниях нить все время была натянута? Коэффициент жесткости пружины  $k = 0,5 \text{ Н/см}$ .

**5.13.** Тело массы  $m$  колеблется без трения внутри коробки массы  $M$ , лежащей на горизонтальной поверхности стола. К телу прикреплены пружины с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ , концы которых закреплены на

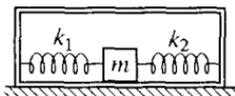


Рис. 81

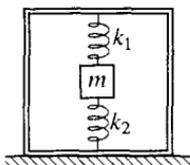


Рис. 82

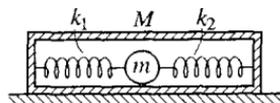


Рис. 83

боковых стенках коробки (рис. 81). Определить, при какой амплитуде колебаний коробка начнет двигаться по поверхности стола, если коэффициент трения между коробкой и столом равен  $\mu$ .

**5.14.** Тело массы  $m$  колеблется в вертикальном направлении внутри коробки массы  $M$ , лежащей на горизонтальной поверхности стола. К телу прикреплены пружины с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 82), концы которых закреплены на верхней и нижней стенках коробки. Определить, при какой амплитуде колебаний коробка начнет подпрыгивать, отрываясь от поверхности стола, на котором лежит.

**5.15.** Тело массы  $m$  соединено пружинами (с жесткостью  $k_1$  и  $k_2$ ) со стенками ящика массы  $M$  и может совершать малые колебания, скользя без трения по дну ящика (рис. 83). Определить период малых колебаний, если трением дна ящика о поверхность стола можно пренебречь. В равновесии пружины не растянуты.

**5.16.** Брусочек массы  $M$  лежит на идеально гладком столе и соединен двумя пружинами различной жесткости с опорами. Брусочек колеблется около своего положения равновесия (рис. 84). В момент, когда брусочек проходит положение равновесия, на него сверху падает кусок пластилина массы  $m$  и прилипает. Вычислить, во сколько раз изменится период и амплитуда колебаний.

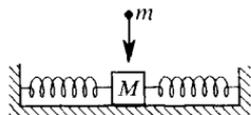


Рис. 84

**5.17.** Тело массы  $m$  колеблется без трения внутри коробки массы  $M$ , лежащей на гладком столе. К телу прикреплены пружины одинаковой жесткости, концы которых закреплены на боковых стенках коробки (рис. 85). Вначале коробка закреплена, а затем ее отпустили и она может свободно перемещаться по столу. Определить отношение частот колебаний в этих случаях.

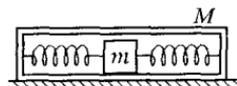


Рис. 85

**5.18.** На гладком столе находится брусочек массы  $M$ , с которым соединен математический маятник, состоящий из невесомого

стержня и точечной массы  $m$  на его конце (рис. 86). Ось вращения маятника проходит через центр бруска. В первом случае брусок закреплен на столе, во втором его отпустили, и он может свободно перемещаться по столу. Определить отношение частот малых колебаний в этих двух случаях.

**5.19.** Шарик массы  $m$  с зарядом  $Q$  висит на легкой нити длины  $L$ . На одном уровне с ним на расстоянии  $l_0$  помещен другой неподвижный шарик с таким же зарядом. Определить угол отклонения

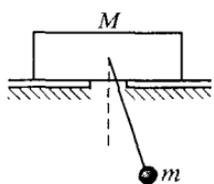


Рис. 86

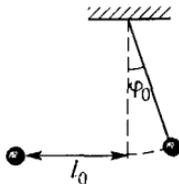


Рис. 87

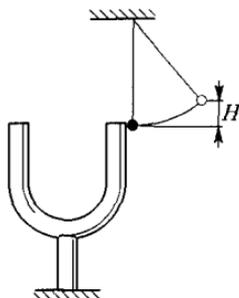


Рис. 88

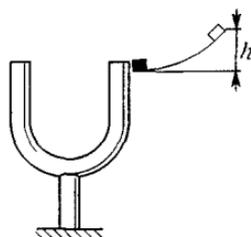


Рис. 89

первого шарика от вертикали  $\varphi_0$  (рис. 87). Найти также период его малых колебаний. Считать, что электрические силы невелики по сравнению с силой тяжести.

**5.20.** Академик А. Ф. Иоффе для определения амплитуды колебания ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис. 88). Какова амплитуда колебания  $A$  ножки камертона, если максимальный подъем шарика при многочисленных опытах после одного отскока оказался равным  $H$ ? Частота колебаний ножки камертона  $\nu$ . Масса шарика много меньше массы камертона.

**5.21.** Под горку с высоты  $h$  соскальзывает стальная шайба и упруго ударяется в ножку камертона (рис. 89). На какую максимальную высоту  $H$  может подняться шайба после одного отскока, если амплитуда колебаний ножки камертона  $A$ , а частота колебаний камертона  $\nu$ ? Считать, что масса ножки камертона много больше массы шайбы. Трением пренебречь.

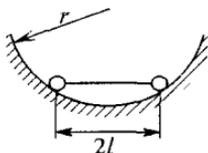


Рис. 90

**5.22.** Гантель длины  $2l$  скользит без трения по сферической поверхности радиуса  $r$  (рис. 90). Гантель представляет собой две точечные массы, соединенные невесомым стержнем. Вычислить период малых колебаний при движении: а) в перпендикулярном плоскости рисунка направлении; б) в плоскости рисунка.

**5.23.** На гладкой горизонтальной плоскости лежит прямоугольный клин с углом при вершине  $\alpha = 30^\circ$ . На наклонной плоскости клина (также гладкой) лежит кубик, связанный с вершиной пружиной,

ось которой параллельна наклонной плоскости (рис. 91). Масса клина  $M$ , кубика  $m$ , жесткость пружины  $k$ . Найти период малых колебаний системы, считая  $M = 3m$ .

5.24. Маятник представляет собой два небольших шара, соединенных стержнем длины  $l$ . Массы шаров равны  $m$  и  $m/2$ , ось

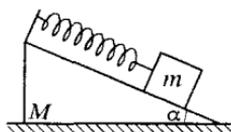


Рис. 91

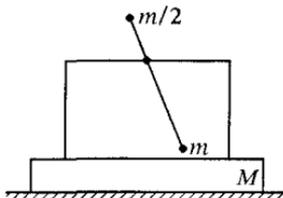


Рис. 92

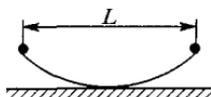


Рис. 93

расположена на расстоянии  $l/3$  от легкого шара (рис. 92). Маятник укреплен на платформе массы  $M = 3m$ , которая может скользить без трения по горизонтальной поверхности. Определить период малых колебаний маятника.

5.25. Две равные точечные массы укреплены симметрично на куске невесомой цилиндрической поверхности (рис. 93). Найти частоту малых колебаний системы. Радиус поверхности  $R$ , расстояние между массами  $L$ . Проскальзывания нет.

5.26. На двух горизонтальных параллельных круговых цилиндрах, вращающихся с одинаковой угловой скоростью в разные стороны, лежит горизонтально перпендикулярно к осям цилиндров доска

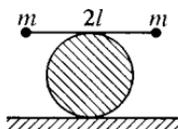


Рис. 94

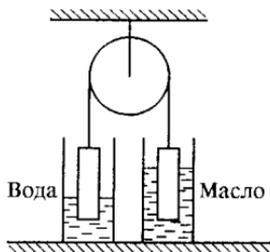


Рис. 95

массы  $M$ . Определить период гармонических колебаний доски, если расстояние между осями цилиндров равно  $2L$ , а коэффициент трения между доской и цилиндрами равен  $k$ .

5.27. На шероховатом неподвижном цилиндре радиуса  $R$  (рис. 94) лежит (перпендикулярно его образующей) невесомая спица длины  $2l$  с двумя шариками массы  $m$  на концах. Найти период малых колебаний спицы.

5.28. Через неподвижный блок перекинута легкая нерастяжимая нить, на которой висят две одинаковых железных цилиндрических гири высоты  $h$ . Гири частично погружены, соответственно, в воду и масло, которые налиты в широкие стаканы, стоящие на столе (рис. 95). В начальный момент система пребывает в равновесии.

Найти период малых колебаний. Плотности масла  $\rho_m$ , железа  $\rho_{ж}$  и воды  $\rho_v$  известны.

**5.29.** Железный шарик радиуса  $R$  (рис. 96), подвешенный на пружине жесткости  $k$ , частично погружен в широкую чашку со ртутью, стоящую на столе, так, что в положении равновесия центр шарика находится над поверхностью жидкости на высоте  $0,6R$ . Найти период малых колебаний шарика по вертикали. Плотности ртути  $\rho_{рт}$  и железа  $\rho_{ж}$  известны.

**5.30.** Найти период колебаний груза, подвешенного с помощью невесомого блока и двух пружин с коэффициентами упругости  $k_1$  и

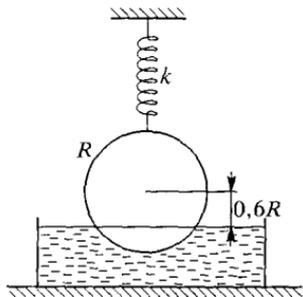


Рис. 96

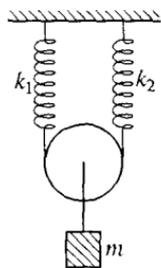


Рис. 97

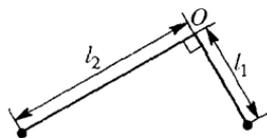


Рис. 98

$k_2$  (рис. 97). Найти также максимальную амплитуду  $A$  колебаний груза, при которой они происходят еще по гармоническому закону.

**5.31.** Мальчик, стоя на пружинных весах, подбрасывает мяч массы  $m$  вертикально вверх и затем ловит его. Известно, что за время полета мяча весы совершили  $n$  целых колебаний. Определить амплитуду колебаний весов после того, как мальчик поймал мяч. Жесткость пружины весов равна  $k$ , масса чаши весов вместе с мальчиком равна  $M$ .

**5.32.** Мальчик стоит на качелях и кидает мяч массы  $m$  в стену дома, отстоящего от качелей на расстояние  $L$ . Мяч попадает в стену, двигаясь горизонтально, и упруго от нее отражается, а затем снова попадает в руки мальчика. За время полета мяча качели совершили  $n$  целых колебаний. Определить амплитуду  $\varphi_0$  угловых колебаний качелей после того, как мальчик поймал мяч. Длина качелей  $l$ , масса мальчика вместе с перекладиной качелей  $M$ . Качели рассматривать как математический маятник.

**5.33.** Два одинаковых тяжелых шарика подвешены на горизонтальной оси с помощью невесомой жесткой штанги, согнутой под углом  $90^\circ$ , с длинами плеч  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 98). Определить частоту малых колебаний системы в плоскости, перпендикулярной оси.

**5.34.** Велосипедное колесо радиуса  $R$ , у которого удален сектор с углом  $\alpha$ , подвешено на горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. Определить частоту малых колебаний колеса в плоскости, перпендикулярной оси. Считать, что вся масса колеса сосредоточена в ободе.

**5.35.** Механизм состоит из нерастяжимой веревки, двух блоков, двух грузов и пружины с жесткостью  $k$  (рис. 99). Найти период малых колебаний системы. При какой амплитуде колебаний груза  $m_1$  веревка будет время от времени терять натяжение? Массой веревки и блоков пренебречь.

**5.36я.** Найти частоту малых собственных колебаний около положения устойчивого равновесия системы (рис. 100). Нить невесома и нерастяжима, блоки невесома и не имеют трения в осях.

**5.37я.** Найти период свободных малых колебаний грузика массы  $m$ , укрепленного на середине тонкой струны длины  $L$  (рис. 101). Массой струны пренебречь; натяжение струны определяется весом  $P$  груза.

**5.38.** Определить период малых колебаний тонкого кольца массы  $M$  и радиуса  $R$ , надетого на неподвижный горизонтальный цилиндр радиуса  $r$  (рис. 102). Проскальзывания нет.

**5.39.** Твердый шарик, подвешенный на невесомой пружине, совершает гармонические колебания в вертикальном направлении

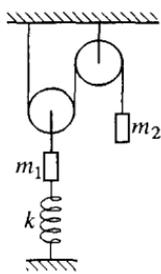


Рис. 99

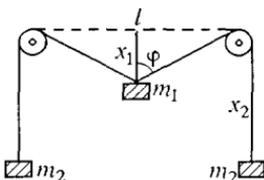


Рис. 100

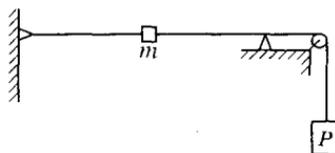


Рис. 101

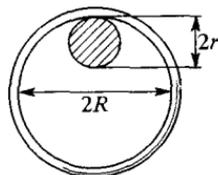


Рис. 102

с периодом  $T_0$  и амплитудой  $a$ . Как изменится период колебаний шарика, если снизу к нему поднести массивную твердую горизонтальную плиту, с которой шарик будет периодически сталкиваться? Расстояние плиты от положения равновесия шарика равно  $a/2$ , масса шарика пренебрежимо мала по сравнению с массой плиты.

**5.40.** Кабина лифта равномерно опускается со скоростью  $v_0$ . Может ли и при каких условиях в результате внезапного заклинивания барабана, на который намотан трос, в кабине в определенные моменты времени возникать состояние невесомости? Статическое удлинение размотавшейся под действием веса лифта части троса мало по сравнению с длиной ненапрянутого троса и равно  $\Delta l = 10$  см.

**5.41.** Небольшая муфта массы  $m$  может скользить без трения по горизонтальной штанге. К муфте прикреплен пружина, второй конец которой закреплен в точке, отстоящей на расстояние  $l$  от штанги, которое больше длины пружины в нерастянутом состоянии (рис. 103). Имея длину  $l$ , пружина растянута с силой  $F$ . Определить период малых колебаний муфты.

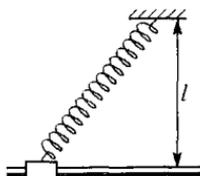


Рис. 103

**5.42.** Найти период малых колебаний груза, скользящего без трения по горизонтальной поверхности (рис. 104). В положении равновесия пружина жесткости  $k$  образует угол  $\alpha$  с горизонталью. Считать пружину достаточно длинной, так что угол  $\alpha$  при колебаниях остается неизменным. При каких амплитудах груз не будет подпрыгивать? Масса груза равна  $m$ .

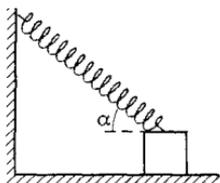


Рис. 104

**5.43.** Найти частоту малых колебаний шарика массы  $m$ , подвешенного на пружине, если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т.е.  $F = k(l - l_0)^2$ , где  $l_0$  — длина пружины в ненагруженном состоянии.

**5.44.** Два незакрепленных шарика с массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены друг с другом спиральной пружинкой с коэффициентом упругости  $k$ . Определить период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки.

**5.45.** Два одинаковых тела с массами  $m$  соединены пружиной жесткости  $k$ . Тела покоятся на гладком горизонтальном столе, причем в начальный момент одно из них расположено около стены, и пружина сжата на величину  $a$ . Описать движение каждого из тел после того, как сжимающая сила снята.

**5.46.** Груз массы  $m$ , соединенный пружиной жесткости  $k$  с вертикальной стенкой, совершает колебания, двигаясь по горизонтальной поверхности (рис. 105). Коэффициент трения между грузом и

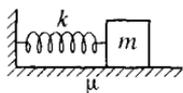


Рис. 105

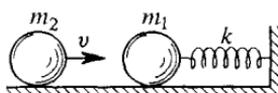


Рис. 106

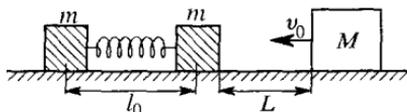


Рис. 107

поверхностью равен  $\mu$ . В моменты времени, когда пружина максимально растянута, грузу щелчком сообщают некоторую энергию, так что он приобретает скорость  $v_0$  в направлении к стенке. Найти скорость  $v_0$ , если колебания оказываются стационарными, причем максимальное удлинение пружины равно  $l$ . Считать, что  $l > \mu mg/k$ .

**5.47.** На гладком горизонтальном столе лежит шар массы  $m_1$ , соединенный с пружиной жесткости  $k$ . Второй конец пружины закреплен (рис. 106). Происходит лобовое упругое соударение этого шара с другим шаром, масса которого  $m_2$  меньше  $m_1$ , а скорость равна  $v$ . В какую сторону будет двигаться второй шар после удара? Определить амплитуду колебаний первого шара после соударения.

**5.48.** На гладкой поверхности лежит система из двух грузов с массами  $m$ , соединенных несжатой пружиной жесткости  $k$ , на расстоянии  $l_0$  друг от друга (рис. 107). Справа в их сторону скользит тяжелый брусок массы  $M \gg m$  со скоростью  $v_0$ . В начальный момент

$t = 0$  брусок находится на расстоянии  $L$  от правого груза. Через какое время центр масс системы окажется на том же расстоянии от бруска, что и в момент  $t = 0$ ? Удар о брусок считать мгновенным и абсолютно упругим.

**5.49.** По гладкой доске без трения скользят со скоростью  $v_0$  два груза равной массы  $m$ , соединенные пружиной жесткости  $k$ , находящейся в несжатом состоянии (рис. 108). В момент  $t = 0$  левый груз

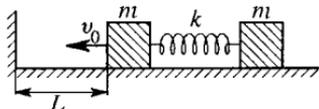


Рис. 108

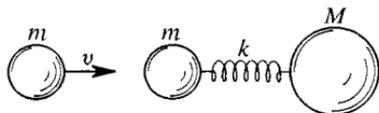


Рис. 109

находится на расстоянии  $L$  от вертикальной стенки, в направлении к которой они оба движутся. Через какое время  $t$  центр масс окажется в том же положении, что и в момент  $t = 0$ ? Удар о стенку считать мгновенным и абсолютно упругим.

**5.50.** Система состоит из двух шариков с массами  $m$  и  $M$ , соединенных между собой невесомой пружиной с коэффициентом упругости  $k$  (рис. 109). Третий шарик с массой  $m$ , движущийся вдоль оси пружины со скоростью  $v$ , претерпевает упругое столкновение с шариком  $m$ . Считая шарики абсолютно жесткими, найти после столкновения кинетическую энергию  $K$  движения системы как целого, внутреннюю энергию системы  $E_{\text{вн}}$  и амплитуду  $A$  колебаний одного шарика относительно другого. До удара система покоилась, а пружина не была деформирована. Какие шарики могут рассматриваться как абсолютно жесткие?

**5.51.** На гладкой горизонтальной поверхности расположены две точечные массы, соединенные упругой невесомой пружиной с коэффициентом упругости  $k$  (рис. 110). На одну из этих масс вдоль пружины налетает со скоростью  $v$  третья точечная масса  $2m$ .

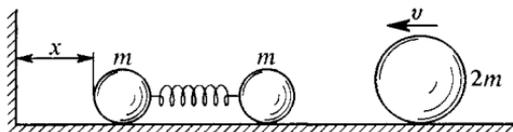


Рис. 110

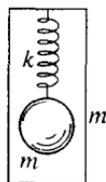


Рис. 111

При этом сталкивающиеся массы слипаются. Совершив два полных малых колебания, образовавшаяся система сталкивается со стенкой. Определить начальное минимальное расстояние  $x$  системы от стенки.

**5.52.** Внутри цилиндра массы  $m$  подвешен на пружине жесткости  $k$  груз такой же массы (рис. 111). Вначале цилиндр покоится.

В некоторый момент времени его отпускают, и он начинает свободно падать вертикально вниз вдоль своей оси. Какое расстояние пройдет цилиндр за время, в течение которого груз совершит полтора колебания?

**5.53.** Груз массы  $m_1$  привязан на короткой нити к потолку. Груз массы  $m_2$  подвешен к грузу  $m_1$  на пружине длины  $l$ . В момент  $t = 0$  нить обрезают, и грузы начинают падать. Найти расстояния  $x_1$  и  $x_2$  грузов от потолка в зависимости от времени. В нерастянутом состоянии длина пружины равна  $l_0$ .

**5.54.** Система из двух шариков равной массы, соединенных невесомой пружиной, налетает с кинетической энергией  $K_0$  на стенку. Пружина все время остается перпендикулярной стенке, и в начальном состоянии ее колебания не возбуждены. Удар шарика о стенку абсолютно неупругий. Найти кинетическую энергию  $K$  и энергию колебаний системы  $E_{\text{кол}}$  после отскока. Поле тяжести отсутствует.

**5.55.** Шарик массы  $m$  налетает со скоростью  $v_0$  на шарик массы  $m_1$ , скрепленный пружиной жесткости  $k$  с шариком массы  $m_2$ . Определить скорость движения центра масс и амплитуду колебаний шариков, скрепленных пружиной, при условии  $m < m_1$ . Удар абсолютно упругий, за время удара пружина не деформируется, центры шаров находятся на одной прямой, их радиусы одинаковы.

**5.56.** На качелях, качающихся с угловой амплитудой  $\varphi_0$ , сидит человек. Когда качели проходят через положение равновесия, человек резко встает, а в момент максимального отклонения качелей он снова садится. На сколько изменится угловая амплитуда за период? Масса человека равна  $M$ . Центр тяжести человека поднимается и опускается на высоту  $H$ . Длина веревок качелей равна  $l$ . При расчетах считать, что  $l \gg H$ , массой качелей пренебречь. Как зависит амплитуда от числа колебаний  $n$ , если колебания малые?

**5.57.** Маятник состоит из легкого стержня длины  $l$ , к которому прикреплен цилиндрический сосуд массы  $M$ . В сосуд налита вода, масса которой  $m \ll M$ . Высота столба воды равна  $H$ . Все линейные размеры малы по сравнению с  $l$ . Когда маятник находится в равновесии, в нижней части боковой стенки сосуда открывается отверстие, из которого вода вытекает за время, малое по сравнению с периодом колебаний маятника. Найти амплитуду колебаний маятника после того, как вода вытекла.

**5.58.** Материальная точка (например, шарик на пружине) под действием квазиупругой силы  $F = -kx$  совершает колебания вдоль оси  $X$  вокруг положения равновесия. Показать, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий при таких колебаниях равны.

**5.59.** Часы с маятником, будучи установленными на столе, показывали верное время. Как изменится ход часов, если их установить на свободно плавающем поплавке? Масса  $M$  часов вместе с поплавком в  $10^3$  раз превосходит массу маятника  $m$ .

**5.60я.** Тело подвешено на пружине и имеет собственный период колебаний  $1/2$  с (рис. 112). На тело действует направленная вертикально синусоидальная сила с амплитудой  $F = 100$  дин и некоторая сила трения. Определить амплитуду  $F_{тр}$  силы трения и коэффициент трения (сила трения пропорциональна скорости движения), если амплитуда колебаний при резонансе  $A_p$  составляет 5 см.



Рис. 112

**5.61.** Система совершает вынужденные колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону. Показать, что при резонансе при прочих равных условиях работа внешней силы за период будет максимальной.

**5.62.** Система состоит из двух одинаковых масс  $m$ , скрепленных пружиной жесткости  $k$ . На одну из масс действует гармоническая сила с амплитудным значением  $f_0$ , направленная вдоль пружины. Найти амплитуду колебаний растяжения пружины, если частота вынуждающей силы вдвое превышает собственную частоту системы.

**5.63.** Оценить время  $\tau$  соударения футбольного мяча при слабом ударе о стенку.

**5.64.** Частица массы  $m$  движется в поле центральных сил по круговой орбите радиуса  $r_0$ . Потенциальная энергия частицы  $\Pi = -amr^{-n}$ . Найти условие устойчивости движения по отношению к малым радиальным колебаниям, т.е. условие того, что при небольших отклонениях от  $r_0$  частица начинает колебаться около круговой орбиты.

**5.65.** В цилиндре может без трения двигаться поршень массы  $M$ . Между поршнем и неподвижными стенками колеблются легкие шарики массы  $m \ll M$  (рис. 113). В равновесном положении поршня посередине цилиндра частота столкновений каждого шарика с поршнем равна  $\nu$ . Найти частоту  $f \ll \nu$  малых медленных колебаний поршня. Движение шариков считать одномерным, удары — абсолютно упругими.

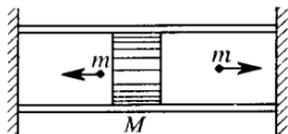


Рис. 113

## § 6. Момент импульса.

### Закон сохранения момента импульса

**6.1.** Небольшое тело, привязанное к нитке, продетой через отверстие  $O$  в гладком горизонтальном столе, движется равномерно со скоростью  $v_0$  на расстоянии  $r_0$  от отверстия (рис. 114). В момент  $t_0$  нить начинают плавно протягивать через отверстие, и за время  $\tau$  тело делает оборот, описав заштрихованную на рисунке фигуру. Найти ее площадь. Показать, что если нить протягивать медленно по сравнению с периодом обращения частицы, то отношение  $E/\omega$ , где  $E$  — энергия тела,  $\omega$  — частота обращения, остается постоянным.

**6.2.** Трамплин, используемый в цирке, представляет собой горизонтальную доску, шарнирно закрепленную в середине. На один конец доски с достаточно большой высоты прыгает гимнаст. Клоун,

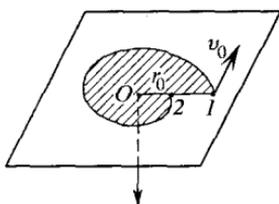


Рис. 114

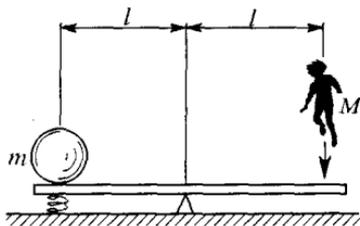


Рис. 115

стоящий на другом конце доски, при этом подбрасывается в воздух. На каком расстоянии  $l_1$  от шарнира должен прыгнуть гимнаст, чтобы клоун был подброшен выше всего? Масса гимнаста  $m_1$ , масса клоуна  $m_2$ . Расстояние клоуна до шарнира равно  $l_2$ . Доску считать невесомой.

**6.3.** Прочная доска длины  $2l = 4$  м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее середину. Один конец доски прикреплен жесткой пружиной к полу (высота опоры много меньше длины доски). На этом конце лежит шар  $m = 10$  кг. На другой конец с высоты  $h = 1,5$  м прыгает мальчик массы  $M = 30$  кг (рис. 115). При приземлении происходит толчок, доска поворачивается, шар подбрасывается вверх и на доску не возвращается. Определить, на какую высоту  $x$  подбросит мальчика растянувшаяся пружина. Массой доски пренебречь.

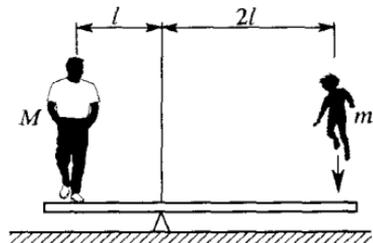


Рис. 116

которого  $m = 40$  кг. На коротком плече стоит мужчина массы  $M = 80$  кг (рис. 116). На какую высоту  $x$  подбросит доска мужчину после прыжка мальчика? Массой доски пренебречь. Доска расположена невысоко над полом.

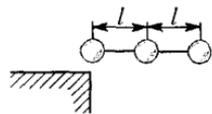


Рис. 117

**6.5.** Расположенная горизонтально система из трех одинаковых маленьких шариков, соединенных невесомыми жесткими спицами длины  $l$ , падает с постоянной скоростью  $v_0$  и ударяется левым шариком о массивный выступ с горизонтальной верхней поверхностью (рис. 117). Определить угловую скорость вращения системы  $\omega$  сразу после удара, считая удар абсолютно упругим.

**6.6.** Вертушка состоит из трех одинаковых масс  $m$ , размещенных в вершинах равностороннего треугольника и соединенных с осью  $O$  жесткими невесомыми стержнями длины  $a$  (рис. 118). Ось  $O$  горизонтальна, трения в оси нет. В начальный момент времени вертушка неподвижна и ориентирована как показано на рисунке.

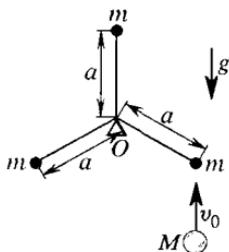


Рис. 118

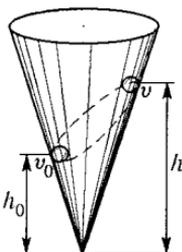


Рис. 119

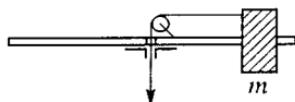


Рис. 120

На правый нижний шарик налетает кусочек пластилина массы  $M = 3m$  со скоростью  $v_0$  и прилипает к нему. С какой угловой скоростью  $\omega_x$  будет вращаться вертушка после того, как в некоторой точке, где скорость максимальна, пластилин оторвется? До отрыва пластилина вертушка сделала не более одного оборота.

**6.7.** Человек на аттракционе «гигантские шаги» движется по замкнутой траектории таким образом, что достигаемая им высота относительно положения равновесия меняется в пределах от  $h_{\min}$  до  $h_{\max}$ . Определить максимальную и минимальную скорости человека при таком движении, если длина веревки, на которой он удерживается, равна  $l$ .

**6.8.** По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 119). В начальный момент шарик находился на высоте  $h_0$ , а скорость его  $v_0$  была горизонтальна. Найти  $v_0$ , если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты  $h$ , а затем начинает опускаться. Найти также скорость  $v$  шарика в наивысшем положении.

**6.9.** Легкий стержень вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  по инерции вокруг оси, перпендикулярной ему и проходящей через его середину. По стержню без трения может двигаться тяжелая муфта массы  $m$ , которая удерживается с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. 120). Определить закон изменения угловой скорости системы по мере подтягивания муфты к оси вращения, закон изменения силы натяжения нити и работу подтягивания муфты с радиуса  $R_0$  до радиуса  $R_0/2$ .

**6.10.** Цилиндр радиуса  $r$  вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Вместе с ним на тонкой нерастяжимой нити длины  $l \gg r$ , прикрепленной одним концом к цилиндру, вращается небольшой шарик. Внезапно цилиндр останавливается. Через какое время нить наматывается на цилиндр?

**6.11.** Частица массы  $m$  движется под действием центральной упругой силы  $F = -kr$ . Найти частоту  $\omega$  обращения частицы. Доказать, что частица движется по эллипсу, и выразить его площадь через момент импульса частицы  $l$  и частоту  $\omega$ . Найти соотношение между средними значениями потенциальной и кинетической энергии частицы. Как должна измениться жесткость  $k$ , чтобы площадь эллипса увеличилась вдвое? Как при этом изменится частота обращения?

**6.12.** По гладкой горизонтальной поверхности поступательно без вращения движется система, состоящая из двух массивных шариков, плотно насаженных на проволочное кольцо (рис. 121). Массы шариков  $m$  и  $2m$ , радиус кольца  $R$ . Навстречу кольцу движется пластилиновый шарик массы  $2m$  со скоростью  $v_0$ , параллельной вектору скорости системы. Шарик сталкивается с кольцом и прилипает к нему в точке  $A$  на расстоянии  $R/2$  от диаметра, вдоль которого двигалась система до удара. Пренебрегая массой проволочного кольца и трением о поверхность, найти угловую скорость вращения системы  $\Omega$  после удара, а также скорость  $u$ , с которой двигалось кольцо, если известно, что центр инерции системы движется в обратном направлении с той же скоростью  $u$ .

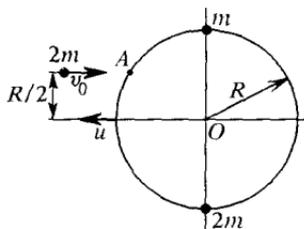


Рис. 121

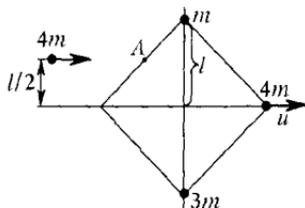


Рис. 122

теме движется пластилиновый шарик массы  $4m$ . Неупругий удар происходит в точке  $A$  на расстоянии  $l/2$  от диагонали, вдоль которой двигалась система до удара. Центр инерции всей системы имеет скорость  $2u$ . Пренебрегая трением и массой проволоки, определить угловую скорость вращения системы  $\Omega$ .

**6.14.** Тяжелая нерастяжимая цепь натянута на три невесомых блока радиуса  $r$  каждый. Оси блоков параллельны друг другу и изначально были расставлены по вершинам равностороннего треугольника со стороной  $a$ , при этом цепь двигалась с линейной скоростью  $v_1$ . Потом оси блоков переместили так, что они стали принадлежать одной плоскости, а цепь приняла вид гусеницы трактора. Какова стала линейная скорость движения цепи  $v_2$  после такого перемещения? Трением пренебречь.

## § 7. Гравитация

7.1. Сможет ли космонавт, подпрыгнув, покинуть навсегда астероид, масса которого равна массе Фобоса (спутника Марса):  $M = 1,1 \cdot 10^{16}$  кг и радиус  $R = 11,1$  км?

7.2. Ракета с космонавтом стартует с поверхности Земли и движется вертикально вверх так, что космонавт испытывает все время постоянную перегрузку  $n = 2$ . После того, как скорость ракеты стала равной первой космической скорости, двигатели выключают. Определить, покинет ли ракета пределы Земли или упадет на нее. Перегрузкой  $n$  называют отношение  $n = (P - P_0)/P_0$ , где  $P_0$  — вес космонавта на Земле,  $P$  — вес, который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в полете.

7.3. Ракета с космонавтом стартует с поверхности Земли и движется вертикально вверх так, что космонавт испытывает все время постоянную перегрузку  $n = 3$ . После того, как ракета достигла высоты  $R_3$  от поверхности Земли, двигатели выключают. Определить, покинет ли ракета пределы Земли или упадет на нее. Перегрузкой  $n$  называют отношение  $n = (P - P_0)/P_0$ , где  $P_0$  — вес космонавта на Земле,  $P$  — вес, который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в полете.

7.4. Найти потенциальную энергию тела (точки) массы  $m$  на различных расстояниях  $R$  от центра Земли. Величину потенциальной энергии на бесконечно большом расстоянии считать равной нулю.

7.5. Два тела с одинаковой массой  $M$  движутся навстречу из бесконечности по параллельным траекториям, расстояние между которыми равно  $l$ . Начальные скорости одинаковы и равны  $v_0$ . Каково будет минимальное расстояние между телами с учетом их гравитационного притяжения?

7.6. Согласно третьему закону Кеплера, отношение куба большой полуоси эллиптической орбиты  $a$  к квадрату периода обращения планеты  $T$  есть величина, одинаковая для всех планет Солнечной системы. Она называется постоянной Кеплера и обозначается  $K$ . Третий закон Кеплера строго справедлив, когда масса планеты пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца  $M$ . Найти выражение для постоянной Кеплера.

7.7. Как изменится третий закон Кеплера, если не пренебрегать массой планеты  $m$  по сравнению с массой Солнца  $M$ ?

7.8. Согласно некоторым прогнозам, тенденция к общему потеплению нашей планеты грозит таянием приполярных льдов в Арктике и Антарктике. Оценить, насколько изменится продолжительность земных суток, если подъем уровня мирового океана составит 40 м.

7.9. Оценить период обращения близкого спутника нейтронной звезды (пульсара), плотность которой равна ядерной. Масса нейтрона  $m = 1,7 \cdot 10^{-24}$  г, а его радиус  $r$  принять равным  $1,3 \cdot 10^{-13}$  см.

**7.10.** Как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли увеличилась и сделалась равной массе Солнца, а расстояние между ними осталось без изменения?

**7.11.** Найти расстояние  $R$  между компонентами двойной звезды, если их общая масса  $M_1 + M_2$  равна удвоенной массе Солнца  $M_0$  и звезды обращаются по круговым орбитам вокруг их центра масс с периодом  $T = 2T_0$ , где  $T_0$  — продолжительность земного года. Расстояние от Земли до Солнца  $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$  км.

**7.12.** Двойная звезда, один компонент которой является звездой типа Солнца с массой  $M_1 = 2 \cdot 10^{33}$  г, а другой компонент — нейтронной звездой радиуса  $R_n = 1,4$  км, вращается с периодом  $T = 5$  суток. Определить расстояние  $R$  между компонентами звезды. Плотность вещества нейтронной звезды считать равной плотности ядерной материи, которая определяется из соотношения  $R_n = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  см, где  $A$  — относительная атомная масса вещества звезды.

**7.13а.** Минимальное расстояние между компонентами двойной звезды, обращающимися один относительно другого, равно  $r_1$ . Относительная скорость их в этом положении равна  $v_1$ . Сумма масс обоих компонентов равна  $M$ . Найти расстояние между компонентами  $r_2$  и их относительную скорость  $v_2$  при максимальном удалении друг от друга. При каком минимальном значении относительной скорости  $v_1$  двойная звезда распадается?

**7.14.** Материальная точка массы  $m$  взаимодействует с неподвижным центром. Потенциальная энергия есть  $U = \frac{a}{r} + br$ . В начальный момент точка находилась на расстоянии  $r_0 = 2\sqrt{\frac{a}{b}}$  от центра и имела нулевую скорость. Найти: 1) минимальное расстояние  $r_{\min}$ , на которое сможет приблизиться точка к центру; 2) устойчивое положение равновесия материальной точки; 3) величину силы, действующей на материальную точку в точках  $r_0$  и  $r_{\min}$ ; 4) «первую космическую скорость» при движении материальной точки вокруг центра.

**7.15.** Силы приливного трения, вызываемые лунными приливами, замедляют вращение Земли вокруг своей оси. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси не станет равной угловой скорости орбитального движения Луны вокруг Земли. Определить общую угловую скорость вращения Земли и орбитального вращения Луны  $\omega$ , продолжительность земных суток  $T$  и радиус лунной орбиты  $a$ , после того как это произойдет. Использовать следующие данные: в настоящее время угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси  $\omega_3$  равна  $7,29 \cdot 10^{-5}$  рад/с, момент импульса Земли относительно своей оси  $L_3 = 5,91 \cdot 10^{40}$  г·см<sup>2</sup>/с, радиус лунной орбиты  $a_0 = 3,84 \cdot 10^{10}$  см, время обращения Луны вокруг Земли (относительно звезд)  $T_{\text{л}} = 27,3$  сут, масса Луны  $m = 7,35 \cdot 10^{25}$  г, момент инерции Земли относительно оси вращения  $I_3 = 8,11 \cdot 10^{44}$  г·см<sup>2</sup>. Для простоты считать, что земная ось перпендикулярна к плоскости лунной орбиты.

**7.16.** Из астрономических данных известно, что земные сутки удлиняются за год примерно на  $\Delta T = 2 \cdot 10^{-5}$  с. Это происходит из-за приливного трения в системе Земля—Луна. Определить, на сколько по этой причине изменяется за год среднее расстояние между Землей и Луной. Для упрощения предположить, что земная ось перпендикулярна плоскости лунной орбиты. Луну считать материальной точкой массы  $M_{\text{л}} = M_3/81$ , среднее расстояние между Землей и Луной равным 60 земным радиусам  $R_3$ , момент инерции Земли равным  $M_3 R_3^2/3$ .

**7.17.** Известно, что лунные приливы вызывают появление сил трения, которые стремятся затормозить вращение Земли, изменяя длительность земных суток за год примерно на  $\Delta T = 2 \cdot 10^{-5}$  с. Определить, на сколько по этой причине меняется продолжительность лунного месяца. Для упрощения предположить, что земная ось перпендикулярна плоскости лунной орбиты. Луну считать материальной точкой массы  $M_{\text{л}} = M_3/81$ , среднее расстояние между Землей и Луной равным 60 земным радиусам  $R_3$ , момент инерции Земли равным  $M_3 R_3^2/3$ .

**7.18я.** Допустим, что в результате взрыва астероид, двигавшийся по круговой орбите вокруг Солнца, распался на два осколка одинаковой массы. Один осколок непосредственно после взрыва остановился, другой продолжил движение. По какой траектории будет двигаться осколок: эллиптической, гиперболической или параболической?

**7.19я.** В условиях предыдущей задачи оба осколка разлетаются в перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями. По каким орбитам они будут двигаться?

**7.20\*** Планета движется вокруг Солнца по эллипсу. Не интегрируя уравнений движения, а пользуясь только законами сохранения энергии и момента импульса, найти выражение для длины большой оси  $2a$  этого эллипса.

**7.21\*** Комета движется вокруг Солнца по ветви гиперболы. Не интегрируя уравнений движения, а пользуясь только законами сохранения энергии и момента импульса, найти расстояние  $2a$  между вершинами рассматриваемой и сопряженной с ней ветвей гиперболы.

**7.22\*** Показать, что если планета движется по эллипсу, то средние по времени значения ее полной и кинетической энергий связаны соотношением  $\overline{K} = -\overline{E}$ .

**7.23.** Показать, что если планета движется по окружности, то ее полная и кинетическая энергии связаны соотношением  $K = -E$ .

**7.24я.** Какую скорость на поверхности Земли надо сообщить искусственному спутнику, чтобы вывести его на эллиптическую орбиту с расстояниями от центра Земли: в перигее  $r_1 = 31R/30$ , в апогее  $r_2 = 33R/30$  ( $R$  — радиус Земли)?

**7.25я.** Искусственный спутник Земли был выведен на орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли  $h_{\text{max}} = 1300$  км и минимальным  $h_{\text{min}} = 292$  км. Через некоторое время период обращения спутника уменьшился на  $\Delta T = 3$  мин. Какая часть начальной

полной энергии спутника была израсходована к этому моменту на работу против сил трения? Радиус Земли  $R = 6370$  км.

**7.26.** Определить массу планеты Марс по параметрам эллиптической орбиты советской автоматической станции «Марс-2», обращающейся вокруг этой планеты: максимальное удаление от поверхности планеты в апоцентре  $25\,000$  км, минимальное удаление от поверхности планеты в перигентре  $1380$  км, период обращения  $18$  часов. Диаметр Марса  $6800$  км, необходимые параметры планеты Земля считать известными.

**7.27я.** Вычислить массу Земли, используя параметры орбиты советского искусственного спутника «Космос-380». Период обращения спутника (относительно звезд)  $T = 102,2$  мин, расстояние до поверхности Земли в перигее  $210$  км, в апогее  $1548$  км. Землю считать шаром с радиусом  $6371$  км.

**7.28я.** Среднее время обращения советского корабля-спутника «Восток», на котором Ю. А. Гагарин  $12$  апреля  $1961$  г. впервые облетел вокруг земного шара,  $T_1 = 89,2$  мин при средней высоте полета над земной поверхностью  $h = 254$  км. Ближайший спутник Марса — Фобос — обращается вокруг планеты за время  $T_2 = 7$  ч  $39$  мин, находясь от центра Марса в среднем на расстоянии  $R_2 = 9350$  км. Определить отношение массы Марса  $M_2$  к массе Земли  $M_1$ , если средний радиус земного шара  $R = 6370$  км.

**7.29.** Показать, что период спутника, обращающегося вокруг планеты (или любого другого тела со сферически симметричным распределением масс) в непосредственной близости от ее поверхности, зависит только от средней плотности планеты  $\rho$ . Вычислить период такого спутника для нейтронной звезды, считая, что плотность вещества нейтронной звезды такая же, как и плотность вещества внутри атомных ядер ( $\rho \approx 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>).

**7.30.** Найти радиус  $R$  орбиты «стационарного» спутника Земли. (Стационарными называют спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли так, что время его оборота равно  $24$  часам.) Стационарный спутник, движущийся в плоскости экватора в сторону вращения Земли, будет оставаться неподвижным относительно нее. Выразить  $R$  через радиус Земли  $R_0$ , угловую скорость  $\omega$  вращения Земли и ускорение свободного падения  $g$  на ее поверхности.

**7.31.** Искусственный спутник вращается вокруг Земли по эллиптической орбите со скоростью  $v_1 = 8$  км/с в перигее и  $v_2 = 7$  км/с в апогее. Определить длину большой оси  $2a$  эллиптической орбиты спутника. Радиус Земли  $R_3 = 6400$  км.

**7.32.** Искусственный спутник вращается вокруг Земли по эллипсу. В точках пересечения эллипса с малой осью скорость спутника равна  $v = 7,5$  км/с. Определить длину  $2a$  большой оси эллипса.

**7.33\*** С воображаемой возвышенности, расположенной на полюсе Земли, посылаются с одинаковой скоростью  $v_0$  два снаряда. Начальная скорость первого снаряда направлена так, что он движется по направлению радиуса Земли; начальная скорость второго

перпендикулярна радиусу Земли, и он движется по эллиптической траектории. Который снаряд достигнет максимального удаления от Земли? Найти соотношение  $R_1/R_2$  максимальных возможных расстояний от центра Земли соответственно первого и второго снарядов. Скорость  $v_0 > \sqrt{gR_0} = v_{кр}$ , где  $v_{кр}$  есть скорость движения спутника Земли по круговой орбите (теоретической) с радиусом Земли  $R_0$ . Сопротивление воздуха движению снарядов не учитывать и полагать, что на снаряд действует только поле тяготения Земли.

**7.34я.** С некоторой площадки на экваторе посылаются два спутника по эллиптическим орбитам: первый в направлении вращения Земли, второй против. Каково будет наибольшее удаление  $R_1$  и  $R_2$  каждого из спутников от центра Земли, если известно, что начальные горизонтальные скорости их относительно Земли одинаковы по величине и равны  $v_0 = 10$  км/с? Расстояния выразить через радиус Земли  $R_0$ .

**7.35.** С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковой начальной скоростью  $v_0 = 10$  км/с в горизонтальном направлении, противоположно друг другу. При этом их эллиптические орбиты лежат в одной плоскости. Чему равно максимальное удаление ракет друг от друга?

**7.36я.** Вычислить вторую космическую скорость при старте ракеты с поверхности Юпитера, используя следующие данные. Третий спутник Юпитера — Ганимед — вращается вокруг планеты практически по круговой орбите радиуса  $R = 1,07 \cdot 10^6$  км с периодом обращения  $T = 7,15$  сут. Радиус планеты  $r = 7 \cdot 10^4$  км.

**7.37я.** Космический корабль без начальной скорости свободно падает на Землю из удаленной точки. В каком месте следует повернуть направление движения корабля на  $90^\circ$  (без изменения величины его скорости), чтобы он стал двигаться вокруг Земли по круговой траектории?

**7.38я:** Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В какой точке орбиты и на какой угол следует изменить направление скорости корабля (без изменения ее величины), чтобы корабль стал двигаться по круговой орбите?

**7.39.** Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В точке пересечения эллипса с его малой осью включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля, чтобы он перешел на параболическую орбиту?

**7.40я.** Наибольшее расстояние кометы Галлея от Солнца  $h = 35,4$ , наименьшее  $l = 0,59$  (за единицу принято расстояние Земли от Солнца). Линейная скорость движения кометы  $v_1 = 0,91$  км/с в точке наибольшего удаления ее от Солнца (в афелии). Как велика линейная скорость  $v_2$  кометы, когда она ближе всего подходит к Солнцу (в перигелии)?

**7.41.** В 1978 году у планеты Плутон обнаружен спутник — Харон. Плутон и Харон обращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам, причем расстояние между ними  $R = 19\,640$  км, а период обращения  $T = 6,4$  сут. Определить, какую часть массы

Земли составляет суммарная масса системы Плутона—Харона. Считать известным радиус Земли  $R_3 = 6400$  км и ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

**7.42я\*** Четыре тела  $A, B, C$  и  $D$  (рис. 123), которые можно считать материальными точками, вращаясь вокруг некоторого центра,

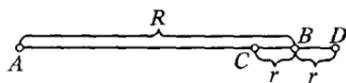


Рис. 123

остаются все время на одной прямой и сохраняют неизменным расстояние друг от друга. Между всеми телами действуют силы притяжения по закону всемирного тяготения Ньютона. Массы  $C$  и  $D$  равны и ничтожно малы по сравнению с

массами  $A$  и  $B$ , а расстояние  $r$  очень мало по сравнению с  $R$ . Какие еще силы должны действовать со стороны тела  $B$  на  $C$  и  $D$ , чтобы расстояния между всеми телами оставались неизменными?

**7.43.** Космический корабль «Аполлон» обращался вокруг Луны по эллиптической орбите с максимальным удалением от поверхности Луны (в апоселении) 312 км и минимальным удалением (в периселении) 112 км. На сколько надо было изменить скорость корабля, чтобы перевести его на круговую орбиту с высотой полета над поверхностью Луны 112 км, если двигатель включался на короткое время, когда корабль находился в периселении? (Средний радиус Луны  $R = 1738$  км, ускорение свободного падения на ее поверхности  $g = 162$  см/с<sup>2</sup>.)

**7.44.** Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью  $v_0$ , стреляют в направлении, составляющем угол  $120^\circ$  к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?

**7.45.** Искусственный спутник Земли вращается по круговой орбите радиуса  $R$  с периодом  $T_1$ . В некоторый момент на очень короткое время был включен реактивный двигатель, увеличивший скорость спутника в  $\alpha$  раз, и спутник стал вращаться по эллиптической орбите. Двигатель сообщал ускорение спутнику все время в направлении движения. Определить максимальное расстояние спутника от центра Земли, которого он достигнет после выключения двигателя. Найти также период  $T_2$  обращения спутника по новой (эллиптической) орбите.

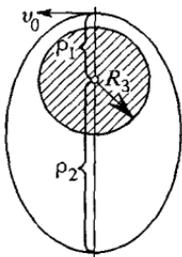


Рис. 124

**7.46\*** Спутник поднят ракетой-носителем вертикально до максимальной высоты, равной  $R = 1,25R_3$  ( $R_3$  — радиус Земли), отсчитываемой от центра Земли. В верхней точке подъема ракетное устройство сообщило спутнику азимутальную (горизонтальную) скорость, равную по величине

первой космической скорости:  $v_0 = v_1$ , и вывело его на эллиптическую орбиту (рис. 124). Каковы максимальное и минимальное удаления спутника от центра Земли?

**7.47я\*** Легкий спутник Земли вращается по круговой орбите с линейной скоростью  $v_0$ . Ракетное устройство увеличивает

абсолютную величину этой скорости в  $\sqrt{1,5}$  раза, и спутник переходит на эллиптическую орбиту (рис. 125). С какой скоростью спутник пройдет наиболее удаленную от центра Земли точку  $A$  (апогей) своей орбиты? Сопротивление атмосферы не учитывать.

**7.48я.\*** Спутник Земли, вращаясь по круговой орбите радиуса  $R \approx R_3$  (низкий спутник), перешел на эллиптическую орбиту

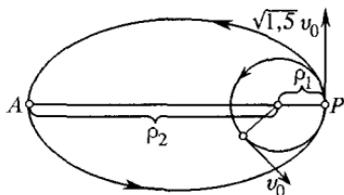


Рис. 125

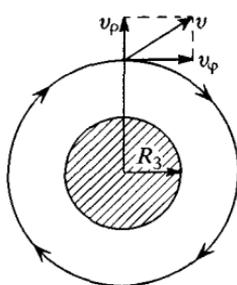


Рис. 126

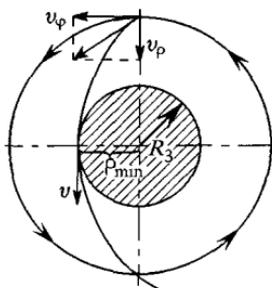


Рис. 127

с большой осью  $2a = 4R_3$  ( $R_3$  — радиус Земли). Определить, во сколько раз увеличилось время обращения спутника. Сопротивление атмосферы не учитывать.

**7.49я.\*** Спутник, вращаясь по круговой орбите радиуса  $R = 3R_3/2$  ( $R_3$  — радиус Земли), получает радиальный импульс, который сообщает ему дополнительную скорость  $v_p$ , направленную от центра Земли по радиусу (рис. 126). Каково должно быть минимальное значение дополнительной скорости, чтобы спутник мог покинуть область земного притяжения?

**7.50я.\*** Спутник, вращаясь по круговой траектории радиуса  $R = 2R_3$  ( $R_3$  — радиус Земли), получает радиальный импульс, сообщаящий ему дополнительную скорость  $v_p$  в направлении центра Земли, равную по величине скорости  $v_p$  движения по круговой орбите (рис. 127). На какое минимальное расстояние  $\rho_{\min}$  приблизится спутник к центру Земли и какова будет его скорость  $v$  в этой точке? Сопротивление атмосферы не учитывать.

**7.51я.\*** Спутник запускается на круговую орбиту в два этапа: сначала на поверхности Земли ему сообщают горизонтальную скорость и выводят на эллиптическую орбиту, перигей которой совпадает с точкой запуска (рис. 128), а апогей — с точкой на круговой орбите. В апогее ракетное устройство увеличивает скорость спутника и выводит его на круговую орбиту. Каковы должны быть начальная скорость запуска  $v_1$  и увеличение скорости в апогее  $\Delta v$ , чтобы вывести спутник на круговую орбиту радиуса  $R = 2R_3$  ( $R_3$  — радиус Земли)? Сопротивление атмосферы не учитывать.

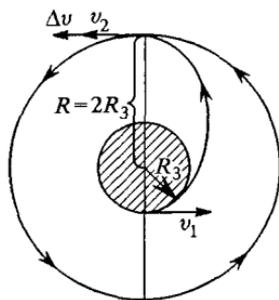


Рис. 128

7.52. По круговой окололунной орбите с радиусом, равным удвоенному радиусу Луны, вращается орбитальная станция с космическим кораблем. Корабль покидает станцию в направлении ее движения с относительной скоростью, равной половине начальной орбитальной скорости станции. Каково должно быть соотношение масс корабля и станции  $m_k/m_c$  для того, чтобы станция не упала на Луну?

7.53. Со спутника, движущегося вокруг Земли по круговой орбите радиуса  $R_0$ , выстреливают в направлении к центру Земли контейнер. Какую минимальную начальную скорость в направлении к центру Земли  $v_{\min}$  нужно сообщить контейнеру, чтобы он, перейдя на эллиптическую орбиту, коснулся Земли? Радиус Земли  $R_3$ . Торжеством в атмосфере пренебречь.

7.54. Вокруг Луны по эллиптической орбите обращается космическая станция, при этом ее наименьшее и наибольшее расстояния от лунной поверхности равны соответственно  $2R$  и  $4R$ , где  $R$  — радиус Луны. В момент нахождения станции в наименее удаленной от Луны точке станцию покидает ракета в направлении по касательной к орбите станции. Определить, в каких пределах может изменяться стартовая скорость ракеты  $u$  относительно станции, чтобы станция продолжала свое существование (т.е. не врезалась бы в Луну и не улетела бы в бесконечность). Масса станции в три раза больше массы ракеты, ускорение свободного падения на поверхности Луны  $g$ .

7.55. Вокруг Луны по эллиптической орбите обращается космическая станция, при этом ее наименьшее и наибольшее расстояния от лунной поверхности равны соответственно  $R$  и  $7R$ , где  $R$  — радиус Луны. В момент нахождения станции в наиболее удаленной от Луны точке станцию покидает ракета в направлении по касательной к орбите станции. В результате вылета ракеты станция переходит на круговую окололунную орбиту. Определить, чему равна стартовая скорость ракеты  $u$  относительно станции. Масса станции в девять раз больше массы ракеты, ускорение свободного падения  $g$  на поверхности Луны считать известным.

7.56. Ракета массы  $m = 10$  т движется вокруг Земли по эллиптической орбите. Расстояние от ракеты до центра Земли в апогее равно  $r_1 = 11\,000$  км, а в перигее  $r_2 = 6600$  км. В апогее ракета взрывается, распадаясь на две части с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Обломок массы  $m_2$  вертикально падает на Землю, а обломок массы  $m_1$  переходит на круговую орбиту. Найти значения масс  $m_1$  и  $m_2$ , пренебрегая массой газов, образовавшихся при взрыве.

7.57. В условиях предыдущей задачи ракета взрывается в перигее, распадаясь на две части с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Обломок массы  $m_1$ , двигаясь в первоначальном направлении, переходит на параболическую орбиту, а  $m_2$  меняет направление движения и начинает вращаться по окружности. Найти значения масс  $m_1$  и  $m_2$ , пренебрегая массой газов, образовавшихся при взрыве.

7.58. С космической станции, которая обращается вокруг Земли по эллиптической орбите, в точке пересечения орбиты с малой осью стартует ракета. Какую наименьшую дополнительную скорость

$v_{\min}$  надо сообщить ракете, чтобы траектория ее движения стала параболической? Большая ось орбиты станции равна  $2,5 \cdot 10^4$  км.

**7.59.** Открытое в 1991 году, небесное тело 1991ДА (пока не ясно, астероид это или комета) движется по вытянутой орбите, так что минимальное расстояние от Солнца у него равно радиусу орбиты Марса, а максимальное — радиусу орбиты Урана. Определить период  $T$  обращения 1991ДА вокруг Солнца, если известны периоды Марса  $T_1 = 1,88$  года и Урана  $T_2 = 84$  года.

**7.60.** Комета Брукса принадлежит к семейству Юпитера, т.е. максимальное ее удаление от Солнца равно радиусу орбиты Юпитера. Минимальное расстояние кометы от Солнца равно радиусу круговой орбиты астероида Венгрия. Зная периоды обращения вокруг Солнца кометы Брукса  $T = 6,8$  года и Юпитера  $T_1 = 11,86$  года, определить период обращения Венгрии  $T_2$ .

**7.61.** Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля ( $R_3 = 1,5 \cdot 10^8$  км), причем настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Корабль получает в направлении своего движения дополнительную скорость  $\Delta v$ , достаточную для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Марс вращается вокруг Солнца по круговой орбите радиуса  $R_M = 2,28 \cdot 10^8$  км. Определить время перелета и величину  $\Delta v$ . Для Солнца  $\gamma M_C = 1325 \cdot 10^8$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>.

**7.62.** Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля ( $R_3 = 1,5 \cdot 10^8$  км), причем настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Корабль изменяет скорость на  $\Delta v$  в направлении своего движения до величины, достаточной для достижения орбиты Венеры по касательной. Венера вращается вокруг Солнца по круговой орбите радиуса  $R_V = 1,08 \cdot 10^8$  км. Определить время перелета и величину  $\Delta v$ . Для Солнца  $\gamma M_C = 1325 \cdot 10^8$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>.

**7.63.** Космический аппарат «ВЕГА» на первом этапе полета посетил окрестности Венеры. Выйдя из поля тяготения Земли, он двигался по эллипсу с афелием у орбиты Земли и перигелием у орбиты Венеры. С какой скоростью относительно Венеры он вошел в окрестность планеты? Известна орбитальная скорость Земли  $V_0 = 29,8$  км/с и отношение радиусов орбит Венеры и Земли  $k = 0,723$ . Орбиты обеих планет можно считать круговыми.

**7.64.** Космический корабль совершает перелет с Земли на Марс по оптимальной траектории — эллипсу, касающемуся орбит Земли и Марса (орбиты планет считать круговыми). Найти относительную скорость корабля и Марса при их сближении. Притяжением Земли и Марса пренебречь, а учитывать только притяжение Солнца. Орбитальная скорость Земли  $V_0 = 29,8$  км/с, радиус орбиты Марса в  $k = 1,524$  раза больше радиуса орбиты Земли.

**7.65.** Крупный метеорит массы  $m = 10^6$  т летит по направлению к центру Земли. Чтобы избежать катастрофы, запускается ракета с водородной бомбой, которая попадает в метеорит по нормали к его

траектории и взрывается. Предполагая, что при взрыве из метеорита вылетает  $\alpha = 10^{-3}$  часть его массы перпендикулярно траектории и вся энергия бомбы перешла в кинетическую энергию отброшенного вещества, оценить, на каком расстоянии  $R_0$  от Земли ракета должна встретить метеорит, чтобы он пролетел на расстоянии радиуса Земли  $R_3 = 6400$  км от ее поверхности. Скорость метеорита на бесконечности равна нулю, удар центральный, тротильный эквивалент бомбы  $W = 10$  Мт; энергия взрыва 1 кг тротила 4,2 МДж.

**7.66.** Спутник движется по круговой орбите радиуса  $R$ . Для перевода на другую орбиту ему сообщают приращение скорости, равное по абсолютной величине скорости движения спутника по круговой орбите радиуса  $R$  и направленное под углом  $60^\circ$  к первоначальной скорости. Определить изменение скорости  $\Delta v$ , которое на расстоянии  $2R$  необходимо сообщить спутнику, чтобы он двигался по круговой же орбите, но радиуса  $2R$ . Масса планеты  $M$ .

**7.67.** Два спутника движутся по одной и той же круговой орбите, близкой к Земле, рядом друг с другом. Первый из них в результате кратковременной работы двигателя увеличивает свою скорость на  $\Delta v = 0,8$  м/с, не меняя ее направления. Оценить расстояние  $x$  между спутниками в момент, когда второй спутник делает один полный оборот. Изобразить положение спутников на чертеже.

**7.68.** Два спутника  $A$  и  $B$  движутся друг за другом на расстоянии 45 км по общей круговой орбите вблизи Земли. Чтобы состыковаться, спутники должны сблизиться и продолжать двигаться по общей орбите. Какой простейшей последовательностью коротких

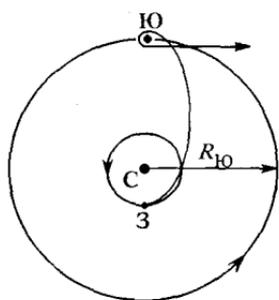


Рис. 129

включений двигателя отстающего спутника  $B$  можно осуществить этот маневр, если его двигатель ориентирован касательно к орбите и каждое включение двигателя может изменить скорость спутника  $B$  на величину  $\Delta v$ , не превышающую 8 км/ч.

**7.69.** Космический аппарат запускается по орбите, касающейся орбит Земли и Юпитера. Когда он оказывается в точке, лежащей на орбите Юпитера, он совершает его частичный облет по круговой орбите, как спутник Юпитера, и удаляется от него (рис. 129). Определить, на какое максимальное расстояние от Солнца он может удалиться после этого маневра. Юпитер считать материальной точкой. Радиус орбиты Земли  $R_3 = 150$  млн км. Радиус орбиты Юпитера считать в 5 раз большим.

**7.70.** Планета обращается вокруг звезды по круговой орбите, радиус которой значительно превышает размеры звезды. Период обращения равен  $T$ . Определить время свободного падения тела на звезду с высоты, равной радиусу орбиты. Вычислите это время для системы Земля—Солнце.

**7.71.** Две частицы с одинаковыми массами движутся друг относительно друга по круговым орбитам под действием гравитационных

сил с периодом  $T$ . В некоторый момент времени движение внезапно прекращается, и частицы начинают падать друг на друга. Найти время  $t$ , через которое они столкнутся.

**7.72.** Определить, какую дополнительную скорость  $\Delta v$  необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, вращающемуся на очень высокой круговой орбите, чтобы он мог достичь Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми, диаметр орбиты Земли равен  $3 \cdot 10^8$  км, а диаметр орбиты Марса в 1,52 раза больше, чем у Земли.

**7.73.** Искусственный спутник, имеющий форму шара радиуса  $r = 0,5$  м, обращается вокруг Земли по круговой орбите на такой высоте ( $\approx 200$  км), где плотность атмосферы  $\rho = 10^{-13}$  г/см<sup>3</sup>. Оценить, на сколько будет снижаться спутник за один оборот вокруг планеты. Плотность вещества спутника, усредненная по его объему,  $\rho_0 = 1$  г/см<sup>3</sup>.

**7.74.** Спутник летит на высоте  $H = 100$  км от поверхности планеты по круговой орбите. При какой плотности  $\rho$  атмосферы планеты на траектории спутника его высота за время одного витка уменьшится на 0,1%? Радиус планеты  $R_0 = 10^4$  км, радиус спутника  $r = 1,5$  м, масса спутника  $m = 2$  т. Столкновения молекул газа со спутником считать неупругими.

**7.75я.\*** Легкий спутник, вращаясь по круговой орбите радиуса  $R = 2R_3$  ( $R_3$  — радиус Земли), переходит на эллиптическую орбиту приземления, которая касается земной поверхности в точке, диаметрально противоположной точке начала спуска (рис. 130). Сколько времени продлится спуск по эллиптической орбите? Сопротивление атмосферы не учитывать.

**7.76.** Искусственный спутник запущен вокруг Земли по круговой орбите. Из-за наличия разреженной атмосферы траектория спутника переходит в медленно свертывающуюся спираль. Как влияет сила сопротивления среды на величину скорости спутника и момент импульса его относительно центра Земли? Спутник массы  $m = 1$  т снижается за сутки на 100 м. Найти тангенциальную составляющую ускорения спутника и силу сопротивления среды.

**7.77.** Спутник вращается вокруг Земли по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится центр Земли. Пользуясь только законами сохранения энергии и момента импульса, выразить период обращения спутника  $T$  через энергию  $E$ , приходящуюся на единицу его массы. Потенциальную энергию при бесконечном удалении спутника от Земли принять равной нулю. В предположении, что орбита спутника близка к круговой, найти приближенное изменение  $\Delta T$  его периода, если на него действует малая тормозящая сила, направленная против скорости (сила торможения, отнесенная к единице массы спутника, равна  $F$ ). Масса Земли  $M$ , гравитационная постоянная  $\gamma$ . Ускорение силы тяжести на (круговой) орбите спутника равно  $g$ .

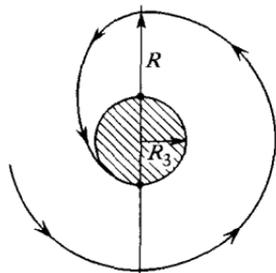


Рис. 130

**7.78.** На спутнике, который движется по круговой орбите на высоте  $0,04$  радиуса Земли от ее поверхности, включается тормозной двигатель. Скорость спутника падает, но не изменяется по направлению. Рассчитать минимальное уменьшение скорости, необходимое для того, чтобы спутник, перейдя на эллиптическую орбиту, опустился на Землю. Торможением в атмосфере пренебречь. Время работы двигателя считать малым по сравнению с периодом обращения спутника вокруг Земли.

**7.79.** Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите на расстоянии  $500$  км от ее поверхности. Для вхождения в плотные слои атмосферы корабль должен перейти на эллиптическую орбиту с минимальным расстоянием, равным  $150$  км. Какое количество топлива  $\Delta M$  должно быть израсходовано в тормозном реактивном двигателе корабля, если считать, что скорость истечения газов из сопла относительно корабля равна  $2000$  м/с? Для осуществления маневра двигатель включается на короткое время; первоначальная масса корабля составляет  $5$  тонн. Считать, что истечение газов тормозного двигателя происходит по направлению движения космического корабля.

**7.80.** По круговой окололунной орбите с радиусом, равным утреннему радиусу Луны, вращается стартовая «платформа» с космическим кораблем. Корабль покидает «платформу» в направлении ее движения с относительной скоростью, равной первоначальной орбитальной скорости «платформы», после чего «платформа» падает на Луну. Определить угол  $\alpha$ , под которым «платформа» врезается в лунную поверхность, если отношение масс «платформы» и корабля  $m_{пл}/m_{кор} = 2$ .

**7.81.** Определить начальную скорость метеоритов  $v_{\infty}$ , если максимальное прицельное расстояние, при котором они еще падают на Землю, равно  $l$  ( $l > R$ ,  $R$  — радиус земного шара). Получить численный ответ при  $l = 2R$ . (Прицельным расстоянием называется высота перпендикуляра, опущенного из центра Земли на исходное направление касательной к траектории метеорита, когда он находился в бесконечности.)

**7.82.** Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью  $u = 4$  км/с относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы системы будет составлять горючее, использованное для торможения корабля? Средний радиус Луны  $R = 1738$  км, ускорение свободного падения на ее поверхности  $g = 162$  см/с<sup>2</sup>.

**7.83.** Ракета стартует с вершины самой высокой лунной горы. Угол между направлением струи вылетающих газов и горизонтом поддерживается равным  $\alpha = 0,1$  рад. Скорость струи относительно ракеты  $u = 4$  км/с. Как должна изменяться масса ракеты  $m(t)$  в зависимости от времени, чтобы ракета двигалась горизонтально? За какое время  $T$  она наберет первую космическую скорость? Во сколько

раз за это время уменьшится масса ракеты? Какова будет перегрузка космонавтов? Радиус Луны  $R \approx 1700$  км, ускорение силы тяжести вблизи ее поверхности  $g \approx 1,6$  м/с<sup>2</sup>.

**7.84.** Земля сталкивается с головой кометы, состоящей из метеорного роя диаметром 50 000 км. Какая часть роя упадет на Землю, если относительная скорость Земли и кометы составляет 2,8 км/с? Радиус Земли 6400 км.

**7.85.** По направлению к уединенному космическому телу, имеющему массу и размеры такие же, как у Земли, из глубин космоса движется рой метеоритов, скорость которых на значительном удалении от тела равна  $v = 5$  км/с. Поперечные размеры этого метеоритного облака много больше диаметра тела, глубина облака (по направлению движения) составляет  $h = 1000$  км, средняя плотность облака  $n = 0,1$  км<sup>-3</sup>, а центр облака движется в направлении центра тела. Каково общее число метеоритов, которые попадут на тело?

**7.86.** Космическое тело шарообразной формы имеет массу  $M$  и радиус  $r$ , равные массе и радиусу Земли. Двигаясь со скоростью  $v_0 = 11,2$  км/с, тело проходит через облако космической пыли со средней плотностью  $\rho = 10^{-4}$  кг·м<sup>-3</sup> и толщиной вдоль направления движения  $h = 10^9$  м, захватывая частицы пыли. Найти увеличение массы тела, когда оно выйдет из облака.

**7.87.** По круговой орбите на высоте  $h = 320$  км от Земли движется спутник массы  $m_0 = 1$  т. Тело массы  $m = 10$  кг, летящее перпендикулярно траектории спутника (по направлению от центра Земли), после удара о спутник застревает в нем. При какой скорости тела спутник упадет на Землю?

**7.88.** На круговой орбите на высоте  $h = 320$  км от Земли движется спутник массы  $m_0 = 1$  т. Какую минимальную массу должно иметь тело, которое движется навстречу ему по той же орбите и застревает в нем, чтобы в результате спутник упал на Землю?

**7.89.** Спутник летит по круговой орбите на небольшом расстоянии от поверхности Земли. Масса спутника  $M = 50$  кг. В спутник попадает и застревает в нем микрометеорит массы  $m = 0,1$  г, который летел к центру Земли со скоростью  $v = 80$  км/с. Считая удар центральным, найти разность  $R_{\max} - R_{\min}$  расстояний от центра Земли до апогея и до перигея новой орбиты спутника.

**7.90.** Спутник летит по круговой орбите вблизи Земли. Масса спутника  $M = 100$  кг. В спутник попадает и застревает в нем микрометеорит массы  $m = 0,1$  г, который летел навстречу спутнику со скоростью  $v = 80$  км/с. Определить разность расстояний от центра Земли до апогея и до перигея новой орбиты спутника.

**7.91.** В момент выведения искусственного спутника Земли на расчетную круговую орбиту абсолютная величина скорости спутника отклонилась от расчетной на 10% при неизменном направлении. Найти отношение  $b/a$  — малой и большой полуосей реальной эллиптической орбиты.

**7.92.** В момент выведения искусственного спутника Земли на расчетную круговую орбиту направление скорости отклонилось от

расчетного на угол  $\delta$ . Найти отношение  $b/a$  — малой и большой полуосей реальной эллиптической орбиты.

**7.93.** Световой импульс с энергией  $W = 1$  МДж, выпущенный наземной лазерной установкой, отразился высококачественным зеркалом массы  $m = 1$  кг, летающим по близкой к Земле круговой орбите  $R \approx R_3 \approx 6400$  км. Оценить возникшую эллиптичность орбиты  $R_{\max} - R_{\min}$ , если оптическая ось зеркала была направлена строго к центру Земли, а луч лазера — под углом  $\alpha = 30^\circ$  к радиусу. Считать, что диаметр светового пятна на зеркале меньше размеров зеркала.

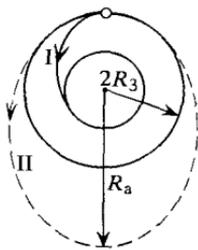


Рис. 131

**7.94.** Спутник движется по круговой орбите на расстоянии  $2R_3$  от центра Земли. В некоторый момент мощная стыковочная пружина разделяет его на два одинаковых отсека. Один из отсеков садится на Землю, причем апогей его орбиты (I) находится в точке разделения, а перигей на поверхности Земли (рис. 131). На каком расстоянии от центра Земли находится апогей орбиты (II) второго отсека?

**7.95.** Определить минимальный запас топлива, необходимый для мягкой посадки ракеты на Луну.

Тормозной двигатель включается на время  $\tau$  на некоторой, малой по сравнению с радиусом Луны  $R_{\text{л}}$ , высоте над поверхностью Луны. Считать, что скорость на бесконечности гораздо меньше скорости  $v_0$  на высоте включения тормозного двигателя и что скорость  $v_0$  ракеты приобретает только за счет притяжения Луны. Скорость газов относительно ракеты равна  $u$ , масса ракеты без топлива  $M_0$ .

**7.96.** Спутник вращается по круговой орбите вокруг Земли на высоте  $h_1 = 250$  км от поверхности. Для посадки спутнику сообщается кратковременный импульс, направленный против его скорости, после чего орбита становится эллиптической с высотой перигея  $h_2 = 100$  км. Дальнейший спуск происходит за счет торможения в атмосфере. На сколько следует уменьшить величину скорости спутника для такого изменения его орбиты?

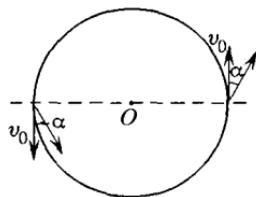


Рис. 132

**7.97.** Два одинаковых тела вращаются по круговой орбите вокруг общего центра масс под действием сил гравитационного притяжения. В некоторый момент времени векторы скоростей тел мгновенно поворачивают в плоскости орбит в разные стороны на один и тот же угол  $\alpha = 30^\circ$  без изменения их абсолютных величин (рис. 132). Найти отношение максимального и минимального расстояний  $l_{\max}/l_{\min}$  между телами при их дальнейшем свободном движении.

**7.98.** Нептун совершает один оборот вокруг Солнца за время  $T_1 = 165$  лет, двигаясь практически по круговой орбите. Плутон, двигаясь по эллипсу, перигелий которого находится от Солнца на расстоянии приближенно равном радиусу орбиты Нептуна, совершает один

оборот за время  $T_2 = 248$  лет. Известно, что Плутон оказывается ближе к Солнцу, чем Нептун, в течение времени  $\tau_2 = 6,63$  года. Исходя из этого, приблизительно определить, за какое время  $\tau_1$  Нептун проходит участок орбиты, который окажется снаружи эллипса Плутона, если совместить плоскости орбит этих планет.

**7.99.** Найти отношение  $m/m_k$  стартовых масс носителей космических аппаратов для двух вариантов полета к ближайшим окрестностям Солнца. В обоих случаях вначале производится запуск последних ступеней носителей на высокую круговую геоцентрическую орбиту. В первом варианте затем производится однократное включение двигателя, и скорость аппарата относительно Солнца уменьшается так, что в дальнейшем он проходит в непосредственной близости от светила. Во втором варианте двигатель включают дважды: при первом включении скорость относительно Солнца увеличивают с таким расчетом, чтобы аппарат вначале в афелии удалился от Солнца на 10 а. е. (т. е. дальше Сатурна); при втором включении (в афелии новой орбиты) аппарат тормозят, после чего он также проходит вблизи Солнца. Найти также отношение продолжительностей этих полетов (до момента подхода к Солнцу). Для упрощения допустимо пренебречь конечным размером Солнца, т. е. считать его точечной массой, воздействием всех планет также пренебречь. Скорость истечения реактивных газов относительно носителя принять равной 3000 м/с.

**7.100.** Земля ближе всего подходит к Солнцу 1 января, причем расстояние между ними  $R_1 = 147$  млн км, а 1 июля это расстояние  $R_2 = 152$  млн км. Угол наклона земной оси к плоскости эклиптики  $\theta = 66,5^\circ$ . Определить разницу  $\delta T$  в длительности солнечных суток в указанные дни. Их отличием от дней зимнего и летнего солнцестояния (22 декабря и 22 июня) можно пренебречь.

**7.101.** Спутник движется по стационарной круговой орбите с углом наклона к экватору  $6^\circ$ . Для корректировки его орбиты в момент прохождения им плоскости земного экватора включается ракетный двигатель, который работает в течение 100 с с постоянной тягой так, что в результате спутник начинает вращаться в плоскости экватора. Как будут идти на спутнике отрегулированные предварительно на Земле часы до корректировки орбиты, во время корректировки и после нее? (Стационарным называется спутник, период обращения которого равен периоду обращения Земли вокруг своей оси.)

**7.102.** В романе А. Толстого «Аэлита» полет на Марс начинается в момент противостояния, когда Солнце, Земля и Марс находятся на прямой. При каком угле Земля—Солнце—Марс (рис. 133) следует на самом деле стартовать с Земли, чтобы расход топлива был минимальным при кратковременной работе двигателя? Считать орбиты Земли и Марса круговыми, лежащими в одной плоскости, притяжением между ракетой и планетами при перелете пренебречь. Период обращения Марса равен 1,88 года.

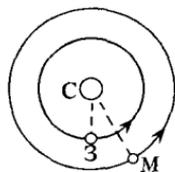


Рис. 133

**7.103.** Каким должен быть угол Марс—Солнце—Земля (рис. 133), при котором становится энергетически выгодным перелет с Марса на Землю при кратковременной работе стартового двигателя? Для упрощения расчетов считать орбиты планет Земля и Марс круговыми, лежащими в одной плоскости, притяжением между ракетой и планетами при перелете пренебречь. Радиус орбиты Марса принять равным  $1,5$  а. е.

**7.104.** В 1979 г. были открыты два квазара-«близнеца» с абсолютно одинаковыми спектральными характеристиками. Предполагается, что это — сам квазар и его изображение — мираж,

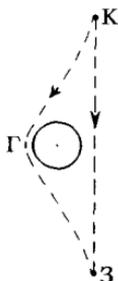


Рис. 134

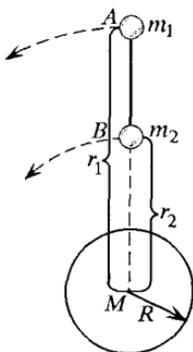


Рис. 135

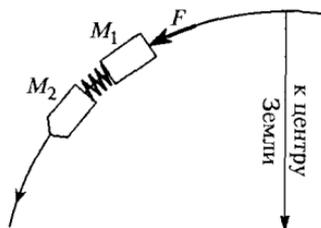


Рис. 136

создаваемый удаленной галактикой, расположенной между квазаром и Землей (рис. 134). Угловое расстояние между квазарами-«близнецами» равно  $6''$ . Принимая во внимание, что отклонение луча света вблизи Солнца равно  $1,75''$ , оценить массу галактики в единицах массы Солнца. Считать, что радиус галактики  $2 \cdot 10^5$  св. лет, радиус Солнца равен  $7 \cdot 10^5$  км.

**7.105.** Оценить время прохождения Меркурия по диску Солнца, считая орбиты планет круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. При расчетах принять также, что максимальный угол, на который Меркурий удаляется от Солнца на земном небосводе, является малой величиной, равной  $22,8^\circ$ . Видимый диаметр Солнца —  $0,5^\circ$ .

**7.106.** Межпланетный корабль состоит из двух небольших отсеков  $A$  и  $B$ , массы которых соответственно равны  $m_1$  и  $m_2$ . Отсеки соединены длинным легким и прочным переходным коридором. Корабль движется возле малой планеты массы  $M$  и радиуса  $R$  по круговой орбите так, что продолжение прямой  $AB$  все время проходит через центр планеты (рис. 135). Радиусы орбит отсеков  $A$  и  $B$  равны соответственно  $r_1 = 4R$  и  $r_2 = 2R$ . В некоторый момент времени отсеки отцепляются от коридора. Найти максимальное удаление отсеков  $A$  и  $B$  от поверхности малой планеты при их самостоятельном движении. Считать  $m_1 = m_2 \ll M$ .

**7.107.** Спутник Земли состоит из двух масс  $M_1$  и  $M_2$ , соединенных упругой конструкцией длины  $x_0$  жесткости  $k$  (рис. 136). Для

перехода на новую орбиту включается двигатель с постоянной силой тяги  $F$ , связанный с массой  $M_1$ , в результате чего возникают колебания системы. В какой момент и как надо изменить силу тяги, чтобы погасить возникшие колебания? Как изменится при этом расстояние между  $M_1$  и  $M_2$ ?

**7.108.** Орбитальная станция, совершающая оборот вокруг планеты за период  $T_0 = 1,5$  часа, состоит из двух одинаковых отсеков, соединенных тросом длины 100 м. Найти положение равновесия системы относительно продолжения радиуса планеты и период колебания вокруг этого положения.

**7.109.** Определить усилие, действующее на трос длины  $l = 100$  м, на котором находится космонавт при максимальном удалении от Земли. Спутник движется по круговой орбите на расстоянии  $2R_3$  от центра Земли. Масса космонавта  $m = 100$  кг много меньше массы спутника, радиус Земли  $R_3$  принять равным 6400 км.

**7.110.** На концах легкой спицы длины  $2r = 10$  см укреплены два небольших шарика. Спица подвешена за середину на неупругой нити и может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Спица расположена между двумя неподвижными шарами массы  $M = 1$  кг каждый (рис. 137). Расстояние между центрами шаров  $2R = 20$  см. Найти период малых колебаний спицы. Гравитационная постоянная  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8}$  дин  $\cdot$  см<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>.

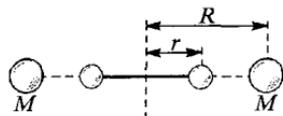


Рис. 137

**7.111.** Если гравитационное поле, в котором движется планета, не обеспечивает закона обратных квадратов, то возникает медленное вращение осей эллипса относительно удаленных звезд, что приводит к медленному повороту точки перигелия. Согласно одной из моделей, объяснить это явление можно, рассматривая движение планеты вокруг Солнца по круговой орбите радиуса  $R$  и накладывая на это круговое движение малые радиальные колебания. Потенциал такого

гравитационного поля описывается формулой  $U = -\frac{\gamma M}{r} \left(1 + \frac{a}{r^2}\right)$ , где  $a$  — постоянная величина ( $a \ll R^2$ ). Определить угол сдвига точки перигелия за один оборот  $\varphi = 2\pi \left(\frac{T_r}{T_0} - 1\right)$ , где  $T_r$  — период радиальных колебаний,  $T_0$  — период обращения.

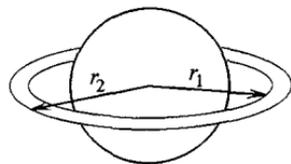


Рис. 138

**7.112.** По одной из теорий образования спутников планет, они могут формироваться из вещества, сконцентрированного первоначально в кольцевых структурах, вращающихся вокруг планет (рис. 138). Пусть пылевое кольцо в виде тонкого диска с внешним радиусом  $r_2$  и внутренним радиусом  $r_1$ , имеющее однородную среднюю плотность, трансформируется в небольшой спутник, собственным вращением которого можно пренебречь. Найти радиус  $R$  круговой орбиты спутника.

**7.113.** Две звезды вращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс под действием сил гравитационного притяжения. Массы звезд равны соответственно  $M_{10} = M_0/2$  и  $M_{20} = M_0$ . Выброс на одной из звезд привел к образованию «рукава» между ними, по которому осуществляется перенос вещества. Определить относительные изменения периода обращения двойной звезды  $\frac{\Delta T}{T}$  и расстояния между звездами  $\frac{\Delta a}{a}$ , если масса звезды уменьшилась на  $\Delta m = 10^{-2}M_0$ . От какой звезды происходит перенос вещества, если расстояние между ними увеличивается? Из-за сильной концентрации вещества звезд к центру их моменты инерции сравнительно малы, и собственным вращением звезд можно пренебречь.

**7.114.** Расстояние от Земли до двойной звезды в созвездии Центавра равно  $l = 2,61 \cdot 10^5$  а. с. Наблюдаемое угловое расстояние между звездами в этой системе периодически (с периодом  $T = 80$  лет) меняется, достигая максимального значения  $\varphi = 0,85 \cdot 10^{-5}$  рад. Определить суммарную массу звезд. Орбиты звезд считать круговыми.

**7.115.** При наблюдении пульсара PSR 1257+12 были обнаружены периодические изменения интервалов времени между приходящими от него импульсами. Период изменений  $T = 66,6$  суток  $= 5,75 \cdot 10^6$  с. Одно из возможных объяснений этого явления состоит в том, что пульсар под действием гравитационного взаимодействия с обращающейся вокруг него планетой движется по круговой орбите радиуса  $R = 440$  км. Определить массу планеты, считая ее малой по сравнению с массой пульсара. Масса пульсара  $M_{\text{п}} = 2 \cdot 10^{30}$  кг.

**7.116.** В вершинах квадрата расположены 4 материальных точки массы  $M$ . В начальный момент скорости всех точек равны по величине и направлены по касательным к описанной вокруг квадрата окружности радиуса  $R$ . Точки движутся под действием собственного тяготения. Известно, что в процессе этого движения минимальное расстояние от центра окружности до одной из точек оказалось равным  $r$ . Описать движение точек; найти параметры этого движения.

**7.117.** Маленький шарик массы  $m$ , имеющий на бесконечности скорость  $v_0$ , пролетает через шар массы  $M$  и радиуса  $R$ , в котором вдоль диаметра просверлен канал в направлении движения шарика. Принимая во внимание гравитационное взаимодействие между шарами, определить их относительную скорость в момент, когда маленький шарик пролетает через центр большого шара. Начальную скорость большого шара считать равной нулю.

**7.118.** Летающая тарелка, дурача в очередной раз назойливых UFOлогов, ускользает от них через отверстие в нашей метрике в 4-мерное пространство. Однако в момент прохождения через отверстие отказывает двигатель тарелки, так что она смогла углубиться в него лишь на расстояние  $L$ , много большее размеров тарелки. Через какое время  $T$ , влетев в это пространство (после исчезновения), тарелка

вновь вылетит в наше пространство? Считать, что в 4-мерном пространстве отверстие притягивает любое тело массы  $m$  с силой  $F = \frac{am}{x^3}$ .

**7.119.** Рассматривая вспышку сверхновой звезды 1987 г. как процесс образования из атомов с малой атомной массой одного ядра с  $A_{зв} = 10^{57}$  (нейтронная звезда), рассчитать высвободившуюся гравитационную энергию  $W_r$ . Принять, что радиус ядра  $R = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  см.

**7.120:** Пренебрегая сопротивлением атмосферы, найти минимальную работу, которую надо затратить, чтобы доставить массу в 1 кг с поверхности Земли на поверхность Луны. Радиус Земли 6400 км, радиус Луны 1740 км; ускорение свободного падения на Луне, вызванное ее собственным притяжением, составляет  $g_L = 0,16 g_3$ , где  $g_3 = 9,8 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Влияние Солнца и других планет не учитывать.

**7.121:** Вычислить приближенно третью космическую скорость, предполагая, что ракета выходит из зоны действия земного тяготения под углом  $\theta$  к направлению орбитального движения Земли вокруг Солнца. Считать, что кроме Земли и Солнца на ракету никакие другие тела не действуют. (Третьей космической скоростью называется минимальная скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы (ушла на бесконечность).)

**7.122:** Вычислить приближенно четвертую космическую скорость, т.е. минимальную скорость, которую надо сообщить ракете на поверхности Земли, чтобы ракета могла упасть в заданную точку Солнца. Средний угловой радиус Солнца  $\alpha = 4,65 \cdot 10^{-3}$  рад. Предполагается, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите со скоростью  $V_k = 29,8 \text{ км/с}$ . Вычислить, в частности, значение четвертой космической скорости при дополнительном условии, что ракета падает на Солнце радиально (т.е. что продолжение ее прямой траектории проходит через центр Солнца).

**7.123.** Найти ту точку на прямой линии, соединяющей Землю и Луну, в которой напряженность  $g$  результирующего поля тяготения Земли и Луны равна нулю. Масса Земли приблизительно в 81 раз больше массы Луны, среднее расстояние между этими планетами 384 000 км.

**7.124:** Подсчитать гравитационную энергию  $U$  шара радиуса  $R$ , равномерно заполненного веществом с объемной плотностью  $\rho$ .

**7.125:** В сплошном однородном шаре с плотностью вещества  $\rho$  сделана сферическая полость, центр которой  $O_1$  смещен относительно центра шара  $O$  (рис. 139). Найти гравитационное поле в такой полости.

**7.126.** Пусть от поверхности Земли до ее центра прорыта узкая шахта и некоторое тело падает из бесконечности в эту шахту, достигая центра Земли. Какую скорость будет иметь тело в этот момент, если Землю считать однородным шаром?

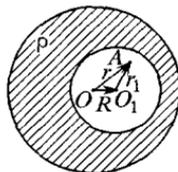


Рис. 139

7.127. Как связаны между собой период  $T_1$  спутника, обращающегося вокруг планеты в непосредственной близости от ее поверхности, и период колебаний тела  $T_2$  внутри прямолинейного канала, проходящего от одного полюса планеты к другому, если плотность вещества планеты  $\rho$  постоянна? Качественно описать, как изменится соотношение между периодами, если плотность планеты при сохранении ее массы будет возрастать к центру.

7.128. Два одинаковых груза, связанных пружиной, падают в прямом тоннеле, соединяющем диаметрально противоположные точки Земли. При этом пружина оказывается слегка сжатой. С какой относительной точностью надо измерять длину пружины, чтобы заметить сжатие? Известно, что отношение периода колебаний грузов относительно центра Земли  $T_{Зм}$  к периоду колебания их друг относительно друга  $T_{мм}$  равно  $10^3$ . Считать Землю однородным невращающимся шаром.

7.129. Представьте себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. Найти закон движения тела, упавшего в эту шахту, учитывая изменения значения ускорения свободного падения внутри Земли. Трение о стенки шахты и сопротивление воздуха не учитывать.

7.130. Через центр шара радиуса  $R$  из материала плотности  $\rho$  (рис. 140) просверлено отверстие радиуса  $r$ . Найти напряженность поля тяготения в точке  $A$ , показанной на рисунке, если  $r \ll R$ .

7.131. Внутри неподвижного шара радиуса  $R$  с однородной плотностью вещества имеется сферическая полость. Расстояние между центрами шара и полости  $a$ . Найти период малых колебаний математического маятника в полости, если период колебаний этого же маятника на поверхности шара в отсутствие полости равен  $T_0$ . Длина маятника много меньше радиуса шара.

7.132. Считая Землю однородным шаром радиуса  $R$  и плотности  $\rho$ , найти зависимость гравитационного давления от расстояния до центра Земли. Оценить давление в центре Земли, полагая  $R = 6400$  км,  $\rho = 5,5$  г/см<sup>3</sup>.

7.133. В воображаемой шахте, проходящей через центр планеты, измерено ускорение свободного падения  $g$ , как функция радиуса. Зная  $g(r)$ , определить зависимость плотности  $\rho(r)$ , считая, что плотность сферически симметрична.

7.134. Ракета с нулевой начальной скоростью свободно падает в гипотетическом цилиндрическом канале, проходящем между северным и южным полюсами Земли. В момент прохождения через центр Земли включаются двигатели, сообщаящие ракете дополнительную скорость  $\Delta v = v_{1к}$  ( $v_{1к}$  — первая космическая скорость на поверхности Земли) в направлении ее движения. Считая время работы двигателей пренебрежимо малым, а Землю однородным шаром, вычислить скорость ракеты в момент достижения поверхности Земли.

7.134. Ракета с нулевой начальной скоростью свободно падает в гипотетическом цилиндрическом канале, проходящем между северным и южным полюсами Земли. В момент прохождения через центр Земли включаются двигатели, сообщаящие ракете дополнительную скорость  $\Delta v = v_{1к}$  ( $v_{1к}$  — первая космическая скорость на поверхности Земли) в направлении ее движения. Считая время работы двигателей пренебрежимо малым, а Землю однородным шаром, вычислить скорость ракеты в момент достижения поверхности Земли.

**7.135.** Найти относительную разность периодов колебаний  $\Delta T/T$  одного и того же маятника, помещенного сначала на башне, а затем в глубокой шахте. Высота башни относительно уровня моря  $h = 500$  м, глубина шахты  $H = 2$  км. Землю считать однородным шаром радиуса  $R = 6400$  км. Влиянием притяжения башни пренебречь.

**7.136.** Математический маятник расположен на поверхности Земли над тоннелем метро. Тоннель находится на глубине  $H = 15$  м, а его диаметр  $2R = 10$  м. Принимая среднюю плотность грунта равной  $\rho = 2$  г/см<sup>3</sup>, оценить относительное изменение периодов колебаний  $\Delta T/T$  маятника, вызванное наличием тоннеля (рис. 141).

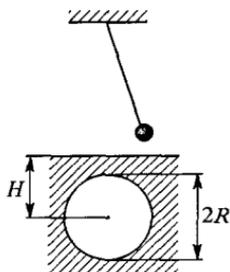


Рис. 141

**7.137.** В одном из проектов предлагалось использовать для движения поездов силу земного тяготения, соединив пункты отправления и назначения прямым подземным тоннелем. Считая плотность Земли постоянной и пренебрегая трением, найти время, за которое поезд (без двигателя) пройдет тоннель.

**7.138.** Непосредственно под дном океана в районе «Бермудского треугольника» находится металлический метеорит в виде шара радиуса  $R = 2$  км. Глубина океана  $H = 6$  км. Найти прогиб  $z$  поверхности океана в этом месте. Плотность пород, образующих дно, принять равной  $2,5$  г/см<sup>3</sup>, плотность метеорита  $7,5$  г/см<sup>3</sup>.

**7.139.** Согласно одной из моделей строения Земли, ее плотность изменяется линейно от  $\rho_1 = 12$  г/см<sup>3</sup> в центре до  $\rho_2 = 3$  г/см<sup>3</sup> на поверхности. Считая Землю шаром радиуса  $R_3 = 6400$  км, вычислить, на каком расстоянии от центра Земли величина ускорения свободного падения  $g$  максимальна и во сколько раз  $g_{\max}$  больше величины  $g$  на поверхности?

**7.140.** Согласно одной из моделей строения Меркурия, он состоит из центральной части (ядра) с плотностью  $\rho_1 = 9,5$  г/см<sup>3</sup> и радиусом  $R_{\text{я}}$ , равным  $0,7$  радиуса планеты  $R_{\text{М}}$  и периферийной части с плотностью  $\rho_2 = 3,5$  г/см<sup>3</sup>. Считая Меркурий шаром, вычислить, на каком расстоянии от центра планеты  $r_0$  величина ускорения свободного падения  $g$  максимальна и во сколько раз  $g_{\max}$  больше величины  $g$  на поверхности?

**7.141.** В плоском слое однородного вещества имеется тонкий канал, перпендикулярный плоскости слоя, в котором под действием гравитационных сил движется без трения небольшое тело. Вычислить период его колебания относительно положения равновесия, задавшись любыми исходными численными данными.

**7.142.** Небольшое тело вращается по круговой орбите под действием сил гравитации вокруг однородного длинного стержня. Вычислить период обращения, задавшись любыми исходными численными данными (масса стержня, приходящаяся на единицу длины, и т. д.).

**7.143.** В длинном цилиндре радиуса  $R$  из материала плотности  $\rho$  имеется сферическая полость радиуса  $R/2$ , центр которой находится на расстоянии  $R/2$  от оси цилиндра. Определить напряженность поля тяготения в точке  $A$  (рис. 142).

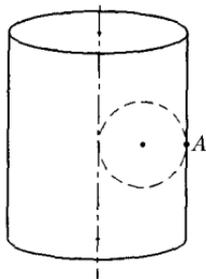


Рис. 142

**7.144.** Солнечная система пролетает на большом расстоянии от гипотетической космической струны — прямолинейного массивного образования бесконечной длины, располагающегося в плоскости, перпендикулярной скорости системы. Считая, что в силу небольшой погонной массы струны движение Солнечной системы останется практически равномерным и прямолинейным, найти величину дополнительной скорости, полученной системой в направлении, перпендикулярном первоначальной скорости, а также угол, на

который в результате отклонится вектор скорости. Скорость системы —  $v$ , масса единицы длины струны —  $\mu$ .

## § 8. Специальная теория относительности

**8.1я.** Космический корабль с постоянной скоростью  $V = (24/25)c$  движется по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени  $\Delta t' = 7$  с, отсчитанный по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

**8.2я.** Космонавт находится в неосвещенном космическом корабле, движущимся относительно Земли со скоростью, очень близкой к скорости света  $c$ . На небольшом расстоянии от космонавта расположено зеркало так, что линия, соединяющая космонавта и зеркало, параллельна скорости корабля. Увидит ли космонавт свое изображение в зеркале после включения источника света, расположенного рядом с космонавтом? (Загадка Эйнштейна.)

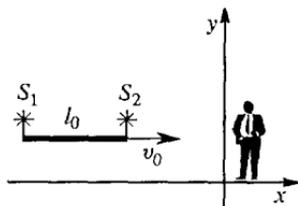


Рис. 143

**8.3.** Стержень имеет собственную длину  $l_0$ . На концах стержня укреплены две лампочки  $S_1$  и  $S_2$ . Стержень движется со скоростью  $v_0$  по направлению к неподвижному наблюдателю (рис. 143). Лампа  $S_1$  испускает свет раньше, чем  $S_2$ , так что обе вспышки достигают наблюдателя одновременно. В моменты испускания света лампы  $S_1$  и  $S_2$  находились в точках  $x_1$  и

$x_2$  соответственно. Какое расстояние  $x_1 - x_2$  между лампочками измерит наблюдатель? (Это будет видимая длина стержня, как она воспринимается глазом человека или фиксируется фотоаппаратом.)

**8.4.** Две линейки, собственная длина каждой из которых равна  $l_0$ , движутся навстречу друг другу параллельно общей оси  $x$

с релятивистскими скоростями. Наблюдатель, связанный с одной из них, зафиксировал, что между совпадениями левых и правых концов линеек прошло время  $\tau$ . Какова относительная скорость линеек?

**8.5.** Два шарика диаметра  $d_0$  (в системе покоя) приведены в движение навстречу друг другу с релятивистской скоростью  $v$ . После лобового столкновения в определенных условиях можно считать, что шарики мгновенно останавливаются, а затем происходит их разлет. Каков размер системы  $l$  в момент остановки? (Таковыми шариками в некотором приближении можно считать, например, протоны, в результате соударения которых образуются новые частицы — пионы и пр.)

**8.6.** Межзвездный корабль движется к ближайшей звезде, находящейся на расстоянии  $L = 4,3$  световых года, со скоростью  $v = 1000$  км/с. Достигнув звезды, корабль возвращается обратно. На какое время  $\Delta t$  часы на корабле отстанут от земных часов по возвращении корабля на Землю?

**Примечание.** Ввиду большой скорости корабля движение звезды относительно Солнца можно не учитывать.

**8.7.** Космический корабль летит со скоростью  $V = 0,6c$  от одного космического маяка к другому. В тот момент, когда он находится посередине между маяками, каждый из них испускает в направлении корабля световой импульс. Найти, какой промежуток времени пройдет на корабле между моментами регистрации этих импульсов. Расстояние между маяками свет проходит за 2 месяца.

**8.8.** Корабль, летящий по направлению к Земле, испускает последовательно два коротких световых импульса с интервалом времени между ними  $\tau_1 = 1$  мин. Отраженные от Земли, эти импульсы возвращаются на корабль через  $T = 1,5$  мес. При этом временной интервал между принятыми сигналами составляет  $\tau_2 = 15$  с. Найти, какое время  $T_3$  пройдет на Земле от момента получения первого светового импульса до прилета корабля. Определить также скорость корабля. Промежутки времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $T$  отсчитываются по часам корабля.

**8.9.** Два звездолета с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу. На одном звездолете на носу и на корме одновременно зажигаются каждую секунду сигнальные огни. На встречном звездолете наблюдают каждые  $1/2$  секунды две вспышки с интервалом времени  $\tau' = 1$  мкс. Найти длину  $l_0$  первого звездолета и скорость их сближения  $\beta$ .

**8.10.** Два звездолета с выключенными двигателями движутся навстречу друг другу. Сигнал бортового локатора отражается от встречного звездолета с частотой в  $k = 9$  раз большей посланного. Встречный звездолет пролетит мимо регистрирующего прибора на борту первого звездолета за  $\tau = 1$  мкс. Найти собственную длину встречного звездолета  $l_0$ .

**8.11.** Световой сигнал, посылаемый на Землю с планеты Саракш, возвращается на Саракш через время  $2T = 30$  лет. Скорость планеты относительно Земли пренебрежимо мала, а ее календарь согласован с

земным. Звездолет летит по направлению к Солнечной системе со скоростью  $v = 0,6c$ . В день, когда он пролетает мимо Саракша, на звездолете рождается мальчик Ваня. В тот же день (по саракшско-земному календарю) на Земле рождается мальчик Петя. Сколько лет будет Ване и Пете, когда звездолет будет пролетать мимо Земли?

**8.12.** Прогрессор Комов (герой Стругацких) совершает межзвездное путешествие на звездолете. В день, когда ему исполнилось 30 лет и звездолет находился вблизи планеты Пандора, он послал на Землю световой сигнал. Сигнал приняли на Земле через 12,5 лет. Когда Комову исполнилось 45 лет, и звездолет вновь оказался вблизи планеты Пандора, прогрессор принял отраженный от Земли сигнал. Вычислить скорость звездолета  $v_0$ . Часы звездолета и Земли в момент посылки сигнала синхронизованы. Скоростью Земли относительно планеты Пандора можно пренебречь.

**8.13\*** Два космических корабля 1 и 2 направляются к Земле (рис. 144), двигаясь вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями  $v = 0,6c$ . В некоторый момент времени каждый корабль и Земля по-

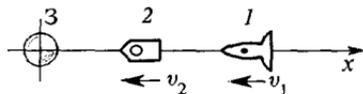


Рис. 144

сылают друг другу короткие световые сигналы (корабль 1 посылает сигнал на корабль 2 и на Землю, корабль 2 — на корабль 1 и на Землю, и Земля — на корабли 1 и 2). Известно, что все сигналы посылаются одновременно в системе отсчета, связанной с Землей.

Оказалось, что промежуток времени между принятыми сигналами по бортовым часам корабля 1 составил  $\tau_1 = 1$  с, а по бортовым часам второго корабля —  $\tau_2 = 0$ . Какое время между принятыми сигналами  $\tau_3$  будет зарегистрировано на Земле?

**8.14.** Два космических корабля 1 и 2 направляются к Земле, двигаясь вдоль одной прямой (рис. 144). В некоторый момент времени каждый корабль и Земля посылают друг другу короткие световые сигналы (корабль 1 посылает сигнал на корабль 2 и на Землю, корабль 2 — на корабль 1 и на Землю, и Земля — на корабли 1 и 2). Известно, что все сигналы посылаются одновременно в системе отсчета, связанной с Землей. Оказалось, что промежуток времени между принятыми сигналами по бортовым часам корабля 1 составил  $\tau_1 = 5$  с (скорость этого корабля  $v = 0,6c$ ), а по бортовым часам второго корабля —  $\tau_2 = 0$ . Какое время между принятыми сигналами  $\tau_3$  будет зарегистрировано на Земле, если оба корабля достигнут Земли одновременно?

**8.15\*** Из начала отсчета системы  $K$  вдоль оси  $x$  через интервал времени  $T$  (по часам  $K$ ) посылаются кратковременные световые импульсы. Найти интервал времени, через который эти импульсы будут приходить к наблюдателю в системе  $K'$ , учитывая относительность промежутков времени между событиями. Рассмотреть случаи удаления и сближения наблюдателя и источника. Переходя от периодов к частотам, получить релятивистские формулы для продольного эффекта Доплера.

**8.16я.\*** Стержень, собственная длина которого равна  $l_0$ , покоится в системе отсчета  $K'$ ; он расположен так, что составляет с осью  $x'$  угол  $\varphi'$ . Какой угол составляет этот стержень с осью  $x$  другой системы отсчета  $K$ ? Чему равна длина этого стержня в системе  $K$ ?

**8.17\*** Можно ли с помощью фотоаппарата зафиксировать сокращение Лоренца по изменению формы предмета, пролетающего мимо точки фотографирования с релятивистской скоростью? Рассмотреть случай куба и шара, летящих на большом расстоянии от точки фотографирования.

**8.18\*** Найти скорость частицы (заряд  $e$ , масса  $m$ ), прошедшей разность потенциалов  $V$  без начальной скорости. Найти предельные выражения для скорости: 1) для классического случая ( $v \ll c$ ); 2) для ультрарелятивистского ( $v \approx c$ ).

**8.19я.\*** Найти пробег  $l$  релятивистской заряженной частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  при начальной полной энергии  $\mathcal{E}_0$  в тормозящем однородном электрическом поле, параллельном начальной скорости частицы.

**8.20я.\*** Какую часть энергии покоя частицы должна составлять релятивистская кинетическая энергия  $K_r$ , чтобы относительная ошибка, полученная при использовании нерелятивистского выражения для кинетической энергии, составляла бы 1%? Найти соответствующую энергию для протона и электрона.

**8.21.** Выразить релятивистский импульс частицы, масса которой равна  $m$ , через ее релятивистскую кинетическую энергию.

**8.22.** Журнал «Химия и жизнь» однажды неосторожно сообщил, что у фотона якобы обнаружена конечная масса покоя, равная всего 0,0005 эВ. Предложите собственную оценку возможной массы покоя фотона  $m_0$ , воспользовавшись тем, что измеренная по времени полета к Луне и обратно скорость импульса радиоволн с частотой 10 ГГц не отличается от скорости светового импульса в пределах точности эксперимента, которая определяется неровностями лунного рельефа и соответствует неопределенности в расстоянии примерно в 100 м. Расстояние до Луны — 380 тыс км. Допустимо считать скорость импульса света, частота которого намного больше, чем у радиоволн, точно равной  $c$ , а энергию «радиофотона» определять по формуле Планка.

**8.23.** Вспышка сверхновой 23.02.87 в Большом Магеллановом облаке сопровождалась на Земле нейтринным всплеском, а также сигналом гравитационной антенны. По утверждению газеты «Известия» от 11.03.87, запаздывание нейтрино от гравитационной волны составило 0,1 с, откуда должно было следовать, что масса покоя нейтрино может составлять величину порядка 1,5 эВ. Принимая интерпретацию газеты, найти энергию нейтрино, регистрируемых на Земле. Расстояние до сверхновой 180 тыс световых лет. Считать, что гравитационные волны распространяются со скоростью света.

**8.24.** В 1963 г. в космических лучах был обнаружен протон с колоссальной энергией  $10^{20}$  эВ. Предполагая, что он родился на границе нашей Галактики на расстоянии от Земли  $10^5$  световых лет и его

полная энергия все время линейно росла со временем, начиная с энергии покоя 1 ГэВ, подсчитать, сколько времени занял этот путь по «собственным часам» протона.

**8.25.** На линейном ускорителе в Стенфорде (США) электроны ускоряются от энергии покоя 0,5 МэВ до 40 ГэВ в прямой трубе длины  $l_0 = 3$  км. Считая, что ускорение электрона происходит вдоль трубы равномерно (т.е. пропорционально длине растёт его полная энергия), определить, какой «кажется» длина трубы самому электрону.

**8.26.** Звездолет движется со скоростью  $V$ , определяемой релятивистским фактором  $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} = 100$  в межзвездном газе, который состоит из атомарного водорода с концентрацией  $n = 1 \text{ см}^{-3}$ . Тепловые скорости атомов газа много меньше  $c$ . Перед носом звездолета установлен экран поперечного сечения  $S = 10^8 \text{ см}^2$ , которое больше поперечных размеров звездолета. Экран улавливает все атомы, на которые он налетает. Определить силу  $F'$ , которую покажет динамометр, включенный между экраном и звездолетом. Определить также массу топлива в единицу собственного времени  $\mu'$ , которую должен аннигилировать фотонный двигатель, чтобы поддерживать скорость звездолета постоянной.

**8.27.** Некоторыми исследователями недавно зарегистрирован прилет частиц космических лучей от источника Лебедь X-3, расположенного на расстоянии  $\tau = 40$  тыс световых лет от Солнца. В числе других возможных нейтральных частиц, сохраняющих в полете направление на источник, рассматривается нейтрон (энергия покоя  $m_0 c^2 = 940$  МэВ). Известно, что нейтрон распадается со средним временем жизни  $\tau_0 = 940$  с. Определить энергию нейтрона, при которой он может достичь Земли.

**8.28.** При взрыве сверхновой 23 февраля 1987 г. в Большом Магеллановом облаке, находящемся от Земли на расстоянии  $L = 180$  тыс световых лет, были зарегистрированы две группы нейтрино с интервалом в 1 час. Согласно одной из гипотез, эти две группы нейтрино родились одновременно, но обусловлены разными процессами и соответственно имеют нулевую и ненулевую (около 20 эВ) энергию покоя. Оценить энергию второй группы нейтрино, при которой такое объяснение возможно.

**8.29.** С космического корабля, приближающегося к Земле со скоростью  $v = 0,6c$ , ведется прямая телевизионная передача, позволяющая видеть на экране телевизора циферблат корабельных часов. Сколько оборотов сделает на экране секундная стрелка за 1 мин по земным часам?

**8.30.** Вслед космическому кораблю, удаляющемуся от Земли со скоростью  $v = 0,8c$ , каждую секунду посылают сигналы точного времени. Какое время между поступлением двух сигналов будет проходить по корабельным часам?

**8.31.** После 16 оборотов вблизи Земли спутник опустился обратно на космодром. На сколько разошлись часы на спутнике и на

космодроме, и с какой погрешностью можно заметить этот эффект, если стабильность и воспроизводимость часов составляет  $10^{-13}$  (водородный мазер)? Влиянием кривизны траектории, силы притяжения к Земле и ускорения во время взлета и посадки спутника на ход часов пренебречь.

**8.32.** Определить время жизни  $\tau$  мюона  $\mu$  с энергией  $E = 10^9$  эВ (в лабораторной системе отсчета). Время жизни медленного (покоящегося) мюона  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  с, масса мюона  $m = 206,7 m_e$  ( $m_e$  — масса электрона).

**8.33.** Снаряду массы  $m_0 = 1000$  т сообщена скорость  $V$  в направлении касательной к земной орбите. Какова должна быть разность между скоростью света  $c$  и скоростью снаряда  $V$ , чтобы Земля стала двигаться относительно Солнца по параболической траектории? Масса Земли  $M = 6 \cdot 10^{21}$  т, скорость ее орбитального движения  $v = 29,8$  км/с. Сравнить кинетическую энергию снаряда с кинетической энергией орбитального движения Земли.

**8.34.** Снаряду массы  $m_0 = 1$  т на экваторе сообщена горизонтальная скорость  $v$  в направлении вращения Земли. Какова должна быть разность  $c - v$  скоростей света и снаряда, чтобы остановить вращение Земли вокруг собственной оси? Радиус Земли  $R = 6370$  км, масса  $M = 6 \cdot 10^{21}$  т. Момент инерции Земли относительно оси вращения с учетом неоднородности ее плотности  $\mathcal{I} = MR^2/3$ . Сравнить кинетическую энергию снаряда с кинетической энергией земного шара.

**8.35.** Определить мощность  $N$  фотонной ракеты, движущейся за пределами Солнечной системы с нерелятивистской скоростью и постоянным ускорением  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Масса ракеты  $m$  равна 1 т. Сравнить развиваемую мощность с мощностью Братской ГЭС (4,5 млн кВт).

**8.36.** Какая кинетическая энергия  $K$  должна быть сообщена межзвездному кораблю массы  $m = 10^4$  кг, чтобы его часы по возвращении на Землю показывали вдвое меньшее время, чем часы на Земле? Сколько тонн урана  $M$  должно прореагировать, чтобы выделилось такое количество энергии? При делении одного атома урана выделяется энергия 170 МэВ. Какую скорость  $v$  будет иметь корабль при такой кинетической энергии?

**8.37** По современным представлениям звезды могут переходить в гравитационно неустойчивые состояния, в которых силы тяготения при стремлении радиуса звезды к определенному пределу (называемому гравитационным радиусом) стремятся к бесконечности, в то время как давление внутри звезды остается конечным. Это приводит к катастрофическому сжатию (релятивистскому коллапсу) звезды. Для полного описания такого процесса ньютонов закон всемирного тяготения неприменим. Пользуясь формулой Эйнштейна о связи между массой и энергией  $E = Mc^2$ , найти условие, необходимое для применимости ньютонова закона тяготения. Сделать

численную оценку для звезды, масса которой равна массе Солнца  $M_C = 2 \cdot 10^{33}$  г.

**8.38.** На покоящуюся частицу массы  $m_1$  налетает частица массы  $m_2$ , кинетическая энергия которой равна  $K_2$ . После столкновения частицы слипаются и движутся как целое. Найти массу  $M$  образовавшейся частицы. При каких условиях эта масса приблизительно равна сумме масс исходных частиц? Найти скорость  $v$  образовавшейся частицы.

**8.39.** При распаде некоторой частицы появляются две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Из опыта известны абсолютные величины импульсов  $p_1$  и  $p_2$  этих частиц и угол  $\theta$  между направлениями их разлета. Найти массу распавшейся частицы.

**8.40.** Покоящееся тело массы  $M$  распадается на две части с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Вычислить кинетические энергии  $K_1$  и  $K_2$  продуктов распада.

**8.41.\*** Частица массы  $m$  испытывает упругое соударение с неподвижной частицей такой же массы. Найти кинетическую энергию  $K_1$  рассеянной частицы по кинетической энергии  $K_0$  налетающей частицы и углу рассеяния  $\theta_1$ .

**8.42.** Релятивистский протон с кинетической энергией  $K$  испытывает упругое столкновение с покоящимся протоном, в результате чего частицы разлетаются симметрично относительно первоначального направления движения первого протона. Найти угол  $\theta$  между направлениями разлета протонов.

**8.43.** Релятивистский  $\pi^0$ -мезон (энергия покоя  $m_0c^2$ ) распадается на лету на два фотона с энергиями  $E_1$  и  $E_2$ . Найти угол  $\theta$  между направлениями разлета фотонов.

**8.44.** Покоящийся  $\pi^+$ -мезон (энергия покоя  $m_\pi c^2 = 139,6$  МэВ) распадается на антимюон  $\mu^+$  (энергия покоя  $m_\mu c^2 = 105,7$  МэВ) и нейтрино  $\nu$  (энергия покоя равна нулю). Найти кинетические энергии  $K_\mu$  и  $K_\nu$  продуктов распада.

**8.45.** При распаде «на лету»  $\Omega^-$ -гиперона ( $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$ ) измерены импульсы частиц распада  $p_\Lambda = 5,7$  ГэВ/с и  $p_K = 2,0$  ГэВ/с ( $c$  — скорость света) и угол разлета между ними  $\theta = 28,5^\circ$ . Определить массу  $\Omega^-$ -гиперона.

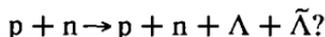
**8.46.** В 1984 г. была обнаружена новая  $\xi$ -частица, как продукт распада покоящейся  $Y$ -частицы в реакции  $Y \rightarrow \xi + \gamma$ , причем энергия  $\gamma$ -кванта оказалась равной  $E_\gamma = 1072$  МэВ. Найти энергию и скорость  $\xi$ -частицы, если энергия покоя  $Y$ -частицы равна  $m_Y c^2 = 9460$  МэВ.

**8.47.\*** При столкновении протонов высоких энергий могут образовываться антипротоны  $\bar{p}$  согласно реакции



Какой минимальной (пороговой) кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с покоящимся протоном была возможна такая реакция?

**8.48.** Какой минимальной кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с покоящимся нейтроном была возможна реакция



Массы частиц, участвующих в реакции:  $m_p = 1836m_e$ ,  $m_n = 1838m_e$ ,  $m_\Lambda = m_{\bar{\Lambda}} = 2183m_e$ . Различием масс протона и нейтрона можно пренебречь.

**8.49.** В 1976 г. впервые наблюдался первый очарованный барион — антилямбда-гиперон  $\bar{\Lambda}_c$  с энергией покоя  $M_{\bar{\Lambda}_c}c^2 = 2,26$  ГэВ. Найти, при какой минимальной кинетической энергии ускоренных протонов можно наблюдать рождение пары  $\Lambda_c\bar{\Lambda}_c$  при облучении протонами жидководородной мишени.

**8.50.** Нейтральный пион (энергия покоя пиона  $M_\pi c^2 = 0,135$  ГэВ) распадается на лету на два  $\gamma$ -кванта с энергиями  $E_1 = 2,0$  ГэВ и  $E_2 = 3,2$  ГэВ. Найти угол  $\varphi$  разлета  $\gamma$ -квантов друг относительно друга.

**8.51.** Покоящийся пион ( $m_\pi = 273m_e$ ) распадается на мюон ( $m_\mu = 207m_e$ ) и нейтрино. Найти их кинетические энергии и импульсы.

**8.52.** Найти максимальное число пионов, которое может образоваться при столкновении протона с энергией  $E = 17$  ГэВ с покоящимся протоном.

**8.53.** В 1983 г. был открыт  $Z^0$ -бозон. При анализе его распада —  $Z^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  — найдены два следа мюонов с импульсами  $p = 95$  ГэВ/с ( $c$  — скорость света) при угле разлета  $\theta = 70^\circ$ . Найти скорость и массу  $Z^0$ -бозона.

**8.54.**  $D^0$ -мезон распадается «на лету» на  $K^-$ -мезон (каон) и  $\pi^+$ -мезон (пион). Расстояние от точки его рождения до точки распада  $l = 1,05$  мм. Импульсы каона и пиона равны  $p_K = 3,6$  ГэВ/с и  $p_\pi = 1,9$  ГэВ/с ( $c$  — скорость света) и направлены под углами  $\theta_K = 13^\circ 30'$  и  $\theta_\pi = 27^\circ 50'$  к направлению импульса  $D^0$ -мезона. Определить массу, скорость и время жизни  $D^0$ -мезона. Считать каон и пион ультрарелятивистскими.

**8.55.** При аннигиляции остановившегося антипротона в жидком водороде образовано три пиона:  $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ . Определите энергию каждого из них, если один из пионов имел максимально возможную энергию.

**8.56.** Заряженный пион, имеющий энергию  $E_\pi = 420$  МэВ, распадается «на лету» на мюон и нейтрино. Определить энергию мюона  $E_\mu$  в лабораторной системе, если в системе покоя пиона мюон вылетел под углом  $90^\circ$  к направлению полета пиона. Энергия покоя пиона  $m_\pi c^2 = 140$  МэВ, а мюона  $m_\mu c^2 = 106$  МэВ.

**8.57.** За распадом остановившегося в ядерной фотоэмульсии  $K^+$ -мезона по схеме:  $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$  последовал распад  $\pi^0$ -мезона по схеме  $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$ , причем вершина пары  $e^+e^-$  находилась на

расстоянии  $l = 0,1$  мкм от места остановки  $K^+$ -мезона. Оценить время  $\tau_0$  жизни  $\pi^0$ -мезона, если известно, что энергия покоя  $K^+$ -мезона  $M_{K^+}c^2 = 494$  МэВ, энергия покоя  $\pi^+$ -мезона  $M_{\pi^+}c^2 = 140$  МэВ и энергия покоя  $\pi^0$ -мезона  $M_{\pi^0}c^2 = 135$  МэВ.

**8.58.** При рождении  $\pi^+$ - и  $K^+$ -мезонов в мишени ускорителя (с импульсами  $p_{\pi} = p_K = 2$  ГэВ/с) количества частиц относятся приблизительно как  $100 : 1$ . Средние времена жизни  $\pi^+$ - и  $K^+$ -мезонов в системе отсчета, где они покоятся, равны соответственно  $\tau_{0\pi} = 2,6 \cdot 10^{-8}$  с,  $\tau_{0K} = 1,28 \cdot 10^{-8}$  с, а энергии покоя  $m_{0\pi}c^2 = 0,140$  ГэВ,  $m_{0K}c^2 = 0,494$  ГэВ. Определить средние времена жизни тех же частиц в лабораторной системе отсчета. Найти отношение чисел  $\pi^+$ - и  $K^+$ -мезонов на расстоянии  $L = 50$  м от мишени.

**8.59.** Две одинаковые частицы (например, два протона), ускоренные до одной и той же энергии  $E = 10$  ГэВ, движутся навстречу друг другу и сталкиваются между собой. Рассмотрев тот же процесс в системе отсчета, связанной с одной из частиц, в которой частица-мишень покоится, а другая движется навстречу ей. Определить энергию  $E'$  второй частицы в этой системе. (Принцип ускорителя на встречных пучках.)

**8.60.** В Серпухове пытались создать ускорительно-накопительный комплекс, включающий кольцевой ускоритель протонов на энергию  $E_{\text{лаб}} = 3 \cdot 10^{12}$  эВ и накопительное кольцо для осуществления встречных пучков протонов, ускоренных до такой же энергии. Найти, какие из самых тяжелых ядер и антиядер могли бы образоваться в реакции  $p + p$  на жидководородной мишени (т.е. при столкновении протона с энергией  $3 \cdot 10^{12}$  эВ с неподвижным протоном) и на встречных пучках.

## § 9. Плоское движение твердого тела

**9.1.** Вычислить момент инерции  $I_x$  кругового конуса относительно оси симметрии  $OX$ ; радиус основания конуса  $R$ , высота  $L$ , масса  $M$ . Вычислить также момент инерции конуса  $I_z$  относительно оси  $OZ$ , перпендикулярной  $OX$ . Точка  $O$  — вершина конуса.

**9.2.** Через цилиндрический блок радиуса  $r$  и массы  $M$  перекинута невесомая нить, на концах которой укреплены грузы с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Найти ускорение грузов и натяжение нитей в системе, учитывая момент инерции  $I$  вращающегося блока, при условии, что нить не скользит по блоку. Определить усилие в подвеске блока.

**9.3я.** Однородный цилиндр массы  $M$  и радиуса  $R$  (рис. 145) вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием веса груза  $P$ , прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр. Найти угол  $\varphi$  поворота цилиндра в зависимости от времени, если при  $t = 0$   $\varphi = 0$ .

**9.4.** На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две легкие нити, нагруженные массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 146). Найти угловое ускорение блока и натяжения  $T_1$  и  $T_2$  нитей, учитывая момент инерции  $I$  блока.

**9.5.** Схема демонстрационного прибора (диск Максвелла) изображена на рис. 147. На валик радиуса  $r$  наглухо насажен сплошной диск радиуса  $R$  и массы  $M$ . Валик и диск сделаны из одного материала, причем выступающие из диска части оси имеют массу  $m$ .

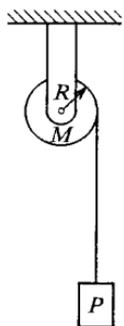


Рис. 145

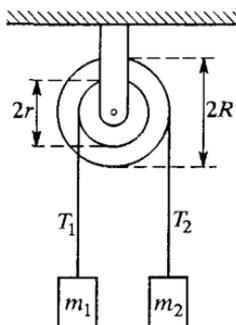


Рис. 146

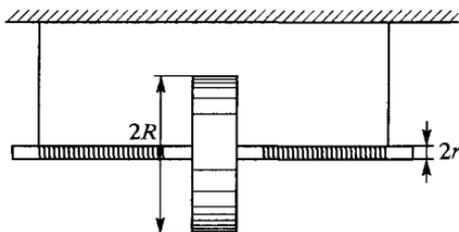


Рис. 147

К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается. Затем диску предоставляют возможность свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

**9.6.** Диск Максвелла подвешен к чашкам весов (рис. 148) так, что расстояния от диска до нитей равны  $a$  и  $b$ . Система уравновешена при неподвижном диске. Определить, какой перегрузок нужно дополнительно положить на весы, чтобы система оказалась уравновешенной при движении диска. Масса диска равна  $m$ , радиус инерции диска —  $R$ , радиус валика —  $r$ . Массой валика пренебречь.

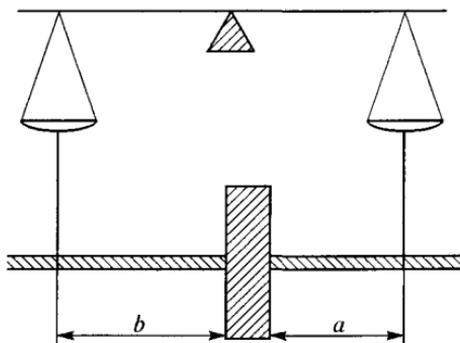


Рис. 148

**9.7.\*** Когда диск Максвелла достигает нижнего положения, он начинает подниматься вверх, сообщая «рывок» нитям. С каким ускорением поднимается диск? Найти натяжение нити во время опускания и поднятия диска, а также оценить приблизительно натяжение нити во время рывка. Масса диска  $M = 1$  кг, его радиус  $R = 10$  см, радиус валика  $r = 0,5$  см. Массой валика, а также растяжением нити во время рывка пренебречь. Предполагается, что

вначале диск был подвешен на длинных нитях, причем длина намотанной части каждой нити составляла  $l = 50$  см.

**9.8.** К шкиву креста Обербека (рис. 149) прикреплена нить, к которой подвешен груз массы  $M = 1$  кг. Груз опускается с высоты  $h = 1$  м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т.е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити  $T$  при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка  $T_{\text{рыв}}$ . Радиус шкива  $r = 3$  см. На кресте укреплены четыре груза массы  $m = 250$  г каждый на расстоянии  $R = 30$  см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

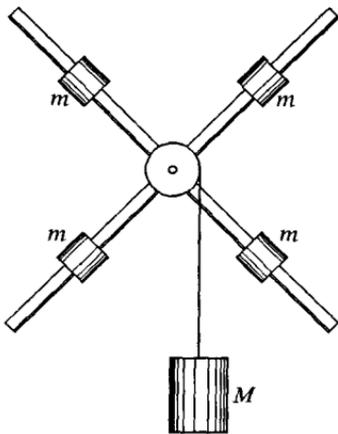


Рис. 149

**9.9.** Концы нитей, накрученных на ось радиуса  $r$  диска Максвелла с массой  $M$  и моментом инерции  $I$ , привязаны к горизонтальной штанге. Диск отпускают и,

когда он начинает раскручиваться, тянут штангу так, что диск остается все время на одной высоте. Определить натяжение нитей и ускорение штанги. Подсчитать работу, которую нужно затратить на перемещение штанги в процессе раскручивания нитей на длину  $L$ .

**9.10я.** На горизонтальную неподвижную ось насажен блок, представляющий собой сплошной цилиндр массы  $M$ . Через него перекинута невесомая веревка, на концах которой висят две обезьяны массы  $m$  каждая. Первая обезьяна начинает подниматься с ускорением  $a$  относительно веревки. Определить, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат будет двигаться вторая обезьяна.

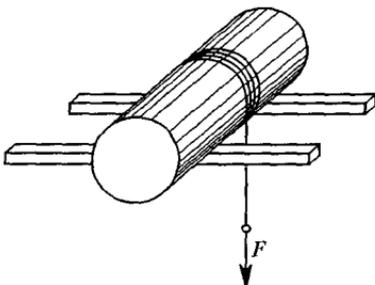


Рис. 150

**9.11.** На тяжелый барабан, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотан легкий гибкий шнур. По шнуру лезет вверх обезьяна массы  $M$ . Определить ее ускорение относительно шнура, если ее скорость относительно земли постоянна. Момент инерции барабана равен  $I$ , его радиус  $R$ .

**9.12я.** На двух параллельных горизонтальных брусках лежит сплошной цилиндр радиуса  $R$  и массы  $m$ , на который намотана веревка. К опущенному вниз концу веревки приложена вертикальная сила  $F$ , равная половине веса цилиндра (рис. 150). Найти горизонтальное ускорение цилиндра и минимальное значение коэффициента трения

между цилиндром и брусками, при котором будет происходить качение без скольжения. Ось цилиндра перпендикулярна к брускам, центр его масс и сила  $F$  лежат в вертикальной плоскости, проходящей посередине между брусками.

**9.13.** К концу веревки, намотанной на цилиндр (см. условие предыдущей задачи), привязан груз массы  $M$ . Веревка переброшена через блок (рис. 151). Определить ускорение груза. Выяснить условия, при которых качение цилиндра будет происходить со скольжением. Массой веревки и блока, а также силами трения на оси блока можно пренебречь. Считать, что во всех случаях движение цилиндра будет плоскопараллельным.

**9.14.** На дифференциальный блок (масса  $M$ , радиусы  $R$  и  $r = 0,5R$ ) намотана нить (рис. 152). На нити подвешен невесомый блок с грузом массы  $m = 0,8M$ . Дифференциальный блок катится без скольжения по горизонтальным рельсам. Найти ускорения груза и блока. Радиус инерции блока  $r_{ин}$  связан с  $R$  соотношением  $r_{ин}^2 = 0,3R^2$ .

**9.15.** Цилиндр радиуса  $R$  имеет выступающие оси радиуса  $r$ . На цилиндр намотана нить, перекинутая через неподвижный невесомый блок, и к ее концу привязан груз массы  $m$ . Оси цилиндра

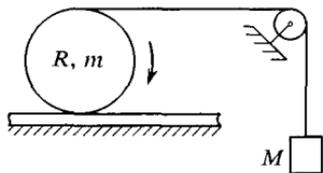


Рис. 151

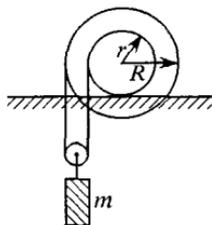


Рис. 152

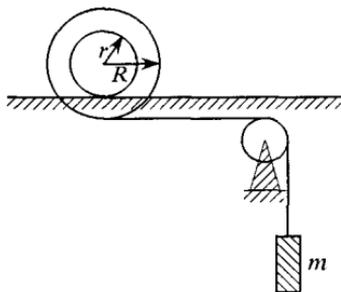


Рис. 153

положены на горизонтальные рельсы (рис. 153). Определить ускорение цилиндра в двух случаях: а) ось катится по рельсам без проскальзывания; б) трения между рельсами и осью нет. Момент инерции цилиндра вместе с осями равен  $I$ , масса —  $M$ .

**9.16.** Определить максимальную линейную скорость точки на поверхности электрона в классической (и неверной) модели, предполагая, что масса электрона  $m = 9,8 \cdot 10^{-28}$  г однородно заполняет сферу радиуса  $r_0 = e^2/(mc^2) = 2,8 \cdot 10^{-13}$  см. Собственный момент количества движения электрона (спин) равен  $\hbar/2$ , где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$  г·см<sup>2</sup>/с — постоянная Планка.

**9.17.** Вертикальный цилиндрический ротор с моментом инерции  $I$  приводится во вращение приложенным к нему моментом сил  $M$ . Найти, как изменяется при движении угловая скорость ротора  $\omega(t)$ , если  $\omega(0) = 0$ , а момент сил сопротивления воздуха

пропорционален угловой скорости с коэффициентом пропорциональности  $k$ . Чему равна установившаяся угловая скорость?

**9.18я.** Найти момент импульса Земли  $L$  относительно ее полярной оси. Считать Землю правильным шаром радиуса  $R = 6000$  км, имеющим плотность  $\rho = 5,5$  г/см<sup>3</sup>.

**9.19я.** Какой момент сил следует приложить к Земле, чтобы ее вращение остановилось через 100 000 000 лет (год — 365,25 «звездных» суток)?

**9.20.** На сплошной цилиндр массы  $m$  намотана тонкая невесомая нить. Другой конец прикреплен к потолку лифта, движущегося вверх с ускорением  $a$ . Найти ускорение цилиндра относительно лифта и силу натяжения нити.

**9.21.** Монета массы  $m$  и радиуса  $r$ , вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью  $\omega$ , вертикально падает на горизонтальный диск и «прилипает» к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг своей оси. Возникающий при этом момент сил трения в оси диска постоянен и равен  $M_0$ . Через какое время вращение диска прекратится? Сколько оборотов  $N$  сделает диск до полной остановки? Момент инерции диска относительно его геометрической оси  $I_0$ . Расстояние между осями диска и монеты равно  $d$ .

**9.22.** На горизонтальный диск, вращающийся вокруг геометрической оси с угловой скоростью  $\omega_1$ , падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью  $\omega_2$ . Моменты инерции дисков относительно указанной оси равны соответственно  $I_1$  и  $I_2$ . Оба диска при ударе сцепляются друг с другом (при помощи острых шипов на их поверхностях). На сколько изменится общая кинетическая энергия вращения системы после падения второго диска? Чем объясняется изменение энергии? Геометрические оси обоих дисков являются продолжением одна другой.

**9.23я.** Сплошной однородный короткий цилиндр радиуса  $r$ , вращающийся вокруг своей геометрической оси со скоростью  $n$  об/с, ставят в вертикальном положении на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов  $N$  сделает цилиндр, прежде чем вращение его полностью прекратится? Коэффициент трения скольжения между основанием цилиндра и поверхностью, на которую он поставлен, не зависит от скорости вращения и равен  $k$ .

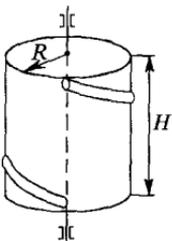


Рис. 154

**9.24.** К боковой поверхности вертикально расположенного сплошного цилиндра массы  $M$ , радиуса  $R$  и высоты  $H$  прикреплена трубка, согнутая в виде одного витка спирали, по которой может скользить без трения шарик массы  $m$  (рис. 154). Цилиндр может

вращаться вокруг своей оси. Шарик опускают в верхнее отверстие трубки без начальной скорости. Найдите скорость шарика после вылета из нижнего конца трубки. Массой трубки и трением в оси пренебречь. Считать, что  $2\pi R = 2H$ , а масса шарика  $m = M/4$ .

**9.25я.** Легкий желоб свернут в виде вертикальной цилиндрической спирали радиуса  $R$ , которая может свободно вращаться около вертикальной оси симметрии (рис. 155). Витки спирали наклонены к горизонту под углом  $\varphi = \pi/4$ . По желобу скользит без трения тело массы  $m$ . Какую скорость приобретет тело в конце спирального спуска, опустившись с высоты  $h$ , если скольжение началось без начальной скорости? Считать массу желоба равной массе тела. Какова будет угловая скорость вращения желоба?

**9.26.** Через плотно навитый змеевик (рис. 156) (по часовой стрелке, если смотреть сверху) с  $N$  витками, который может свободно вращаться в подшипниках, проливается  $\mu$  г/с воды. Масса змеевика —  $M$ , а воды в нем —  $m_0$ . Как будет двигаться змеевик? Кран закрывают. Сколько еще оборотов и в какую сторону совершит змеевик до полного вытекания воды? Как он будет двигаться после этого? Проанализировать случаи  $m_0 \ll M$  и  $m_0 \gg M$ .

**9.27.** Раскрученный до  $n = 1000$  об/мин стальной диск радиуса  $R_1 = 10$  см опускается на первоначально покоившийся стальной диск радиуса  $R_2 = 20$  см (рис. 157). Какова энергия  $Q$ , перешедшая в тепло во время проскальзывания дисков друг относительно друга?

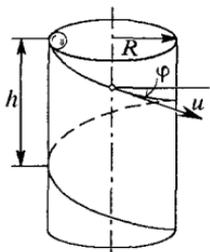


Рис. 155

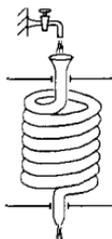


Рис. 156

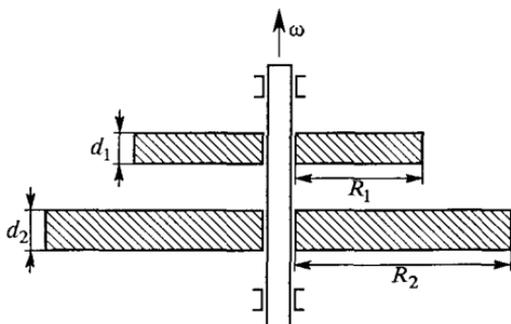


Рис. 157

Толщина дисков  $d_1 = 1$  см,  $d_2 = 2$  см. Моментом инерции оси и трением в подшипниках пренебречь. Плотность стали  $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup>.

**9.28.** Карусель представляет собой однородный массивный диск массы  $M_0$ , вращающийся без трения вокруг вертикальной оси. В момент времени  $t = 0$ , когда угловая скорость карусели достигает значения  $\omega_0$ , выключается мотор, вращающий карусель. С этого же момента карусель начинает равномерно покрываться снегом, падающим в вертикальном направлении. Определить скорость вращения карусели  $\omega$  в произвольный момент времени  $t$ , если ежесекундное приращение массы снега на карусели равно  $\mu$ . Как изменится результат, если на карусели находится человек, который непрерывно сгребает лопатой весь падающий снег к периферии и сбрасывает его в радиальном направлении? Масса человека гораздо меньше массы карусели.

**9.29.** На краях массивной подставки, которая может вращаться без трения вокруг вертикальной оси (рис. 158), укреплены два одинаковых цилиндрических сосуда радиуса  $r$  и высоты  $H$ . В нижней части каждого из сосудов имеется небольшое отверстие. Отверстия закрыты пробками. Сосуды наполняют жидкостью плотности  $\rho$ . В момент  $t = 0$  вынимают обе пробки. Найти максимальную угловую скорость, которую приобретает подставка, считая, что  $H \gg r$  и  $I \gg 2\pi r^2 H \rho l^2$ , где  $I$  — момент инерции подставки вместе с сосудами относительно оси вращения. Внутренним трением в жидкости пренебречь. Расстояние между сосудами равно  $2l$ .

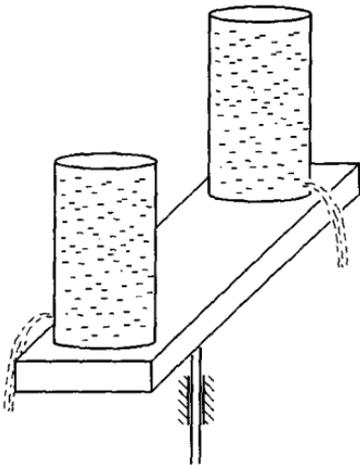


Рис. 158

**9.30.** Вертикально расположенный цилиндр радиуса  $r$  может вращаться вокруг своей оси. Цилиндр имеет на боковой поверхности винтовой желоб, составляющий угол  $\varphi$  с горизонтом. В желоб вложен небольшой шарик массы  $m$ , который без трения скользит по желобу. Найти движение системы под действием силы тяжести. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения равен  $I$ .

**9.31.** Вертикальная винтовая шпилька длины  $L$  может вращаться без трения вокруг своей оси. Найти время, за которое со шпильки свинтится гайка массы  $m$ , если она начинает двигаться из верхней точки шпильки без начальной скорости. Шаг резьбы равен  $h$ , момент инерции шпильки —  $I_1$ , гайки —  $I_2$ . Трением в резьбе пренебречь.

**9.32.** На краю свободно вращающегося достаточно большого горизонтального диска, имеющего радиус  $R$  и момент инерции  $I$ , стоит человек массы  $m$ . Диск совершает  $n$  об/мин. Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Как изменится при этом энергия системы? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.

**9.33а.** На покоящемся однородном горизонтальном диске массы  $M$  и радиуса  $R$  находится человек массы  $m$ . Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться. С какой угловой скоростью  $\omega$  вращается диск, когда человек идет по окружности радиуса  $r$ , концентричной диску, со скоростью  $v$  относительно диска?

**9.34.** Однородный диск  $A$  массы  $M_1$  и радиуса  $r_1$  (рис. 159) раскручен до угловой скорости  $\omega_0$  и приведен в контакт с диском  $B$ , ось

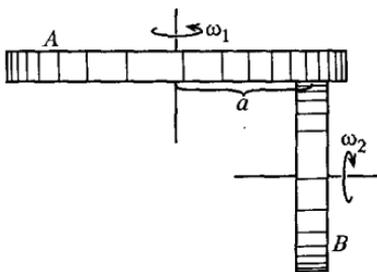


Рис. 159

с какой угловой скоростью  $\omega$  вращается диск, когда человек идет по окружности радиуса  $r$ , концентричной диску, со скоростью  $v$  относительно диска?

**9.34.** Однородный диск  $A$  массы  $M_1$  и радиуса  $r_1$  (рис. 159) раскручен до угловой скорости  $\omega_0$  и приведен в контакт с диском  $B$ , ось

с какой угловой скоростью  $\omega$  вращается диск, когда человек идет по окружности радиуса  $r$ , концентричной диску, со скоростью  $v$  относительно диска?

**9.34.** Однородный диск  $A$  массы  $M_1$  и радиуса  $r_1$  (рис. 159) раскручен до угловой скорости  $\omega_0$  и приведен в контакт с диском  $B$ , ось

вращения которого перпендикулярна оси диска  $A$ . Масса диска  $B$  равна  $M_2$ , радиус —  $r_2$ , а расстояние между точкой соприкосновения и осью диска  $A$  составляет  $a$ . Найти установившиеся угловые скорости дисков  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и потерю энергии в процессе установления. Трением в осях, а также трением качения пренебречь.

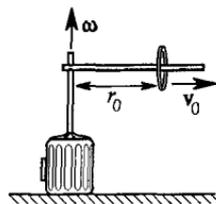


Рис. 160

**9.35.** На горизонтально расположенный тонкий стержень надето кольцо, которое может перемещаться вдоль стержня (рис. 160). Стержень вращается при помощи электродвигателя вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В начальный момент времени кольцо находилось на расстоянии  $r_0$  от оси вращения и двигалось в направлении от оси со скоростью  $v_0$  относительно стержня. Сила трения между кольцом и стержнем такова, что на перемещение кольца электродвигатель затрачивает постоянную

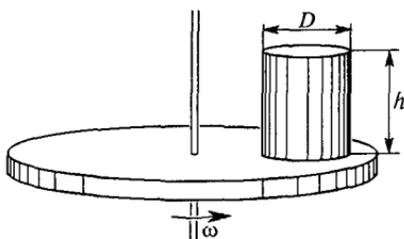


Рис. 161

мощность. На каком расстоянии от оси вращения скорость кольца относительно стержня изменится в 2 раза?

**9.36я.** На горизонтальном вращающемся диске стоит цилиндр. При какой угловой скорости  $\omega$  цилиндр свалится с диска, если расстояние между осями диска и цилиндра  $R$ , а коэффициент трения  $k > D/h$ , где  $D$  — диаметр цилиндра, а  $h$  — его высота (рис. 161)?

**9.37.** На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток. С каким ускорением  $a$  будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку с силой  $F$  (рис. 162)? Каким образом надо тянуть за нитку для того, чтобы катушка двигалась в сторону натянутой нитки? Катушка движется по поверхности стола без скольжения. Найти силу трения между катушкой и столом.

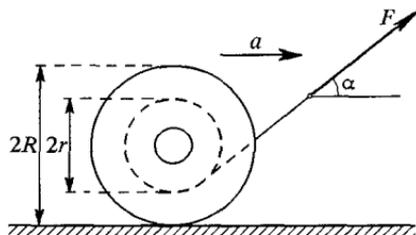


Рис. 162

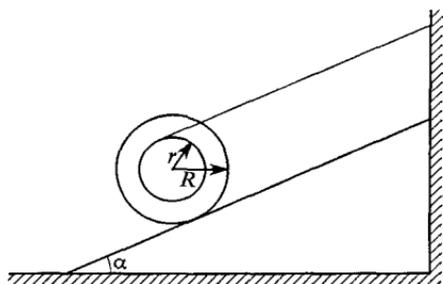


Рис. 163

**9.38.** Катушка с ниткой находится на наклонной плоскости. Свободный конец нити прикреплен к стене так, что нитка параллельна наклонной плоскости (рис. 163). Определить ускорение,

с которым катушка движется по наклонной плоскости. Масса катушки  $m$ , момент инерции катушки относительно ее оси  $I_0$ , коэффициент трения катушки с наклонной плоскостью  $k$ .

**9.39.** Определить ускорение, с которым катушка движется по наклонной плоскости в условиях предыдущей задачи, если нить намотана на катушку так, как указано на рис. 164.

**9.40.** Горизонтальный диск может вращаться вокруг вертикальной оси, закрепленной в подшипниках. На расстоянии  $R$  от центра диска находится пушка, жестко скрепленная с диском. Из пушки стреляют в горизонтальном направлении так, что снаряд после выстрела летит со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к линии, соединяющей

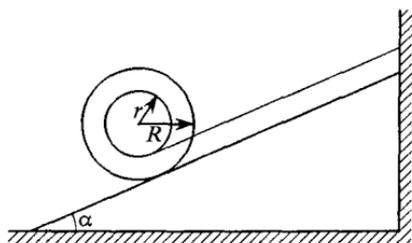


Рис. 164

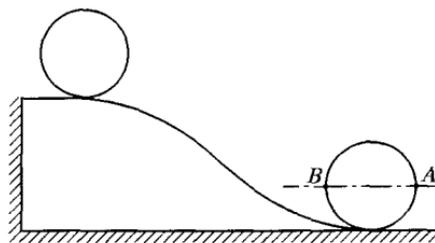


Рис. 165

центр диска с пушкой в момент выстрела. Через какое время после выстрела диск остановится, если тормозящий момент в подшипниках равен  $M$ ? Масса снаряда равна  $m$ .

**9.41.** На корме лодки укреплен подвесной мотор. Основную часть массы мотора  $m$  составляет масса маховика — сплошного цилиндра радиуса  $r$ , так что весом остальных частей мотора можно пренебречь. Как движется лодка после того, как мотор внезапно заглох, если до этого он делал  $n_0$  оборотов в минуту, а скорость лодки была  $v$  м/с? Принять, что лодка имеет форму прямоугольника длины  $2l$ , ширины  $2d$ , массы  $M$ . Ось мотора вертикальна.

**9.42.\*** Сплошной цилиндр, ось которого горизонтальна, движется без вращения по гладкой горизонтальной плоскости в направлении, перпендикулярном к его оси. В некоторый момент цилиндр достигает границы, где поверхность становится шероховатой и возникает постоянная (не зависящая от скорости) сила трения скольжения, а трение качения отсутствует. Каково будет движение цилиндра после перехода границы? Как распределится кинетическая энергия поступательного движения цилиндра?

**9.43.** Сплошному однородному шару радиуса  $r$  в начальный момент времени сообщается либо поступательная скорость  $v_0$  без вращения (случай а), либо он закручивается вокруг горизонтального диаметра с угловой скоростью  $\omega_0$  и ставится на горизонтальную плоскость без сообщения ему поступательного движения (случай б). Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти в обоих случаях линейную скорость  $v$  центра шара и его угловую

скорость  $\omega$ , когда движение шара перейдет в чистое качение. Определить также потерю кинетической энергии на трение в обоих случаях.

**9.44.** Обруч радиуса  $r_0$  скатился без скольжения с горки высоты  $kr_0$ . Пренебрегая потерями на трение, найти скорости и ускорения точек  $A$  и  $B$  на ободе (рис. 165).

**9.45.** Сплошному цилиндру радиуса  $R = 10$  см и веса  $P$  сообщено вращение вокруг своей оси с угловой скоростью  $n = 10$  об/с. Вращающийся цилиндр кладут на горизонтальную плоскость и предоставляют самому себе. Он начинает двигаться по плоскости, причем коэффициент трения скольжения между цилиндром и плоскостью равен 0,1. Определить, через какое время  $T$  движение цилиндра перейдет в чистое качение без скольжения. Сила трения скольжения предполагается не зависящей от скорости, а трение качения отсутствует. Какое ускорение будет иметь цилиндр при  $t > T$ ?

**9.46.** Вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$  сплошной однородный цилиндр массы  $m_1$  ставится без начальной поступательной скорости на длинную доску массы  $m_2$ , лежащую на гладкой горизонтальной плоскости. Начальная скорость доски равна нулю. Пренебрегая силой трения качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение. Доска предполагается настолько длинной, что чистое качение успеет установиться до того, как цилиндр скатится с нее.

**9.47.** Доска массы  $M$  (рис. 166) лежит на двух одинаковых цилиндрических катках массы  $m$  каждый. Доску начинают толкать в

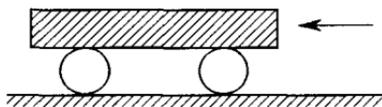


Рис. 166

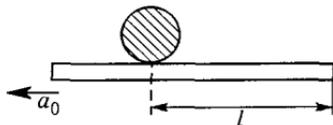


Рис. 167

горизонтальном направлении с силой  $F$ , и система приходит в движение так, что проскальзывание доски по каткам и катков по поверхности отсутствует. Определить ускорение доски.

**9.48я.** На шероховатой доске на расстоянии  $l$  от ее правого конца находится сплошной цилиндр (рис. 167). Доску начинают двигать с ускорением  $a_0$  влево. С какой скоростью относительно доски будет двигаться центр цилиндра в тот момент, когда он будет находиться над краем доски? Движение цилиндра относительно доски происходит без скольжения.

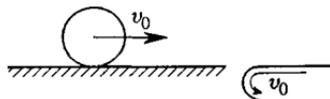


Рис. 168

**9.49.** Сплошной шар радиуса  $R$  и массы  $M$  катится по горизонтальной плоскости слева направо со скоростью  $v_0$  и попадает на ленту горизонтального транспортера, перемещающуюся ему навстречу с такой же скоростью  $v_0$  (рис. 168). Определить направление и значение абсолютной скорости шара после того, как проскальзывание прекратится.

**9.50.** С колеса движущегося автомобиля соскакивает декоративный колпак, который, попрыгав по дороге, начинает катиться сразу без скольжения. При какой скорости автомобиля  $v_0$  это возможно? Радиус колеса  $R = 40$  см, колпак можно рассматривать как однородный диск радиуса  $r = 20$  см, коэффициент трения между колпаком и дорогой  $k = 0,2$ .

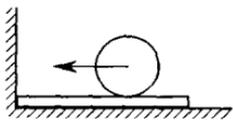


Рис. 169

**9.51.** Длинная тонкая доска лежит на гладком столе вплотную к гладкой стене. По доске без проскальзывания катится цилиндр в направлении перпендикулярном стене (рис. 169). Цилиндр абсолютно упруго ударяется о стену. Определить долю первоначальной кинетической энергии, перешедшей в тепло при трении между цилиндром и доской к моменту, когда цилиндр скатится с доски. Масса цилиндра равна половине массы доски. Трение качения не учитывать.

**9.52.** Самолет массы  $M = 10^4$  кг совершает посадку, имея вначале скорость  $v_0 = 20$  км/ч. При посадке он касается посадочной дорожки двумя колесами, могущими свободно вращаться вокруг своих осей. Перед посадкой колеса были неподвижны. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить скорость самолета в момент, когда колеса начнут катиться по дорожке без проскальзывания. Радиус каждого колеса  $r = 1$  м, момент инерции колеса относительно геометрической оси  $I = 100$  кг·м<sup>2</sup>.

**9.53.** Сплошной цилиндр массы  $m$  и радиуса  $r$ , раскрученный до угловой скорости  $\omega_0$ , кладут на горизонтальную плоскость. Между плоскостью и цилиндром возникает сила вязкого трения, пропорциональная скорости нижней точки цилиндра. Пренебрегая сухим трением и трением качения, найти угловую скорость цилиндра и скорость его центра масс при  $t \rightarrow \infty$ , а также потери энергии на трение.

**9.54.** Однородный шар радиуса  $r$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$ , положен на горизонтальную плоскость так, что ось его вращения наклонена под углом  $\varphi$  к вертикали. Определить скорость шара и угловую скорость его вращения, которые устанавливаются после того, как проскальзывание шара по плоскости прекратится. Трением качения пренебречь.

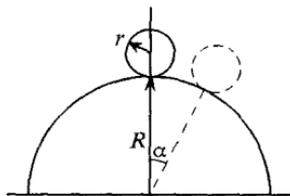


Рис. 170

**9.55.** На горизонтальной платформе, совершающей крутильные колебания  $\varphi = \varphi_0 \sin \Omega t$ , находится диск радиуса  $R$ , ось которого совпадает с осью платформы. При какой амплитуде колебаний  $\varphi_{\text{max}}$  начнется проскальзывание, если коэффициент трения равен  $k$ ?

**9.56.** Цилиндр радиуса  $r$  скатывается с неподвижного цилиндра радиуса  $R$  (рис. 170). Оси цилиндров параллельны, сила тяжести перпендикулярна к ним. Коэффициент трения между цилиндрами  $k = 0,07$ . Определить, при каком угле  $\alpha$  начнется проскальзывание

между цилиндрами, если в начальный момент подвижный цилиндр находился в наивысшем положении и не имел начальной скорости.

**9.57.** Шарик сначала лежит на столе так, что его центр  $C$  находится над самым краем, затем начинает падать, поворачиваясь вокруг края стола (точка  $A$  на рис. 171). Найти коэффициент трения скольжения  $k$ , если шарик начинает проскальзывать после поворота на угол  $\varphi = 30^\circ$ .

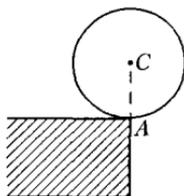


Рис. 171

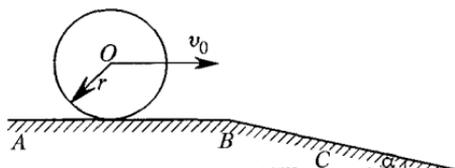


Рис. 172

При каких значениях угла наклона  $\alpha$  бревно, переходя на  $BC$ , не будет делать скачка? Считать коэффициент трения скольжения в точке  $B$  достаточным, чтобы не было проскальзывания.

**9.59.** По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , скатывается без скольжения сплошной однородный цилиндр, масса которого равна 300 г. Найти величину силы трения цилиндра о плоскость.

**9.60.** Определить ускорение  $a$  центра шарика, скатывающегося без скольжения по двум наклонным желобам, образующим угол  $\alpha$  с горизонтом. Форма поперечных сечений желобов изображена на рис. 173.

**9.61.** С какой высоты  $H$  должен скатиться по наклонному желобу шарик с радиусом инерции  $\rho$ , для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиуса  $R$ ? Радиусом шарика  $r$  по сравнению с  $R$  пренебречь.

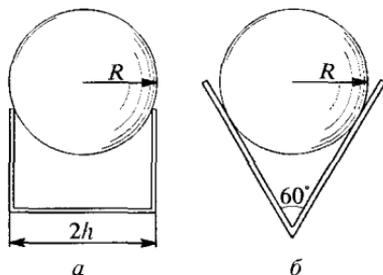


Рис. 173

**9.62.** Цилиндр или шар радиуса  $r$  катится по плоскости, наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту. Определить, при каком значении угла  $\alpha$  начинается качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен  $k$ .

**9.63.\*** Вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$  сплошной однородный цилиндр радиуса  $r$  ставится без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться вверх. Определить

время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

**9.64.** Считая в предыдущей задаче коэффициент трения скольжения  $k$  цилиндра о наклонную плоскость заданным и постоянным, определить: 1) ускорение цилиндра  $a_1$ , когда качение происходит со скольжением; 2) время  $t_1$ , по истечении которого наступает чистое качение; 3) высоту  $H_1$ , которой достигает цилиндр, прежде чем начинается чистое качение; 4) ускорение  $a_2$  при чистом качении; 5) дополнительную высоту  $H_2$ , на которую поднимется цилиндр при чистом качении; 6) полную высоту поднятия  $H$ ; 7) время  $\bar{t}$  обратного скатывания цилиндра вниз. Предполагается, что  $k > \operatorname{tg} \alpha$ .

**9.65.** Найти ускорение  $a$  центра однородного шара, скатывающегося без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Чему равна сила трения скольжения между шаром и плоскостью?

**9.66.** Вращающийся с угловой скоростью  $\omega_0$  сплошной однородный цилиндр ставится у основания наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться вверх. Известно, что время подъема цилиндра до наивысшего положения равно времени обратного скатывания из этого положения до основания плоскости. Найти угловую скорость вращения цилиндра в момент времени, когда он вновь достигает основания наклонной плоскости, а также часть первоначальной кинетической энергии цилиндра, потерянную на трение, если скатывание происходит без скольжения. Когда уменьшается полная энергия — при скатывании или при подъеме?

**9.67.** Какова скорость центра масс цилиндра в условиях предыдущей задачи, если в начальный момент времени угловая скорость цилиндра равна нулю, а поступательная скорость равна  $v_0$  и направлена вдоль наклонной плоскости? Найти часть первоначальной энергии, потерянной на трение.

**9.68.** Однородный цилиндр массы  $m$  скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Наклонная плоскость установлена в лифте,двигающемся с ускорением  $a$ . Найти величину силы трения и ускорение цилиндра относительно лифта.

**9.69.** Однородный цилиндр массы  $m$  и радиуса  $R$  скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости клина с углом  $\varphi$  при основании. Клин имеет массу  $M$  и может скользить без трения по горизонтальной поверхности. Скорость цилиндра относительно клина в конце спуска равна  $v$ . Найти длину пути, пройденного цилиндром по клину.

**9.70.** Сплошной цилиндр радиуса  $r = 5$  см ставится на плоскость, наклоненную к горизонту под углом  $45^\circ$ . Определить время, через которое цилиндр опустится на 1 м по вертикали, и угловую скорость его вращения в этот момент. Коэффициент трения цилиндра о плоскость  $k = 0,2$ , сила трения не зависит от скорости проскальзывания, трением качения пренебречь.

9.71. С шероховатой наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, скатываются без проскальзывания два цилиндра, имеющие одинаковую массу  $m$  и один и тот же радиус (рис. 174). Один из них сплошной, другой — полый, тонкостенный. Коэффициент трения между цилиндрами  $k$ . Как следует расположить полый цилиндр — впереди сплошного или за ним, чтобы цилиндры скатывались вместе? Найти ускорение  $a$  цилиндров и силу давления  $N$  одного на другой.

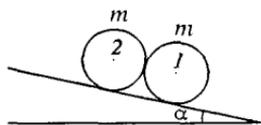


Рис. 174

9.72. Полый цилиндр радиуса  $R$  и массы  $M$ , внутри которого находится сплошной цилиндр радиуса  $r = 0,5R$  и массы  $m$ , скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом. Внутренний цилиндр катится по поверхности внешнего также без скольжения. Начальные скорости обоих цилиндров равны нулю. Определить ускорение системы.

9.73. Шарик радиуса  $r$  скатывается без начальной скорости и без скольжения по поверхности сферы из самого верхнего положения  $A$  (рис. 175). Определить точку, в которой он оторвется от сферы и начнет свободно двигаться под действием силы тяжести.

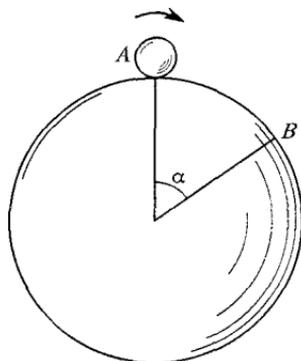


Рис. 175

9.74. С высоты  $2R$  по желобу катится без проскальзывания бильярдный шар, радиус которого меньше радиуса  $R$  петли, образованной желобом (см. рис. 61). На какой высоте  $h$  шар оторвется от желоба? На какую высоту  $H$  он поднимется после отрыва?

9.75. Обруч радиуса  $R$  бросают вперед со скоростью  $v_0$  и сообщают ему одновременно угловую скорость  $\omega_0$ . Определить минимальное значение угловой скорости  $\omega_{\min}$ , при котором обруч после движения с проскальзыванием покатится назад. Найти значение конечной скорости  $v$ , если  $\omega_0 > \omega_{\min}$ . Трением качения пренебречь.

9.76. По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массы  $m$  в направлении к наивысшей точке  $A$  и притом так, что она все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки (рис. 176). В результате цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра  $M$ , а угол  $\angle AOB$  равен  $\alpha$ . Определить: 1) ускорение  $a$  оси цилиндра; 2) силу трения  $F_{\text{тр}}$  между цилиндром и плоскостью во время качения; 3) время  $t$ , в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки  $A$ , если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна  $N_{\text{max}}$ . Какая при этом будет достигнута

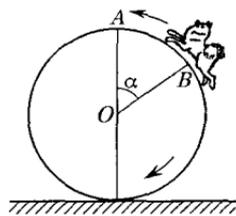


Рис. 176

максимальная скорость  $v_{\max}$  поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической энергии системы.)

**9.77.** По наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, скатывается массивный полый цилиндр массы  $m$  и радиуса  $r$  (рис. 177). По поверхности цилиндра бежит собака таким образом, что она все время занимает наивысшее положение на поверхности цилиндра. Определить, с каким ускорением  $a$  скатывается цилиндр, если масса собаки  $m_1$ .

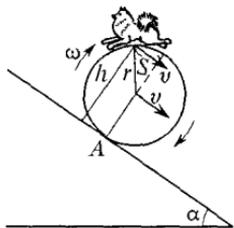


Рис. 177

**9.78.** Шар массы  $m$  катится без скольжения и сталкивается с покоящимся шаром массы  $M$ . Удар центральный, упругий, трение между шарами отсутствует. При каком отношении масс  $x = M/m$  шар массы  $m$  в конечном итоге остановится? Какая часть энергии шаров перейдет в тепло? Трение качения отсутствует.

**9.79.** Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью  $v$  и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движение перейдет в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

**9.80.** Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно; б) замедленно; в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

**9.81.** Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы при столкновении с другим (неподвижным) шаром: 1) оба шара стали двигаться вперед (удар с накатом); 2) первый шар остановился, а второй двигался вперед; 3) второй шар двигался вперед, а первый откатился назад (удар с оттяжкой)? Относительно направления и плоскости удара ввести те же предположения, что и в предыдущей задаче.

**9.82.** По шарику массы  $m$  и радиуса  $r$ , лежащему на горизонтальном столе, наносится короткий горизонтальный удар, сообщаящий ему импульс  $p$ . Высота удара над центром равна  $kr$  ( $k \leq 1$ ). Найти кинетическую энергию поступательного и вращательного движения шарика. При каком значении  $k$  шарик покатится без скольжения?

**9.83.** Тонкостенный цилиндр катится без скольжения со скоростью  $v$  по шероховатой поверхности и абсолютно упруго сталкивается с таким же неподвижным цилиндром. Передачи вращения при ударе не происходит. Какое расстояние будет между цилиндрами, когда они начнут катиться без проскальзывания? Коэффициент трения скольжения равен  $k$ .

**9.84.** Два одинаковых тонкостенных цилиндра катятся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями  $v$  и сталкиваются абсолютно упругим образом. Передачи вращения при ударе не происходит. На каком расстоянии друг от друга цилиндры остановятся? Коэффициент трения скольжения равен  $k$ .

**9.85.** На горизонтальной поверхности лежит деревянный шар массы  $M$ . Дробинка массы  $m$  летит в горизонтальном направлении, попадает в шар и застревает в его центре. Через некоторое время шар начинает катиться без проскальзывания со скоростью  $V$ . Определить начальную скорость  $v_0$  дробинки. Размеры дробинки ничтожно малы по сравнению с радиусом шара.

**9.86я.** Большой однородный свинцовый шар массы  $M$  лежит на плоской горизонтальной поверхности. Небольшая пуля массы  $m$  выпущена из ружья горизонтально со скоростью  $V$  в направлении к центру шара. После выстрела пуля застревает внутри шара. Определить линейную скорость шара  $v$  после того, как его движение перейдет в чистое качение. При рассмотрении движения шара после удара считать его однородным, пренебрегая массой застрявшей пули. Трением качения пренебречь.

**9.87.** Пуля массы  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $v_0$ , попадает в покоящийся на горизонтальном столе деревянный шар массы  $M$  и радиуса  $R$  на расстоянии  $h$  ниже центра шара и застревает в нем. Найти установившуюся скорость шара  $v$ . Считать, что  $m \ll M$ .

**9.88.** Шар радиуса  $R$ , раскрученный вокруг горизонтальной оси до угловой скорости  $\omega_0$ , кладут на шероховатый стол и толкают горизонтально на высоте  $h$  ( $h < R$ ) от стола (рис. 178) так, что шар приобретает поступательную скорость  $v_0$  в направлении, перпендикулярном

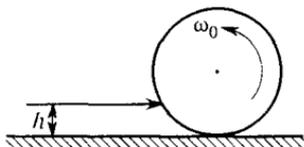


Рис. 178

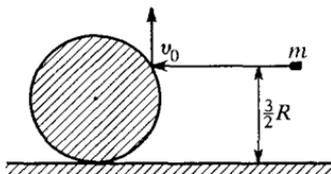


Рис. 179

оси вращения. При какой угловой скорости  $\omega_0$  шар через некоторое время после начала движения начнет двигаться в обратную сторону?

**9.89.** Пуля массы  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $v_0$ , попадает в покоящийся на горизонтальном столе металлический шар массы  $M$  и радиуса  $R$  на расстоянии  $R/2$  выше центра шара и рикошетом отскакивает от него вертикально вверх (рис. 179). Спустя некоторое время движение шара по столу переходит в равномерное качение со скоростью  $v_1$ . Определить скорость пули после удара по шару.

**9.90.** В лежащий на столе шар радиуса  $R$  и массы  $M$  попадает пуля массы  $m$ , летящая со скоростью  $v_0$  и вращающаяся вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega_0$ . Радиус инерции пули равен  $r$ . Пуля застревает в центре шара. Найти энергию  $\Delta E$ , потерянную

при проникновении пули в шар. За время проникновения пули шар не смещается.

**9.91.** Шар, катящийся без скольжения по бильярдному столу со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной борту, ударяется о борт. Считая удар абсолютно упругим, найти скорость шара после отскока к моменту, когда прекратится скольжение.

**9.92.** Шар массы  $M$  и радиуса  $R$  налетает со скоростью  $v_0$  на покоящийся шар массы  $M/2$  и радиуса  $R/2$ . Расстояние между направлением движения центра налетающего шара и центром покоящегося шара равно  $R/2$ . После удара шары слипаются, не деформируясь, и летят как одно целое. Определить изменение кинетической энергии  $\Delta K$  в результате соударения.

**9.93я.** Шар массы  $M = 1000$  г, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пульей, летящей горизонтально с начальной скоростью  $V_0 = 500$  м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью  $v = 3$  м/с. Определить скорость пули  $V$  после вылета ее из шара, если масса пули  $m = 10$  г. Трением качения пренебречь.

**9.94.** Отрезок толстостенной трубы лежит на поверхности стола. Ее наружный диаметр равен  $D$ . По трубе на расстоянии  $7D/8$  от поверхности стола наносится горизонтальный удар. При какой толщине трубы  $d$  она после удара покатится без скольжения?

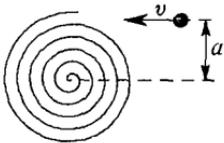


Рис. 180

**9.95.** Шарик массы  $m$  влетает в спиральный лабиринт и останавливается в его центре (рис. 180). Найти угловую скорость лабиринта после того, как шарик остановится. Начальная скорость шарика равна  $v$ , радиус лабиринта —  $a$ , его масса —  $M$ , момент инерции —  $I$ . Размерами шарика пренебречь. Лабиринт может свободно двигаться в пространстве.

**9.96.** Баллистический маятник сделан в виде однородного стержня длины  $L$ , массы  $M$ , подвешенного так, что он может отклоняться без трения в любом направлении вокруг неподвижной верхней его точки (шарнир). В нижний его конец попадает и застревает в нем пуля массы  $m$ , радиуса  $r \ll L$ , имевшая горизонтальную скорость  $V$  и одновременно угловую скорость  $\omega$  вращения вокруг своей оси, совпадающей с направлением  $V$ . Определить, под каким углом  $\varphi$  к направлению  $V$  и на какой максимальный угол  $\psi$  отклонится маятник. Пулю можно считать цилиндром.

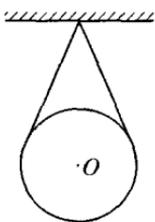


Рис. 181

**9.97.** В центр баллистического маятника, подвешенного на нерастяжимых нитях (рис. 181) и представляющего собой цилиндр массы  $M$  и радиуса  $R$ , влетает со скоростью  $V$  вдоль оси цилиндра пуля массы  $m$ , которая застревает в центре маятника. Пуля вращается вокруг своей продольной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Расстояние от точки подвеса до центра маятника  $L$ . Маятник может отклоняться без трения в

любом направлении. Пулю можно считать однородным цилиндром радиуса  $r$  ( $r \ll R$ ). Определить направление вектора скорости маятника относительно траектории пули сразу после застревания пули. Считать, что за время движения пули внутри цилиндра он не успевает существенно сдвинуться.

**9.98.** Однородный тонкий тяжелый стержень длины  $l$  висит на горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Какую начальную угловую скорость  $\omega$  надо сообщить стержню, чтобы он повернулся на  $90^\circ$ ?

**9.99.** Тонкий стержень массы  $m$  и длины  $L$  (рис. 182) подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нити длины  $l$  шарик такой

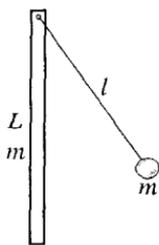


Рис. 182

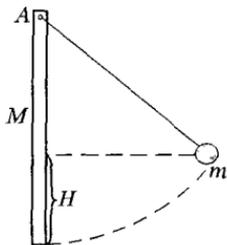


Рис. 183

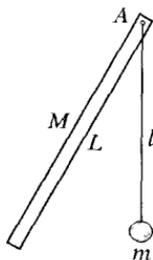


Рис. 184

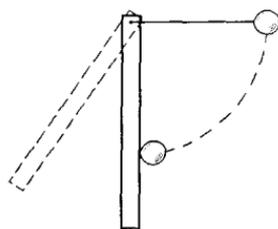


Рис. 185

же массы  $m$ . Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Считать удар абсолютно упругим.

**9.100.** Математический маятник массы  $m$  и стержень массы  $M$  (рис. 183) подвешены к одной и той же точке  $A$ , вокруг которой они могут свободно колебаться. Длина нити маятника равна длине стержня. Шарик маятника отклоняют в сторону, так что он приподнимается на высоту  $H$  относительно своего нижнего положения. Затем шарик отпускают, и он сталкивается неупруго со стержнем. Как будут двигаться шарик и нижний конец стержня после удара, и на какие высоты они поднимутся?

**9.101.** В общей точке подвеса  $A$  (рис. 184) подвешены шарик на нити длины  $l$  и однородный стержень длины  $L$ , отклоненный в сторону на некоторый угол. При возвращении стержня в положение равновесия происходит упругий удар. При каком соотношении между массами стержня  $M$  и шарика  $m$  шарик и точка удара стержня будут двигаться после удара с равными скоростями в противоположных направлениях? При каком соотношении между массами  $M$  и  $m$  описанный процесс невозможен?

**9.102.** Тонкий стержень некоторой массы подвешен за конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси на нити, длина которой меньше длины стержня, подвешен шарик такой же массы, как и масса стержня. Шарик отводится до горизонтального положения нити и отпускается (рис. 185). После

упругого удара оказывается, что шарик остановился. Вычислить, на какой наибольший угол  $\varphi$  отклонится стержень.

**9.103я.\*** Стержень массы  $M$  и длины  $l$ , который может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, под действием силы тяжести переходит из горизонтального положения в вертикальное (рис. 186). Проходя через вертикальное положение, стержень нижним концом упруго ударяет о малое тело массы  $m$ , лежащее на гладком горизонтальном столе. Определить скорость тела после удара.

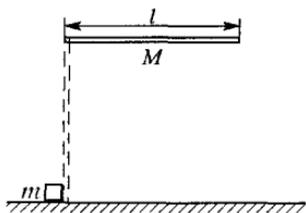


Рис. 186

**9.104я.\*** Воспользовавшись условием предыдущей задачи, определить, на какое расстояние  $S$  переместится тело  $m$  после удара, если коэффициент трения между телом и столом равен  $k$  и не зависит от скорости. Стержень после удара остановился. Тело скользит по столу без вращения.

**9.105.** Линейка массы  $M$  и длины  $l$  подвешена на гвозде за верхний конец. В ее нижний конец ударяет маленький шарик массы  $m$  со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к линейке. На какой угол  $\varphi$  линейка отклонится от вертикали после удара? Удар абсолютно неупругий.

**9.106.** Однородная доска длины  $l$  и массы  $M$  подвешена за один из концов на шарнире. Ее отклоняют на угол  $\varphi$  от вертикали, отпускают, и она ударяет по маленькому шарiku массы  $m$ , подвешенному на нити такой же длины. Удар упругий. Определить углы, на которые отклонятся от положения равновесия доска и нить после удара.

**9.107.** Шарик массы  $m$  подвешен на нерастяжимой нити длины  $l$  и отклонен на малый угол из положения равновесия. К той же точке, что и нить, подвешен одним концом однородный стержень длины  $l_1 = 3l/2$ . Какова должна быть масса стержня  $m_1$ , чтобы в результате столкновения шарик остановился? Удар абсолютно упругий. Каково будет движение стержня после столкновения? Определить период колебаний шарика.

**9.108.** Однородный тонкий стержень длины  $l = 1$  м подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нерастяжимой нити длины  $a$  шарик такой же массы, как стержень. Шарик отклоняют на угол  $\alpha = 0,1$  рад и отпускают. После абсолютно упругого удара о стержень шарик останавливается. Определить угол  $\beta$ , на который отклоняется стержень, и отношение времени подъема стержня  $t_c$  к времени опускания шарика  $t_{ш}$ .

**9.109.** С помощью очень короткой нити однородный стержень длины  $l$  привязан одним концом к потолку. Стержень отводят на угол  $45^\circ$  от вертикали и сообщают его нижнему концу скорость  $v_0$  в направлении, перпендикулярном вертикальной плоскости отклонения стержня. Чему должна быть равна  $v_{0\min}$ , чтобы при дальнейшем движении стержень мог коснуться потолка?

**9.110.** Вертикально висящая однородная доска длины  $L = 1,5$  м и массы  $M = 10$  кг может вращаться вокруг горизонтальной оси,

проходящей через ее верхний конец. В нижний конец доски ударяет пуля, летящая горизонтально с начальной скоростью  $v_0 = 600$  м/с. Пуля пробивает доску и летит далее со скоростью  $v$ . Определить скорость  $v$ , если после выстрела доска стала колебаться с угловой амплитудой  $\alpha = 0,1$  рад. Масса пули  $m = 10$  г.

**9.111.** Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т.е. вращается, не сгибаясь, вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближенно наибольшую нагрузку  $F$  на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

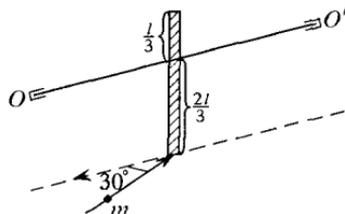


Рис. 187

**9.112.** Тонкий однородный стержень массы  $M$  и длины  $l$  может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO'$ , делящей стержень в отношении 1 : 2. В нижний его конец упруго ударяется шарик массы  $m$ , летящий в горизонтальной плоскости под углом  $30^\circ$  к оси  $OO'$  (рис. 187). При какой скорости  $v$  первоначально покоящийся стержень сможет совершить полный оборот вокруг оси, если после отскока скорость шарика параллельна оси  $OO'$ ? Стержень жестко закреплен на оси и не может по ней скользить.

**9.113.\*** Каким участком сабли следует рубить лозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородной пластинкой.

**9.114.** На гладком горизонтальном столе лежит однородный стержень длины  $l$ , который может двигаться по столу без трения (рис. 188). В начальный момент, когда скорость стержня равна нулю, в него ударяется шарик, движущийся по столу перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии  $x$  от центра стержня  $C$  ударился шарик, если непосредственно после удара концы стержня  $A$  и  $B$  начали двигаться со скоростями  $v_A$  и  $v_B$  соответственно? (Скорости  $v_A$  и  $v_B$  считаются положительными, когда они направлены в ту же сторону, что и скорость шарика до удара, и отрицательными в противоположном случае.)

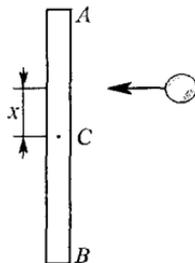


Рис. 188

**9.115.** На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины  $l$  и массы  $M$ , который может скользить по этой поверхности без трения (рис. 188). В одну из точек стержня ударяет шарик массы  $m$ , движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии  $x$  от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс  $M$  и  $m$  это возможно?

**9.116.** В конец стержня массы  $M$ , лежащего на гладком горизонтальном столе, попадает шарик, летевший перпендикулярно к стержню и параллельно плоскости стола со скоростью  $v_0$ . Считая массу шарика  $m$  пренебрежимо малой по сравнению с массой стержня,

определить кинетическую энергию  $K$  стержня после удара, если удар был абсолютно упругий.

**9.117.** В доску массы  $M$ , лежащую на горизонтальном столе, падает пуля массы  $m$ , летевшая перпендикулярно к доске и параллельно плоскости стола со скоростью  $v_0$ . Определить кинетическую энергию  $K$ , перешедшую во внутреннюю энергию (тепло) системы, если точка попадания пули находится от конца доски на расстоянии  $1/4$  ее длины. Массу пули по сравнению с массой доски считать пренебрежимо малой, шириной доски пренебречь.

**9.118.** На гладком горизонтальном столе лежит однородный упругий стержень массы  $M$ . В конец стержня ударяет упругий шарик массы  $m$ , движущийся со скоростью  $v$  перпендикулярно к стержню. Найти значение энергии деформации системы в момент, когда она максимальна. Трением между стержнем и столом пренебречь.

**9.119.** На гладком горизонтальном столе лежит однородный твердый стержень длины  $l$  и массы  $M$ , в край которого ударяет твердый шарик массы  $m$ , движущийся со скоростью  $v_0$ , перпендикулярной к стержню. Считая удар идеально упругим и предполагая, что силы трения между поверхностью стола и лежащими на них телами пренебрежимо малы, вычислить угловую скорость вращения стержня после удара.

**9.120.** По гладкой горизонтальной поверхности стола поступательно движется твердый стержень длины  $l$  и массы  $M$  со скоростью  $V_0$ , перпендикулярной к его продольной оси. Навстречу стержню перпендикулярно к той же оси движется твердый шарик массы  $m$ . Шарик ударяется в конец стержня, а затем отскакивает от него. Считая удар абсолютно упругим и предполагая, что трение между поверхностью стола и движущимися по ней телами пренебрежимо мало, определить, с какой скоростью  $v_0$  должен двигаться шарик, чтобы

после удара центр масс стержня остановился. Найти также угловую скорость вращения стержня вокруг центра масс после удара.

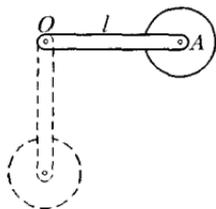


Рис. 189

**9.121.** Легкая штанга длины  $l$  может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , проходящей через один из ее концов (рис. 189). На втором конце штанги укреплен диск радиуса  $r$ . Закрепив диск на оси  $A$ , штангу поднимают до горизонтального положения, а затем отпускают.

Когда штанга проходит через положение равновесия, диск мгновенно освобождают, так что он в дальнейшем может свободно вращаться вокруг оси  $A$ . Определить высоту подъема диска  $x$  при последующем движении системы.

**9.122.** Тонкий стержень длины  $l$  и массы  $M$  лежит на гладкой горизонтальной плоскости и может свободно без трения вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через один из его концов. В начальный момент стержень покоится. В стержень

ударяется шар массы  $m$ , движущийся со скоростью  $v_0$  перпендикулярно к стержню. Точка удара находится на расстоянии  $x$  от оси стержня. Найти это расстояние, потребовав чтобы после удара шар остановился. Найти также угловую скорость вращения стержня после удара и максимально возможную угловую скорость вращения стержня. Удар абсолютно упругий.

**9.123.** Тонкий однородный стержень длины  $l = 0,3$  м лежит на шероховатой поверхности с коэффициентом трения  $k = 0,1$  (рис. 190). Один из его концов нанизан на вертикальную ось, вокруг которой он может вращаться, причем трением в оси можно пренебречь. В начальный момент в середину стержня под углом  $\alpha = 30^\circ$  к нему ударяет скользящее по поверхности со скоростью  $v = 6$  м/с тело, масса которого равна массе стержня и размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами стержня. Удар абсолютно неупругий. Через сколько оборотов  $n$  прекратится вращение?

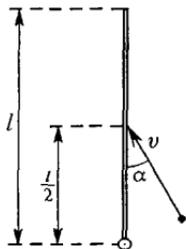


Рис. 190

**9.124.** Тонкий однородный стержень начинает вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, скользя по шероховатой поверхности стола. Повернувшись на угол  $\pi/4$ , стержень сталкивается абсолютно неупруго с отрезком такого же стержня вдвое меньшей длины, один конец которого касается оси вращения. После удара стержни слипаются и продолжают двигаться вместе. На какой угол они повернутся после удара, если известно, что угловая скорость вращения первого стержня перед ударом из-за трения уменьшилась вдвое?

**9.125.** Тонкий стержень длины  $l$  и массы  $M$ , лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, свободно вращается без трения с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Стержень сталкивается упруго с покоящимся шариком массы  $m$  и после удара останавливается. Точка удара находится на расстоянии  $x$  от оси вращения стержня. Найти соотношение между массами  $M$ ,  $m$  и расстоянием  $x$ , скорость  $v$  шарика после удара и максимально возможную скорость, которую может получить шар.

**9.126.** Тонкий однородный стержень длины  $l = 0,3$  м лежит на шероховатой поверхности с коэффициентом трения  $k = 0,1$  (рис. 191). Один из его концов нанизан на вертикальную ось, вокруг которой он может вращаться, причем трением в оси можно пренебречь. В начальный момент на этот стержень налетает точно такой же стержень, который двигался поступательно со скоростью  $v = 3$  м/с. Удар абсолютно неупругий. В момент удара стержни параллельны. Через сколько оборотов  $n$  прекратится их вращение?

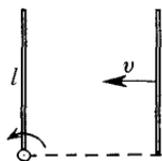


Рис. 191

**9.127.** Тонкий однородный стержень длины  $l$  начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, скользя по шероховатой поверхности. Повернувшись на угол  $\pi/2$ , он сталкивается с отрезком такого же стержня вдвое

меньшей длины, который в начальный момент расположен перпендикулярно первому стержню и так, что его центр находится на расстоянии  $3l/4$  от оси вращения. Найти угловую скорость вращения сразу после абсолютно неупругого столкновения, если коэффициент трения равен  $k$ .

**9.128.** Круг огней фейерверка образуется при сгорании пороховых зарядов двух патронов, укрепленных на концах шеста с осью вращения посередине. Определить максимальную угловую скорость  $\omega_{\max}$  вращения шеста длины  $2l$  и массы  $M$ , если относительная скорость истечения пороховых газов постоянна и равна  $u$ . Начальная масса каждого заряда  $m_0$ , размеры его малы.

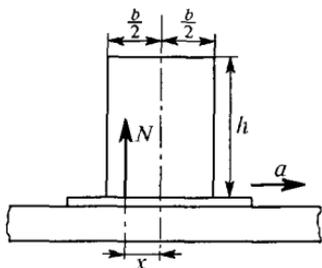


Рис. 192

**9.129я.** Прямоугольная призма стоит на шероховатой доске, лежащей на горизонтальном столе (рис. 192). С каким минимальным ускорением  $a_{\min}$  надо начать двигать доску по столу, чтобы призма опрокинулась назад (по отношению к направлению движения доски) через свое нижнее заднее ребро? Найти силу  $N$  нормального давления, с которой доска действует на призму при движении доски с ускорением  $a$ , и координату  $x$  ее точки приложения. Задачу решить в системах отсчета, связанных с доской и со столом.

**9.130.** Тонкий гладкий стержень длины  $2l = 2$  м и массы  $M = 30$  кг может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. В начальный момент, когда стержень неподвижен и составляет угол  $\varphi = 30^\circ$  с горизонтом, на конец его поднятой части надевают кольцо массы  $m = 1$  кг. Стержень начинает вращаться, и, когда он проходит горизонтальное положение, кольцо оказывается на расстоянии  $0,5$  м от центра и имеет скорость  $v_r = 3$  м/с, направленную к оси вращения. Определить угловую скорость стержня в этот момент.

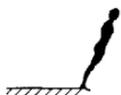


Рис. 193

**9.131.** Оценить сколько раз перевернется человек, падая по стойке «смирно» (рис. 193) с десятиметровой вышки?

**9.132.** Жонглер левой рукой держит перед собой в горизонтальном положении палочку длиной  $98$  см за один конец. Затем он отпускает палочку и одновременно ударяет по другому ее концу так, что удар направлен вверх. После удара жонглер совершает полный оборот вокруг вертикальной оси, затрачивая на него  $1,25$  с. В момент, когда он возвращается в исходное положение, палочка, падая, проходит начальный уровень и направлена горизонтально. Жонглер ловит ее левой рукой за ближайший конец. Тот ли конец палочки он держит в руке, что вначале? Трением палочки о воздух пренебречь.

**9.133.** Вертикальный столб высоты  $l$  подпиливается у основания и падает на землю, поворачиваясь вокруг нижнего основания.

Определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю. Какая точка столба будет в этот момент иметь ту же скорость, какую имело бы тело, падая с той же высоты, как и данная точка?

**9.134.** Однородный стержень массы  $m$  и длины  $l$  (рис. 194) падает без начальной скорости из положения 1, вращаясь без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O$ . Найти горизонтальную  $F_{\text{гор}}$  и вертикальную  $F_{\text{верт}}$  составляющие силы, с которыми ось  $O$  действует на стержень в горизонтальном положении 2.

**9.135.** Однородный стержень длины  $L$  падает, скользя концом по абсолютно гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень покоился в вертикальном положении. Определить скорость центра тяжести в зависимости от его высоты  $h$  над полом.

**9.136.** Однородный стержень длины  $R$  и массы  $m$  скользит без трения по сферической поверхности радиуса  $R$ , оставаясь все время в вертикальной плоскости, проходящей через центр поверхности (рис. 195). Найти скорость центра тяжести стержня в тот

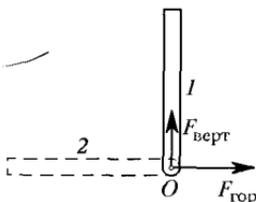


Рис. 194

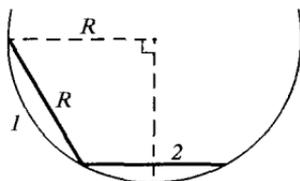


Рис. 195

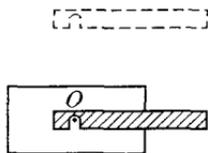


Рис. 196

момент, когда он занимает горизонтальное положение 2, если скольжение началось из положения 1 без начальной скорости.

**9.137.** Стержень, расположенный горизонтально, падает с высоты  $h$  и упруго ударяется одним концом о край стола. Определить скорость центра инерции стержня непосредственно после удара.

**9.138.** Жесткий однородный стержень массы  $m$  падает в горизонтальном положении (рис. 196). В момент, когда левый конец надевается на ось  $O$ , закрепленную на массивной плите, поступательное движение стержня переходит во вращательное вокруг оси  $O$ . К этому моменту скорость падения стержня достигает значения  $v$ . Считая удар мгновенным, определить потерю кинетической энергии и импульса стержня при ударе.

**9.139.** Стержень  $AB$  длины  $l$ , наклоненный к горизонту под углом  $\varphi$ , падает, не вращаясь, с некоторой высоты  $h$  на горизонтальный стол и ударяется о поверхность стола упруго сначала левым, а потом правым концом (рис. 197). При ударе правым концом стержень снова составляет с горизонтом угол  $\varphi$ . Найти высоту  $h$ . При каких углах  $\varphi$  такое падение возможно?

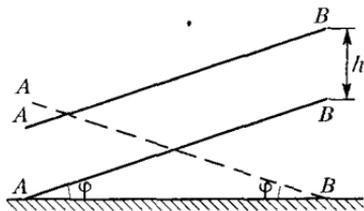


Рис. 197

**9.140.** Тонкий стержень длины  $2l$  вращается равномерно вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр стержня, с угловой скоростью  $\omega$ . Показать, что натяжение  $T$ , возникающее в стержне при таком вращении, удовлетворяет уравнению  $\frac{dT}{dx} = -\rho\omega^2x$ , где  $\rho$  — плотность вещества стержня, а  $x$  — расстояние до оси вращения. Найти распределение натяжения в стержне. В каком месте стержня натяжение максимально и чему оно равно? Показать, что максимальная кинетическая энергия, которую можно сообщить стержню при неизменной прочности его материала, зависит только от объема стержня  $V$ , но не от его массы. Вычислить эту кинетическую энергию для  $V = 3 \cdot 10^4 \text{ см}^3$ , если максимальное натяжение, которое может выдержать стержень, равно  $T_{\max} = 10^{10} \text{ дин/см}^2$ .

**9.141.** Однородный стержень длины  $L$  и массы  $M$ , подвешенный на шарнире, соприкасается своим концом с шаром массы  $m$  и радиуса  $r$ , покоящимся на плоскости так, что линия, соединяющая точку касания и центр шара, горизонтальна и вместе со стержнем находится в одной вертикальной плоскости. Стержень отклоняют в этой плоскости на угол  $\varphi$  и отпускают. Определить, как будут двигаться стержень и шар после удара, если удар абсолютно упругий. Через какое время после удара движение шара будет представлять собой чистое качение? Чему равна скорость этого качения? Коэффициент трения между шаром и плоскостью равен  $k$ . Трением качения пренебречь.

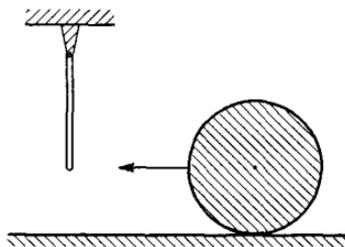


Рис. 198

**9.142.** Однородный шар массы  $m$  и радиуса  $R$ , катящийся без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$ , ударяется в конец стержня длины  $L$  и массы  $10m$ , подвешенного на шарнире (рис. 198). Определить, как будут двигаться шар и стержень после удара. Через какое время движение шара перейдет в чистое качение? Чему равна скорость этого качения? Удар считать абсолютно упругим и мгновенным. Коэффициент трения шара о плоскость равен  $k$ . Трением качения пренебречь.

**9.143.** Горизонтальная однородная доска массы  $M$  и длины  $2l$  укреплена в центре тяжести на шарнире. Один из ее концов лежит на пружине жесткости  $k$ . На этот конец с высоты  $H$  прыгает человек массы  $m$ . Найти максимальное сжатие пружины  $x_{\max}$  полагая, что  $x_{\max} \ll l$ .

**9.144.** Однородный стержень длины  $L$ , в конце которого имеется отверстие с резьбой, накрут на вертикально закрепленную винтовую шпильку (рис. 199). Стержень начинает вращаться без трения и без начальной скорости, свинчиваясь со шпильки. Рассчитать, как будет двигаться стержень после того, как он слетит со шпильки, если, свинчиваясь со шпильки, он прошел участок резьбы длины  $h$ , а шаг резьбы много меньше длины стержня.

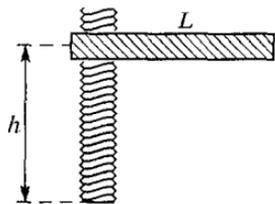


Рис. 199

**9.145я.** Твердый стержень длины  $l$  и массы  $M$  может вращаться вокруг горизонтальной оси  $A$ , проходящей через его конец. К той же оси  $A$  подвешен математический маятник такой же длины  $l$  и массы  $m$ . Первоначально стержень занимает горизонтальное положение, а затем отпускается. В нижнем положении происходит идеально упругий удар, в результате которого шарик и стержень деформируются, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации  $U$  в момент, когда она максимальна.

**9.146.** Тонкий гладкий горизонтальный стержень длины  $L = 1$  м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$ .

В начальный момент на стержень надето кольцо массы  $m = 1$  кг. На расстоянии  $2$  м от оси вращения первого стержня вертикально расположена вторая ось, проходящая через конец второго неподвижного тонкого гладкого горизонтального стержня длины  $1$  м и массы  $M = 30$  кг, расположенного на той же высоте, что и первый (рис. 200). В момент, когда стержни расположены на одной прямой, кольцо соскальзывает с первого стержня на второй. Определить угловую скорость второго стержня к моменту, когда кольцо окажется на расстоянии  $0,5$  м от его оси (трение в осях отсутствует).



Рис. 200

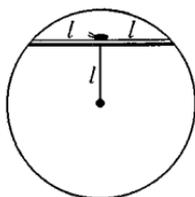


Рис. 201

**9.147.** Табуретку наклоняют так, что она опирается на пол двумя ножками, и отпускают, после чего она падает опять на все четыре ножки. Оценить, на сколько она продвинется по полу. Считать длину, ширину и высоту табуретки одинаковыми, а массу сосредоточенной в сидении.

**9.148.** Концы однородного стержня длины  $2l$  и массы  $m$  могут двигаться без трения по окружности горизонтального неподвижного диска с бортиком. В середине стержня, расположенного на расстоянии  $l$  от центра диска, находится жук массы  $2m/3$  (рис. 201). Вначале вся система покоилась, а затем жук начал ползти вдоль стержня с постоянной относительно него скоростью. Вычислить, на какой угол  $\varphi$  повернулся стержень, когда жук оказался на его конце.

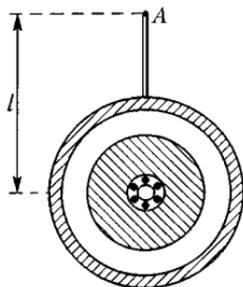


Рис. 202

**9.149.** Верхний конец вертикального невесомого стержня закреплен на горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться, а к нижнему его концу жестко прикреплен электромотор массы  $M$  (рис. 202). Устройство мотора симметрично относительно оси вращения ротора, занимающей горизонтальное положение на расстоянии  $l$  от точки подвеса. Моменты

инерции ротора и статора относительно этой оси равны соответственно  $I_1$  и  $I_2$ . Через электромотор пропускают короткий импульс тока, в результате чего ротор практически мгновенно раскручивается до угловой скорости  $\omega$ . Пренебрегая трением в подшипниках ротора, определить максимальную высоту подъема  $H$  оси мотора.

**9.150.** Стержень длины  $L$  и массы  $M$  закреплен на потолок шарниром. По нижнему концу производят короткий удар в горизонтальном направлении с импульсом  $p$ . Определить величину и направление реакции в подвесе.

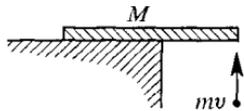


Рис. 203

**9.151.** На горизонтальном столе лежит жесткая линейка длины  $2l$  и массы  $M$  (рис. 203). Конец линейки выступает за край стола, в него абсолютно неупруго ударяется маленький шарик массы  $m = M/2$ , скорость которого направлена вертикально вверх и равна  $v$ . Найти импульс силы реакции опоры за время удара. Считать, что сила реакции приложена к другому концу линейки.

**9.152.** Два одинаковых стержня соединены шарниром и подвешены на горизонтальной оси, проходящей через конец верхнего стержня. По нижнему концу нижнего стержня производится удар в горизонтальном направлении (рис. 204). Найти отношение угловых скоростей стержней после удара.

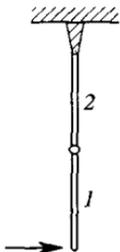


Рис. 204

**9.153.** Два одинаковых стержня соединены шарниром и лежат на гладком горизонтальном столе. По концу одного из стержней производится удар в направлении, перпендикулярном оси стержней (рис. 205). Найти отношение угловых скоростей и скоростей центров инерции стержней после удара.

**9.154.** Абсолютно твердая однородная балка веса  $P$  и длины  $L$  лежит на двух абсолютно твердых симметрично расположенных опорах, расстояние между которыми равно  $l$  (рис. 206). Одну из опор выбивают. Найти начальное значение силы давления  $F$ , действующей на оставшуюся опору. Рассмотреть ча-



Рис. 205

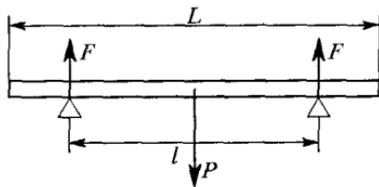


Рис. 206

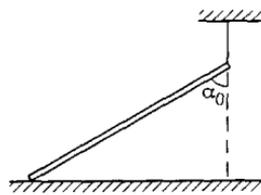


Рис. 207

стный случай, когда  $l = L$ . Почему при выбивании опоры сила  $F$  меняется скачком?

**9.155.** Однородный тонкий стержень массы  $m$  и длины  $2l$  подвешен за один конец на нити так, что другим концом он касается гладкой горизонтальной поверхности (рис. 207). Угол  $\alpha_0 = \pi/3$ .

Нить пережигают. Найти, во сколько раз изменится давление стержня на поверхность сразу же после обрыва нити, а также скорость центра тяжести в момент падения стержня на поверхность.

**9.156.** Однородный тонкий стержень массы  $m$  и длины  $2l$ , поставленный вертикально на гладкую горизонтальную поверхность, начинает падать с нулевой начальной скоростью. Найти скорость центра тяжести и давление стержня на поверхность в тот момент, когда угол между стержнем и вертикалью составит  $\alpha = \pi/3$ .

**9.157.** Однородный тонкий диск массы  $m$ , стоявший вертикально на гладком горизонтальном столе, начинает падать. Найти силу давления на стол в момент, когда плоскость диска составляет с вертикалью угол  $\alpha = 30^\circ$ .

**9.158.** Тонкий обруч массы  $M$ , стоявший вертикально на гладком горизонтальном столе, начинает падать. Найти силу давления обруча на стол в момент, когда плоскость обруча составляет с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ .

**9.159.** К установленному на столе обручу массы  $M$  прикрепляют в точке  $A$  небольшое тело массы  $m = M/3$  (рис. 208). Вычислить минимальное значение коэффициента трения  $k$  между обручем и столом, при котором обруч начнет катиться без проскальзывания.

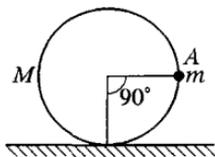


Рис. 208

**9.160.** На внутренней стороне тонкого обруча массы  $M$  и радиуса  $R = 0,5$  м прикреплено тело массы  $m = M/10$ , размеры которого много меньше  $R$ . Обруч катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Какой должна быть скорость центра обруча  $v_0$ , когда тело находится в нижнем положении, чтобы при нахождении его в верхней точке обруч «подпрыгнул»?

**9.161.** На горизонтальной шероховатой плоскости стоит невесомый жесткий обруч. На обруче закреплена точечная масса  $m$ . В начальный момент масса находится в крайнем верхнем положении. Слабым толчком система выводится из равновесия. Определить, как зависит сила нормального давления обруча на плоскость от угла  $\theta$  (рис. 209). Коэффициент трения между плоскостью и обручем  $k$ .

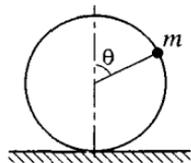


Рис. 209

**9.162.** Баскетбольный мяч, закрученный с угловой скоростью  $\omega_0$ , брошен на пол под углом  $\alpha = 5,7^\circ$  к вертикали со скоростью  $v_0 = 1,5$  м/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости падения. Определить величину угловой скорости  $\omega_0$ , при которой мяч отскочит от пола обратно под тем же углом. Коэффициент трения мяча о пол  $k = 0,2$ , радиус мяча  $R = 15$  см. Считать, что вся масса мяча сосредоточена в тонком поверхностном слое, изменением формы мяча при ударе пренебречь.

**9.163.** Баскетбольный мяч, закрученный с угловой скоростью  $\omega_0$ , брошен на пол под углом  $\alpha = 11,4^\circ$  к вертикали со скоростью  $v_0 = 2$  м/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости падения. Определить величину угловой скорости  $\omega_0$ , при которой мяч отскочит

от пола вертикально. Коэффициент трения мяча о пол  $k = 0,2$ . Радиус мяча  $R = 15$  см. Считать, что вся масса мяча сосредоточена в тонком поверхностном слое, изменением формы мяча при ударе пренебречь.

**9.164.** На горизонтальную шероховатую поверхность вертикально вниз падает каучуковый шар радиуса  $R$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг горизонтальной оси (рис. 210). Непосредственно перед ударом скорость центра шара была равна  $v_0$ . Считая удар

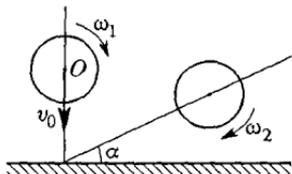


Рис. 210

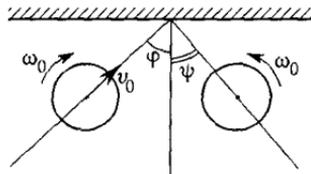


Рис. 211

упругим, а время удара малым, найти угол  $\alpha$ , под которым отскочит шар. Найти также его угловую скорость  $\omega_2$ . Коэффициент трения скольжения между шаром и поверхностью равен  $k$ .

**9.165.** Бильярдный шар катится без проскальзывания по столу со скоростью  $v_0$  и упруго отражается от борта. Считая, что коэффициент трения между шаром и бортом равен  $k$ , определить, под каким углом к горизонту шар отразится от борта. Действием силы тяжести за время удара и трением качения пренебречь.

**9.166.** По горизонтальной ледяной поверхности (без трения), вращаясь вокруг оси симметрии скользит цилиндрическая шайба радиуса  $R$ . Под каким углом  $\psi$  отскочит шайба от вертикального бортика (рис. 211), если после упругого удара она приобретет ту же угловую скорость, но в противоположном направлении? Каким должен быть коэффициент трения  $k$  шайбы о бортик, чтобы это произошло? Считать известными скорость шайбы до удара  $v_0$ , ее угловую скорость  $\omega_0$ , а также угол, под которым шайба налетает на бортик  $\varphi = 30^\circ$ . Необходима ли какая-либо связь между  $\omega_0$  и  $v_0$ , чтобы реализовалась ситуация, описанная в задаче?

**9.167.** Бильярдный шар радиуса  $r$  со скоростью  $v_0$  не вращаясь падает под углом  $\alpha$  к горизонту на шероховатую горизонтальную плоскость с коэффициентом трения  $k$ . Известно, что шар не отскакивает и движется после удара по плоскости. Найти его угловую скорость  $\omega_t$  и скорость  $v_t$  сразу после окончания удара. Найти также скорость  $v$  центра шара, когда начнется чистое качение. Трением качения, а также действием силы тяжести за время удара пренебречь. При каком  $k$  начинается чистое качение сразу после окончания удара?



Рис. 212

**9.168.** Сплошной однородный шар катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости под углом  $\alpha$  к гладкой вертикальной

стене (рис. 212). Определить, под каким углом  $\beta$  к этой стене будет катиться шар после упругого удара о стену, когда его движение вновь перейдет в чистое качение. Потерями на трение о плоскость за время удара пренебречь.

**9.169.** На гладкой горизонтальной поверхности стоит обруч радиуса  $R$ . В обруч ударяется летящая горизонтально (в плоскости обруча) со скоростью  $v_0$  пуля и застревает в нем (рис. 213). Отношение масс обруча и пули  $k = m_0/m = 1$ . Определить максимально возможную угловую скорость обруча после удара. Определить величину выделившегося в этом случае тепла (на единицу массы системы).

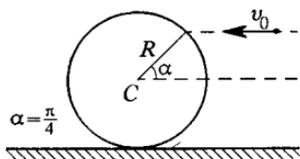


Рис. 213

**9.170я.\*** Найти параметры эллипсоида инерции для точки  $A$ , лежащей в вершине однородного куба массы  $M$  с длиной ребра  $l$  (рис. 214).

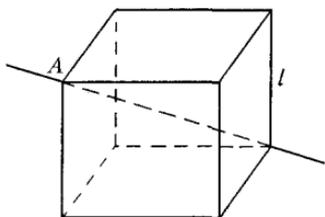


Рис. 214

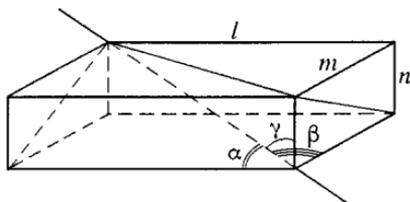


Рис. 215

**9.171я.\*** Для прямоугольного однородного параллелепипеда массы  $M$  с длиной ребер  $l, m, n$  (рис. 215) определить момент инерции относительно его диагонали.

## § 10. Колебания твердого тела. Волны

**10.1.** Кольцо из тонкой проволоки совершает малые колебания, как маятник около горизонтальной оси. В одном случае ось лежит в плоскости кольца (рис. 216а), в другом — перпендикулярна к ней (рис. 216б). Определить отношение периодов  $T_1$  и  $T_2$  малых колебаний для этих двух случаев.

**10.2я.** На конце тонкого однородного стержня длины  $l$  проделано малое отверстие, через которое продета горизонтально натянутая непрогибаемая проволока. Найти периоды малых колебаний такого физического маятника в двух случаях: 1) когда маятник колеблется в вертикальной плоскости, перпендикулярной к проволоке; 2) когда колебания происходят в вертикальной плоскости, параллельной проволоке. Во втором случае точка подвеса маятника может скользить по проволоке без трения. Найти также отношение этих двух периодов.

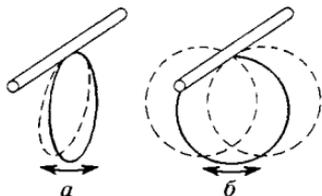


Рис. 216

**10.3.** Две одинаковые однородные пластинки, имеющие форму квадрата, подвешены с помощью тонких невесомых нитей двумя способами (рис. 217). Расстояние от точек подвеса до верхних сторон пластинок равно длине сторон. Найти отношение периодов малых колебаний полученных физических маятников в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью пластинки.

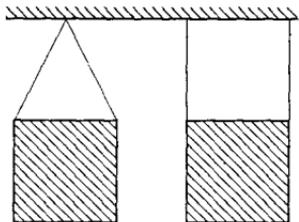


Рис. 217

**10.4.** Два одинаковых сплошных однородных куба подвешены двумя различными способами: в одном случае за вершину, в другом — за середину ребра (рис. 218). Учитывая свойства эллипсоида инерции куба, найти отношение периодов колебаний

получившихся физических маятников в поле тяжести. Колебания происходят в плоскости рисунка.

**10.5.** К концу однородного тонкого стержня длины  $l$  и массы  $m$  прикреплена короткая упругая пластинка. Пластинку зажимают в тисках один раз так, что стержень оказывается внизу, а другой раз — вверх (рис. 219). Определить отношение периодов малых

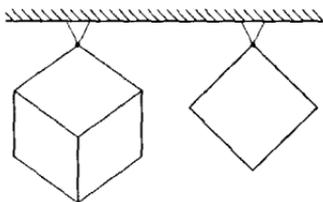


Рис. 218

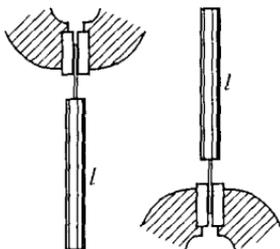


Рис. 219

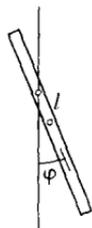


Рис. 220

колебаний стержня в этих случаях. Момент упругих сил пластинки пропорционален углу отклонения стержня от положения равновесия, причем коэффициент пропорциональности равен  $k$ .

**10.6я.** Сплошной однородный диск радиуса  $r = 10$  см колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через край диска. Какой длины  $l$  должен быть математический маятник, имеющий тот же период колебаний, что и диск?

**10.7.** Однородный диск радиуса  $R$  совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости. Вычислить расстояние  $x$  между центром тяжести диска и осью подвеса, при котором период колебаний будет минимальным. Определить величину минимального периода колебаний  $T_{\min}$ .

**10.8.** В какой точке следует подвесить однородный стержень длины  $l$  (рис. 220), чтобы частота его колебаний как физического маятника была максимальна? Чему равна эта частота?

**10.9я.** Физический маятник состоит из двух одинаковых массивных шаров радиуса  $r = 5$  см на невесомом стержне (рис. 221). Ось маятника расположена на расстоянии  $b = 10$  см ниже центра верхнего шара. При каком расстоянии  $x$  между центрами шаров период маятника  $T$  будет наименьшим? Найти этот период, приведенную длину маятника  $l$  и расстояние  $a$  между осью и центром масс маятника  $S$ .

**10.10.** Через неподвижный блок с моментом инерции  $I$  (рис. 222) и радиусом  $r$  перекинута нить, к одному концу которой

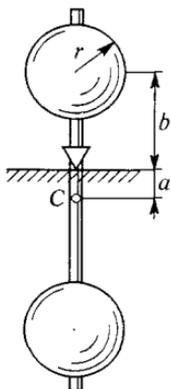


Рис. 221

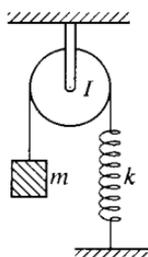


Рис. 222

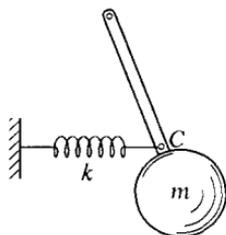


Рис. 223

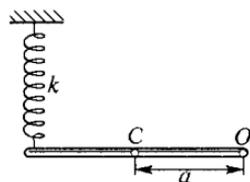


Рис. 224

подвешен груз массы  $m$ . Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если коэффициент упругости пружины равен  $k$ , а нить не может скользить по поверхности блока.

**10.11.** Найти период малых колебаний физического маятника массы  $m$ , к центру масс  $S$  которого прикреплена горизонтальная спиральная пружина с коэффициентом упругости  $k$ . Другой конец пружины закреплен в неподвижной стенке (рис. 223). Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен  $I$ , расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника равно  $a$ . В положении равновесия пружина не деформирована.

**10.12.** Колебательная система состоит из стержня длины  $l$  и массы  $m$ , который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , проходящей через его конец и перпендикулярной к продольной оси стержня (рис. 224). Другой конец стержня подвешен на пружине с коэффициентом упругости  $k$ . Расстояние между центром масс стержня и осью вращения  $CO = a$ . Момент инерции стержня относительно оси  $O$  равен  $I$ . Найти удлинение пружины  $x_0$  (по сравнению с ее длиной в недеформированном состоянии) в положении равновесия, если в этом положении стержень горизонтален. Определить также период малых колебаний стержня около положения равновесия.

**10.13.** К середине однородного стержня массы  $m$  и длины  $l$ , верхний конец которого подвешен на шарнире, прикреплена

горизонтальная пружина с коэффициентом упругости  $k$ . В положении равновесия пружина не деформирована. Найти период малых колебаний стержня в плоскости, проходящей через пружину и стержень.

**10.14.** Твердый стержень массы  $m$ , к одному из концов которого прикреплена точечная масса  $M$ , может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой конец стержня (рис. 225).

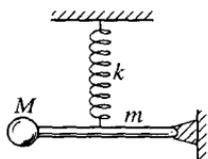


Рис. 225

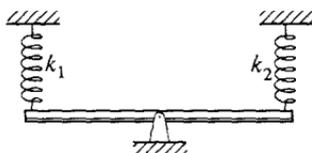


Рис. 226

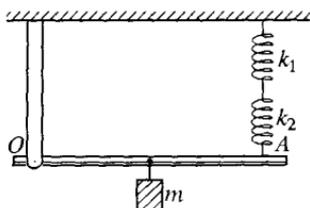


Рис. 227

Стержень удерживается спиральной пружиной жесткости  $k$ , прикрепленной к его середине. Найти удлинение пружины  $x_0$  (по сравнению с длиной недеформированной пружины) в положении равновесия, если в этом положении стержень горизонтален. Вычислить период малых колебаний системы около положения равновесия.

**10.15.** Однородный стержень длины  $L$  и массы  $M$  может поворачиваться вокруг шарнира, расположенного посередине стержня (рис. 226). Концы стержня прикреплены к потолку двумя пружинами, одна из которых имеет жесткость  $k_1$ , другая —  $k_2$ . Найти период малых колебаний стержня.

**10.16.** Найти период малых колебаний системы, изображенной на рис. 227. Масса однородной штанги  $OA$  равна  $M$ , груз массы  $m$  подвешен к ее центру. Конец штанги  $A$  висит на двух последовательно соединенных пружинах с коэффициентами упругости  $k_1$  и  $k_2$ .

**10.17.** Груз массы  $M$  прикреплен к блоку массы  $m$  (рис. 228). Блок висит на нерастяжимой нити, один конец которой прикреплен к

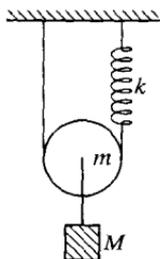


Рис. 228

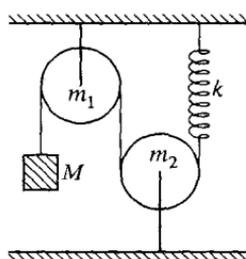


Рис. 229

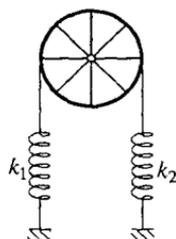


Рис. 230

потолку непосредственно, а другой — через пружину жесткости  $k$ . Определить период малых вертикальных колебаний груза, если проскальзывание нити по блоку отсутствует. Блок считать цилиндром.

**10.18.** Нерастяжимая нить соединяет пружину жесткости  $k$  и груз массы  $M$  через два неподвижных блока (рис. 229). Определить

период малых вертикальных колебаний груза, если проскальзывание нити по блоку отсутствует. Блоки считать цилиндрами, обладающими массами  $m_1$  и  $m_2$ . Трением в осях блоков пренебречь. Радиусы блоков одинаковы.

**10.19.** Через блок перекинута невесомая нить, которая привязана к двум закрепленным растянутым пружинам с известной жесткостью  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 230). Считая, что нить по блоку движется без проскальзывания, найти период малых колебаний системы. Блок представляет собой колесо со спицами. Масса обода  $M$ , масса всех спиц  $m$ . Толщина обода и спиц мала по сравнению с радиусом колеса.

**10.20.** Найти частоты малых колебаний однородного стержня массы  $m$ , подвешенного за концы на двух одинаковых пружинах жесткости  $k$ . Колебания происходят в плоскости чертежа (рис. 231).

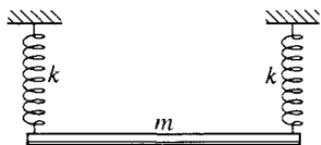


Рис. 231

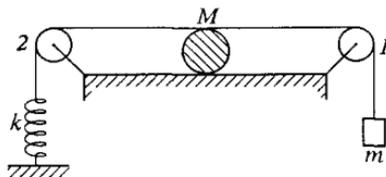


Рис. 232

Рассмотреть колебания двух типов: а) стержень перемещается параллельно самому себе в вертикальном направлении; б) стержень поворачивается относительно неподвижного центра инерции.

**10.21.** Определить период малых колебаний груза массы  $m$ , висющего на нерастяжимой и невесомой нити. Второй конец нити соединен с невесомой пружиной жесткости  $k$  (рис. 232). Нить перекинута через систему блоков 1, 2 и сплошной цилиндр массы  $M$ . Блоки 1 и 2 жестко скреплены с подставкой, а их массами можно пренебречь. Цилиндр может перекатываться без скольжения по подставке. Проскальзывание нити по цилиндру отсутствует. Силы трения в блоках не учитывать.

**10.22.** Абсолютно твердый однородный стержень длины  $l$  и массы  $M$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов  $A$  (рис. 233). Стержень соединен с неподвижной точкой поверхности  $B$  невесомой пружиной жесткости  $k$ , перпендикулярной стержню. В незакрепленный конец стержня  $C$  перпендикулярно ему ударяется со скоростью  $v$  маленький шарик массы  $m$  и прилипает к стержню. Найти амплитуду малых колебаний пружины. Считать, что за время удара пружина не деформируется.

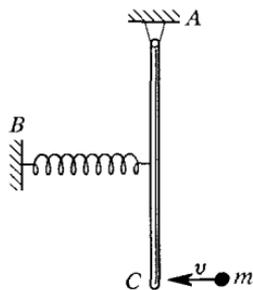


Рис. 233

**10.23.** Однородный тонкий стержень длины  $L$  и массы  $M$  лежит на горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг вертикальной

оси, проходящей через его конец. В некоторый момент стержень начинает вращаться с угловой скоростью  $\omega_0$  и неупруго ударяет центром по шарiku массы  $m$ , слипаясь с ним (рис. 234). Шарик насажен на невесомую нерастянутую пружину жесткости  $k$ , расположенную перпендикулярно стержню в момент удара, причем противо-

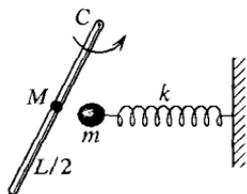


Рис. 234

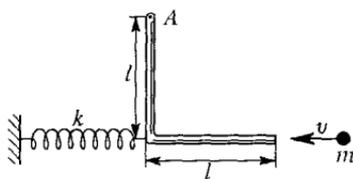


Рис. 235

ложный конец пружины закреплен. Найти амплитуду  $a$  колебаний шарика, слипшегося со стержнем, считая колебания малыми. Трением шарика и стержня о поверхность и размерами шарика пренебречь.

**10.24.** Два тонких стержня массы  $m$  и длины  $l$  каждый, жестко скрепленные под углом  $90^\circ$ , лежат на гладком горизонтальном столе. Точка соединения стержней прикреплена к пружине жесткости  $k$  (рис. 235). Конструкция может вращаться вокруг вертикальной оси  $A$ , проходящей через конец одного из стержней. В свободный

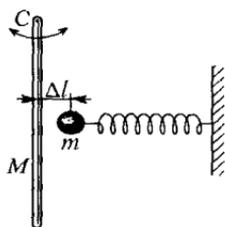


Рис. 236

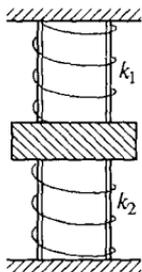


Рис. 237

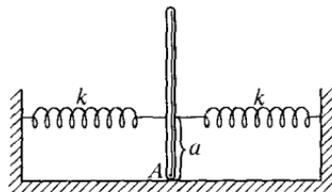


Рис. 238

торец другого стержня ударяется и прилипает к нему маленький шарик массы  $m$ , двигавшийся со скоростью  $v$ , направленной вдоль этого стержня и пружины. Определите угловую амплитуду  $\varphi_0$  и период  $T$  возникающих малых колебаний.

**10.25.** Однородный тонкий стержень массы  $M$  лежит на горизонтальной поверхности и может вращаться вокруг вертикальной оси  $C$ , проходящей через его конец. Центр стержня касается маленького шарика массы  $m$ , насаженного на нерастянутую невесомую пружину. Другой конец пружины закреплен. Пружину с шариком сжимают на малое расстояние  $\Delta l$  (рис. 236), после чего шарик неупруго ударяется в центр стержня и слипается с ним. Найти амплитуду  $a$

колебаний шарика, слипшегося со стержнем, считая его колебания малыми. Трением шарика и стержня о поверхность и размерами шарика пренебречь.

**10.26.** На абсолютно гладкой винтовой шпильке с диаметром  $d$  и шагом резьбы  $h$  находится цилиндрическая гайка массы  $M$  с внешним диаметром  $D$  (рис. 237). Гайка зажата с торцов двумя спиральными пружинами с коэффициентами упругости  $k_1$  и  $k_2$ . При вращении гайки концы пружин свободно проскальзывают по торцевым поверхностям гайки. Найти период колебаний гайки.

**10.27.** Однородный тонкий стержень массы  $m$  и длины  $l$  шарнирно закреплен в точке  $A$  и может колебаться в вертикальной плоскости. К стержню на расстоянии  $a$  от точки  $A$  прикреплены две одинаковые пружины жесткости  $k$  (рис. 238). Определить период малых колебаний стержня в плоскости чертежа, а также найти значения  $k$ , для которых колебания возможны.

**10.28.** Два однородных тонких стержня одинаковой длины и разной массы  $m_1$  и  $m_2$  лежат на гладкой поверхности параллельно

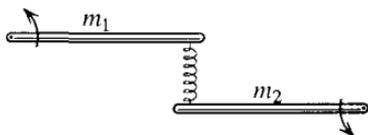


Рис. 239

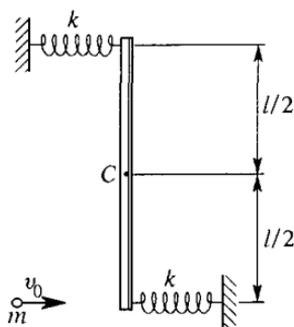


Рис. 240

друг другу. Стержни могут вращаться без трения вокруг вертикальных неподвижных осей, отстоящих друг от друга на удвоенную длину стержней (рис. 239). Свободные концы стержней соединены невесомой пружиной жесткости  $k$ . Найти период малых колебаний системы.

**10.29.** Пуля массы  $m$  летит со скоростью  $v_0$  и попадает в нижний конец стержня массы  $m$  и длины  $l$ , укрепленного вертикально с помощью горизонтальной оси  $C$  и двух пружин жесткости  $k$  (рис. 240). Определить амплитуду малых угловых колебаний стержня, если пуля застряла в нем.

**10.30.** Стержень массы  $m$  лежит на гладком горизонтальном столе и прикреплен к стене за один из концов пружиной жесткости  $k$  (рис. 241). По этому концу стержня производится удар перпендикулярно его оси и вдоль пружины. Найти период малых колебаний стержня.

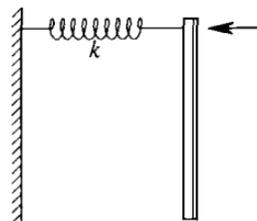


Рис. 241

**10.31.** Два тонких стержня длины  $2l$  и массы  $m$  каждый жестко соединены под углом  $90^\circ$  в форме креста (рис. 242). Конструкция лежит на гладком горизонтальном столе и может вращаться вокруг вертикальной оси  $A$ , проходящей через конец одного из стержней.

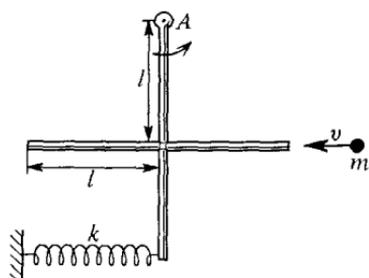


Рис. 242

К другому концу этого стержня прикреплена пружина жесткости  $k$ , как показано на рисунке. В торец второго стержня упруго ударяется маленький шарик массы  $m$ , летящий со скоростью  $v$  вдоль оси стержня. Определите угловую амплитуду  $\varphi_0$  и период  $T$  возникающих малых колебаний системы.

**10.32.** Определить период малых колебаний колодезного ворота около положения равновесия. Ворот представляет собой деревянный цилиндр

(рис. 243) с ручкой, изготовленной из металлического прута с линейной плотностью  $\mu = 2$  кг/м, радиус которого можно считать пренебрежимо малым по сравнению с радиусом ворота. Линейные размеры ворота  $l = 1$  м,  $D = 0,2$  м,  $a = 0,3$  м. Плотность дерева принять равной  $\rho = 700$  кг/м<sup>3</sup>. Трением в подшипниках пренебречь.



Рис. 243

**10.33.** Выполняя лабораторную работу на крестообразном маятнике Обербека (рис. 244) и желая определить момент инерции маятника без грузов (т.е. момент инерции шкива и четырех спиц), студент

снял груз с одной из спиц, остальные три закрепил на концах спиц и измерил период  $T$  малых крутильных колебаний такого маятника, который оказался равным 2,1 с. Чему равен искомый момент инерции  $I$ , если длина каждой спицы  $r = 30$  см, а масса каждого груза  $m = 100$  г? Грузы считать точечными, трением в подшипнике пренебречь.

**10.34.** На горизонтальной плоскости находится цилиндр с моментом инерции  $I$  (относительно его геометрической оси), массой  $m$  и радиусом  $r$ . К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные спиральные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 245). Коэффициент упругости каждой пружины равен  $k$ ; пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие. Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжения по горизонтальной плоскости.

**10.35.** Два цилиндра одинакового радиуса  $R$  и одной массы  $m$  лежат на горизонтальном столе. Цилиндры имеют разное распределение плотности материала вдоль радиуса и моменты инерции цилиндров относительно оси симметрии равны  $I_1 = mR^2/2$  и

$I_2 = mR^2/4$ . Оси цилиндров соединены двумя невесомыми пружинами жесткости  $k$  каждая (рис. 246). В начальный момент времени пружины растянуты на длину  $l$ , а цилиндры неподвижны. Опреде-

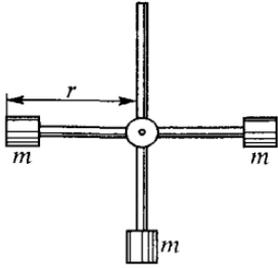


Рис. 244

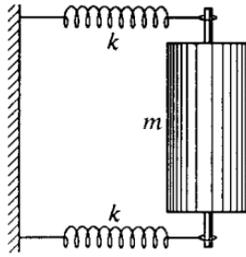


Рис. 245

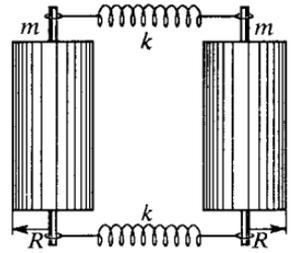


Рис. 246

лить период малых колебаний и амплитуду колебаний центра масс системы, если цилиндры катаются по столу без проскальзывания, а пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

**10.36.** Два цилиндра одинакового радиуса  $R$  и массами  $m$  и  $2m$  лежат на горизонтальном столе. Цилиндры имеют разное распределение массы вдоль радиуса, моменты инерции цилиндров относительно осей симметрии одинаковы и равны  $I_1 = I_2 = mR^2/2$ . Оси цилиндров соединены двумя невесомыми пружинами жесткости  $k$  каждая (рис. 247). В начальный момент времени пружины растянуты на длину  $l$ , а цилиндры неподвижны. Определить период малых колебаний и амплитуду колебаний центра масс системы, если цилиндры катаются по столу без проскальзывания, а пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

**10.37я.** Достаточно тонкая пластинка из однородного материала имеет форму равностороннего треугольника высоты  $h$  (рис. 248).

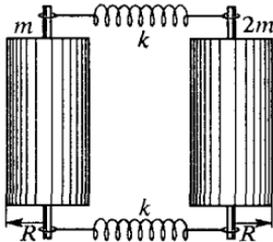


Рис. 247

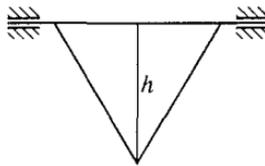


Рис. 248

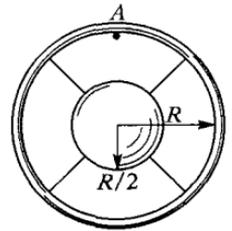


Рис. 249

Она может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон пластинки. Найти период малых колебаний  $T$  этого физического маятника.

**10.38.** В центре обруча массы  $m_1$  и радиуса  $R$  с помощью легких спиц укреплен сплошной шар радиуса  $R/2$  и массы  $m_2 = 2m_1$ . Обруч висит на гвозде  $A$  (рис. 249). Найти период его малых колебаний.

**10.39.** Однородный стержень длины  $2l$  скользит по гладкой вертикальной окружности радиуса  $R$  (рис. 250). Найти период малых колебаний стержня.

**10.40.** Обруч радиуса  $r$  приварен к другому обручу такой же массы и радиуса  $2r$ . Система стоит на горизонтальном столе (рис. 251). Определить период ее малых колебаний.

**10.41.** В сплошном однородном цилиндре радиуса  $R$  сделана цилиндрическая полость радиуса  $R/2$  с осью, проходящей через середину радиуса цилиндра (рис. 252). Определить период малых

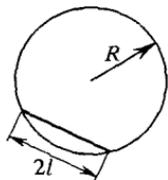


Рис. 250

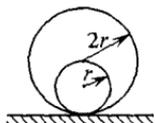


Рис. 251

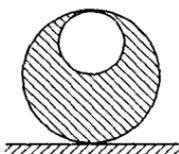


Рис. 252

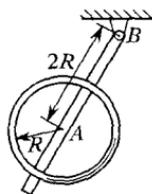


Рис. 253

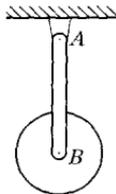


Рис. 254

колебаний  $T$ , которые возникнут, если положить цилиндр на горизонтальную плоскость и дать ему возможность кататься по ней без скольжения.

**10.42.** Маятник имеет вид обруча, висящего на легкой планке. Найти период малых колебаний маятника. Радиус обруча равен  $R$ . Расстояние  $AB$  от центра обруча до точки подвеса маятника равно  $2R$  (рис. 253).

**10.43.** На конце стержня длины  $l$  и массы  $m$  прикреплен сплошной диск радиуса  $R$  и массы  $M$ . Определить период малых колебаний стержня с диском вокруг оси  $A$ , если диск может свободно вращаться вокруг оси  $B$ , проходящей через центр диска (рис. 254).

**10.44.** Однородная палочка подвешена за оба конца на двух одинаковых нитях длины  $L$ . В состоянии равновесия обе нити параллельны. Найти период  $T$  малых колебаний, возникающих после некоторого поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через середину палочки.

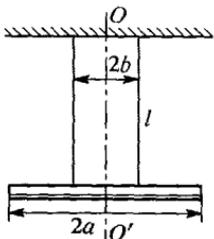


Рис. 255

**10.45.** Однородный массивный стержень длины  $2a$  симметрично подвешен на двух нерастяжимых нитях длины  $l$ , расстояние между нитями  $2b$  (рис. 255). Найти период малых крутильных колебаний системы относительно вертикальной оси  $OO'$ .

**10.46.** Тонкий диск, катающийся по наклонной плоскости, прикреплен к неподвижной точке  $A$  тонкой нерастяжимой нитью, как показано на рис. 256. Угол наклона плоскости  $\alpha$ , длина нити  $l$ . Диск катится по плоскости без проскальзывания. Определить период малых колебаний диска. Трением качения, толщиной диска и модулем кручения нити пренебречь.

**10.47.** Однородный диск  $A$  массы  $M$  и радиуса  $2R$  может совершать колебания, катаясь по поверхности неподвижного цилиндра  $B$ , имеющего радиус  $R$  (рис. 257). Центры цилиндра и диска стянуты стержнем массы  $m$  так, что при качении отсутствует проскальзывание. Пренебрегая трением в осях, найти период этих малых колебаний.

**10.48.** Ось дверцы шкафа образует с вертикалью угол  $\alpha$ . Ширина дверцы —  $b$ . Считая дверцу однородной тонкой пластиной и пренебрегая трением, найти период ее малых колебаний относительно положения равновесия.

**10.49.** Колесо автомобиля имеет в некоторой точке довесок, массой много меньше массы колеса. Вычислить разницу между максимальной и минимальной силой давления колеса на дорогу по отношению к весу колеса, если его скорость  $v = 60$  км/ч. Период малых

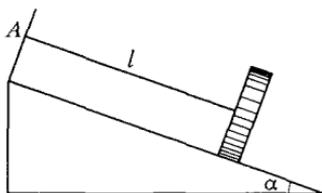


Рис. 256

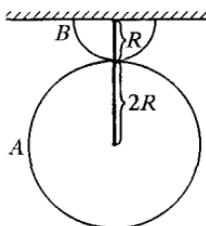


Рис. 257

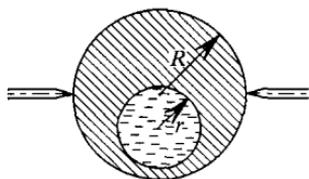


Рис. 258

колебаний колеса с довеском вокруг оси, проходящей через центр колеса,  $T = 16$  с. Считать для простоты колесо тонким однородным обручем.

**10.50.** В сплошном однородном шаре радиуса  $R$  имеется заполненная вязкой жидкостью сферическая полость радиуса  $r = 0,5R$ , центр которой находится на расстоянии  $l = 0,4R$  от центра шара (рис. 258). Определить период малых колебаний шара относительно проходящей через его центр горизонтальной оси, полагая, что центр полости лежит на перпендикулярном к оси вращения радиусе и что плотность жидкости в 6 раз больше плотности материала, из которого сделан шар.

**10.51.** Два одинаковых тонких и узких обруча массы  $m$  и радиуса  $r$  жестко скреплены в одной точке так, что их плоскости составляют угол  $2\alpha$  (рис. 259). Найти период малых колебаний этой конструкции на горизонтальной поверхности. Трением пренебречь.

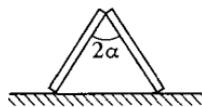


Рис. 259

**10.52.** Найти отношение периодов малых колебаний  $T_1/T_2$  однородного кругового конуса, у которого радиус основания равен высоте. В первом случае конус шарнирно закрепили за вершину, во втором — за центр основания. В обоих случаях ось вращения горизонтальна.

**10.53.** Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней (рис. 260). Верхний конец  $A$  стержня неподвижно закреплён. Если бы диск был насажен только на первый стержень, то период колебаний был бы равен  $T_1$ . Если

бы он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным  $T_2$ .

**10.54.** Однородная квадратная плита подвешена за свои углы к потолку зала на четырех параллельных веревках, длина каждой из

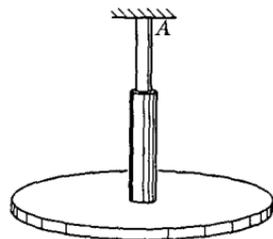


Рис. 260

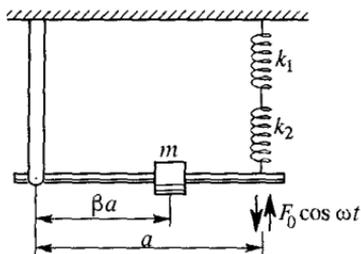


Рис. 261

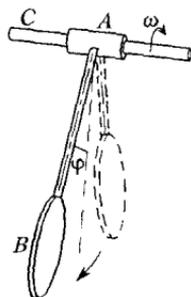


Рис. 262

которых равна  $l$ . Определить период малых крутильных колебаний плиты, которые возникнут, если повернуть ее на малый угол вокруг вертикальной оси.

**10.55.** Как изменится ход карманных часов, если их положить на горизонтальный абсолютно гладкий стол? Считать, что ось крутильного маятника часов проходит через их центр, а момент инерции часов  $I_0$  в 500 раз больше момента инерции маятника  $I$ .

**10.56.** Во сколько раз изменится период колебаний крутильного маятника, если его разместить на скамье Жуковского так, чтобы оси вращения маятника и скамьи совпадали. Момент инерции маятника  $I_0$  в три раза больше момента инерции скамьи  $I$ .

**10.57.** Найти период крутильных колебаний ротора воздушно-реактивного двигателя, если момент инерции осевого компрессора  $I_1$ , а турбины  $I_2$ ; модуль кручения связывающего их стержня  $f$ .

**10.58.** Однородная пластинка, имеющая форму равностороннего треугольника, подвешена за вершины тремя нитями, имеющими одинаковую длину  $L$ . В состоянии равновесия пластинка горизонтальна и нити вертикальны. Найти период крутильных колебаний пластинки вокруг вертикальной оси (считать, что каждая нить отклоняется на малый угол от вертикали).

**10.59.** К концу стержня длины  $a$  системы, изображенной на рис. 261, приложена гармоническая сила  $F_0 \cos \omega t$ . Найти амплитуду установившихся малых колебаний конца стержня, если частота  $\omega$  вдвое меньше собственной частоты системы. Стержень и пружины  $k_1$  и  $k_2$  считать невесомыми. Масса груза —  $m$ .

**10.60я.** Н. Е. Жуковским было предложено устройство совершенного (без потерь) подвеса маятника, схематически показанное на рис. 262. Муфта  $A$ , насаженная на вал  $C$ , составляет одно целое с маятником  $B$ . Вал расположен горизонтально и равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , маятник совершает колебания в плоскости, перпендикулярной к валу. Показать, что если угловая скорость вала

достаточно велика и сила трения муфты о вал не зависит от скорости скольжения, то потери энергии колебаний в подвесе не будет. Как велика должна быть скорость вращения вала?

**10.61я.\*** Каким образом изменится характер колебаний маятника, если сила трения муфты о вал (рис. 262) будет зависеть от скорости скольжения муфты по валу при сохранении остальных условий предыдущей задачи? Рассмотреть два случая: 1) сила трения возрастает с увеличением скорости скольжения; 2) сила трения уменьшается с увеличением скорости скольжения.

**10.62я.** Пуля пролетела со скоростью 660 м/с на расстоянии 5 м от человека. На каком расстоянии от человека была пуля, когда он услышал ее свист?

**10.63я.** Какова длина  $L$  струны, если при укорочении ее на 10 см частота колебаний повышается в полтора раза? Натяжение струны остается неизменным.

**10.64я.** Две струны имеют одинаковую длину и натяжение. Как относятся периоды их собственных колебаний, если диаметр одной струны в два раза больше диаметра другой? Струны сделаны из одного материала.

**10.65я.** Как следует изменить натяжение струны, чтобы она давала тон в три раза более низкий?

**10.66я.** Струна звучит с частотой 400 Гц. В каком месте и как следует задержать движение струны, чтобы она звучала с частотой: 1) 800 Гц; 2) 1200 Гц? Можно ли, зажимая струну, понизить частоту ее звучания?

**10.67.** Мастер, натягивающий первую струну теннисной ракетки, установил рекомендуемое для современных струн натяжение  $T = 255$  Н. При этом струна издает звук соль, т. е. на один тон ниже ля второй октавы, частота которой по ГОСТу равна 880 Гц. Длина зеркала ракетки там, где натягивается первая струна равна 270 мм. Масса всей струны в нерастянутом состоянии ( $L_0 = 13,3$  м) составляет  $M = 21$  г. Помогите мастеру определить, насколько вытягивается струна при силе  $T = 255$  Н. Октава составляет диапазон частот от  $\nu_1$  до  $\nu_2$ . Частоты  $\nu_1$  и  $\nu_2$  связаны соотношением  $\log_2(\nu_2/\nu_1) = 1$ . Один музыкальный тон (два полутона) равен  $1/6$  октавы.

**10.68.** Как показывает опыт, скорость  $v$  распространения продольных деформаций в сплошной среде зависит от модуля упругости среды  $E$  и от ее плотности  $\rho$ . Пользуясь методом размерностей, найти выражение для зависимости  $v$  от указанных параметров среды.

**10.69я.\*** Как показывает опыт, скорость  $v$  распространения импульса поперечных деформаций вдоль натянутой однородной струны зависит от силы ее натяжения  $F$  и от массы  $\rho$ , приходящейся на единицу длины струны. Пользуясь методом размерностей, найти выражение зависимости скорости  $v$  от указанных параметров струны.

**10.70я.** Две синусоидальные волны излучаются двумя источниками. Найти движение частицы, находящейся на расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  от этих источников, если распространение волн подчиняется принципу суперпозиции, источники колеблются в одинаковой фазе и с

одинаковой частотой и если направления колебаний в рассматриваемой точке совпадают.

**10.71я.** Амплитуда колебаний давления звуковой волны  $\Delta P = 100$  дин/см<sup>2</sup> (громкий звук). Найти поток энергии  $J$ , попадающей за 1 с в ухо человека. Считать площадь  $S$  уха равной 4 см<sup>2</sup> и ухо перпендикулярным к направлению распространения волны. Плотность воздуха  $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>, скорость звука 334 м/с.

**10.72я.** Плоская бегущая акустическая волна может быть представлена следующим уравнением:

$$y = 0,05 \sin (1980t - 6x),$$

где  $y$  — смещение частицы в направлении распространения волны в сантиметрах,  $t$  — время в секундах,  $x$  — расстояние в метрах по оси, вдоль которой распространяется волна. Найти: 1) частоту колебаний  $\nu$ ; 2) скорость  $c$  распространения волны; 3) длину волны  $\lambda$ ; 4) амплитуду колебаний скорости  $u$  каждой частицы; 5) амплитуду колебаний давления  $\Delta P$ , если давление  $P$  и объем  $v$  связаны законом адиабаты  $Pv^{1,4} = \text{const}$ .

## § 11. Пространственное движение твердого тела. Гироскопы

**11.1.** Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом  $\alpha$  к вертикали (рис. 263), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка  $O$  неподвижна. Определить, под каким углом  $\beta$  к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

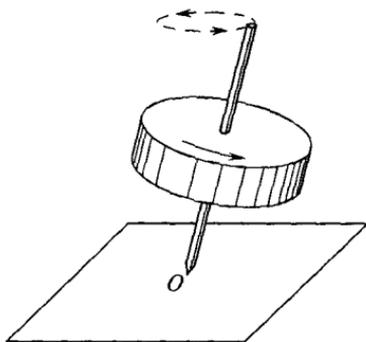


Рис. 263

**11.2.** Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется следующими параметрами: масса маховичка гироскопа  $m = 5 \cdot 10^3$  г, момент инерции маховичка относительно оси фигуры  $I_{\parallel} = 8 \cdot 10^4$  г·см<sup>2</sup>, расстояние между точкой подвеса и центром масс маховичка  $l = 0,25$  см. Гироскоп делает 20000 об/мин. Когда самолет, на котором был установлен прибор, двигался

равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени  $\tau = 10$  с самолет двигался с горизонтальным ускорением  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>. Определить угол  $\alpha$ , на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

**11.3.** Однородный стержень длины  $l$  подвешен за конец на горизонтальной оси, укрепленной на стойке центробежной машины. При отсутствии вращения положение стержня совпадает с осью машины.

На какой угол отклонится стержень при вращении машины с угловой скоростью  $\omega$ ?

**11.4.** Сделать оценку порядка величины момента импульса  $L$  велосипедного колеса, едущего со скоростью 30 км/ч. Какой момент сил надо приложить, чтобы повернуть руль на 1 радиан за время 0,1 с?

**11.5.\*** Оценить, с какой минимальной скоростью  $v$  надо выпустить на полюсе Земли снаряд массы  $m = 1000$  т, чтобы повернуть земную ось относительно системы «неподвижных звезд» на угол  $\alpha = 1^\circ$ . Масса Земли  $M = 6 \cdot 10^{24}$  кг. Длина градуса земного меридиана  $l = 111$  км. Землю считать однородным шаром.

**11.6.** С северного полюса по касательной к Земле стартует космическая ракета. Найти, на сколько повернется земная ось в результате запуска ракеты. Масса Земли равна  $6 \cdot 10^{24}$  кг. Радиус Земли 6400 км. Масса ракеты 1000 т. Двигатель ракеты работает только на старте. Скорость ракеты на старте равна 15 км/с.

**11.7.** В районе северного полюса на Землю падает метеорит под углом  $45^\circ$  к вертикали. Масса метеорита 1000 т. Его скорость 20 км/с. Найти, на сколько повернется земная ось в результате соударения с метеоритом. Масса Земли  $6 \cdot 10^{24}$  кг, ее радиус 6400 км.

**11.8.** Самолет при скорости  $u = 300$  км/ч делает поворот радиуса  $R = 100$  м. Пропеллер с моментом инерции  $I = 7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  делает  $N = 1000$  об/мин. Чему равен момент  $M$  гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера?

**11.9.** Гребной винт миноносца делает  $N = 750$  об/мин, масса винта с валом  $m = 12$  т, радиус инерции  $\rho = 25$  см. Миноносец делает поворот, двигаясь по дуге окружности радиуса  $R = 600$  м со скоростью  $v = 72$  км/ч. Найти гироскопическое давление в подшипниках винта, если расстояние между подшипниками  $a = 1$  м.

**11.10.** Определить максимальное гироскопическое давление быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой  $9^\circ$  и периодом 15 с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины массой 3500 кг и радиусом инерции 0,6 м делает 3000 об/мин. Расстояние между подшипниками равно 2 м.

**11.11.** По внутренней поверхности вертикальной цилиндрической стены едет мотоцикл. Чтобы обеспечить возможность движения в строго горизонтальном положении, к мотоциклу приделан маховик с моментом инерции  $I$ , вращающийся вокруг оси, которая вертикальна, когда мотоцикл стоит на земле. Масса мотоцикла с каскадером равна  $m$ , а центр масс находится на расстоянии  $h$  от поверхности стены (радиус цилиндрической стены много больше размеров мотоцикла). Каков должен быть коэффициент передачи вращения  $N$  от колес к маховику, чтобы мотоцикл мог без проскальзывания колес двигаться, не теряя высоты? Радиус колес  $r$ . Коэффициент трения между колесами и стеной равен  $k$ .

**11.12.** Упругий мяч массы  $m = 0,2$  кг ударяется со скоростью  $v = 20$  м/с в центр неподвижного гладкого кожуха гироскопа, обладающего моментом импульса  $L = L_z = 40 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$  и имеющего

одну неподвижную точку  $x = y = z = 0$  (рис. 264). Координаты точки удара  $x_0 = 0$ ,  $z_0 = 0,2$  м. Какое положение примет ось гироскопа после удара?

**11.13.** Симметричный волчок с наклоненной осью, поставленный на горизонтальную плоскость, совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка движется по этой плоскости по окружности с постоянной скоростью. Центр инерции волчка, оставаясь на одной и той же высоте, также с постоянной скоростью движется по окружности радиуса  $R$ . Определить, под каким углом  $\alpha$  к вертикали направлена сила реакции  $F$ , с которой плоскость действует на волчок. Волчок имеет форму однородного диска радиуса  $r$  и вращается вокруг оси фигуры с угловой скоростью  $\omega$ . Расстояние от точки опоры до центра инерции волчка равно  $l$ .

**11.14.** Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), способный вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью  $\Omega$ ) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 265). Такое вращение можно

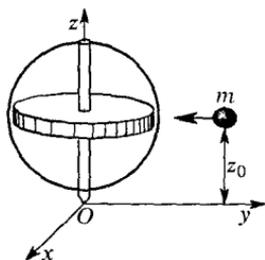


Рис. 264

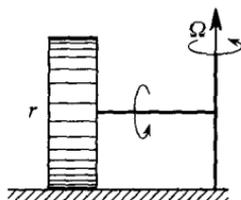


Рис. 265

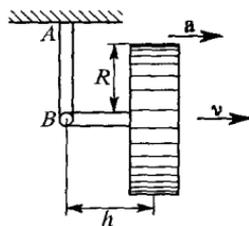


Рис. 266

рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпaeмый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна  $r = 50$  см, а рабочая скорость 1 об/с.

**11.15.** Диск радиуса  $r$ , вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью  $\omega$ , катится без скольжения в наклонном положении по горизонтальной плоскости, описывая окружность за время  $T$ . Определить  $T$  и радиус окружности  $R$ , если  $R \gg r$ , а угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью диска равен  $\alpha$ .

**11.16.** Вертикальный стержень  $AB$  в точке  $A$  жестко скреплен с опорой. В точке  $B$  (рис. 266) к стержню шарнирно крепится ротор гироскопа (диск радиуса  $R = 2$  см, вращающийся с угловой скоростью  $\nu = 500$  об/с). Центр масс ротора находится на расстоянии  $h = 2$  см от точки  $B$ . Системе, находящейся в поле тяжести Земли, сообщают горизонтальное ускорение  $a = 3$  м/с<sup>2</sup>, причем в момент

«включения» ускорения векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{v}$  параллельны. Определить величину и направление угловой скорости прецессии гироскопа.

**11.17.** Ротор гироскопа (диск радиуса  $R = 2$  см, вращающийся с угловой скоростью  $\nu = 30\,000$  об/мин) шарнирно закреплен в точке  $A$ . Центр масс ротора расположен на расстоянии  $b = 2$  см от шарнира (рис. 267). Системе, находящейся в поле тяжести Земли, сообщают горизонтальное ускорение  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Определить максимальное отклонение оси гироскопа от вертикали и время, через которое первый раз будет достигнуто это положение.

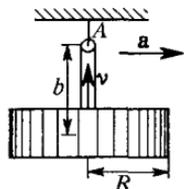


Рис. 267

**11.18.** С автомобиля, движущегося со скоростью  $v$ , соскочило колесо и покатило по земле. Наблюдение показало, что колесо описало по земле окружность радиуса  $R$ . Определить угол наклона оси колеса к горизонту. Масса колеса  $M$ . Всю массу колеса считать сосредоточенной на периферии. Известно, что  $R$  много больше радиуса колеса.

**11.19.** Условие, при котором симметричный гироскоп может совершать регулярную прецессию, можно получить, применяя теорему Кориолиса. Рассмотреть тонкое кольцо, равномерно вращающееся в своей плоскости с угловой скоростью  $\omega$  и прецессирующее вокруг одного из диаметров с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 268). Какие силы надо приложить к кольцу для поддержания такой регулярной прецессии?

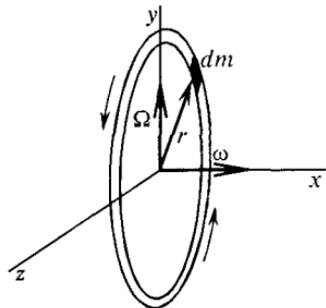


Рис. 268

**11.20.** Шар радиуса  $R$  и связанная с ним тонкая пренебрежимой массы жесткая спица  $AB$ , являющаяся продолжением его диаметра, раскручены вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр шара и спицу, до угловой скорости  $\omega$  (рис. 269). В спицу на расстоянии  $2R$  от центра шара абсолютно упруго ударяется точечная масса, имеющая до удара скорость  $v_0$ . Скорость  $v_0$  перпендикулярна спице и лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через центр шара (в плоскости рисунка). После удара точечная масса остановилась, а максимальный угол отклонения спицы от горизонтальной плоскости составил  $\varphi$ . Определить  $\varphi$ , если отношение  $R\omega/v_0 = 50$ . Силы трения отсутствуют. Движение происходит в свободном пространстве.

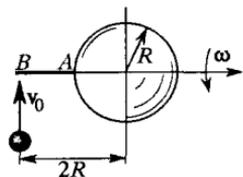


Рис. 269

**11.21.** Шар радиуса  $R$  и связанная с ним тонкая пренебрежимой массы жесткая спица  $AB$ , являющаяся продолжением его диаметра, раскручены вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр шара и спицу, до угловой скорости  $\omega$  (рис. 269). В спицу на расстоянии  $2R$  от центра шара абсолютно упруго ударяется точечная масса, имеющая до удара скорость  $v_0$ . Скорость  $v_0$  перпендикулярна

спице и лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через центр шара (в плоскости рисунка). Определить отношение  $v_0/R\omega$ , если после удара точечная масса остановилась, а максимальный угол отклонения спицы от горизонтальной плоскости составил  $90^\circ$ . Силы трения отсутствуют. Движение происходит в свободном пространстве.

**11.22.\*** Однородный гладкий сплошной шар, находящийся на горизонтальном столе, быстро вращается вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью  $\omega_0$  (рис. 270). В него ударяется второй, в точности такой же шар, имеющий скорость  $v_0$ . Происходит

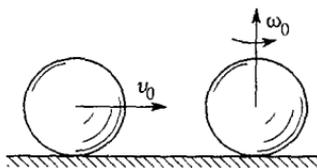


Рис. 270

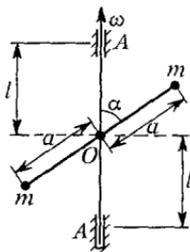


Рис. 271

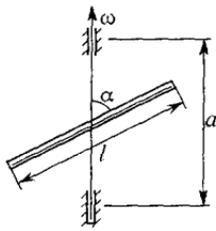


Рис. 272

абсолютно упругий удар без передачи вращения. Ударяемый шар начинает двигаться по столу со скольжением. Коэффициент трения скольжения  $k$  не зависит от скорости. Найти угол  $\alpha$  между мгновенной осью вращения ударяемого шара и вертикальной линией для любого момента времени  $t$ , когда еще не прекратилось скольжение. Найти также значение этого угла в момент, когда движение переходит в чистое качение. Трением качения и трением качения пренебречь. Рассмотреть частный случай, когда величины  $v_0$  и  $\omega_0$  связаны соотношением  $v_0 = \omega_0 r$ .

**11.23.** Два точечных одинаковых груза массы  $m$  вращаются вокруг неподвижной жесткой оси на штанге с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 271). Ось и штанга невесомые. Подсчитать и изобразить на рисунке мгновенное положение вектора момента импульса  $\mathbf{L}$  системы относительно точки  $O$ . Зависит ли  $L$  от выбора точки отсчета? Найти силы  $F$ , удерживающие ось в подшипниках  $A$ : а) из элементарных соображений; б) найдя сначала их момент  $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ .

**11.24.** Тонкий стержень длины  $l = 1$  м и массы  $m = 10$  кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, совершая  $n = 3000$  об/мин (рис. 272). Ось вращения составляет со стержнем угол  $\alpha = 89,9^\circ$ . Каковы силы, действующие на подшипники, в которых закреплена ось? Подшипники расположены симметрично относительно стержня на расстоянии  $a = 20$  см друг от друга.

**11.25.** «Твердое тело» состоит из восьми материальных точек  $m$ , расположенный в вершинах куба. Показать, что любая ось, проходящая через центр инерции этого «тела», является свободной.

## § 12. Неинерциальные системы отсчета

**12.1я.** Каков будет период малых колебаний математического маятника длины  $l$ , если маятник колеблется в вагоне, движущемся в горизонтальном направлении с ускорением  $a$ ?

**12.2я.** На ракете, взлетающей вертикально вверх с ускорением  $a$ , установлены маятниковые часы. Какой промежуток времени  $T_1$  измерят часы с момента старта ракеты до падения ее на Землю, если двигатель во время подъема ракеты работал время  $T$ , измеренное по часам на Земле?

**12.3я.** На тележке укреплен горизонтальный стержень, по которому может скользить без трения муфта массы  $m = 1$  кг (рис. 273). К муфте прикреплены две пружины, общий коэффициент упругости которых  $k = 1$  Н/см. Как будет двигаться груз относительно системы отсчета, связанной с тележкой? Рассмотреть два случая: 1) тележка получает ускорение, очень медленно нарастающее от нуля до  $a = 0,98$  м/с<sup>2</sup>; 2) тележка в момент времени  $t = 0$  внезапно получает ускорение  $a$ , остающееся затем неизменным. Трением пренебречь.

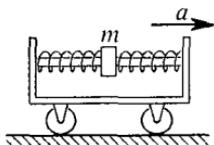


Рис. 273

**12.4я.** В состоянии равновесия центры масс муфты и тележки, описанные в условии предыдущей задачи, находились на одной вертикали (рис. 273). Какое возникает движение, если муфту сместить из положения равновесия на величину  $l = 6$  см и прикрепить нитью к тележке, а затем нить пережечь? Масса тележки без муфты равна  $M = 5$  кг, массой пружины пренебречь. Силу трения не учитывать.

**12.5.** Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой  $\varphi = 30^\circ$ , производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда  $v_0 = 500$  м/с, угол вылета снаряда (т.е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта)  $\alpha = 60^\circ$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приблизительно отклонение у точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение — к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

**12.6.** Вращение Земли приводит к отклонению свободно падающих тел (без начальной скорости) от направления отвеса. В какую сторону направлено это отклонение и чему равна его величина? Провести решение задачи в системе отсчета, связанной с Землей.

**12.7.** Из ружья произведен выстрел строго вверх (т.е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули  $v_0 = 100$  м/с, географическая широта места  $\varphi = 60^\circ$ . Учитывая осевое вращение Земли, определить приблизительно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.

**12.8.** Под каким углом  $\alpha$  к вертикали надо выстрелить, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Использовать данные предыдущей задачи.

**12.9.** Артиллерийский снаряд движется по настильной траектории (т.е. траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Горизонтальная скорость снаряда  $v_0 = 900$  м/с. Снаряд должен поразить цель на расстоянии  $L = 18$  км. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить боковое отклонение снаряда от цели, обусловленное вращением Земли. Зависит ли это отклонение от направления стрельбы? Географическая широта места  $\varphi = 60^\circ$  с.ш.

**12.10.** На небольшой высоте над Землей на экваторе выпущена пуля из ружья в горизонтальном направлении на восток с начальной скоростью  $v = 860$  м/с. На сколько изменится понижение траектории пули за одну секунду, если произвести выстрел на запад с той же начальной скоростью? Сопротивление воздуха не учитывать.

**12.11.** Прицел у пушки настроен так, что снаряд попадал бы в цель, если бы Земля не вращалась. В какую сторону и на сколько отклонится снаряд, если пушка стреляет горизонтально на север на расстоянии 2 км на широте  $45^\circ$ ? Начальная скорость снаряда 300 м/с. Радиус Земли 6400 км.

**12.12я.\*** Суточное вращение Земли приводит к отклонению артиллерийских снарядов и ружейных пуль от начального направления выстрела, заданного в горизонтальной плоскости по земным ориентирам. Рассчитать величину  $x$  поперечного смещения пули, выпущенной в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду ее полета. Выстрел произведен на широте Москвы ( $55^\circ 45'$ ), начальная скорость пули 1000 м/с. Указать, в какую сторону отклонится пуля, если в момент выстрела ствол ружья был направлен на юг. Силу сопротивления воздуха полету пули не учитывать. Решить задачу в системе отсчета, связанной с Землей.

**12.13.** Небольшая, залитая льдом площадка расположена в центре карусели, вращающейся с небольшой угловой скоростью  $\omega$ . Площадка имеет форму квадрата со стороной  $l$ . Лежащей у борта площадки шайбе сообщают перпендикулярную борту скорость  $v$ . Упруго отразившись от противоположного борта, шайба вновь возвращается к борту, у которого она сначала находилась. Определить, насколько сместилась шайба относительно места, откуда она начала движение.

**12.14я.** На  $60^\circ$  с.ш. паровоз массой в 100 т идет с юга на север со скоростью  $v = 72$  км/ч по железнодорожному пути, проложенному по меридиану. Найти величину и направление той силы, с которой паровоз действует на рельсы в направлении, перпендикулярном ходу поезда.

**12.15я.** Пароход движется на восток вдоль параллели с географической широтой  $\varphi = 60^\circ$ . Скорость парохода  $v = 10$  м/с. Определить вес тела  $P$  на пароходе, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен  $P_0$ .

**12.16:** На экваторе на рельсах стоит пушка. Рельсы направлены с запада на восток, и пушка может двигаться по ним без трения. Пушка стреляет вертикально вверх. Какую скорость  $v_0$  будет иметь пушка после выстрела? Куда будет направлена эта скорость? Масса пушки  $M$ , масса снаряда  $m$ , длина ствола  $l$ . Считать, что снаряд движется в стволе с постоянным ускорением  $a$ .

**12.17.** Подвешенная над поверхностью Земли на широте  $\varphi = 60^\circ$  труба массы  $M$  может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхний торец и лежащей в плоскости меридиана. В начальный момент, когда труба неподвижна, в нее сверху вводят короткий цилиндр массы  $m = M/10$  и придают ему вертикально направленную скорость  $v$ . Вычислить угловую скорость трубы  $\omega$  в момент выхода из нее цилиндра. Считать, что диаметр цилиндра приблизительно равен внутреннему диаметру трубы, сила трения мала, а  $v \gg \sqrt{2lg}$ , где  $l$  — длина трубы, много больше ее радиуса.

**12.18:** На полюсе установлена пушка, ствол которой направлен горизонтально вдоль меридиана и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через замок орудия. С какой угловой скоростью относительно Земли будет вращаться ствол пушки после выстрела? Считать, что в начальный момент времени снаряд находится на оси вращения и движется внутри ствола при выстреле с постоянным ускорением  $a$ . Масса пушки ( $M = 1000$  кг) значительно больше массы снаряда ( $m = 10$  кг). Длина ствола значительно больше его диаметра.

**12.19.** Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса  $R = 5$  м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели  $T = 10$  с, скорость пули  $v = 300$  м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели  $\omega R$  по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом  $\alpha$  к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

**12.20:** Стрелок и мишень расположены в диаметрально противоположных точках карусели диаметра  $D = 20$  м, вращающейся с постоянным угловым ускорением  $\dot{\omega}$ . Стрелок целится в мишень, не вводя поправки на вращение карусели. Каково должно быть угловое ускорение карусели  $\dot{\omega}$ , чтобы при этих условиях пуля попала в цель, если в момент выстрела угловая скорость карусели была  $\omega_0 = 1$  рад/мин, а скорость пули  $v_0 = 200$  м/с? Стрелок и условия стрельбы предполагаются идеальными. Влиянием центробежной силы пренебречь.

**12.21я.** Иногда устраивают в качестве аттракциона комнату, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Пол такой комнаты имеет вогнутую форму. Во время вращения все находящиеся там предметы и люди стоят на этом полу, как на плоском, устойчиво и нормально к его поверхности. Определить форму пола, если угловая скорость вращения комнаты равна  $\omega$ .

**12.22я.** Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Какое направление будет указывать нить отвеса, подвешенного в салоне самолета? Найти период малых колебаний математического маятника внутри самолета, если длина маятника равна  $l$ , корпус самолета наклонен к направлению горизонта под углом  $\alpha$ .

**12.23я.** Самолет летает на постоянной высоте по окружности радиуса  $R = 25$  км с постоянной скоростью  $v = 250$  м/с. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Какое время полета  $t'$  покажут маятниковые часы, если время, измеренное пружинными часами, равно  $t = 1$  ч? Часы считать идеальными. Силу Кориолиса, ввиду ее малости, не учитывать.

**12.24.** Тонкий стержень длины  $l$  вращается вокруг одного из концов, описывая круговой конус (конический физический маятник). Найти период движения  $T$  в зависимости от угла  $\varphi$  между осью стержня и вертикальным направлением.

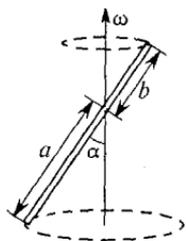


Рис. 274

**12.25\*** Тонкий стержень длины  $a + b$  шарнирно закреплен в точке, отстоящий на расстояние  $b$  от одного из его концов, и вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус (рис. 274). Определить угол отклонения  $\alpha$  стержня от вертикали.

**12.26.** Троллейбус на повороте движется по дуге окружности радиуса  $R = 30$  м со скоростью  $v = 14,4$  км/ч. Пассажир идет к кабине водителя вдоль прохода с постоянной скоростью  $u = 2$  м/с относительно троллейбуса. Определить угол  $\beta$  наклона пассажира к вертикали в момент прохождения им середины салона.

**12.27.** С какой скоростью  $v_0$  должен идти человек по салону автобуса по направлению к кабине водителя, чтобы «взлететь» (потерять вес). Автобус преодолевает вершину холма (неровного участка дороги) с радиусом кривизны  $R = 42$  м. Скорость автобуса  $u = 72$  км/ч. Считать, что человек находится в центре автобуса.

**12.28.** Автобус движется со скоростью  $v = 30$  км/ч по выпуклому мосту, имеющему в верхней точке радиус кривизны  $r = 64$  м. Пассажир идет вдоль прохода от кабины водителя с постоянной скоростью  $v_0 = 2$  м/с относительно автобуса и в момент прохождения автобусом верхней точки моста находится в середине салона. Какую относительную потерю собственного веса будет ощущать пассажир в этот момент?

**12.29.** Каким должен быть радиус поворота реки, чтобы как левый, так и правый ее берег размывался практически с одинаковой интенсивностью? Скорость течения реки  $0,5$  м/с, а широта местности  $60^\circ$ .

**12.30.** Спортивный снаряд «хулахуп» представляет собой полый тороид, имеющий радиусы  $R$  и  $r \ll R$ , как это показано на рис. 275. Он вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси

О с угловой скоростью  $\Omega$ . В начальный момент внутри трубки в непосредственной близости от оси вращения помещен маленький камушек, который может без трения скользить по внутренней поверхности тороида. Какую скорость приобретет камушек, когда он переместится по трубке в точку А? Чему равна эта скорость относительно Земли?

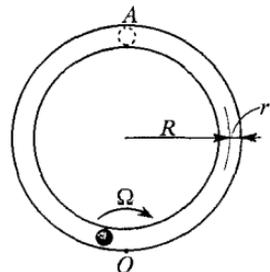


Рис. 275

**12.31.** На сколько будут отличаться конечные скорости разбега самолета, если самолет взлетает на экваторе, причем один раз его разбег производится с запада на восток, а второй раз — с востока на запад? Подъемная сила, действующая на крылья самолета, пропорциональна квадрату его скорости относительно Земли. Необходимая конечная скорость разбега самолета вдоль меридиана равна  $v_0$ .

**12.32.** Велосипедист движется с постоянной скоростью  $v$  по радиусу горизонтального диска, вращающегося со скоростью  $n$  оборотов в минуту. Определить угол наклона велосипедиста и направление наклона.

**12.33.** Вдоль радиуса карусели, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega = 0,5$  рад/с, от периферии к центру идет человек с постоянной относительной скоростью  $v = 1$  м/с. Как должен наклониться человек, чтобы не упасть? Выразить углы наклона в зависимости от расстояния  $R$  человека от центра карусели и определить их численные значения при  $R = 5$  м. Изменением высоты центра масс во время движения пренебречь.

**12.34.** В центре неподвижной карусели находится человек. Он переходит с постоянной скоростью к краю карусели, двигаясь при этом с востока на запад. Считая карусель однородным диском, определить, при каком соотношении масс человека и карусели  $m/M$  последняя приобретет угловую скорость, равную четверти угловой скорости суточного вращения Земли. Считать, что карусель находится на широте  $\varphi = 30^\circ$ , трением в подшипниках карусели пренебречь.

**12.35.** Заводской кран стоит на рельсах. Стрела крана, составляющая с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$ , находится в плоскости, перпендикулярной к рельсам. Оставаясь в этой плоскости, стрела поворачивается на угол  $2\alpha$ . Какую скорость  $V$  приобретет при этом кран? Масса крана со стрелой  $M = 73$  т, масса стрелы  $m = 20$  т, центр масс стрелы отстоит на расстояние  $l = 5$  м от ее основания. Рельсы направлены по меридиану, географическая широта  $\varphi = 60^\circ$ . Трением качения и трением в осях колес крана пренебречь.

**12.36.** Велосипедное колесо радиуса  $R$  вращается в горизонтальной плоскости вокруг своего центра. По спице колеса без трения может двигаться шарик. В начальный момент времени шарик находился у обода колеса. Какую начальную скорость  $v_0$  следует сообщить шарик в радиальном направлении, чтобы он мог достигнуть оси вращения? Угловая скорость вращения  $\omega$  поддерживается постоянной.

**12.37.** Горизонтально расположенную трубку длины  $l$  начинают вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В середине трубки до начала вращения находился шарик. Через какое время  $\tau$  он из нее вылетит? Трением пренебречь.

**12.38.** Какую работу должен совершить человек, чтобы пройти от периферии к центру карусели, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega = 1$  рад/с, если радиус карусели  $R = 5$  м, а масса человека  $m = 60$  кг? Зависит ли эта работа от формы пути, по которому идет человек? Силы трения не учитывать.

**12.39.** Цилиндрическую горизонтальную штангу длины  $L$  вращают вокруг вертикальной оси, проходящей через ее конец, с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . На штангу надета небольшая муфта массы  $m$ , которая может скользить вдоль штанги. Определить работу, необходимую для того, чтобы передвинуть муфту вдоль всей штанги с постоянной скоростью  $v$  относительно нее к оси вращения, если коэффициент трения между муфтой и штангой равен  $k$ . На что пошла затраченная работа?

**12.40.** На горизонтальной поверхности лежит труба длины  $l$ , которая может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Внутри трубы вблизи оси вращения находится тело, масса которого равна  $m$ . Труба начинает вращаться с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Какова длина пути  $L$ , пройденного телом по поверхности после вылета его из трубы? Коэффициент трения между телом и поверхностью равен  $k$ . При движении тела внутри трубы трением пренебречь.

**12.41.** С какой скоростью и под каким углом вылетит шарик, помещенный внутрь канала, высверленного по диаметру вращающегося диска. Угловая скорость вращения диска равна  $\omega$ , его радиус —  $R$ . В начальный момент времени шарик помещен вблизи центра вращения. Трением пренебречь.

**12.42я.** На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega = 40$  л с<sup>-1</sup>, около оси находится закрепленная неподвижно муфта массы  $m = 100$  г. В некоторый момент муфту отпускают, и она скользит без трения вдоль стержня. Какой момент сил  $M$  должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Найти расстояние  $x$  муфты от оси в любой момент времени  $t$ . В начальный момент центр тяжести муфты находится на расстоянии  $a_0 = 2$  см от оси.

**12.43.** Муфта массы  $m$  может скользить без трения по горизонтальной штанге. К муфте с обеих сторон прикреплены одинаковые невесомые пружины с коэффициентами упругости  $k$  (рис. 276). Штанга вращается вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью  $\omega_0$ . Муфту сдвигают из положения равновесия на величину  $l$ , а затем отпускают. Определить, как будет двигаться муфта.

**12.44.** Небольшая муфта массы  $m$  надета на тонкий гладкий стержень длины  $l$ , вращающийся в горизонтальной плоскости с

постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через неподвижную точку  $O$  (рис. 277). Ось и муфта соединены между собой пружиной жесткости  $k$  и длины  $a$  ( $a < l$ ) в ненапряженном состоянии. Определить равновесное положение муфты на стержне, ее период малых колебаний и область существования таких колебаний.

**12.45.** Две одинаковые небольшие муфты могут свободно скользить по гладкой штанге, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости. Муфты связаны легкой нера-

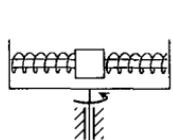


Рис. 276

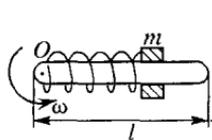


Рис. 277

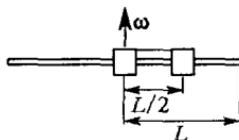


Рис. 278

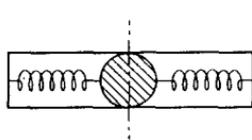


Рис. 279

стяжимой нитью. Конiec штанги находится на расстоянии  $L$  от оси вращения. В начальный момент одна муфта находилась на оси вращения, а вторая на расстоянии  $L/2$  от нее. Чему равна скорость относительно земли той муфты, которая первой достигнет конца штанги?

**12.46.** В абсолютно гладкой трубке на двух одинаковых пружинах жесткости  $k$  закреплен шарик массы  $m$  (рис. 279). Шарик колеблется с амплитудой  $l_0$ . Трубку начинают медленно раскручивать относительно оси, перпендикулярной к трубке и проходящей через положение равновесия шарика. Определить зависимость периода  $T$  и амплитуды колебаний  $l$  от угловой скорости вращения трубки  $\omega$ .

**12.47.** Гладкая длинная штанга вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через один из ее концов. На штангу надета муфта массы  $m$ , прикрепленная к оси вращения с помощью пружины, упругая сила которой равна  $F = k[(x - x_0)/x_0]^2$ , где  $k$  — константа, а  $x_0$  — длина пружины в свободном состоянии. Определить период малых колебаний груза около положения равновесия.

**12.48.** На горизонтально расположенный стержень надета небольшая муфта, которая может перемещаться вдоль стержня. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 280). В начальный момент времени муфта находится на расстоянии  $r_0$  от оси вращения и имеет скорость  $v_0$ , направленную от оси вращения. Далее оказалось, что скорость муфты  $v$  относительно стержня растет линейно с удалением от оси вращения  $v = v_0 r/r_0$ . При каком коэффициенте трения  $k$  между муфтой и стержнем возможно такое движение? Силой тяжести пренебречь.

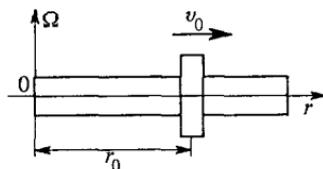


Рис. 280

**12.49.** Длинная штанга круглого сечения вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . На штанге на расстоянии  $r_0$  от оси вращения закреплена небольшая муфта. Коэффициент трения муфты о штангу равен  $k$ . В некоторый момент муфту освобождают и сообщают ей скорость относительно штанги, равную  $v_0$  и направленную от оси вращения. После этого муфта начинает двигаться замедленно; на расстоянии  $r_1$  от оси ее скорость достигает минимума, а затем начинает увеличиваться. При каких значениях  $k$  возможно такое движение муфты? Чему равна минимальная скорость муфты?

**12.50.** Тонкая труба жестко прикреплена одним концом к вертикальному стержню под прямым углом (рис. 281). Внутри трубы находится цилиндрическая шайба, которая соединена с концом трубы

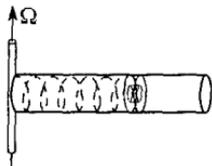


Рис. 281

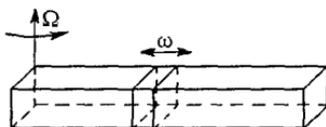


Рис. 282

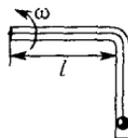


Рис. 283

у стержня пружиной. Стержень вращается вместе с трубой вокруг своей продольной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Во время вращения трубы шайба совершает малые колебания. Диаметр шайбы можно считать равным диаметру трубы. Определить, при какой угловой скорости вращения  $\omega$  сила, с которой шайба действует на стенку трубы, будет максимальной. Трением между пружиной, шайбой и стенками трубы пренебречь. Круговая частота малых колебаний шайбы при  $\omega = 0$  равна  $\Omega$ . Считать амплитуду не зависящей от  $\Omega$ .

**12.51.** Внутри трубки прямоугольного сечения, две грани которой горизонтальны (рис. 282), под действием периодически меняющегося давления воздуха перемещается по гармоническому закону с частотой  $\omega = 5$  рад/с поршень массы  $m = 100$  г. Амплитуда перемещения поршня  $a = 30$  см, коэффициент трения поршня о боковые стенки  $k = 0,2$ . На сколько изменится работа, затрачиваемая на перемещение поршня за один период, если трубку заставить вращаться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega = 1$  рад/с? Трением поршня о горизонтальные стенки пренебречь.

**12.52.** Полая узкая цилиндрическая трубка длины  $2l$  изогнута под углом  $\pi/2$ . Трубка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 283 (вид сверху). С помощью невесомой нити шарик ( $d_{\text{шарика}} \approx D_{\text{трубки}}$ ) массы  $m$  перемещают от края трубки к точке перегиба с постоянной скоростью  $v$ . Определить совершаемую при этом работу. Трением между поверхностью трубки и шариком пренебречь.

**12.53.** Полая узкая цилиндрическая трубка длины  $3l$ , изогнутая в виде равностороннего треугольника, вращается с постоянной

угловой скоростью  $\omega$  в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью треугольника (рис. 284, вид сверху). Вертикальная ось вращения проходит через вершину  $A$ . В вершине  $B$  в трубке находится шарик ( $d_{\text{шара}} \approx D_{\text{трубки}}$ ) массы  $m$ , который перемещают с помощью невесомой нерастяжимой нити вдоль  $BC$ . Определить минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы шарик оказался в вершине  $C$ . Трением между поверхностью трубки и шариком пренебречь.

**12.54.** Тонкий обруч радиуса  $R$ , плоскость которого горизонтальна, вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно вертикальной оси, проходящей через точку, расположенную на обруче. На обруч надето небольшое колечко, которое может свободно скользить по обручу. Определить период малых колебаний колечка около положения его равновесия.

**12.55я.\*** Жесткие стержни образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикального катета  $AB$  (рис. 285). На стержень

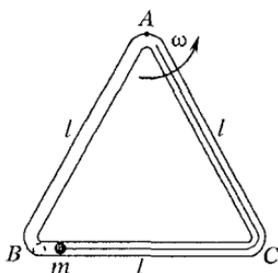


Рис. 284

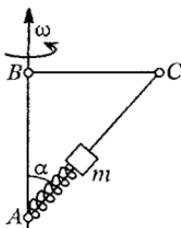


Рис. 285

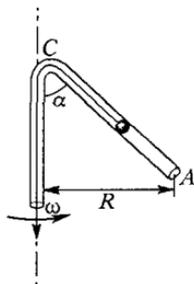


Рис. 286

$AC$  надета и скользит без трения муфта массы  $m$ . Муфта связана с вершиной  $A$  треугольника пружиной жесткости  $k$ , имеющей вне растянутом состоянии длину  $l$ . Определить, при каком значении  $\omega$  муфта будет в равновесии при недеформированной пружине. Будет ли это равновесие устойчивым?

**12.56я.** Однородный стержень длины  $l$  равномерно вращается вокруг свободной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр. Какова должна быть угловая скорость вращения  $\omega$ , при которой стержень еще не разрывается под действием внутренних напряжений, возникающих в нем при вращении? Максимальная сила натяжения, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, равна  $T$ . Объемная плотность материала стержня равна  $\rho$ .

**12.57.** Шарик массы  $m$  за нитку поднимают внутри трубки со скоростью  $v$  (рис. 286). Трубка изогнута под углом  $\alpha$  и вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Определить работу против сил трения на участке  $AC$ , если коэффициент трения между шариком и стенкой трубки  $k$  и  $\text{tg } \alpha < \omega^2 R/g$ , а расстояние от точки  $A$  до оси равно  $R$ .

**12.58.** Тонкий стержень длины  $l = 1$  м и массы  $m = 1$  кг вращается в горизонтальной плоскости с частотой  $\nu = 10$  Гц вокруг вертикальной оси. Ось вращения проходит через середину стержня. Определить максимальную и минимальную величины момента сил, отклоняющего ось от вертикали, если эта система расположена на экваторе Земли.

**12.59.** Обруч радиуса  $R$  и массы  $m$  вращается в подшипниках с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своего вертикального диаметра. Подшипники укреплены на раме подвеса, которая в свою очередь вращается с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр обруча (рис. 287). Вычислить максимальную величину момента сил  $M_{\max}$ , действующих на подшипники.

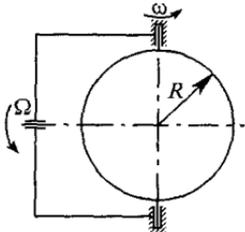


Рис. 287

**12.60.** Для создания искусственной тяжести торообразный межпланетный корабль радиуса  $R = 100$  м вращается в своей плоскости вокруг оси, проходящей через центр тора, с такой угловой скоростью, которая позволяет имитировать земной вес тел.

В корабле (внутри тора) установлен секундный математический маятник, плоскость колебаний которого совпадает с плоскостью тора. Найти отношение разности максимального и минимального значений силы натяжения нити к весу маятника  $(F_{\max} - F_{\min})/mg$  при качаниях с амплитудой  $\varphi_{\max} = 0,05$  рад. Будет ли сила Кориолиса вращать плоскость колебаний маятника (как у маятника Фуко)?

**12.61.** Тонкая труба жестко прикреплена одним концом к тонкому вертикальному стержню, составляя с ним острый угол  $\alpha$  (рис. 288). Стержень вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Внутри трубы находится цилиндр, прикрепленный к стержню невесомой пружиной жесткости  $k = m\omega^2$  ( $m$  — масса цилиндра). Диаметр цилиндра можно считать равным диаметру трубы, а длина цилиндра много меньше длины трубы. Цилиндр колеблется без трения возле положения равновесия с малой амплитудой  $a$ . Определить силу давления цилиндра на стенку в момент прохождения положения равновесия.

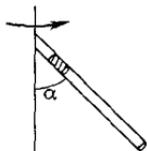


Рис. 288

**12.62.** Тонкая труба жестко прикреплена одним концом к тонкому вертикальному стержню, составляя угол  $\alpha$  с ним (рис. 288). В начальный момент внутри трубы около стержня находится цилиндр массы  $m$ , высота которого много меньше длины трубы. Диаметр цилиндра можно считать равным диаметру трубы. Стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью, при этом цилиндр движется без трения по трубе. Определить силу давления на стенку в тот момент, когда сила перпендикулярна плоскости, образованной трубой и стержнем.

**12.63.** Равнобедренный треугольник, образованный тремя тонкими стержнями, вращается с постоянной угловой скоростью

$\omega = 4$  рад/с в горизонтальной плоскости (совпадающей с плоскостью треугольника) вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину (рис. 289). На стержень в основании треугольника насажен маленький шарик массы  $m = 0,2$  кг, связанный с соседними вершинами треугольника двумя одинаковыми пружинами жесткости  $k = 3,2$  Н/м каждая. Найти частоту  $\Omega$  малых колебаний шарика вдоль стержня. Трением пренебречь.

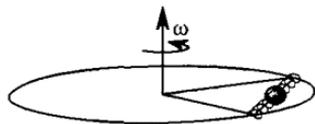


Рис. 289

**12.64.** Небольшое тело массы  $m$  вращается с начальной угловой скоростью  $\Omega$  по окружности на гладкой горизонтальной плоскости. Тело связано с центром окружности невесомой пружиной жесткости  $k$ . В результате небольшого возмущения на это исходное движение накладываются колебания с малой амплитудой. Найти период этих колебаний.

**12.65.** На вращающемся гладком горизонтальном диске помещен однородный стержень длины  $L$ . Через один из концов стержня проходит вертикальная ось, параллельная оси вращения диска. Диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить период малых колебаний стержня, если расстояние между осью диска и осью стержня равно  $R$ . Трением в оси стержня пренебречь.

**12.66.** В щели диска радиуса  $R$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , находится стержень длины  $l$ , который может вращаться на оси  $CC'$ , проходящей через его центр масс, закрепленной на краю диска, как показано на рис. 290. Определить период малых колебаний стержня.

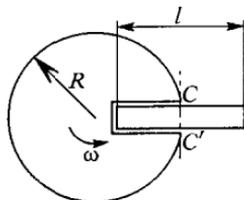


Рис. 290

**12.67.** Космонавт Е. Леонов, выйдя из корабля в космос, бросил к центру Земли крышку фотоаппарата. Спустя некоторое время он увидел, что она возвращается к кораблю. Описать периодическое движение крышки относительно корабля, определить период и параметры относительного движения. Считать, что корабль движется по круговой орбите радиуса  $R_0 = 7000$  км, радиус Земли  $R_3 = 6400$  км, начальная скорость крышки относительно корабля  $v_0 = 0,5$  м/с.

**12.68.** Оценить максимальную скорость, которую можно сообщить небольшому предмету в кабине спутника, вращающегося вокруг Земли с периодом 1,5 часа, чтобы этот предмет в своем движении на протяжении нескольких часов ни разу не стукнулся о стенки. Каков характер траектории его движения, если направление толчка лежит в плоскости орбиты? Диаметр кабины спутника равен 3 м.

**12.69\*.** Спутник, круговая орбита которого расположена в экваториальной плоскости, «висит» неподвижно над некоторой точкой земной поверхности. Спутник получает возмущающий импульс,

сообщающий ему малую вертикальную скорость  $v_0$  (рис. 291). Какова возмущенная траектория спутника по отношению к земному наблюдателю?

**12.70.** Представьте себе, что в земном шаре в плоскости экватора вырыта шахта до центра Земли. Оценить минимальный диаметр шахты, чтобы тело небольших размеров, брошенное в нее, долетело до центра Земли, не ударившись о стенку шахты. Плотность Земли считать постоянной, сопротивлением воздуха пренебречь.

**12.71.** Представьте себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу  $F$ , с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

**12.72.** Гравитационное ускорение свободного падения на поверхности однородного шара радиуса  $R_0$  равно  $g_0$ . Шар вращается с большой угловой скоростью  $\omega_0$ . Внутри шара образовалась сферическая полость радиуса  $r_0$ , так что расстояние между центрами шара и полости  $OO_1 = a = 2r_0$ . Центры  $O$  и  $O_1$  соединены тонкой трубкой, по которой без трения может двигаться точечная масса. Найти скорость этой массы в точке  $O_1$ , если первоначально она покоилась вблизи  $O$ . Угол  $\alpha = \pi/4$  (рис. 292).

**12.73.** Ток пропускается по широкой медной шине, протянутой с севера на юг на широте  $30^\circ$ . Оценить разность потенциалов, возникающую между восточным и западным краями шины из-за вращения



Рис. 291

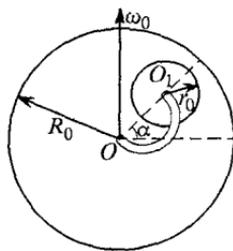


Рис. 292

Земли. Ширина шины 60 см. Скорость электронов проводимости принять равной 3 см/с. Заряд электрона равен  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, его масса  $m_e \approx 10^{-27}$  г.

**12.74.** На широте  $60^\circ$  в землю вбит рельс высотой 10 метров. Оценить разность потенциалов, возникающую между верхним и нижним концами рельса из-за вращения Земли. Масса электрона  $m_e \approx 10^{-27}$  г, заряд электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  кулона. Электроны в металле считать свободными.

**12.75.** Оценить приближенно разность расстояний от центра Земли до уровня моря на полюсе и на экваторе Земли, связанную с вращением Земли.

12.76. Доказать, что при нахождении результирующей центробежной силы инерции, действующей на твердое тело в равномерно вращающейся системе, массу тела можно считать сосредоточенной в его центре инерции.

12.77. Доказать, что центробежные силы не создают результирующего момента относительно оси, проходящей через центр инерции и параллельной оси вращения.

12.78. Движение системы материальных точек (в частном случае — твердого тела) рассматривается в равномерно вращающейся системе координат. Показать, что равнодействующая сил инерции Кориолиса  $F_C$  выражается формулой  $F_C = 2m\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}$ , где  $m$  — полная масса системы,  $\mathbf{V}$  — скорость ее центра инерции во вращающейся системе,  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость вращения системы координат.

### § 13. Упругие деформации

13.1я. Стальной канат, который выдерживает вес неподвижной кабины лифта, имеет диаметр 9 мм. Какой диаметр должен иметь канат, если кабина лифта может иметь ускорение до  $8g$ ?

13.2. На сколько изменится объем упругого однородного стержня длины  $l$  под влиянием силы  $P$ , сжимающей или растягивающей стержень по его длине?

13.3я. Какую равномерно распределенную нагрузку  $Q$  может выдержать гранитная плита, представляющая собой правильный шестиугольник со стороной  $a = 10$  см, если допускаемое напряжение на сжатие гранита равно  $P = 450$  Н/см<sup>2</sup>?

13.4. На сколько вытягивается стержень из железа, подвешенный за один конец, под влиянием собственного веса? На сколько при этом меняется его объем?

13.5. Определить относительное удлинение  $\Delta l/l$  тонкого стержня, подвешенного за один конец, под влиянием собственного веса, если скорость звука в тонком стержне  $v_{зв} = 3140$  м/с. Начальная длина стержня  $l_0 = 2$  м.

13.6. Стержень поперечного сечения  $S$  растягивается силой  $F$ , параллельной его оси. Под каким углом  $\alpha$  к оси наклонено сечение, в котором тангенциальное напряжение  $\tau$  максимально? Найти это напряжение.

13.7. Резиновый цилиндр с высотой  $h$ , весом  $P$  и площадью основания  $S$  поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

13.8. Определить отношение энергий деформации стального и пластмассового цилиндров, поставленных рядом друг с другом и сжатых между параллельными плоскостями, если до деформации

они имели одинаковые размеры. Модуль Юнга для стали  $2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$ , для пластмассы —  $10^2 \text{ Н/мм}^2$ . Определить это же отношение для случая, когда цилиндры поставлены друг на друга и сжаты такими же плоскостями.

**13.9.** Толстая недеформированная резиновая палочка имеет длину  $L = 12 \text{ см}$ . Определить изменение ее длины, если она закреплена вертикально в сечении, находящемся на расстоянии  $h = 4 \text{ см}$  от верхнего конца. Плотность резины  $\rho = 1,2 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $E = 100 \text{ Н/см}^2$ .

**13.10.** Стальная линейка длины  $L = 30 \text{ см}$  и толщины  $d = 1 \text{ мм}$  свернута в замкнутое кольцо. Найти распределение и максимальную величину напряжений в линейке. Модуль Юнга для стали  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

**13.11.** Определить относительное изменение объема полого латунного шара радиуса  $R = 5 \text{ см}$ , в который накачан воздух до давления 11 атм (наружное давление 1 атм). Толщина сферической оболочки  $d = 1 \text{ мм}$ . Модуль Юнга латуни  $E = 10^{12} \text{ дин/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

**13.12.** Найти упругую энергию, запасенную в шаре радиуса  $R$ , имеющем модуль всестороннего сжатия  $K$  и подвергнутом всестороннему давлению  $P$ .

**13.13.** Определить частоту радиальных колебаний тонкостенной стальной трубы радиуса  $R = 10 \text{ см}$ . Модуль Юнга стали  $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$ , плотность  $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ .

**13.14.** Тензометр сопротивления — это тонкая проволока, наклеенная на деформируемое тело. Показать, что отношение  $\Delta R/R$  к  $\Delta l/l$  не превышает 2 ( $R$  — электрическое сопротивление,  $l$  — длина проволоки). Считать, что удельное сопротивление проволоки не зависит от деформации.

**13.15.** Оценить предельную высоту гор на Марсе в предположении, что плотности горного вещества Марса и Земли одинаковы. Отношения масс и радиусов двух планет  $M_M/M_Z = 0,107$ ,  $R_M/R_Z = 0,533$ . Самая высокая гора на Земле — Эверест ( $H \approx 9 \text{ км}$ ). Считать, что предельная высота гор на планетах определяется пределом упругости пород.

**13.16.** Однородный круглый резиновый жгут длины  $l$  и диаметра  $D$  помещен в стальную трубку с закрытым концом того же диаметра (рис. 293). На конец жгута со стороны открытого конца трубки начинает действовать сила  $F$ , равномерно распределенная по всему сечению жгута. На сколько уменьшится при этом длина жгута? Упругие свойства резины считать известными.

**13.17.** На вертикально расположенный резиновый жгут диаметра  $d_0$  насажено легкое стальное кольцо слегка меньшего диаметра  $d < d_0$  (рис. 294). Считая известным модуль Юнга  $E$  и коэффициент

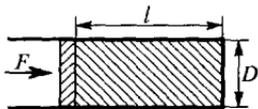


Рис. 293

Пуассона  $\mu$  для резины, определить с каким усилием  $F$  нужно растягивать жгут, чтобы кольцо с него соскочило. В расчетах весом резинового жгута пренебречь.

**13.18.** Определить максимальное давление, которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда  $\rho = 0,917 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $E = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ .

**13.19.** На куб действуют силы, приложенные к двум противоположным граням. При этом относительное изменение длины его стороны вдоль направления действия силы составило  $\epsilon = 10^{-4}$ , а относительное изменение его объема  $\Delta V/V = 4 \cdot 10^{-5}$ . Определить относительное изменение объема этого куба при всестороннем сжатии давлением  $P = 100 \text{ МПа}$ . Модуль Юнга  $E = 200 \text{ ГПа}$ .

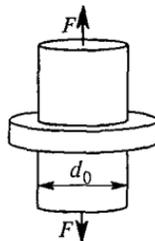


Рис. 294

**13.20.** Коэффициент линейного теплового расширения стали равен  $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$ . Какое давление  $p$  необходимо приложить к концам стального цилиндра, чтобы длина его оставалась неизменной при повышении температуры на  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

**13.21а.** При укладке рельсов трамвая их сваривают между собой в стыках. Как велики напряжения  $p$ , появляющиеся в них при колебаниях температуры от  $t_{\text{зим}} = -25 \text{ }^\circ\text{C}$  зимой до  $t_{\text{лет}} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$  летом, если укладка произведена при  $t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Для железа модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$ , а линейный коэффициент теплового расширения  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**13.22.** Медная пластинка запаяна между такими же по площади, но вдвое более тонкими стальными пластинками. Найти эффективный температурный коэффициент расширения такой системы в длину, если известны температурные коэффициенты линейного расширения меди  $\alpha_{\text{м}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$  и стали  $\alpha_{\text{ст}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ . Модуль Юнга стали вдвое выше, чем у меди, и равен  $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$ .

**13.23.** Медная пластинка запаяна между двумя такими же по размерам стальными пластинками. Найти напряжения, возникающие в меди и стали, если эту систему нагреть от  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $70 \text{ }^\circ\text{C}$ . Необходимые константы меди и стали взять из условия предыдущей задачи.

**13.24:** На гладкую горизонтальную плоскость положен брусок  $AB$  из однородного материала массы  $m$ , сечения  $S$  и длины  $L$ , упирающийся одним концом в выступ (рис. 295). На другой конец бруска действует постоянная сила  $F$ , равномерно распределенная по всему сечению бруска. Известно, что длина бруска при этом уменьшится на величину  $\Delta L = \frac{1}{E} \frac{L}{S} F$ , где  $E$  — модуль Юнга. На сколько сожмется брусок и как в нем будет распределено сжатие, если он не будет упираться в выступ, а все прочие условия останутся неизменными?



Рис. 295

**13.25.** Упругий стержень массы  $m$ , длины  $l$  и площади поперечного сечения  $S$  движется в продольном направлении с ускорением  $a$  (одинаковым для всех точек стержня). Найти упругую энергию деформации, возникающую вследствие ускоренного движения.

**13.26.** Из предыдущей задачи вытекает, что в ускоренно движущемся бруске существует напряжение. Будет ли существовать напряжение в свободно падающем бруске?

**13.27.** На абсолютно гладкой поверхности лежит брусок длины  $l$  и квадратного сечения со стороной  $a$ , изготовленный из однородного материала. Константы материала известны. Начиная с определенного момента на один из концов бруска начинает действовать сила  $F$ , равномерно распределенная по всему сечению бруска.

Как при этом изменяется длина, объем и форма бруска?

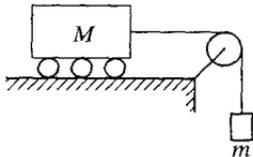


Рис. 296

**13.28.** Через закрепленный на конце стола блок перекинут шнур. К нижнему концу шнура прикреплен груз массы  $m = 1$  кг. Другой конец шнура тянет резиновый цилиндр, имеющий массу  $M = 10$  кг, длину  $L = 10$  м и сечение  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Модуль Юнга резины  $E = 10^7$  дин/см<sup>2</sup>. Катки под резиновым цилиндром уменьшают трение до пренебрежимой величины (рис. 296).

Найти, на сколько удлинится цилиндр при движении системы. Масса блока  $\mu = 1$  кг. Блок считать цилиндром.

**13.29.** Стальной стержень приводится в движение силой, синусоидально зависящей от времени, приложенной к одному его концу и направленной вдоль стержня. Под действием этой силы стержень перемещается, колеблясь вокруг некоего среднего положения. Оценить, в каких случаях смещение точек может быть описано как движение абсолютно твердого тела с относительной точностью 0,1%. Рассчитать конкретный пример, задавшись какими-либо численными данными о стержне. При оценке массу стержня можно считать сосредоточенной на свободном конце.

**13.30.** Кабина лифта массы  $m = 1000$  кг равномерно опускается со скоростью  $v_0 = 1$  м/с. Когда лифт опустился на расстояние  $l = 10$  м, барабан заклинило. Вычислить максимальную силу, действующую на трос, из-за внезапной остановки лифта, если площадь поперечного сечения троса  $S = 20$  см<sup>2</sup>, а модуль Юнга троса  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> ( $l$  — длина недеформированного троса). Изменением сечения троса пренебречь.

**13.31.** Груз массы  $M = 5000$  кг равномерно опускают с помощью троса и лебедки. Когда груз опустился на расстояние  $l = 2$  м, лебедку заклинило и трос оборвался. Найти скорость груза, при которой произошел обрыв троса, если для него предел прочности при растяжении  $T_p = 3,1 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, а площадь поперечного сечения  $S = 5$  см<sup>2</sup> ( $l$  — длина недеформированного троса). Изменением сечения пренебречь.

**13.32я.** Однородный диск массы  $M$  и радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси с угловым ускорением  $\beta$  (рис. 297). Силы, ускоряющие диск, равномерно распределены по ободу диска. Найти касательную силу  $F$ , действующую на единицу длины окружности, ограничивающей мысленно выделенную часть диска радиуса  $r$  (заштрихованную на рисунке).

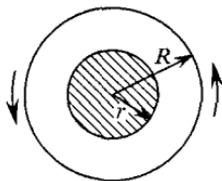


Рис. 297

**13.33.** Тонкий однородный упругий стержень, длина которого  $L$ , масса  $M$  и модуль Юнга  $E$ , равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Найти распределение усилий  $T$  в стержне и полное его удлинение  $\Delta L$ . При подсчете линейной деформации и усилий считать поперечное сечение неизменным, а удлинение малым.

**13.34.** Однородный тонкий упругий стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из его концов, с постоянной угловой скоростью. В некоторый момент времени стержень срывается с оси. Во сколько раз изменится при этом его относительное удлинение (рассчитанное по отношению к длине покоящегося стержня)?

**13.35.** Однородный тонкий стержень (рис. 298) свободно движется в горизонтальной плоскости со скоростью  $v$ , направленной перпендикулярно самому стержню и составляющей  $0,2\%$  от скорости звука  $v_{зв}$  в материале тонкого стержня. Одним концом стержень зацепляется за вертикальную ось  $A$  и вращается вокруг нее без трения. Каково будет при этом относительное удлинение стержня?

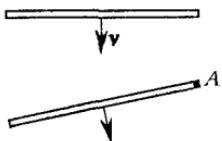


Рис. 298

**13.36.** В центре астероида Паллада (радиус  $R = 290$  км, ускорение силы тяжести на поверхности астероида  $g_0 = 0,17$  м/с<sup>2</sup>) обнаружены залежи ценных ископаемых. Бурильщики затребовали ровно 290 км труб из вольфрамового сплава (плотность  $19\,300$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 4 \cdot 10^{11}$  Па) постоянного сечения. Какую часть труб бурильщики рассчитывали сэкономить и применить для собственных надобностей, используя растяжение под действием силы тяжести? Считать, что вся система труб может свободно висеть, не касаясь стенок. Считать также Палладу однородным невращающимся шаром.

**13.37.** На астероиде Веста (радиус  $R = 280$  км, ускорение силы тяжести на поверхности планеты  $g_0 = 0,24$  м/с<sup>2</sup>) решено установить межпланетную ретрансляционную станцию. Основой конструкции служит цилиндрическая труба, длина которой должна равняться радиусу планеты. На Весту завезли ровно 280 км титановых труб. Насколько окажется ниже проектной высоты конструкция, когда она будет собрана в вертикальном положении? Считать Весту однородным невращающимся шаром. Плотность титана  $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 1,12 \cdot 10^{11}$  Па.

**13.38.** В научно-фантастической повести космический корабль, пролетавший вблизи нейтронной звезды, оказался на грани разрушения из-за возникших напряжений в его корпусе. Оценить минимальный радиус кривизны орбиты корабля  $R$ , если радиус тонкостенного сферического корпуса корабля  $r = 10$  м, напряжение разрушения материала корпуса корабля  $T_{\text{раз}} = 10^{10}$  дин/см<sup>2</sup>, масса звезды равна массе Солнца  $M = 2 \cdot 10^{33}$  г. Какова при этом скорость корабля?

**13.39.** Два одинаковых тонких стальных бруска длины  $l = 10$  см ( $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E = 2 \cdot 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, определить время соударения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости стали составляет  $T_y = 200$  Н/мм<sup>2</sup>?

**13.40.** Два одинаковых тонких стержня соосно сталкиваются друг с другом, причем первый стержень имеет скорость  $v$ , а второй — неподвижен. Происходит абсолютно упругое соударение стержней. Оценить максимально возможное относительное изменение длины стержня  $\Delta l/l$  во время удара, полагая известными плотность стержней  $\rho$  и модуль Юнга  $E$ .

**13.41.** Нерадивый студент, находясь в физической лаборатории, свернул в замкнутое кольцо правильной формы стальную линейку. Какую он при этом совершил работу? Длина линейки  $L = 1$  м, ширина  $b = 6$  см, толщина  $d = 1$ ; модуль Юнга стали  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>.

## § 14. Элементы гидродинамики

**14.1я.** Ареометр с цилиндрической трубкой диаметра  $D$ , плавающей в жидкости плотности  $\rho$  (рис. 299), получает небольшой

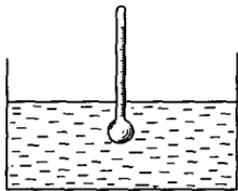


Рис. 299

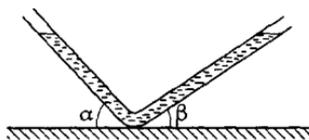


Рис. 300

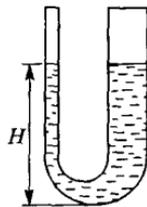


Рис. 301

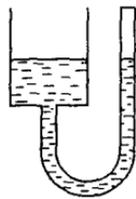


Рис. 302

вертикальный толчок. Найти период колебаний  $T$  ареометра, если его масса  $m$  известна. Движение жидкости и ее сопротивление движению ареометра не учитывать.

**14.2я.** Жидкость налита в изогнутую трубку (рис. 300), колена которой составляют с горизонтом углы  $\alpha$  и  $\beta$ , высота столба жидкости  $l$ . Если жидкость выведена из положения равновесия, то начнутся колебания уровня в трубках. Найти период колебаний. Капиллярными силами и вязкостью жидкости пренебречь.

**14.3.** U-образная трубка, которая имеет колена разных сечений (рис. 301), залита жидкостью до высоты  $H$  от нижнего сочленения.

Найти период малых колебаний уровней жидкости. Вязкостью пренебречь. Поперечные размеры трубки малы по сравнению с  $H$ .

**14.4.** Один из концов  $U$ -образной трубки подсоединен к большому плоскому резервуару. В трубку и резервуар налита ртуть, как показано на рис. 302. Найти период малых колебаний уровня жидкости в трубке, считая сечение трубки малым по сравнению с сечением резервуара, а также пренебрегая вязкостью ртути. Длина участка трубки с ртутью  $l$ .

**14.5я.** Найти зависимость от времени силы  $F$ , действующей на дно цилиндрического стакана площади  $S$ , в который наливают воду из чайника (рис. 303). Известно, что за секунду в стакан наливают постоянное количество  $Q$  см<sup>3</sup> воды.

**14.6.** В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня  $H$  (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна  $S$ . Определить время  $t$ , за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты  $h$  (относительно дна сосуда), если в дне сосуда сделано малое отверстие площади  $\sigma$ . Определить также время  $T$ , за которое из сосуда выльется вся жидкость.

**14.7.** На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня  $H$  (относительно поверхности стола). На какой высоте  $h$  (относительно поверхности

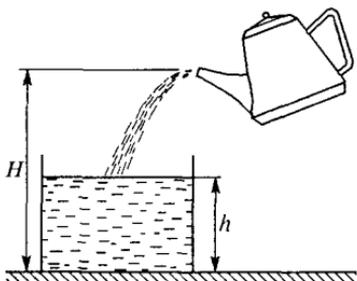


Рис. 303

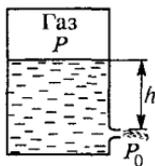


Рис. 304

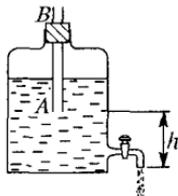


Рис. 305

столу) надо сделать отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды встречала поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Вычислить это расстояние.

**14.8.** Определить скорость  $v$  стационарного истечения через малое отверстие струи идеальной несжимаемой жидкости, находящейся под давлением  $P$  в закрытом сосуде (рис. 304).

**14.9.** Для того чтобы струя жидкости вытекала из сосуда с постоянной скоростью, применяют устройство, изображенное на рис. 305. Определить скорость истечения струи  $v$  в этом случае.

**14.10.** Глубина, на которую можно опустить прибор в океан, ограничена тем, что вертикально висящие тросы лопаются под действием собственного веса. Пусть в глубину океана нужно погрузить камеру с массой  $M = 5$  тонн и объемом  $V = 4$  м<sup>3</sup>. На какую максимальную глубину  $L$  можно погрузить камеру, если сечение троса на

поверхности не может превышать  $S_0 = 100 \text{ см}^2$ ? Как должно изменяться сечение троса с глубиной? На какую максимальную глубину  $H$  можно опустить трос постоянного сечения? Трос изготовлен из стали. Максимальное допустимое напряжение троса принять равным  $T = 200 \text{ Н/мм}^2$ .

**14.11.** В сосуд налита вода до высоты  $H$ . В дне сосуда проделано круглое отверстие радиуса  $r_0$  (рис. 306). Найти радиус струи воды  $r(y)$ , вытекающей из отверстия, в зависимости от расстояния  $y$  от дна сосуда.

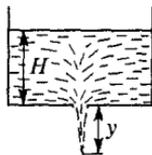


Рис. 306

**14.12.** Цилиндрический сосуд высоты  $h$  погружен в воду на глубину  $h_0$ . В дне сосуда площади  $S$  появилось маленькое отверстие площади  $\sigma$ . Определить время  $t$ , через которое сосуд утонет.

**14.13.** По вертикальной узкой конической трубе, медленно сужающейся к низу, под действием веса течет без трения несжимаемая жидкость. Верхний уровень жидкости поддерживается на постоянной высоте  $h_0$  от вершины конуса; труба обрезана на расстоянии  $h_1 < h_0$  от вершины конуса. Найти распределение давления вдоль трубы и начертить его график.

**14.14.** На тележке стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой. Высота воды в сосуде 1 м. В сосуде с противоположных сторон по ходу тележки сделано два крана с отверстиями площадью  $10 \text{ см}^2$  каждое, одно на высоте  $h_1 = 25 \text{ см}$  над дном сосуда, а другое на высоте  $h_2 = 50 \text{ см}$ . Какую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к тележке, чтобы она осталась в покое при открытых кранах?

**14.15.** В боковой стенке сосуда имеется отверстие, нижний край которого находится на высоте  $h$  (рис. 307). При каком горизонтальном ускорении  $a$  сосуда налитая в него жидкость не будет выливаться из отверстия, если в покоящемся сосуде (при закрытом отверстии) жидкость была налита до высоты  $H$ ?

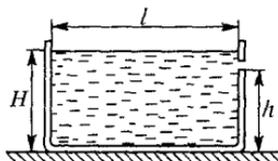


Рис. 307

**14.16.** Определить форму свободной поверхности жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси  $Z$  в цилиндрическом сосуде.

**14.17.** Найти распределение  $p$  давления на дне сосуда вдоль радиуса в условиях предыдущей задачи. Определить величину давления у стенок сосуда вблизи его дна, если сосуд вращается со скоростью 4 об/с. Высота столба воды на оси цилиндра равна 10 см. Радиус цилиндра равен также 10 см.

**14.18\*** Цилиндрический сосуд радиуса  $R$  с налитой в него идеальной несжимаемой жидкостью вращается вокруг своей геометрической оси, направленной вертикально, с угловой скоростью  $\omega$ . Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости (относительно сосуда).

**14.19.** В вертикальный невесомый цилиндрический сосуд радиуса  $R$  налито  $m_0$  граммов воды. Сосуд с водой раскручен до угловой

скорости  $\omega_0$ . В некоторый момент времени в дне сосуда вблизи оси вращения открывается отверстие, через которое вытекает вода. Определить угловую скорость сосуда  $\omega_k$  после вытекания воды.

**14.20.** Определить скорость стационарного течения вдоль оси и расход несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами с внутренним радиусом  $R_1$ , внешним  $R_2$  и длиной  $l$ . (Расходом жидкости называется ее масса, ежесекундно протекающая через поперечное сечение трубы.) Коэффициент вязкости жидкости  $\eta$  известен.

**14.21.** Проволоку радиуса  $r_1 = 1$  мм протягивают с постоянной скоростью  $v_0 = 10$  см/с вдоль оси трубки радиуса  $r_2 = 1$  см, которая заполнена жидкостью вязкости  $\eta = 0,01$  П. Определить силу трения  $f$ , приходящуюся на единицу длины проволоки. Найти распределение скоростей жидкости вдоль радиуса трубы.

**14.22.** Длинный вертикальный капилляр длины  $L$  и радиуса  $R$  заполнен жидкостью плотности  $\rho$ , коэффициент вязкости которой равен  $\eta$ . За какое время  $\tau$  вся жидкость вытечет из капилляра под действием силы тяжести? Влиянием сил поверхностного натяжения пренебречь. Процесс установления скорости жидкости считать мгновенным.

**14.23.** Вязкая несжимаемая жидкость с коэффициентом внутреннего трения  $\eta$  течет по горизонтальной конической трубе

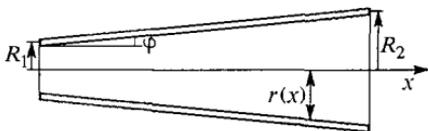


Рис. 308

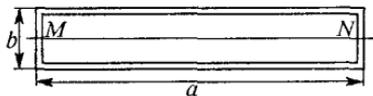


Рис. 309

(рис. 308). Предполагая угол  $\varphi$  малым, найти объем жидкости  $Q$ , протекающей по трубе за единицу времени при постоянной разности давлений на концах  $\Delta P$ .

**14.24.** В дне сосуда с жидким гелием образовалась щель шириной  $\delta = 10^{-4}$  см и длиной  $l = 5$  см. Толщина дна сосуда  $d = 0,5$  мм. Найти максимальную скорость гелия в щели  $v_{\max}$  и полный расход жидкости  $dM/dt$ , если высота столба гелия над дном сосуда  $h = 20$  см. Плотность и вязкость гелия равны  $\rho = 0,15$  г/см<sup>3</sup>,  $\eta = 3,2 \cdot 10^{-5}$  г/(см·с). (Расходом называется масса жидкости, протекающая через щель в течение одной секунды.)

**14.25.** Вода течет по сплюснутой трубке длины  $l = 1$  м под напором  $\Delta P = 1$  атм. Ширина трубки  $a = 1$  см, высота  $b = 0,1$  мм. Вязкость воды  $\eta = 0,01$  П. Определить объем воды  $Q$ , протекающей по трубке в единицу времени.

**14.26.** Вязкая жидкость течет по трубе прямоугольного сечения, одна из сторон которого  $a$  велика по сравнению с другой стороной  $b$  (рис. 309). На концах трубы поддерживается постоянная разность

давлений. Течение жидкости в трубе ламинарное. Как изменится количество жидкости, протекающей через трубку за 1 секунду, если ее разделить тонкой перегородкой  $MN$  на две равные части?

**14.27.** Однородный по высоте сосуд с площадью сечения  $S = 100 \text{ см}^2$  залит водой до уровня  $H = 10 \text{ см}$  (рис. 310). Вблизи дна вода отводится трубочкой диаметра  $2r = 2 \text{ мм}$  и длины  $l = 1 \text{ м}$ . Трубочка открывается в атмосферу. По какому закону  $h(t)$  вода вытекает из сосуда? Оценить также время, за которое вода вытечет из сосуда. Предполагается известной вязкость воды  $\eta = 10^{-2} \text{ П}$ .

**14.28.** Из неплотно закрытого крана вытекает в единицу времени  $Q = 1 \text{ см}^3/\text{с}$  воды в расположенный под ним сосуд, из которого вода затем уходит по горизонтальной трубочке длины  $l = 20 \text{ см}$  (рис. 311). Трубочка открывается в атмосферу. Каким должен быть

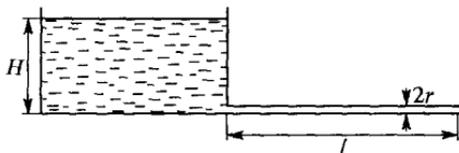


Рис. 310

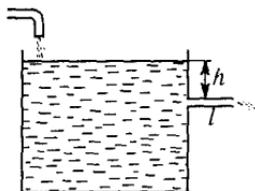


Рис. 311

диаметр  $d$  трубочки, если установившийся уровень воды равен  $h = 5 \text{ см}$  над уровнем слива. Предполагается известной вязкость воды  $\eta = 0,01 \text{ П}$ .

**14.29.** В плоской камере, доверху заполненной водой, вращается горизонтальный диск радиуса  $R = 20 \text{ см}$ . Какова мощность  $N$ , необходимая для его вращения со скоростью  $n = 300 \text{ об/мин}$ , если диск находится на расстояниях  $a = 5 \text{ мм}$  и  $b = 10 \text{ мм}$  от нижней и верхней стенок камеры (рис. 312)? Эффектами, связанными с

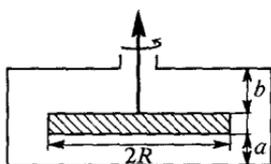


Рис. 312

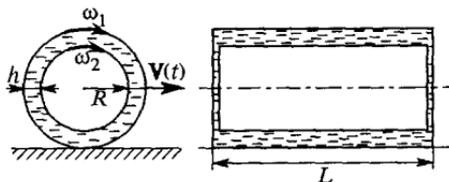


Рис. 313

радиальной конвекцией воды и явлениями на краю диска пренебречь. Движение жидкости считать ламинарным. Коэффициент вязкости воды  $\eta = 10^{-1} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$ .

**14.30.** По тонкостенной трубке, внутренний радиус которой равен  $r_1$ , наружный —  $r_2$ , а длина —  $L$ , течет жидкость с коэффициентом вязкости  $\eta$ , причем за 1 секунду вытекает объем, равный  $V$ . Пренебрегая изменением диаметра трубки, оценить ее удлинение

под действием трения со стороны жидкости. Модуль Юнга материала трубки равен  $E$ .

**14.31.** Два длинных (длины  $L$ ) соосных тонкостенных цилиндра близких радиусов  $R$  и  $R + h$  ( $L \gg R$ ,  $R \gg h$ ) имеют одинаковые массы  $m$  (рис. 313). Способные вращаться независимо на общей оси, они образуют некоторое устройство, в котором зазор между цилиндрами заполнен жидкой смазкой с коэффициентом вязкости  $\eta$ . В начальный момент  $t = 0$  угловая скорость внутреннего цилиндра  $\omega_2 = \omega_{20}$ , а внешний цилиндр неподвижен, так что  $\omega_1 = 0$ . Устройство кладется без начальной скорости на горизонтальную поверхность и начинает двигаться сразу без проскальзывания. Определить скорость движения оси системы  $v(t)$  и угловые скорости цилиндров  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$ , а также потери кинетической энергии системы  $(K_{\text{нач}} - K_{\text{кон}})/K_{\text{нач}}$  в процессе установления предельного режима движения при  $t \rightarrow \infty$ . Силы вязкости в торцах цилиндров, а также массу торцевых стенок не учитывать. Пренебречь массой жидкой смазки.

**14.32.** Бочка меда с вязкостью  $\eta_m = 100$  П и бочка дегтя ( $\eta_d = 10$  П) одинаковы по размерам ( $R \approx 10$  см) и массе. Бочки помещаются рядом на горизонтальную поверхность, и им сообщается одинаковая скорость поступательного движения  $v_0 = 1$  м/с. Оценить, на какое расстояние одна бочка будет опережать другую, когда их качение станет равномерным. Массой тары и трением качения можно пренебречь, а плотности меда и дегтя считать порядка  $1$  г/см<sup>3</sup>.

**14.33.** В бассейне испытывается модель корабля в 0,01 натуральной величины. Проектная скорость корабля равна  $v = 36$  км/ч. Найти скорость  $u$ , с которой надо буксировать модель, чтобы картина гравитационных волн была подобна натуре.

**14.34.** Лодка под парусом развила скорость  $v_0 = 4$  м/с. Предполагая, что сила сопротивления воды движению лодки  $F_c = kv^2$ , оценить время движения и путь, пройденный лодкой до полной ее остановки после спуска паруса. Принять, что лодка движется в стоячей воде, ее масса  $m \sim 100$  кг, длина  $l \sim 3$  м, кинематическая вязкость воды  $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с. Расчет выполнить для двух значений коэффициента сопротивления:  $k_1 = 2 \cdot 10^7$  кг/м и  $k_2 = 1700$  кг/м. Считать, что указанный режим движения лодки реализуется при числах Рейнольдса  $Re \gg 1$  вплоть до  $Re \sim 1$ .

## § 1. Идеальный газ. Работа, теплота, внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

1.1. Доказать, что если три величины  $x$ ,  $y$ ,  $z$  связаны функциональным уравнением  $f(x, y, z) = 0$ , то их производные  $(\partial x/\partial y)_z$ ,  $(\partial y/\partial z)_x$ ,  $(\partial z/\partial x)_y$  удовлетворяют соотношению

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

1.2. Доказать, что коэффициент объемного расширения  $\alpha$ , температурный коэффициент давления  $\lambda$  и изотермическая сжимаемость  $\beta$  физически однородного и изотропного тела связаны соотношением

$$V_0 \alpha = P_0 V \lambda \beta,$$

где  $V_0$  и  $P_0$  — объем и давление тела при  $0^\circ\text{C}$ .

1.3. Коэффициент объемного расширения ртути  $\alpha$  при  $0^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении равен  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ? Сжимаемость  $\beta = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ . Вычислить температурный коэффициент давления  $\lambda$  для ртути.

1.4. На сколько надо увеличить внешнее давление, чтобы сохранить постоянным объем ртути при нагревании ее от  $0$  до  $10^\circ\text{C}$ ? (См. предыдущую задачу.)

1.5. Вычислить для идеального газа следующие величины: коэффициент объемного расширения  $\alpha$ , температурный коэффициент давления  $\lambda$ , изотермическую сжимаемость  $\beta_T$ , изотермический модуль объемной упругости  $K_T = -V(\partial P/\partial V)_T$ . (См. задачу 1.2.)

1.6.\* Компенсационный маятник состоит из длинной тонкой никелевой трубки пренебрежимо малой массы, небольшая часть объема которой заполнена ртутью. Коэффициент линейного расширения никеля  $\alpha_n = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , коэффициент объемного расширения ртути  $\alpha = 18,0 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Какую часть объема трубки следует заполнить ртутью, чтобы период колебаний маятника не изменялся с изменением температуры? Для простоты сначала рассмотреть маятник как математический, т. е. считать, что центр качаний его совпадает с центром масс ртути. Затем учесть несовпадение центра качания с центром масс ртути.

1.7. Найти плотность  $\rho$  морской воды на глубине 5 км, если на поверхности океана плотность  $\rho_0 = 1,03 \text{ г/см}^3$ , а сжимаемость воды в пределах давлений от 1 до 500 атм равна  $\beta = 47,5 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ .

1.8. Электрическая газонаполненная лампа накаливания наполнена азотом при давлении в 600 мм рт. ст. Емкость лампы  $500 \text{ см}^3$ . Какое количество воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой при нормальном атмосферном давлении?

1.9. Цилиндрическая пипетка длиной  $l$  наполовину погружена в ртуть. Ее закрывают пальцем и вынимают. Часть ртути вытекает. Какой длины  $x$  столбик ртути останется в пипетке? Атмосферное давление равно  $H$ .

1.10. Давление воздуха, заключенного в закрытом колене манометра высоты  $l$ , уравнивает столб ртути высоты  $h$  при барометрическом давлении  $H_0$  и абсолютной температуре  $T_0$ . Какой столб ртути  $h_1$  будет уравнивать давление этого воздуха при барометрическом давлении  $H_1$  и температуре  $T_1$ ?

1.11. Два сосуда  $A$  и  $B$  с воздухом соединены между собой капилляром с краном. Сосуд  $A$  погружен в водяную ванну с температурой  $t_1 = 100^\circ \text{C}$ , а сосуд  $B$  — в охлаждающую смесь с температурой  $t_2 = -20^\circ \text{C}$ . В начале сосуда были разобщены друг от друга краном, и давления воздуха в сосудах  $A$  и  $B$  были равны соответственно  $P_1 = 400 \text{ мм рт. ст.}$  и  $P_2 = 150 \text{ мм рт. ст.}$  Найти давление, установившееся после открытия крана, если объем сосуда  $A$  равен  $V_1 = 250 \text{ см}^3$ , а  $B$  —  $V_2 = 400 \text{ см}^3$ .

1.12. Аэростат объема  $V \text{ м}^3$  наполнен водородом при температуре  $t_1 = 15^\circ \text{C}$ . При неизменном давлении атмосферы под влиянием солнечной радиации его температура поднялась до  $t_2 = 37^\circ \text{C}$ , а излишек газа вышел через аппендикс, благодаря чему масса аэростата с газом уменьшилась на  $M = 6,05 \text{ кг}$ . Плотность водорода  $\rho_0 = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$ . Определить объем аэростата  $V$ .

1.13. Фабричная труба высотой  $l = 50 \text{ м}$  выносит дым при температуре  $t_1 = 60^\circ \text{C}$ . Определить статическое давление  $P$ , производящее тягу в трубе. Температура воздуха  $t_2 = -10^\circ \text{C}$ . Плотность воздуха  $\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$ .

1.14. В тонкостенный сферический баллон массы  $M = 1 \text{ кг}$  нагнетается азот при температуре  $T = 300 \text{ К}$ . Найти максимальное количество азота, которое можно поместить в сосуд, если допустимое напряжение в стенках баллона  $\sigma = 50 \text{ Н/мм}^2$ . Плотность стали  $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ .

1.15. Найти число ходов  $n$  поршня, чтобы поршневым воздушным насосом откачать сосуд емкостью  $V$  от давления  $P_1$  до давления  $P_2$ , если емкость хода поршня равна  $v$ . Вредным пространством пренебречь.

1.16. Скорость откачки газа во вращающемся масляном насосе  $150 \text{ см}^3/\text{с}$ . Сколько потребуется времени, чтобы колбу в 5 л откачать от нормального атмосферного давления до давления  $10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ ?

1.17. Сосуд с объемом 1 литр наполнен водой при температуре  $27^\circ\text{C}$ . Чему стало бы равным давление  $P$  внутри сосуда, если бы взаимодействие между молекулами воды внезапно исчезло?

1.18. Восемь граммов кислорода занимают объем  $V = 560$  л. Определить давление этого газа в том же объеме при температурах 1)  $T = 820$  К и 2)  $T = 10$  кэВ, когда атомы кислорода полностью ионизированы.

1.19. При взрыве атомной (урановой) бомбы в ее центре достигаются температуры порядка  $T \approx 10$  кэВ. Принимая ориентировочно плотность урана в центре бомбы равной  $\rho = 20$  г/см<sup>3</sup>, найти давление внутри бомбы при этой температуре. Сравнить это давление с давлением в центре Земли, вычисленным в предположении, что плотность Земли постоянна и равна  $\rho_3 = 5,5$  г/см<sup>3</sup>. Давление светового излучения не учитывать.

1.20. Три сосуда с объемами  $V_0, V_1, V_2$ , содержащие идеальный газ, соединены вместе тонкими трубками (объемом трубок можно пренебречь). Вначале все три сосуда находились при одинаковой температуре  $T_0$ , а давление в них было равно  $P_0$ . Затем сосуд  $V_0$  оставили при температуре  $T_0$ , а сосуды  $V_1$  и  $V_2$  нагрели до температур  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Найти давление  $P$ , установившееся в сосудах.

1.21. Определить массу воздуха  $m$ , заключенного между двумя оконными рамами при атмосферном давлении  $P$ , считая, что температура между рамами меняется по линейному закону от  $T_1$  до  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Площадь окна равна  $S$ , расстояние между ними —  $l$ .

1.22. Оценить размер цилиндра автомобиля «Москвич». При засасывании в цилиндр воздуха из атмосферы, смешанного с брызгами бензина, горючая смесь подогревается до температуры  $\sim 80^\circ\text{C}$ . Расход бензина при езде со скоростью 60 км/ч (3000 об/мин двигателя, двигатель четырехцилиндровый) составляет около 8 кг на 100 км. Бензин представляет собой смесь углеводородов ( $\text{C}_n\text{H}_{2n}$ ) с относительной молекулярной массой  $\sim 100$ ; точка кипения его  $\sim 80^\circ\text{C}$ .

1.23. Имеется смесь различных идеальных газов с массами  $M_1, M_2, M_3, \dots$  и молярными массами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  соответственно. Показать, что уравнение состояния такой смеси можно записать в виде  $PV = \frac{M}{\mu} RT$ , где  $M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$  — полная масса смеси, а постоянная  $\mu$  играет роль средней молярной массы смеси. Найти  $\mu$ .

1.24. Какую скорость  $v$  должна иметь свинцовая пуля, чтобы при ударе о стальную плиту она расплавилась? Температура пули  $t_0 = 27^\circ\text{C}$ , температура плавления свинца  $t_1 = 327^\circ\text{C}$ , удельная теплота плавления свинца  $q = 5$  кал/г, удельная теплоемкость свинца  $c = 0,03$  кал/(г $\cdot^\circ\text{C}$ ).

1.25. Насос производительностью 0,5 л/с откачивает пары из сосуда, частично заполненного водой. Температура сосуда поддерживается равной  $20^\circ\text{C}$ . Определить количество тепла, подводимое к сосуду за 1 с. Давление насыщенного пара и теплота парообразования при

этой температуре равны соответственно  $P_0 = 18$  Тор,  $\lambda = 580$  кал/г. Считать пар внутри сосуда насыщенным, а насыщенный пар — идеальным газом.

**1.26.** На  $PV$ -диаграмме, изображенной на рис. 314 показаны различные обратимые процессы изменения состояния некоторой термодинамической системы. Известно, что когда система переходит из состояния 1 в состояние 2 по пути 1-3-2, то она получает  $Q_{132} = 80$  Дж тепла и при этом совершает работу  $A_{132} = 30$  Дж.

1) Какое количество тепла  $Q_{142}$  получит система, переходя из состояния 1 в состояние 2 по пути 1-4-2, если известно, что при этом она совершает работу  $A_{142} = 10$  Дж?

2) Система возвращается из состояния 2 в состояние 1 по пути 2-1. Совершенная при этом над системой внешняя работа равна  $A_{21} = 20$  Дж. Какое количество тепла  $Q_{21}$  отдает система в ходе этого процесса?

3) Найти количества тепла  $Q_{14}$  и  $Q_{42}$ , поглощаемые системой в процессах 1-4 и 4-2, если разность внутренних энергий  $U_4 - U_1 = 40$  Дж.

**1.27.** При полном сгорании моля метана в углекислоту и воду выделяется  $Q_1 = 887$  кДж. При образовании из элементов моля воды выделяется  $Q_2 = 287$  кДж, а при полном сгорании углерода с образованием моля  $CO_2$  выделяется тепло  $Q_3 = 407$  кДж. Определить теплоту  $Q$  образования моля метана из твердого углерода и газообразного водорода.

**1.28.** Согласно закону Джоуля внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры и не зависит от давления. Пользуясь этим и уравнением Клапейрона, показать, что энтальпия  $I \equiv U + PV$  идеального газа не зависит от давления, а является функцией только его температуры.

**1.29.** Доказать, что если начальные и конечные продукты реакции являются идеальными газами, то: 1) тепловой эффект реакции при постоянном объеме не зависит от объемов газов после реакции; 2) тепловой эффект реакции при постоянном давлении не зависит от давлений газов.

**1.30.** Рассматривая воздух как идеальный газ, показать, что при нагревании воздуха, находящегося в комнате, его внутренняя энергия не изменяется, если только внешнее давление остается постоянным.

**1.31.** В комнате в течение некоторого времени был включен нагреватель. При этом температура воздуха поднялась от  $t_1$  до  $t_2$ , давление же его не изменилось и осталось равным давлению вне здания. Считая воздух идеальным газом, найти количество тепла  $Q$ , которое пошло на увеличение внутренней энергии воздуха в комнате.

**1.32.** Какое количество тепла  $Q$  потребуется на нагревание  $1 \text{ м}^3$  воздуха от 0 до  $1^\circ\text{C}$  при постоянном объеме и начальном давлении

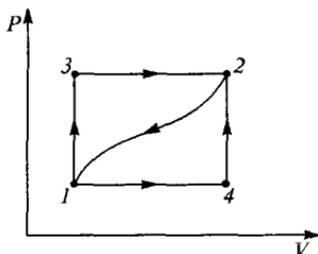


Рис. 314

$P = 760$  мм рт. ст.? Плотность воздуха при нормальных условиях  $\rho_0 = 0,00129$  г/см<sup>3</sup>,  $c_p = 0,237$  кал/(г·°С),  $\gamma = c_p/c_v = 1,41$ .

1.33. Какое количество тепла  $Q$  отдает моль одноатомного идеального газа при его изобарическом обратимом охлаждении, если на сжатие газа в ходе этого процесса затрачена работа  $A = 10$  Дж?

1.34. В цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный газ в равновесии с атмосферой. На поршень начинает действовать внешняя сила, в результате чего газ изотермически сжимается, и его давление возрастает в два раза. Начальный объем газа  $V_1 = 5$  л. Вычислить работу, совершаемую внешней силой, и количество тепла, полученное в этом процессе газом.

1.35. Найти изменение внутренней энергии  $\Delta U$  массы азота при его квазистатическом адиабатическом расширении от объема  $V_1 = 10$  л, занимаемого при нормальном давлении  $P_1$ , до объема  $V_2 = 320$  л.

1.36. Батарея конденсаторов емкостью  $C = 100$  мкФ, заряженная до напряжения  $U = 300$  В, разряжается через искровой промежуток, помещенный внутри баллона объемом  $V = 10$  см<sup>3</sup>. Баллон наполнен аргоном при нормальных условиях. Оценить изменение  $\Delta P$  давления в аргоне.

1.37. Для аргона отношение  $\gamma = c_p/c_v = 1,68$ . Определить давление  $P_2$ , получившееся после адиабатического расширения этого газа от объема  $V_1 = 1$  л до объема  $V_2 = 2$  л, если начальное давление  $P_1 = 1$  атм.

1.38. Политропическим процессом называется процесс, происходящий с постоянной теплоемкостью  $C$ . Кривая, изображающая политропический процесс, называется политропой. Найти уравнение политропы для идеального газа, теплоемкость  $C_v$  которого не зависит от температуры. Рассмотреть частные случаи: 1)  $C = C_v$ ; 2)  $C = c_p$ ; 3)  $C = 0$ ; 4)  $C = \infty$ .

1.39. При каких значениях показателя политропы  $n$  идеальный газ при сжатии нагревается, а при каких охлаждается?

1.40. При некотором политропическом процессе гелий был сжат от начального объема в 4 л до конечного объема в 1 л. Давление при этом возросло от 1 до 8 атм. Найти теплоемкость  $C$  всей массы гелия, если его начальная температура была 300 К.

1.41. На  $PV$ -диаграмме (рис. 315) через произвольную точку  $A$  проведена изотерма  $TT$  и адиабата  $SS$  для идеального газа, теплоемкость  $C_v$  которого не зависит от температуры. Показать, что политропе, проходящей через  $A$  и лежащей в заштрихованной области, соответствует отрицательная теплоемкость, а политропе в незаштрихованной области — положительная теплоемкость.

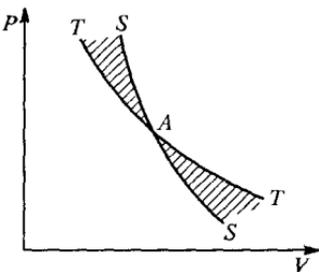


Рис. 315

1.42. Вычислить работу одного моля идеального газа в политропическом процессе, если объем газа изменяется от начального значения  $V_1$  до конечного значения  $V_2$ . Рассмотреть частные случаи изотермического и адиабатического процессов.

1.43. Положительную или отрицательную работу совершает идеальный газ при круговом процессе  $1-2-3-1$  (рис. 316)? Чему равна эта работа для  $m$  граммов азота? Известно, что  $V_2/V_1 = T_2/T_1$ .

1.44. В теплоизолированном от внешней среды цилиндре под поршнем находится 8 г гелия при температуре  $T_1 = 200$  К. Общее количество вещества, из которого изготовлен цилиндр и поршень, равно

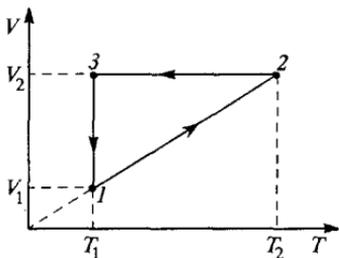


Рис. 316

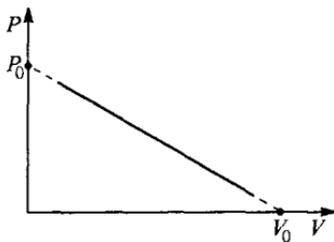


Рис. 317

одному молю. Обратимым образом газ за счет движения поршня сжимается до объема  $V_2 = V_1/8$ , но температура стенок за это время не успевает измениться, и лишь потом вся система приходит в равновесие. Найти установившуюся температуру  $T$ .

1.45. 1) Нагревается или охлаждается идеальный газ, если он расширяется по закону  $PV^2 = \text{const}$ ? 2) Какова его молярная теплоемкость в этом процессе?

1.46. Решить предыдущую задачу для идеального газа, расширяющегося по закону  $P^2V = \text{const}$ .

1.47. Вычислить молярную теплоемкость идеального газа для процесса, в котором давление  $P$  пропорционально объему  $V$ . Теплоемкость  $C_V$  газа не зависит от температуры.

1.48. Молярная теплоемкость азота в некотором процессе постоянна и равна 23,556 Дж/(К·моль). Как зависит давление газа  $P$  от температуры  $T$  в этом процессе?

1.49. Вычислить молярную теплоемкость  $C(V)$  идеального газа с заданным значением параметра  $\gamma = C_P/C_V$  в процессе, представленном на графике (рис. 317). Значения  $P_0$  и  $V_0$  известны. Определить максимальную температуру, которую достигает газ в этом процессе. Указать политропические процессы, графики которых на  $PV$ -диаграмме касаются прямой (на рис. 317) в точках, соответствующих  $C(V) = 0$  и  $C(V) = \infty$ . Начертить график зависимости  $C(V)$ .

1.50. Найти в координатах  $(V, T)$  уравнение процесса для идеального газа, при котором молярная теплоемкость газа меняется с температурой по линейному закону  $C = C_0 + \alpha T$ , где  $\alpha$  — некоторая постоянная. Рассмотреть частный случай  $C_0 = 0$ .

1.51. Найти в координатах  $(V, T)$  уравнение адиабаты для идеального газа в области температур, в которой теплоемкость газа меняется по закону  $C_V = C_{V_0} + \alpha T^2$ , где  $\alpha$  — некоторая постоянная.

1.52. Для идеального газа с произвольным показателем адиабаты  $\gamma$  найти уравнение процесса, при котором молярная теплоемкость  $C$  зависит от температуры  $T$  по закону  $C = \alpha T^2$ , где  $\alpha = \text{const}$ .

1.53. Моль идеального газа с молярной теплоемкостью  $C_V = 5R/2$  три раза обратимо переводится из состояния 1 в состояние 2 в результате поочередного выполнения трех различных термодинамических процессов 1—3—2, 1—4—2, и 1—2 (рис. 318). Найти количества тепла  $Q_{132}$ ,  $Q_{142}$ , и  $Q_{12}$ , получаемые газом в ходе каждого из этих процессов. Найти молярную теплоемкость  $C_{12}$  газа для процесса 1—2. Все результаты выразить через газовую постоянную  $R$  и температуру  $T_1$  газа в состоянии 1.

1.54. Моль идеального газа нагревают в цилиндре под поршнем, удерживаемым в положении равновесия пружиной, подчиняющейся закону Гука (рис. 319). Стенки цилиндра и поршень адиабатические, а дно проводит тепло. Начальный объем газа  $V_0$ , при котором

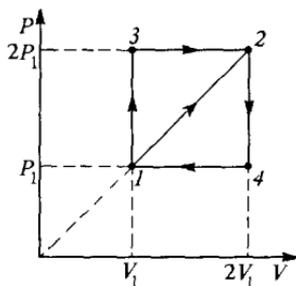


Рис. 318

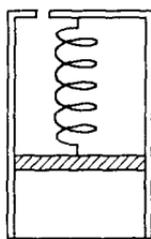


Рис. 319

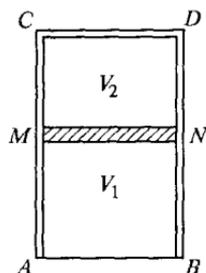


Рис. 320

пружина не деформирована, подобран так, что  $P_0 S^2 = kV_0$ , где  $P_0$  — наружное атмосферное давление,  $S$  — площадь поршня,  $k$  — коэффициент упругости пружины. Найти теплоемкость газа для этого процесса.

1.55. Боковые стенки цилиндра  $AC$  и  $BD$ , его крышка  $CD$  и поршень  $MN$  сделаны из материала, не проводящего тепло (рис. 320). Дно  $AB$  проводит тепло. Поршень  $MN$  может двигаться в цилиндре без трения. Сверху и снизу поршня находится по одному молю одного и того же идеального газа с молярной теплоемкостью при постоянном объеме  $C_V$  и показателем адиабаты  $\gamma$ . Первый газ в нижней части цилиндра квазистатически нагревают (или охлаждают), вследствие чего поршень  $MN$  перемещается. Выразить теплоемкость первого газа  $C_1$  при таком процессе через объемы газов  $V_1$  и  $V_2$ . Чему равна при этом теплоемкость второго газа  $C_2$ ? Как изменится ответ, если верхнюю крышку  $CD$  сделать теплопроводящей, а температуру газа в верхней части цилиндра поддерживать постоянной?

**1.56.** В цилиндрическом сосуде объема  $2V_0$  может свободно перемещаться легкий поршень. По обе стороны поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа. В начальный момент температура и давление газа слева и справа от поршня одинаковы и равны  $T_0$  и  $P_0$ . Затем газу слева стали квазистатически подводить тепло. Считая процесс в правой части сосуда адиабатическим, определить теплоемкость процесса в левом отсеке как функцию  $V_2$ . Начертить график зависимости  $C_1(V_2)$ .

**1.57.** Один моль идеального газа помещен в закрытом цилиндре при температуре  $T_0 = 273,15$  К и давлении  $P_0 = 1$  атм. Боковые стенки цилиндра не проводят тепло, а его основания являются хорошими проводниками тепла. Цилиндр и содержащийся в нем газ разделены на две равные части свободно перемещающимся поршнем, не проводящим тепло. Одна половина цилиндра погружается в тающий лед, а другая нагревается до температуры  $T = 373,15$  К. Определить объемы  $V_1$  и  $V_2$ , занимаемые газом по обе стороны поршня после установления равновесия. Найти давление газа  $P$  в конце процесса и массу  $m$  расплавленного льда. Теплота плавления льда  $q = 335$  Дж/г.

**1.58.** Теплоизолированный сосуд разделен непроницаемой перегородкой на две равные части. В одну часть помещен идеальный газ, а вторая откачана до высокого вакуума. Затем перегородку убирают, и газ заполняет весь объем сосуда. После этого газ нагревают, заставляя его последовательно совершать два процесса: 1) процесс при постоянном давлении, в результате которого объем газа увеличивается в 4 раза; 2) процесс при постоянном объеме, в результате которого восстанавливается исходное давление газа. В обоих процессах газу сообщается одинаковое количество тепла. Определить показатель адиабаты  $\gamma$ .

**1.59.** Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа. Определить работу, затраченную на сжатие одного моля газа, при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа равна  $T_0$ .

**1.60.** Теплоизолированный цилиндр с объемом  $2V_0$ , в котором находятся 2 моля идеального газа, разделен невесомым теплопроницаемым поршнем с площадью  $S$  на две равные части. Одну из частей нагревают. При этом поршень перемещается на величину  $h$ . Определить количество затраченного тепла. Начальная температура в обеих половинах одинакова и равна  $T_0$ .

**1.61.** 20 г гелия, заключенного в цилиндре под поршнем, квазистатически переводятся из состояния 1 ( $P_1 = 4,1$  атм,  $V_1 = 32$  л) в состояние 2 ( $P_2 = 15,5$  атм,  $V_2 = 9$  л). Какой наибольшей температуры достигает газ в этом процессе, если зависимость  $P(V)$  представляет собой прямую линию?

**1.62.** Для создания подземного нефтехранилища в полости с начальным объемом  $V_0$  производят взрыв, при котором высвобождается энергия 4,2 ГДж. Образовавшиеся газообразные продукты взрыва,

расширяясь адиабатически, в доли секунды образуют хранилище. При каком начальном объеме полости увеличение ее объема будет максимальным? Взрыв производится на глубине  $H = 100$  м, плотность грунта  $\rho = 3$  г/см<sup>3</sup>. Для оценки считать грунт несжимаемой жидкостью, а продукты взрыва — двухатомным газом.

**1.63.** Для определения отношения удельных теплоемкостей  $c_p$  и  $c_v$  газа измерили период  $T_1$  малых колебаний ртути в U-образной стеклянной трубке с незапаянными концами. После этого на обе ветви трубки были насажены большие одинаковые полые стеклянные шары с исследуемым газом, вследствие чего период колебаний изменился и стал равным  $T_2$ . Считая процесс сжатия и разрежения газа в шарах адиабатическим, вывести формулу для  $\gamma = c_p/c_v$ . Объем каждого шара равен  $V$  см<sup>3</sup>, давление газа в них в состоянии покоя  $h$  см рт. ст., а площадь поперечного сечения трубки  $S$  см<sup>2</sup>. Объемом незаполненной части трубки можно пренебречь по сравнению с объемом шара  $V$ .

**1.64.** Для получения газов при сверхвысоких температурах и давлениях иногда применяется установка, состоящая из закрытого с одного конца цилиндра-ствола и поршня-пули, влетающей в цилиндр с открытой стороны. При хорошей обработке ствола и пули удастся добиться малой утечки газа через зазор. Благодаря очень высоким температурам сильно сжатые газы в этих условиях еще можно считать идеальными. Оценить верхний предел температуры  $T$ , давления  $P$  и плотности  $\rho$  аргона, подвергнутого сжатию в такой установке, если пуля массы  $m = 100$  г влетает в ствол, имеющий объем  $V = 200$  см<sup>3</sup>, с начальной скоростью  $v = 250$  м/с. Начальные температура и давление соответственно равны  $T_0 = 300$  К и  $P_0 = 1$  атм.

**1.65.** Для измерения теплоемкости газа исследуемый нагретый газ заставляют протекать через спиральную металлическую трубку (змеевик), опущенную в воду калориметра. На одном конце змеевика поддерживают постоянными давление  $P_1$  и температуру  $T_1$ . На выходе змеевика поддерживают давление  $P_2$  и измеряют температуру газа  $T_2$ . По повышению температуры воды в калориметре можно определить количество тепла, отданное газом. Разделив полученную величину на понижение температуры и на число молей прошедшего газа, находят его молярную теплоемкость. Какая теплоемкость измеряется таким методом?

**1.66.** В длинной вертикальной цилиндрической трубке, закрытой с нижнего конца, может ходить без трения поршень, масса  $M$  которого велика по сравнению с массой газа, заключенного внутри трубки. В положении равновесия расстояние между поршнем и дном трубки равно  $l_0$ . Определить период малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня от положения равновесия, в предположении, что они являются изотермическими, а газ идеальным. Площадь поперечного сечения трубки равна  $S$ , нормальное атмосферное давление  $P_0$ . Рассмотреть предельный случай, когда  $P_0 = 0$ .

**1.67.** Решить предыдущую задачу в предположении, что колебания — адиабатические. Будет ли сказываться на результате зависимость показателя адиабаты  $\gamma$  для газа от температуры?

**1.68.** Два баллона с объемами в  $V_1$  и  $V_2$ , наполненные разными газами, соединены цилиндрической трубой с площадью поперечного сечения, равной  $S$ . В трубе находится поршень массы  $M$ . В положении равновесия давление газов по обе стороны поршня одинаково и равно  $P_0$ . Найти период  $\tau$  малых колебаний, которые возникнут при отклонении поршня от положения равновесия в предположении, что процесс сжатия и расширения газов адиабатический. Показатели адиабат для газов равны соответственно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Объемом трубы по сравнению с объемами  $V_1$  и  $V_2$  пренебречь, трение между поршнем и стенками трубы не учитывать.

**1.69:** Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого  $C_p$  и  $C_v$  не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от давления  $P_0$  до промежуточного давления  $P_1$ . Затем сжатый газ при постоянном давлении  $P_1$  охлаждается до начальной температуры  $T_0$ . Наконец, газ сжимается до окончательного давления  $P_2$ . При каком значении промежуточного давления  $P_1$  полная работа компрессора минимальна и чему она равна? Давления  $P_0$  и  $P_1$ , а также начальный объем газа  $V_0$  считаются заданными. Как связана минимальная работа  $A_{\min}$  с работой  $A_1$ , которую надо было бы затратить на сжатие газа до того же давления  $P_2$ , применяя одноступенчатый компрессор? Найти эту связь для гелия и воздуха, если  $P_0 = 1$  атм,  $P_2 = 200$  атм.

**1.70.** Двухступенчатый компрессор адиабатически и квазистатически сжимает некоторое количество идеального газа, теплоемкости которого  $C_p$  и  $C_v$  не зависят от температуры. Сначала газ сжимается от объема  $V_0$  до промежуточного объема  $V_1$ . Затем сжатый газ при постоянном объеме  $V_1$  охлаждается до начальной температуры  $T_0$ . После этого газ сжимается до объема  $V_2$ . При каком значении промежуточного объема  $V_1$  полная работа компрессора минимальна и чему она равна? Объемы  $V_0$  и  $V_2$ , а также начальное давление  $P_0$  считаются заданными. Как связана минимальная работа  $A_{\min}$  с работой  $A_1$ , которую надо было бы затратить, чтобы произвести такое же сжатие газа с помощью одноступенчатого компрессора? Найти эту связь для аргона и азота, если  $V_0/V_2 = 50$ .

**1.71:** Идеальный газ находится в эластичной адиабатической оболочке под давлением  $P_1$ , имея температуру  $T_1$ . Определить температуру газа  $T_2$ , которая установится после того, как внешнее давление на газ скачкообразно изменится до величины  $P_2$ . Сравнить изменение температуры в этом процессе с изменением ее, которое получилось бы, если бы адиабатический процесс проходил квазистатически.

1.72. Ртуть массы  $m = 6,8$  г налита в U-образную трубку (рис. 321) сечения  $S = 0,05$  см<sup>2</sup>, запаянную с одной стороны так, что разность уровней ртути  $l = 2,5$  см, а высота воздушного промежутка  $x_0 = 3,5$  см. Найти период малых колебаний ртути в трубке, считая процесс адиабатическим.

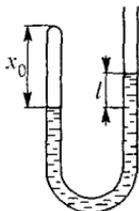


Рис. 321

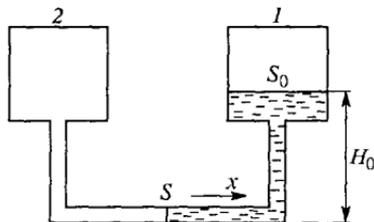


Рис. 322

$S = 0,001$  см<sup>2</sup>. Вначале в колбе 1 создается вакуум, в колбе 2 находится воздух при нормальном атмосферном давлении; при этом ртуть в капилляре оказывается на горизонтальном участке. Затем обе колбы запаиваются. Сечение колб  $S_0 = 25$  см<sup>2</sup>, температура постоянна, газ в колбе 2 идеальный. Насколько изменится положение ртути в капилляре при  $\Delta g/g = 10^{-7}$ ?

1.74. Выразить показатель адиабаты  $\gamma$  смеси нескольких идеальных газов через показатели адиабат  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  и парциальные давления  $P_1, P_2, \dots$  этих газов.

1.75. Смесь гелия с водородом в отношении He : H<sub>2</sub> = 2 : 1 ( $\frac{1}{3}$  водорода,  $\frac{2}{3}$  гелия по массе), находящаяся под давлением  $P_1 = 8$  атм при температуре  $T_1 = 600$  К расширяется в обратимом адиабатическом процессе до давления  $P_2 = 1$  атм. Определить температуру смеси в конечном состоянии.

1.76. Смешано  $m_1 = 4,032$  г водорода с  $m_2 = 32$  г кислорода. Их удельные теплоемкости соответственно  $c_{P1} = 3,50$  кал/(г·°C) и  $c_{P2} = 0,218$  кал/(г·°C). Определить уменьшение внутренней энергии  $\Delta U$  этой смеси при охлаждении ее на  $\Delta t = 20$  °C при постоянном объеме. Для обоих газов  $\gamma = 1,40$ .

1.77. В объеме  $V_0$  при температуре  $t = 0$  °C содержится  $\nu$  молей водорода и  $\nu/2$  молей кислорода. Найти выражение для максимального давления  $P$  при той же температуре водяного пара, полученного при взрыве смеси, если молярная теплоемкость водяного пара  $C$ , а молярная теплота образования воды из кислорода и водорода  $Q$ .

1.78. Смесь газов с известным показателем адиабаты  $\gamma$  допускает нагрев только до максимальной температуры  $T_{\max}$ . Определить число ступеней сжатия  $n$ , необходимое для повышения давления от

$P_0$  до  $P_1$ , если каждое сжатие проводится адиабатически, и после каждой ступени газ охлаждается до начальной температуры  $T_0$ . Определить также полную работу  $A$ , затраченную при таком сжатии. К чему стремится  $A$  при  $T_{\max} \rightarrow T_0$ ?

**1.79.** Определить удельную теплоемкость при постоянном объеме кислорода, нагретого до очень высокой температуры (порядка нескольких килоэлектрон-вольт)

**1.80.** Подсчитать по классической теории удельную теплоемкость при постоянном давлении газа следующего молярного состава:

$$\text{He} - 20\%; \quad \text{H}_2 - 30\%; \quad \text{CH}_4 - 50\%.$$

(Молярный состав указывает отношение количества молей данного газа к общему количеству молей всей смеси газов.)

**1.81.** При некоторых условиях часть молекул водорода диссоциирована на атомы с коэффициентом диссоциации  $\alpha$  (отношение числа диссоциированных молекул к исходному числу). Найти молярную теплоемкость  $C_V$  этого газа при  $\alpha = 0,25$ . Молярные теплоемкости атомарного водорода  $C_{V1} = 2,94$  кал/(моль $\cdot$ °С), молекулярного водорода  $C_{V2} = 4,9$  кал/(моль $\cdot$ °С).

**1.82.** Давление водорода при температуре  $T = 350$  К составляет 1 Тор. Каково будет давление газа, если его при постоянном объеме нагреть до температуры 300 эВ? Потенциал ионизации атома водорода 13,6 эВ.

**1.83.** Какая часть  $\alpha$  молекул парообразного йода ( $\text{I}_2$ ) диссоциирована на атомы при 600 °С, если удельная теплоемкость  $C_P$ , измеренная при этой температуре, оказалась равной 0,14 Дж/(г $\cdot$ К)? Относительная атомная масса йода  $A = 126,9$ .

**1.84.** В теплоизолированном сосуде объема  $V_0$  находится  $N$  двухатомных молекул. Давление газа  $P_0$ . Через некоторое время все молекулы распадаются на атомы с выделением тепла  $q$  при распаде одной молекулы. Определить температуру и давление газа после распада молекул.

**1.85.** В теплоизолированном сосуде с объемом 22,4 л находится 1 моль  $\text{CO}_2$  при давлении 1 атм. Под действием внешнего излучения половина молекул  $\text{CO}_2$  диссоциировала на молекулы  $\text{CO}$  и  $\text{O}_2$ . Найти энергию излучения, перешедшую в тепло, если при этом давление в сосуде увеличилось до 1,8 атм.

**1.86.** Теплоизолированный цилиндр разделен тонкой неподвижной, теплопроводящей перегородкой  $AB$  на две части, в одной из которых находится моль газообразного водорода, а в другой — моль газообразного гелия (рис. 323). Подвижный теплонепроницаемый поршень  $CD$  находится под постоянным внешним давлением  $P$ . В начальный момент оба газа находятся в равновесном состоянии, причем температуры водорода и гелия различны, а давление гелия равно внешнему

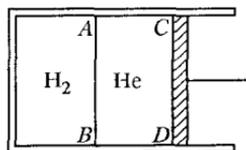


Рис. 323

давлению  $P$ . Затем начинается неравновесный процесс выравнивания температур газов, в ходе которого поршень  $CD$  перемещается вправо. К моменту, когда температуры газов выровняются и установится равновесие, система совершит против внешнего давления работу  $A = 42$  Дж. Определить изменение температуры водорода к этому моменту времени.

**1.87.** Теплоизолированный сосуд разделен тонкой, неподвижной, теплопроводящей перегородкой  $AB$  на две части. В одной находится моль газообразного водорода, в другой — моль газообразного гелия (рис. 323). Начальное состояние системы равновесное, причем оба газа имеют одинаковое давление  $P_0$  и одинаковую температуру  $T_0 = 293$  К. Затем поршень  $CD$  адиабатически и квазистатически выдвигают, в результате чего объем гелия увеличивается в 2 раза. Какова будет установившаяся температура обоих газов после расширения?

**1.88.** Под поршнем в цилиндре находятся два различных идеальных газа (по одному молю), разделенных легкой теплопроницаемой подвижной перегородкой. Найти выражение для работы, которая затрачивается на перемещение такого поршня в условиях отсутствия теплообмена с окружающей средой. Движение медленное, так что между обоими газами все время сохраняется тепловое равновесие. Начальные температура и объем равны  $T_0$  и  $V_0$  соответственно, конечный объем —  $V$ .

**1.89.** Длинная трубка с теплоизолированными стенками разделена поршнем  $AB$ , по разные стороны которого находятся разные газы (рис. 324). Начальные длины частей трубки, заполненных газами

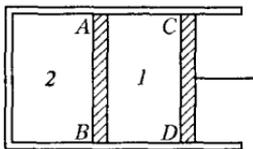


Рис. 324

ми 1 и 2, равны соответственно  $l_{01}$  и  $l_{02}$ . В трубку быстро, но квазистатически вдвигается второй поршень  $CD$ . При этом начинает перемещаться и поршень  $AB$ . Замечают положение поршня  $AB$ , когда он уже остановился, а теплообмен между газами 1 и 2 практически еще не успел произойти. Пусть  $l_1$  — длина трубки, заполненная газом 1 в этом положении, а  $l_2$  —

длина трубки, заполненная газом 2 в том же положении. Определить отношение показателей адиабат Пуассона  $\gamma_2/\gamma_1$ .

**1.90.** Мишень для получения в ней термоядерной реакции, представляет собой шарик радиуса  $r = 50$  мкм из замороженной смеси, содержащей равное количество атомов дейтерия и трития. Она подвергается кратковременному (в течение времени  $\sim 10^{-11}$  с) всестороннему облучению светом лазера. При этом энергия, поглощенная дейтерием, составляет  $\mathcal{E} = 10^2$  Дж. Оценить температуру мишени и давление в ней сразу после вспышки лазера, предполагая, что вещество мишени еще не успело разлететься. Плотность мишени  $\rho = 0,2$  г/см<sup>3</sup>.

**1.91.** Для получения самоподдерживающейся термоядерной реакции в чистом дейтерии необходимо нагреть его до температуры

$T \approx 10^9$  К. Среди различных способов для достижения этого было предложено использовать излучение мощного лазера. Мишень из замороженного дейтерия, имеющая форму шарика, подвергается кратковременному (в течение времени  $\sim 10^{-11}$  с) всестороннему облучению светом лазера. За время облучения вещество мишени еще не успевает разлететься, что необходимо для возможности термоядерной реакции. Какова должна быть энергия  $\mathcal{E}$ , поглощаемая дейтериевым шариком радиуса  $r = 5$  мкм, чтобы была достигнута необходимая температура? Плотность мишени  $\rho = 0,15$  г/см<sup>3</sup>.

**1.92.** Найти адиабатический модуль объемного сжатия идеального газа  $K_{\text{ад}} = -V(\partial P/\partial V)_{\text{ад}}$  и сравнить его с изотермическим модулем объемного сжатия  $K_T = -V(\partial P/\partial V)_T$ .

**1.93\*** Доказать, что адиабатическая и изотермическая сжимаемости физически однородного и изотропного вещества связаны соотношением

$$\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{\text{ад}} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T,$$

где  $\gamma = C_P/C_V$ . Показать, что это соотношение является следствием только первого начала термодинамики и функциональной зависимости между  $P$ ,  $V$  и  $T$  (уравнения состояния).

**1.94\*** Доказать, что для любого физически однородного тела имеет место соотношение

$$(C_P - C_V) \frac{\partial^2 T}{\partial P \partial V} + \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = 1.$$

Это соотношение справедливо для всякой эмпирически определенной температуры  $T$  и в принципе может служить для проверки первого начала термодинамики.

**1.95.** Газ подчиняется уравнению состояния Клапейрона  $PV = RT$ . Найти для него разность теплоемкостей  $C_P - C_V$ , используя только первое начало термодинамики. Считать, что теплоемкости  $C_V$  и  $C_P$  зависят от объема и давления, соответственно.

**1.96\*** Моль идеального газа с постоянной теплоемкостью  $C_V$  заключен в цилиндр с адиабатическими стенками и поршнем, который может перемещаться в цилиндре без трения. Поршень находится под постоянным внешним давлением  $P_1$ . В некоторый момент времени внешнее давление скачкообразно уменьшают или увеличивают до  $P_2$ . (Этого можно достигнуть, снимая часть груза с поршня или добавляя новый груз.) В результате газ адиабатически изменяет свой объем. Вычислить температуру и объем газа после того, как установится термодинамическое равновесие.

**1.97\*** В предыдущей задаче после того, как установилось состояние равновесия, давление газа снова меняют скачкообразно до первоначального значения  $P_1$ . Вычислить окончательную температуру  $T_3$  и окончательный объем газа  $V_3$ , когда он опять придет в состояние термодинамического равновесия. Показать, что в результате обоих адиабатических процессов температура и объем газа всегда

возрастают. Рассмотреть специальный случай, когда изменение давления  $P_2 - P_1$  мало. Определить для этого случая порядок малости изменений температуры  $T_3 - T_1$  и объема  $V_3 - V_1$ .

**1.98.** Газ находится в цилиндре с поршнем, нагруженным песком. Стенки цилиндра и поршень — адиабатические. Снимая песчинку за песчинкой, производят адиабатическое расширение газа. Затем газ адиабатически сжимают, возвращая на поршень последовательно по одной песчинке. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, показать, что в предельном случае, когда масса песчинки исчезающе мала, а их число бесконечно велико, газ в обратном процессе пройдет через ту же последовательность равновесных состояний, что и в прямом процессе.

**1.99.** По теплоизолированной трубке, разность давлений на концах которой равна 100 атм, течет вода. Температура воды на входе  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ . На сколько градусов повысится ее температура на выходе? Сжимаемостью воды пренебречь.

## § 2. Скорость звука. Истечение газов<sup>1</sup>

**2.1.** Найти увеличение скорости звука в воздухе при нагревании последнего от 0 до  $1^\circ\text{C}$ .

**2.2.** Скорость звука в воздухе при  $0^\circ\text{C}$  составляет 332 м/с. Определить скорость звука в водороде при той же температуре. Молярную массу воздуха принять равной  $\mu = 28,8$  г/моль.

**2.3.** Определить  $\gamma = C_P/C_V$ , если скорость звука в воздухе при температуре  $0^\circ\text{C}$  и нормальном давлении  $P = 76$  см рт. ст. равна  $v = 332$  м/с и плотность воздуха  $\rho = 0,001292$  г/см<sup>3</sup>.

**2.4.** Найти выражение для скорости звука в смеси  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  молей различных идеальных газов при температуре  $T$ .

**2.5.** Вычислить скорость звука в кислороде при температуре  $T = 1$  кэВ.

**2.6.** Измерением скорости звука в газе можно контролировать его чистоту. С какой относительной точностью  $\Delta v_{\text{зв}}/v_{\text{зв}}$  нужно измерить скорость звука в гелии, чтобы можно было заметить в нем примесь аргона ( $\mu = 40$ ) в количестве 1% (по количеству молей)?

**2.7.** Две organные трубы одинаковой длины продувают: одну воздухом при комнатной температуре  $T_0$ , а другую гелием. Какова должна быть температура гелия  $T$ , чтобы тоны второй трубы были на одну октаву выше соответствующих тонов первой (отношение частот равно 2). Считать известными показатели адиабат газов и их молярные массы.

**2.8.** Для дыхания акванавтов (исследователей морских глубин) употребляется смесь, состоящая из 95% гелия и 5% кислорода

<sup>1</sup> В задачах на истечение из отверстия под «малым» понимают такой размер отверстия, чтобы истечение было ламинарным. При этом отверстие должно быть не настолько малым, чтобы поток стал молекулярным.

(по массе). Во сколько раз изменяются в такой атмосфере характерные частоты голоса акванавтов (по сравнению с обычными)? Считать известными показатели адиабат газов и их молярные массы.

**2.9.** Оценить скорость звука в снежной лавине, спускающейся по склону горы, считая, что плотность движущегося снега  $\rho = 0,25 \text{ г/см}^3$ . Размеры кристалликов льда много меньше длины волны звука. Между кристалликами нет твердых связей, они разделены воздушными прослойками.

**2.10.** Найти конечную температуру  $T_2$  и верхний предел скорости  $v$  стационарного потока углекислого газа  $\text{CO}_2$ , вытекающего через сопло в атмосферу из баллона, где он имел температуру  $T_1 = 300 \text{ К}$  и находился под давлением  $P_1 = 10 \text{ атм}$ , если давление наружного воздуха  $P_2 = 1 \text{ атм}$ . Показатель адиабаты для  $\text{CO}_2$  равен  $\gamma = 1,30$ , удельная теплоемкость  $c_p = 0,202 \text{ кал/(г} \cdot \text{°C)}$ .

У к а з а н и е. Применить уравнение Бернулли.

**2.11.** Воздух, сжатый в большом баллоне при температуре  $T_1 = 273 \text{ К}$ , вытекает в атмосферу по трубке, в конце которой он приобретает скорость  $v = 400 \text{ м/с}$ . Найти температуру вытекающего воздуха  $T_2$  в конце трубки, а также давление  $P_1$  воздуха в баллоне. Процесс истечения газа считать адиабатическим.

**2.12.** Найти конечную температуру  $T_2$  и верхний предел скорости  $v$  стационарного потока перегретого водяного пара, вытекающего через сопло в атмосферу из камеры, где он имел температуру  $T_1 = 600 \text{ К}$  и находился под давлением  $P_1 = 5 \text{ атм}$ , если давление наружного воздуха равно  $P_2 = 1 \text{ атм}$ . Перегретый пар считать идеальным газом с молярной теплоемкостью  $C_p = 4R$ .

**2.13.** Допустим, что температура горения химического горючего для ракетных двигателей  $T = 3000 \text{ К}$ , средняя молярная масса продуктов горения  $\mu = 30 \text{ г/моль}$  и что истечение продуктов горения происходит в вакуум адиабатически. Найти, во сколько раз стартовая масса одноступенчатой ракеты  $M_0$  должна превышать ее конечную массу  $M$ , чтобы ракета могла достичь первой космической скорости  $v = 8 \text{ км/с}$ . Молярную теплоемкость продуктов горения ориентировочно принять равной  $C_p = 8 \text{ кал/(моль} \cdot \text{°C)}$ . При вычислении скорости ракеты силу тяжести и трение о воздух не учитывать.

**2.14.** При полете космического аппарата, заполненного смесью равных по весу аммиака  $\text{NH}_3$  и гелия, образовалась течь. Какова скорость истечения газа через течь, если его температура  $T = 300 \text{ К}$ ?

**2.15.** Баллон с теплоизолированными стенками содержит 5 моль идеального газа ( $\gamma = 4/3$ ) под давлением много больше атмосферного при температуре  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Открыв вентиль, 1 моль газа выпускают в атмосферу. Затем кран закрывают. Найти конечную температуру газа в баллоне.

**2.16.** Два одинаковых баллона с теплоизолированными стенками отделены друг от друга краном. В баллоне 1 находится идеальный газ под давлением 20 атм. Баллон 2 откачан до форвакуума. Открыв кран, из первого баллона выпускают во второй баллон струю газа,

затем перекрывают кран и после установления равновесия регистрируют во втором баллоне давление 320 мм рт. ст. Начальная температура газа в первом баллоне была 300 К, показатель адиабаты  $\gamma = 1,3$ . Найти конечную концентрацию газа в баллоне 2.

**2.17.** Определить максимальную скорость, которой может достигнуть газ при адиабатическом истечении из баллона, если абсолютная температура газа в баллоне равна  $T$ .

**2.18.** Найти скорость адиабатического истечения идеального газа из сосуда через небольшое отверстие в вакуум, если известно, что скорость звука в газе равна  $v_{зв}$ .

**2.19\*** Тело (например, космический корабль) движется в идеальном газе со скоростью  $v$ . В какой точке на поверхности тела температура газа будет максимальной? Определить эту температуру, если температура окружающего газа равна  $T$ .

**2.20.** Оценить давление воздуха в точке у самого носа ракеты, летящей со скоростью, соответствующей числу Маха  $M = 5$ , если давление на высоте полета ракеты порядка 0,3 атм. Считать процесс сжатия воздуха адиабатическим, а скорость воздуха относительно ракеты в точке у самого ее носа равной нулю. Число Маха  $M = v_p/v_{зв}$ .

**2.21.** Оценить расстояние  $L$ , на котором еще будет слышен гром, если он образовался на высоте  $H = 4$  км. Температура атмосферы  $T$  линейно уменьшается с высотой  $T = T_0 - \gamma z$ , где температура воздуха на поверхности Земли  $T_0 = 300$  К,  $\gamma = 10^{-2}$  К/м. Состав воздуха не зависит от высоты, и его можно считать идеальным газом. Рассеянием звука на атмосферных неоднородностях пренебречь, а источник грома считать точечным.

### § 3. Циклы. Расчет работы, внутренней энергии, тепловых эффектов и КПД

**3.1.** Каким путем теоретически эффективнее повысить КПД машины Карно: увеличивая температуру нагревателя  $T_1$  на  $\Delta T$  при фиксированном значении температуры холодильника  $T_2$  или понижая температуру холодильника  $T_2$  на такую же величину  $\Delta T$  при фиксированном значении температуры нагревателя  $T_1$ ?

**3.2.** Тепловая машина Карно, имеющая КПД  $\eta = 40\%$ , начинает использоваться при тех же тепловых резервуарах как холодильная машина. Сколько тепла  $Q_2$  эта машина может перевести от холодильника к нагревателю за один цикл, если к ней за каждый цикл подводится работа  $A = 10$  кДж?

**3.3.** Один моль одноатомного идеального газа ( $\gamma = 5/3$ ) совершает в тепловой машине цикл Карно между тепловыми резервуарами с температурами  $t_1 = 127^\circ\text{C}$  и  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ . Наименьший объем газа в ходе цикла  $V_1 = 5$  л, наибольший —  $V_2 = 20$  л. Какую работу  $A$  совершает эта машина за один цикл? Сколько тепла  $Q_1$  берет она от высокотемпературного резервуара за один цикл? Сколько тепла  $Q_2$  поступает за цикл в низкотемпературный резервуар?

3.4. Тепловая машина Карно используется в качестве холодильной машины для поддержания некоторого резервуара при температуре  $t_2 = -3^\circ\text{C}$ . Температура окружающего воздуха  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ . Какая механическая работа требуется для выполнения одного цикла машины, если при этом от оболочки отводится  $Q_2 = 900$  кал тепла?

3.5. Найти КПД цикла, состоящего из двух изотерм и двух изобар, предполагая, что рабочим веществом является идеальный газ.

3.6. Найти КПД цикла, проводимого с идеальным газом и состоящего из двух изотерм с температурами  $T_1$  и  $T_2$  и двух изохор с объемами  $V_1$  и  $V_2$  ( $T_1 > T_2$ ,  $V_1 > V_2$ ).

3.7. На рис. 325 изображена диаграмма обратимого цикла, выполняемого молекул идеального газа в некоторой тепловой машине. Найти

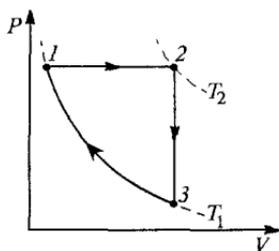


Рис. 325

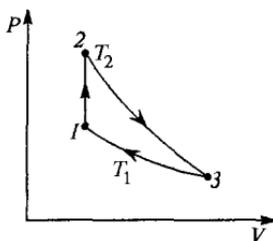


Рис. 326

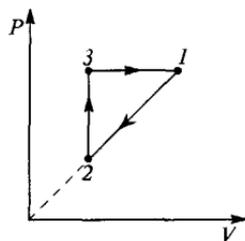


Рис. 327

работы  $A_{ik}$ , выполняемые машиной, и количества тепла  $Q_{ik}$ , получаемые газом на каждом этапе цикла. Найти КПД цикла, выразив его как функции  $T_1$  и  $T_2$ . Процесс  $3-1$  — изотермический.

3.8. Тепловая машина с идеальным газом в качестве рабочего вещества совершает обратимый цикл, состоящий из изохоры  $1-2$ , адиабаты  $2-3$  и изотермы  $3-1$  (рис. 326). Рассчитать количества тепла, получаемые рабочим веществом на каждом этапе цикла. Найти КПД машины как функцию максимальной  $T_2$  и минимальной  $T_1$  температур, достигаемых газом в этом цикле.

3.9. Найти КПД обратимого цикла, изображенного на рис. 327, как функцию максимальной  $T_1$  и минимальной  $T_2$  температур вещества в этом цикле. Цикл совершает машина с идеальным газом в качестве рабочего тела. Найти также количества тепла, получаемые рабочим веществом на каждом этапе цикла.

3.10. Найти КПД обратимого теплового цикла Отто, состоящего из адиабат  $1-2$ ,  $3-4$  и изохор  $2-3$ ,  $4-1$  (рис. 328), если в качестве рабочего тела используется идеальный газ. Выразить КПД цикла через температуры газа  $T_1$  и  $T_2$  в состояниях  $1$  и  $2$ .

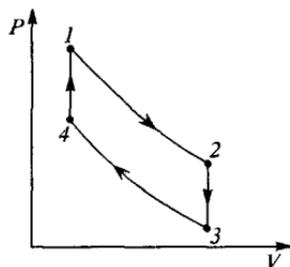


Рис. 328

**3.11.** Обратимый термодинамический цикл, выполняемый с молем идеального газа в качестве рабочего вещества, состоит из двух изотермических процессов  $1-2$ ,  $3-4$  и двух политропических процессов  $2-3$ ,  $4-1$  с теплоемкостью газа  $C_0$  (рис. 329). Найти работы, совершаемые газом, и количества получаемого им тепла на всех этапах цикла. Найти КПД тепловой машины, работающей по этому циклу.

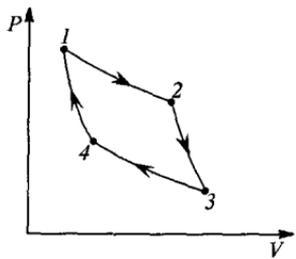


Рис. 329

**3.12.** Определить КПД цикла, проходящего последовательно через состояния: 1)  $2P, V$ ; 2)  $2P, 8V$ ; 3)  $P, 4V$ ; 4)  $P, 2V$ . Газ идеальный одноатомный, все участки цикла — политропические.

**3.13.** Определить КПД цикла, проходящего последовательно через состояния: 1)  $8P, V$ ; 2)  $4P, 2V$ ; 3)  $2P, 2V$ ; 4)  $P, V$ . Газ идеальный одноатомный, все участки цикла — политропические.

идеальный одноатомный, все участки цикла — политропические.

**3.14.** Моль одноатомного идеального газа, находящийся при давлении  $P_1$  и объеме  $V_1$ , изобарически сжимается до объема  $V_2 = V_1/4$  и затем по политропе переводится в состояние  $P_3 = 8P_1$  и  $V_3 = V_1/8$ . После этого происходит изобарическое расширение до объема  $V_4 = V_1/4$ . Далее газ по политропе возвращается в первоначальное состояние. Найти КПД цикла.

**3.15.** Вычислить КПД цикла, состоящего из политропы  $1-2$  ( $P \propto V$ ), адиабаты  $2-3$  и изобары  $3-1$ , если в качестве рабочего вещества используется одноатомный идеальный газ, а отношение максимального давления в цикле к минимальному  $P_2/P_1 = 2$  (рис. 330).

**3.16.** Реальный цикл двигателя внутреннего сгорания можно заменить идеальным замкнутым циклом, состоящим из двух изохор

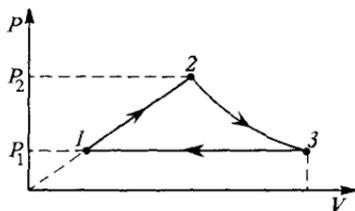


Рис. 330

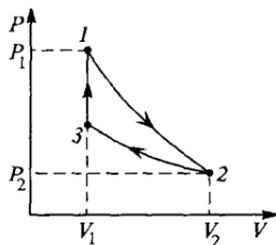


Рис. 331

с объемами  $V_1$  и  $V_2$  и двух адиабат. Во сколько раз изменится КПД такого двигателя, если коэффициент сжатия  $\alpha = V_1/V_2$  увеличить с 5 до 10? Рабочее вещество считать многоатомным идеальным газом.

**3.17.** Найти КПД цикла (рис. 331), состоящего из политропы  $1-2$ , изотермы  $2-3$  и изохоры  $3-1$ . Отношение давлений  $P_1/P_2 = 8$ , а отношение объемов  $V_2/V_1 = 2$ . Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

**3.18.** Рабочий цикл двигателя внутреннего сгорания можно приближенно представить состоящим из адиабаты, изобары и изохоры. Определить расход горючего (в кг/ч) таким двигателем на киловатт

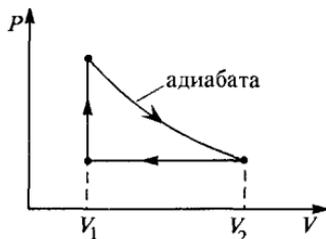


Рис. 332



Рис. 333

полезной мощности (рис. 332). Известно, что  $V_2/V_1 = 8$ . Продукты горения можно считать идеальным газом с показателем адиабаты  $\gamma = 4/3$ . Теплотворная способность горючего  $4 \cdot 10^7$  Дж/кг.

**3.19.** Идеальный двухатомный газ совершает цикл, изображенный на рис. 333. Найти величину полной работы за цикл и вычислить КПД.

**3.20.** Холодильная машина с идеальным многоатомным газом в качестве рабочего вещества работает по циклу, состоящему из адиабатического расширения, изохорического нагрева и изотермического сжатия (рис. 334). Коэффициент сжатия 1 : 4. Определить, какое

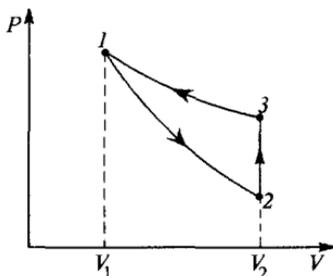


Рис. 334

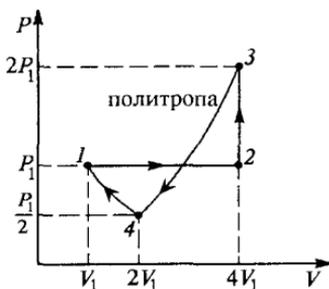


Рис. 335

количество электроэнергии будет затрачено такой машиной для охлаждения одного литра воды от  $t_1 = 25^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 5^\circ\text{C}$ . Машину считать идеальной, и потерями за счет теплоподвода к холодильной камере пренебречь.

**3.21.** Термодинамическая система, рабочим веществом которой является двухатомный идеальный газ, совершает обратимый круговой процесс, изображенный на рис. 335. Найти КПД этого цикла, если известно, что все процессы — политропические; в частности, 1—2 — изобара, 2—3 — изохора, а 4—1 — изотерма.

**3.22.** Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой 100 К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, переходит в состояние 2, совершая некоторую работу. Этот

переход происходит без подвода и отдачи тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая его в состояние 1. Сначала сжатие происходит в процессе 2—3, когда давление является линейной функцией объема, а затем в адиабатическом квазистатическом процессе 3—1. Найти работу, совершенную газом при расширении через турбину в процессе 1—2, если при сжатии в процессах 2—3—1 над газом была совершена работа 1091 Дж. Известно, что  $T_2 = T_3$ ;  $V_2 = 2V_3$ .

**3.23.** Один моль идеального одноатомного газа, занимающего объем  $V_1$  при давлении  $P_1$ , расширяется при постоянном давлении до объема  $2V_1$ , потом сжимается в политропическом процессе до объема  $V_1/2$  и давления  $P_1/4$ , затем изотермически расширяется до исходного объема  $V_1$ . Цикл завершается повышением давления при постоянном объеме. Найти КПД цикла.

**3.24.** Идеальная тепловая машина работает по холодильному циклу между резервуарами с кипящей водой ( $100^\circ\text{C}$ ) и тающим льдом ( $0^\circ\text{C}$ ). Чему равна затраченная работа, если в результате в горячем резервуаре 1 кг воды превратился в пар? Какое количество льда образовалось при этом в холодном резервуаре? В условиях постоянного давления, при котором поддерживаются резервуары, теплота парообразования воды  $\lambda = 2260$  кДж/кг, теплота плавления льда  $q = 335$  кДж/кг.

**3.25.** Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит  $m_1 = 1$  кг воды при начальной температуре  $T_1 = 373$  К, а холодильником  $m_2 = 1$  кг льда при температуре  $T_2 = 273$  К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды в этот момент? Удельная теплота плавления льда  $q = 80$  ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

**3.26.** Какую максимальную температуру можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит  $m_1 = 1$  кг насыщенного водяного пара при температуре  $T_1 = 373$  К, а холодильником  $m_2 = 10$  кг воды при начальной температуре  $T_2 = 273$  К к моменту, когда весь пар сконденсируется в воду. Чему будет равна в этот момент температура воды в холодильнике? Удельная теплота парообразования для воды (при 373 К) равна  $\lambda = 539$  ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

**3.27.** В идеальном холодильнике замораживается вода в ванночке, а тепло отдается воде в банке, масса воды  $M = 10$  кг, начальная температура  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Какая масса льда образуется в ванночке из воды с начальной температурой  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  за то время, пока вода в банке нагревается до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ? Теплоемкостью банки пренебречь. Удельная теплота плавления льда  $q = 80$  ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

**3.28.** Один моль воды охлаждается от  $25^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$  и замерзает. Все выделившееся при этом тепло получено холодильной машиной, работающей по обратимому циклу, и передано другому моллю воды,

в результате чего его температура возросла от  $25^{\circ}\text{C}$  до  $100^{\circ}\text{C}$ . Определить, какое количество воды обратилось в пар и какую работу при этом совершила холодильная машина. Теплота испарения воды при  $100^{\circ}\text{C}$   $\Lambda = 41$  кДж/моль, а теплота плавления льда при  $0^{\circ}\text{C}$   $q = 6$  кДж/моль. Теплоемкость воды считать не зависящей от температуры.

**3.29.** Постоянная температура  $18^{\circ}\text{C}$  в комнате поддерживается электронагревателем мощности  $500$  Вт. Температура воздуха снаружи  $-21^{\circ}\text{C}$ . Для поддержания в комнате той же температуры можно использовать вместо электронагревателя тепловой насос (тепловая машина, работающая по холодильному циклу). Какую минимальную мощность будет потреблять от электросети тепловой насос, работающий с максимально возможной эффективностью?

**3.30.** Для поддержания в комнате постоянной температуры  $21^{\circ}\text{C}$  используется кондиционер; температура наружного воздуха  $42^{\circ}\text{C}$ . На сколько нужно увеличить мощность, потребляемую кондиционером из электросети, чтобы после включения в комнате электролампочки мощностью  $N = 150$  Вт температура не изменилась? Считать, что кондиционер работает с максимально возможной эффективностью.

**3.31.** Идеальная холодильная машина работает в условиях, когда температура окружающего воздуха вдвое больше температуры холодильной камеры. Затем температура воздуха увеличилась на  $10\%$  при неизменной температуре холодильной камеры. На сколько процентов необходимо увеличить потребляемую холодильником мощность, чтобы скорость образования льда в ней осталась неизменной?

**3.32.** Воздух, находящийся в замкнутом теплоизолированном объеме  $V = 100$  м<sup>3</sup>, является нагревателем идеальной холодильной машины, потребляющей мощность  $N = 100$  Вт. Начальная температура воздуха  $T_{\text{в}} = 300$  К, начальное давление  $P = 1$  атм, температура холодильной камеры  $T_{\text{х}} = 273$  К. Оценить, какое время должна проработать машина, чтобы температура воздуха в объеме  $V$  повысилась на  $\Delta T = 1$  К.

**3.33.** Имеются  $\nu$  молей льда при температуре  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$  и окружающая среда при температуре  $T$ . Найти максимальную работу, которую может при этом совершить идеальная тепловая машина.

**3.34.** Оценить, какую можно совершить работу, имея айсберг объема  $1$  км<sup>3</sup> в качестве холодильника и океан в качестве нагревателя. Удельная теплота плавления льда  $q = 335$  кДж/кг, а его плотность  $\rho = 0,9$  г/см<sup>3</sup>.

**3.35.** Атмосфера Земли может рассматриваться как гигантская тепловая машина, в которой роль нагревателя и холодильника играют экваториальная зона и зоны полюсов, а источником энергии является солнечная радиация. Считая, что полный поток солнечной энергии, поступающей на Землю, равен  $1,7 \cdot 10^{17}$  Вт, а КПД рассматриваемой «машины» на порядок меньше максимально возможного, оценить среднюю мощность ветров в расчете на  $1$  км<sup>2</sup> земной поверхности.

**3.36.** Оценить максимальную мощность, которую можно получить от циклической установки, использующей термальную

энергию океана в области, где скорость океанского течения  $u \approx 0,1$  м/с. Считать, что поверхностный слой толщиной  $h \approx 1$  км имеет избыточную температуру  $\Delta T \approx 20$  К. Ширина установки в направлении, перпендикулярном скорости течения,  $L \approx 1$  км.

**3.37.** Какую минимальную работу должен совершить двигатель идеального холодильника, чтобы, работая в среде, имеющей температуру  $T$ ,  $\nu$  молей воды охладить до  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  и превратить в лед?

**3.38.** Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами с температурами  $T$  и  $T_1$ . Теплообмен между нагревателем с температурой  $T_2 = 1250$  К и рабочим веществом при  $T < T_2$  осуществляется вследствие теплопроводности по закону  $a(T_2 - T)$ , где  $a = 1$  кВт/К. Теплообмен рабочего вещества с холодильником совершается при температуре холодильника  $T_1 = 200$  К. Полагая, что длительности изотермических процессов одинаковы, а адиабатических весьма малы, найти температуру  $T$ , при которой мощность машины максимальна, и ее величину  $N_{\max}$ .

**3.39.** Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами с температурами  $T$  и  $T_1$ . Теплообмен между рабочим веществом и холодильником при температуре  $T_2 = 200$  К  $< T$  осуществляется вследствие теплопроводности по закону  $a(T - T_2)$ , где  $a = 1$  кВт/К. Теплообмен рабочего вещества с нагревателем происходит при температуре нагревателя  $T_1 = 800$  К. Полагая, что длительности изотермических процессов одинаковы, а адиабатических весьма малы, найти температуру  $T$ , при которой мощность  $N$  машины максимальна, и ее величину  $N_{\max}$ .

**3.40.** Оценить стоимость изготовления 1 кг льда в домашнем холодильнике с температурой испарителя фреона  $-12^\circ\text{C}$  и радиатора  $+40^\circ\text{C}$ . Стоимость 1 кВт·ч электроэнергии считать известной.

**3.41:** Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно и воспользовавшись теоремой Карно, доказать, что внутренняя энергия и теплоемкость физически однородного и изотропного тела удовлетворяют соотношениям:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

С помощью этих соотношений и уравнения состояния для идеальных газов доказать, что внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа зависят только от температуры, но не от объема, занимаемого данной массой газа.

**3.42:** Энтальпией или тепловой функцией физически однородного и изотропного вещества называется функция состояния, определяемая выражением  $I = U + PV$ . Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно и применив к нему теорему Карно, показать, что энтальпия  $I$  и теплоемкость  $C_P$  удовлетворяют соотношениям:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P.$$

## § 4. Энтропия. Обратимые и необратимые процессы

**4.1.\*** Идея динамического отопления, высказанная В. Томсоном (1852 г.), заключается в следующем. Топливо сжигается в топке теплового двигателя, который приводит в действие холодильную машину. Холодильная машина отнимает теплоту от природного резервуара воды (например, от грунтовой воды) и отдает ее воде в отопительной системе. Одновременно вода в отопительной системе служит холодильником теплового двигателя. Определить теоретическое (без учета потерь) количество тепла, которое получает отапливаемое помещение от сжигания 1 кг каменного угля, приняв следующие условия: удельная теплота сгорания угля  $q = 8000$  ккал/кг; температура в котле паровой машины  $t_1 = 210$  °С; температура воды в отопительной системе  $t_2 = 60$  °С; температура грунтовой воды  $t_3 = 15$  °С.

**4.2.** Внешнее давление, действующее на воду, увеличивают, одновременно подводя или отводя тепло таким образом, что объем воды остается неизменным. Нагреется или охладится вода, если начальная температура была: 1) ниже 4 °С; 2) выше 4 °С?

**4.3.\*** Тепловая машина совершает круговой процесс, обмениваясь теплом с несколькими тепловыми резервуарами (нагревателями и холодильниками). Пользуясь неравенством Клаузиуса, показать, что КПД такой машины не может превосходить величину

$$\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

где  $T_{\max}$  — максимальная, а  $T_{\min}$  — минимальная температуры тепловых резервуаров, с которыми машина обменивается теплом.

**4.4.** В качестве основных переменных, характеризующих состояние тела, можно принять его температуру и энтропию. Изобразить графически цикл Карно на диаграмме, откладывая по оси абсцисс энтропию, а по оси ординат температуру. Вычислить с помощью этого графика КПД цикла.

**4.5.** Цикл состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 336). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_P$  температуры в точках 1, 2, 3, 4 связаны соотношением  $T_1 T_3 = T_2 T_4$ .

**4.6.** Цикл состоит из изобары 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1 (рис. 337). Показать, что для любого вещества с постоянными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_P$  температуры в точках 1, 2, 3 связаны соотношением  $T_2/T_3 = (T_2/T_1)^\gamma$ , где  $\gamma = C_P/C_V$ .

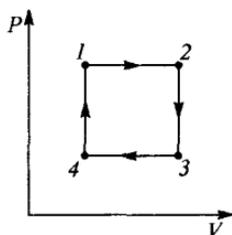


Рис. 336

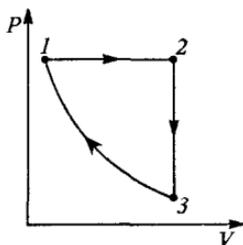


Рис. 337

4.7. Определить работу цикла, совершаемого любым веществом и состоящего из изотермы 1—2, политропы 2—3 и адиабаты 3—1 (рис. 338). Известно, что теплоемкость тела на политропе 2—3

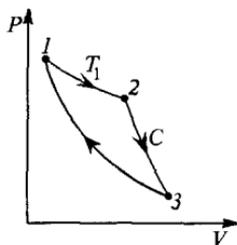


Рис. 338

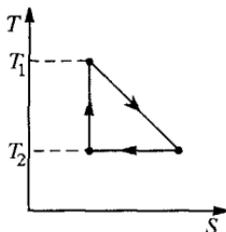


Рис. 339

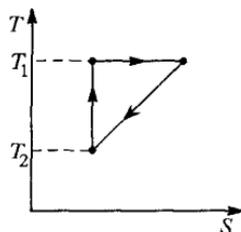


Рис. 340

равна  $C$ , а температуры на изотерме 1—2 и в состоянии 3 равны соответственно  $T_1$  и  $T_3$ .

4.8. Тепловые машины с произвольным веществом в качестве рабочего тела совершают обратимые термодинамические циклы, представленные на рис. 339 и 340. Выразить КПД этих циклов через максимальную  $T_1$  и минимальную  $T_2$  температуры газа.

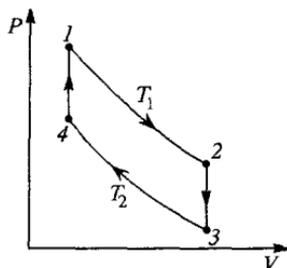


Рис. 341

4.9. Цикл состоит из двух изотерм 1—2, 3—4 с температурами  $T_1$  и  $T_2$  и двух изохор 2—3, 4—1 (рис. 341). На изотерме с температурой  $T_1$  получено тепло  $Q_1$ . Определить работу цикла, если теплоемкость рабочего вещества  $C_V$  зависит только от его температуры, но не зависит от объема.

4.10. Обратимый цикл состоит из изотермического расширения, изобарического сжатия и адиабатического сжатия (рис. 342).

Определить КПД, если отношение максимальной и минимальной температур равно  $\alpha$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано, но известно, что внутренняя энергия зависит только от температуры. Теплоемкости  $C_V$  и  $C_P$  — постоянные величины.

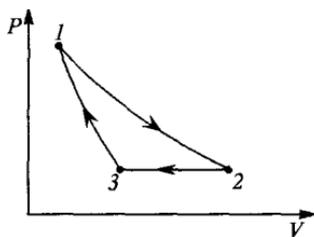


Рис. 342

4.11. Термодинамическая система с произвольным веществом совершает круговой процесс, состоящий из изотермического расширения при температуре  $T_1$ , изобарического сжатия и адиабатического сжатия. Температура в точке, где пересекаются изобара и адиабата, равна  $T_2$ . Теплоемкость системы  $C_P$  на изобаре постоянна. Вычислить работу  $A$ , совершаемую системой в этом цикле.

4.12. Термодинамическая система с произвольным веществом совершает круговой процесс, состоящий из политроп 2—3 и 3—1 и

адиабаты 1—2 (рис. 343). Теплоемкости системы  $C_1$  и  $C_2$  на политропах связаны соотношением  $C_2 = -C_1$ , температуры в точках пересечения политроп с адиабатой равны  $T_1$  и  $T_2$ . Вычислить работу  $A$ , которую совершает система в указанном круговом процессе.

**4.13.** Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 двумя способами. В первом варианте система адиабатически охлаждается до температуры  $T_0$ , затем изотермически получает тепло и, наконец, адиабатически переходит в состояние 2. Во втором варианте переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается выше  $T_0$ . Показать, что в первом способе для перевода системы из состояния 1 в состояние 2 требуются меньшие затраты тепла, чем во втором.

**4.14.** Произвольная термодинамическая система квазистатически переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 двумя способами. В первом случае система сначала изотермически при температуре  $T_0$  переходит в какое-то промежуточное состояние, поглощая при этом тепло, а затем адиабатически охлаждается, переходя в состояние 2. Во втором случае переход осуществляется по произвольному пути, однако так, что на каждом участке этого пути система получает тепло, а ее температура остается ниже  $T_0$ . Показать, что в первом способе для перевода системы из состояния 1 в состояние 2 требуются ббльшие затраты тепла, чем во втором.

**4.15.** Обратимый цикл состоит из последовательных процессов адиабатического расширения, изобарического сжатия и изохорического нагревания. Определить КПД, если максимальное изменение энтропии рабочего вещества в цикле в единицах  $C_V$  равно  $b = \Delta S_{\max}/C_V = 0,2$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано, но известно, что теплоемкости  $C_P$  и  $C_V$  постоянны, причем  $\gamma = C_P/C_V = 4/3$ .

**4.16.** Обратимый цикл состоит из последовательных процессов изотермического расширения, изобарического сжатия и изохорического нагревания. Определить КПД, если отношение максимальной и минимальной температур рабочего вещества в цикле  $a = 1,1$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано, но известно, что теплоемкости  $C_V$  и  $C_P$  постоянны, причем  $\gamma = C_P/C_V = 4/3$ .

**4.17.** Обратимый цикл тепловой машины с произвольным рабочим веществом состоит из политропического нагревания, политропического охлаждения (оба процесса происходят с увеличением энтропии) и замыкается изотермой. Определить КПД цикла, если отношение максимальной и минимальной абсолютных температур в цикле равно  $a = 1,2$ .

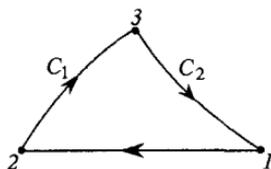


Рис. 343

**4.18.** Положительный обратимый цикл с произвольным рабочим веществом состоит из адиабаты, политропического охлаждения и замыкается другой политропой. Определить КПД цикла, если абсолютные температуры на концах адиабаты и в точке пересечения политроп относятся соответственно как  $1 : 2 : 1,5$ .

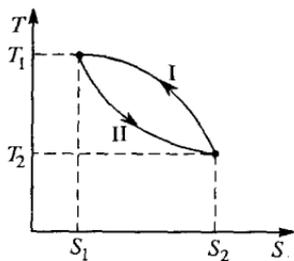


Рис. 344

4.19. Холодильная машина работает по обратимому циклу, состоящему из двух ветвей (рис. 344): процесса I, в котором энтропия уменьшается с ростом температуры как линейная функция квадрата абсолютной температуры и политропы II. Уравнение состояния рабочего вещества неизвестно. Определить количество тепла, отобранное из холодильной камеры при затраченной работе  $1 \text{ кДж}$ , если отношение максимальной и минимальной абсолютных температур рабочего вещества в цикле  $a = 1,2$ .

**4.20.** Холодильная машина работает по обратимому циклу, состоящему из двух ветвей (рис. 345): политропы I и процесса II, в котором энтропия рабочего вещества убывает с ростом температуры как линейная функция  $\sqrt{T}$ . Уравнение состояния рабочего вещества неизвестно. Отношение максимальной и минимальной абсолютных температур рабочего вещества в цикле  $a = 1,1$ . Определить количество тепла, отбираемое у холодильной камеры на каждый джоуль затраченной работы.

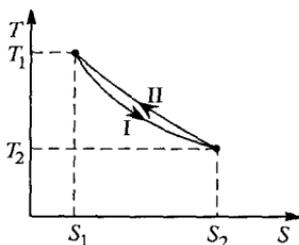


Рис. 345

**4.21.** Обратимый круговой процесс превращения теплоты в работу состоит из процесса  $1-2$ , в котором теплоемкость растет прямо пропорционально температуре от значения  $C_1 = 20 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$  до  $C_2 = 50 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$ , а также адиабаты  $2-3$  и изотермы  $3-1$ . Вычислить КПД этого цикла. Уравнение состояния рабочего вещества не задано.

**4.22.** Обратимый цикл состоит из двух ветвей — политропы I и процесса II, в котором энтропия рабочего вещества возрастает линейно с температурой. Определить теплоемкость политропы I и КПД цикла, если максимальная и минимальная теплоемкости в процессе II соответственно равны  $45 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$  и  $35 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$ . Уравнение состояния рабочего вещества неизвестно.

**4.23.** Обратимый цикл состоит из политропы I и процесса II, в котором энтропия рабочего вещества возрастает линейно с температурой. Определить КПД цикла, если максимальное изменение энтропии рабочего вещества в цикле, выраженное в единицах теплоемкости на политропе (т.е.  $\Delta S/C_1$ ), есть  $a = 1/4$ . Уравнение состояния рабочего вещества и теплоемкости на политропе неизвестны.

**4.24.** В одном из двух теплоизолированных сосудов находится 1 кг льда при  $0^\circ\text{C}$ , а в другом — 1 кг воды при  $0^\circ\text{C}$ . В воду опущен нагреватель, замыкающий цепь термопары (рис. 346), один спай которой опущен в лед, а другой поддерживается при температуре  $27^\circ\text{C}$ . Пренебрегая сопротивлением проводов и спаев по сравнению с сопротивлением нагревателя и теплопроводностью проводов, определить, на сколько нагреется вода, когда в другом сосуде полностью растает лед. Теплоемкость воды  $C = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{град})$  и теплоту плавления льда  $q = 335 \text{ кДж}/\text{кг}$  считать не зависящими от температуры.

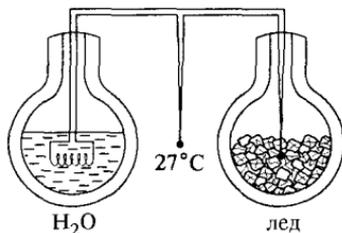


Рис. 346

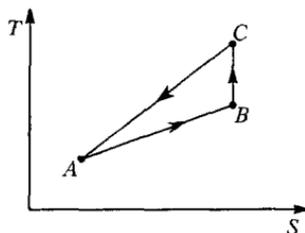


Рис. 347

**4.25.** В координатах  $(T, S)$  (рис. 347) цикл изображается треугольником  $ABC$ , у которого сторона  $BC$  является адиабатой. Температуры вершин треугольника равны:  $T_A = 300 \text{ К}$ ,  $T_B = 399 \text{ К}$ ,  $T_C = 400 \text{ К}$ . Над рабочим телом совершена работа  $A_{\text{внеш}} = 1 \text{ Дж}$ . Вычислить количество тепла, отданное холодильнику, т. е. на участке  $CA$ .

**4.26.** Найти КПД цикла, изображенного на рис. 348. Все процессы политропические;  $T_2 = 2T_1$ . Уравнение состояния рабочего вещества не задано.

**4.27.** Доказать, что если во всех точках изотермы температурный коэффициент расширения равен нулю, то такая изотерма совпадает с адиабатой.

**4.28.** В цикле Карно в качестве холодильника выбрана вода при  $4^\circ\text{C}$ . Так как температурный коэффициент расширения при этой температуре равен нулю, то для осуществления цикла Карно не надо сообщать тепла холодильнику (см. предыдущую задачу), т. е. КПД цикла равен единице. В чем ошибочность этого рассуждения?

**4.29.** Тепловая машина работает по холодильному циклу между резервуаром с водой при  $11^\circ\text{C}$  и холодильной камерой при температуре  $-10^\circ\text{C}$ . Какое максимальное количество теплоты может быть унесено из холодильной камеры, если затраченная работа равна  $1 \text{ кДж}$ ? Как изменится при этом энтропия резервуара и холодильной камеры?

**4.30.** Показать, что для любого вещества адиабата может пересекать изотерму не более чем в одной точке.

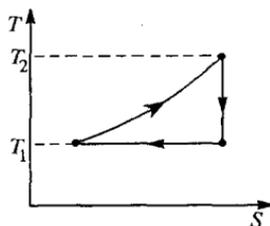


Рис. 348

**4.31.** Показать, что для вещества с произвольным уравнением состояния две политропы могут пересекаться только в одной точке.

**4.32.\*** Какую максимальную работу можно получить из системы двух тел, нагретых до разных абсолютных температур  $T_{10}$  и  $T_{20}$  ( $T_{10} > T_{20}$ ), если эти тела используются в качестве нагревателя и холодильника в тепловой машине? Теплоемкости тел  $C_1$  и  $C_2$  считать не зависящими от температуры. Найти окончательную температуру  $T$ , которую будут иметь тела, когда установится тепловое равновесие между ними.

**4.33.\*** Рассмотреть предельный случай предыдущей задачи, когда теплоемкость холодильника  $C_2$  бесконечно велика (нагретое тело, погруженное в бесконечную среду, температура которой  $T_{20}$  поддерживается постоянной).

**4.34.** Рассмотреть другой предельный случай задачи 4.32, когда бесконечно велика теплоемкость нагревателя  $C_1$  (холодное тело, погруженное в более теплую бесконечную среду, температура которой  $T_{10}$  поддерживается постоянной).

**4.35.** До какой максимальной температуры можно нагреть одно из трех одинаковых массивных несжимаемых свободных тел, находящихся первоначально при температурах  $T_{10} = 600$  К,  $T_{20} = 200$  К, и  $T_{30} = 600$  К. Считать, что теплообмен с внешней средой отсутствует и имеется возможность осуществлять теплообмен между телами любым физически реализуемым способом.

**4.36.** В теплоизолированном сосуде постоянного объема находится 1 моль воздуха при  $T_0 = 300$  К. Найти минимальную работу, необходимую для охлаждения половины массы этого воздуха до  $T_1 = T_0/2$ . Воздух считать идеальным газом, теплоемкость стенок не учитывать. Тепло, любым способом отводимое от одной половины газа, может передаваться только второй половине.

**4.37.** Два цилиндра, заполненных одинаковым идеальным газом, сообщаются с помощью узкой трубки; оба они закрыты поршнями, которые поддерживают в газе постоянное давление 3 атм (рис. 349). Первоначально цилиндры разделены, причем значения объемов и температур равны  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 2$  л,  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 600$  К. После соединения цилиндров происходит выравнивание температур. Найти конечную температуру, совершенную работу и изменение энтропии. Газ — идеальный двухатомный, процесс адиабатический.

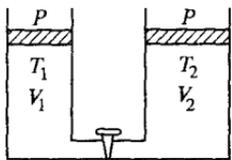


Рис. 349

**4.38.** Газ расширяется адиабатически, но неравновесно, из начального равновесного состояния 1 в конечное, также равновесное, состояние 2.

При этом газ совершает некоторую работу. Затем газ квазистатически сжимают до начального состояния 1: сначала изотермически, потом адиабатически. Работа, затраченная при сжатии, оказалась больше работы, совершенной газом при расширении, на величину  $A = 20$  Дж. Температура газа  $T$  в состоянии 2 равна 250 К.

Найти изменение энтропии газа при переходе из состояния 1 в состояние 2.

**4.39.** Два одинаковых теплоизолированных сосуда соединены друг с другом тонкой, короткой, теплоизолированной трубкой с краном  $K$ , закрытым в начальный момент (рис. 350). В первом сосуде под поршнем массы  $M$  находится при температуре  $T_0$  идеальный одноатомный газ молекулярной массы  $\mu$ , а во втором — газа нет, и поршень массы  $m = M/2$  лежит на дне сосуда. Объем между поршнем и верхней крышкой в каждом сосуде вакуумирован. При откры-

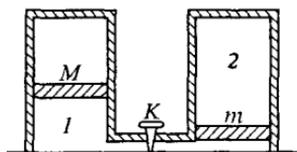


Рис. 350

тии крана газ из левого сосуда устремляется под поршень  $m$ , и последний начинает подниматься. Пренебрегая силами трения, вычислить температуру газа  $T$  при открытии крана после установления равновесия. Поршень во втором сосуде не поднимается до верхней крышки. Считать, что  $\nu\mu/M = 0,1$ . Вычислить также изменение энтропии  $\Delta S$ .

**4.40.** Одноатомный идеальный газ находится под поршнем в адиабатически изолированном цилиндре. Масса груза на поршне, определяющая давление газа, внезапно увеличилась вдвое. Насколько возросла энтропия, приходящаяся на одну молекулу, после установления нового равновесного состояния?

**4.41.** При некотором политропическом процессе давление и объем определенной массы кислорода меняются от  $P_1 = 4$  атм и  $V_1 = 1$  л до  $P_2 = 1$  атм и  $V_2 = 2$  л. Температура в начале процесса  $T_1 = 500$  К. Какое количество тепла получил кислород от окружающей среды? Насколько изменились энтропия и внутренняя энергия газа?

**4.42.** Два баллона с объемами  $V = 1$  л каждый соединены трубкой с краном. В одном из них находится водород при давлении 1 атм и температуре  $t_1 = 20$  °С, в другом — гелий при давлении 3 атм и температуре  $t_2 = 100$  °С. Найти изменение энтропии системы  $\Delta S$  после открытия крана и достижения равновесного состояния. Стенки баллона и трубки обеспечивают полную теплоизоляцию газов от окружающей среды.

**4.43\*.** В объеме  $V_1 = 3$  л находится  $\nu_1 = 0,5$  моль кислорода  $O_2$ , а в объеме  $V_2 = 2$  л —  $\nu_2 = 0,5$  моль азота  $N_2$  при температуре  $T = 300$  К. Найти максимальную работу, которая может быть произведена за счет изотермического смешения этих газов в суммарном объеме  $V_1 + V_2$ .

**4.44.** Решить предыдущую задачу в предположении, что смешивание газов производится адиабатически. Начальная температура газов  $T_1 = 300$  К.

**4.45.** Сосуд с теплонепроницаемыми стенками объема  $2V$  разделен теплопроводящим поршнем, так что отношение объемов  $V_1/V_2 = n$ . В каждой из частей сосуда находится по одному молю идеального газа, теплоемкость  $C_V$  которого не зависит от температуры.

Поршень отпускают, и он начинает совершать колебания, которые постепенно затухают из-за внутреннего трения в газе. Пренебрегая трением поршня о стенки сосуда, найти изменение энтропии газа в этом процессе. Начальные температуры газа в обеих частях сосуда считать одинаковыми.

**4.46.** Сосуд с теплонепроницаемыми стенками объема  $2V$  разделен на две равные части теплонепроницаемым поршнем. В каждой из частей сосуда находится по одному молю идеального газа, теплоемкость  $C_V$  которого не зависит от температуры. Начальные температуры в объемах равны  $T_1$  и  $T_2$ . Поршень отпускают, и он начинает совершать колебания, которые постепенно затухают из-за внутреннего трения в газе. После остановки поршень делит сосуд в отношении  $V_1/V_2 = n$ . Пренебрегая трением поршня о стенки сосуда, найти изменение энтропии газа в этом процессе.

**4.47.** Идеальный одноатомный газ в количестве  $\nu = 10$  моль, находящийся при температуре  $T_1 = 300$  К, расширяется без подвода

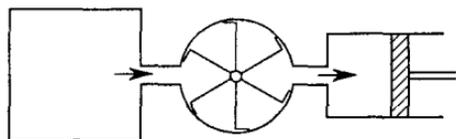


Рис. 351

и отдачи тепла в пустой сосуд через турбину, необратимым образом совершая работу (рис. 351). После установления равновесия температура газа понижается до  $T = 200$  К. После этого газ квазистатически сжимается: сначала изотермически, а затем адиабатически, возвращаясь в первоначальное состояние. При этом сжатии затрачивается работа  $A = 15$  кДж. Найти изменение энтропии газа при расширении.

**4.48.** В расположенном горизонтально теплоизолированном жестком цилиндре может перемещаться поршень, по одну сторону от которого находятся  $\nu = 2$  моль двухатомного идеального газа, а по другую — вакуум. Между поршнем и дном цилиндра находится пружина. В начальный момент поршень закреплен, а пружина не деформирована. Затем поршень освобождают. После установления равновесия объем газа увеличился в  $n = 2$  раза. Определить изменение энтропии газа. При расчете пренебречь трением, а также теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины. Считать, что к деформации пружины применим закон Гука.

**4.49.** В расположенном вертикально теплоизолированном цилиндре сечения  $\sigma$  имеется теплопроводящий поршень массы  $m$ , закрепленный так, что он делит цилиндр на две равные части. В каждой из них содержится  $\nu$  молей одного и того же идеального газа при давлении  $P$  и температуре  $T$ . Крепление поршня удаляется, и под действием силы тяжести он опускается. Определить изменение энтропии системы  $\Delta S$  к моменту установления равновесия. Считать, что  $P\sigma \gg mg$ .

**4.50.** Для измерения отношения  $C_P/C_V$  методом Клемана—Дезорма в некоторый объем помещают 1 моль воздуха под повышенным давлением  $P_1$ ; далее, путем быстрого кратковременного

открывания клапана выпускают избыток газа, так что давление в объеме сравнивается с атмосферным  $P_0$ , и измеряют давление  $P_2$ , которое установилось в объеме после уравнивания температуры оставшегося газа с температурой окружающей среды. Определить полное изменение энтропии моля воздуха в этом опыте. Давления  $P_1$  и  $P_2$  считать близкими к  $P_0$ .

**4.51.** В теплоизолированном от внешней среды цилиндре с поршнем общим количеством твердого вещества, равным одному молю, находится 8 г гелия при температуре  $T_1 = 200$  К. Поршнем медленно сжимают газ до объема  $V_2 = V_1/8$ , так что все время температура стенок и газа одинаковы. Найти конечную температуру и изменение энтропии системы.

**4.52.** Вычислить изменение энтропии при неравновесном процессе превращения в лед одного моля переохлажденной воды. Начальная и конечная температуры системы (воды и льда) одинаковы и равны  $t_1 = -10$  °С. Теплоемкости воды и льда при постоянном давлении равны соответственно  $C_p^b = 75$  Дж/(К·моль),  $C_p^l = 37,5$  Дж/(К·моль), молярная теплота плавления льда  $q = 6000$  Дж/моль.

**4.53.** Перегретая вода в количестве  $M = 1$  кг находится под давлением  $P_0 = 760$  мм рт. ст. и имеет температуру  $T = 383$  К. Определить изменение энтропии этой системы при адиабатическом неравновесном переходе ее в равновесное состояние, состоящее из воды и ее насыщенного пара при температуре  $T_0 = 373$  К и давлении  $P_0 = 760$  мм рт. ст. Удельную теплоемкость воды считать постоянной и равной  $c_p = 4,18$  Дж/(г·К).

**4.54.** Показать, что при квазистатическом расширении физически однородного тела при постоянном давлении его энтропия возрастает, если температурный коэффициент расширения положителен, и убывает, если этот коэффициент отрицателен.

**4.55.** Показать, что при квазистатическом увеличении давления на физически однородное тело при постоянном объеме его энтропия возрастает, если температурный коэффициент давления положителен, и убывает, если этот коэффициент отрицателен.

**4.56.** Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен поршнем пренебрежимо малой массы на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ с массой  $M$ , молярной массой  $\mu$  и молярными теплоемкостями  $C_V$  и  $C_P$ , не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня создан высокий вакуум. Начальные температура и давление газа  $T_0$  и  $P_0$ . Поршень отпускают, и он, свободно двигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого, постепенно увеличивая давление на поршень, медленно доводят объем газа до первоначальной величины. Найти изменение внутренней энергии и энтропии газа при таком процессе.

**4.57.** Найти увеличение энтропии  $\Delta S$  идеального газа массы  $M$ , занимающего объем  $V_1$ , при расширении его в пустоту до объема  $V_2$  (процесс Гей-Люсака).

**4.58.** Найти изменения внутренней энергии и энтропии одного моля идеального газа при расширении по политропе  $PV^n = \text{const}$  от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Рассмотреть частные случаи изотермического и адиабатического процессов. Вычислить изменения этих величин для случая  $n = 3$ ,  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 3$  л,  $P_1 = 20$  атм. Чему равно при этом количество поглощенного тепла? Температура во время процесса такова, что для молярной теплоемкости можно принять  $C_V = 3R/2$ .



Рис. 352

**4.59.** В замкнутой трубе с объемом  $V$  находится смесь двух газов в равных количествах (рис. 352). Начальное давление равно  $P$ . У краев трубы находятся поршни; каждый из них прозрачен лишь для одного из газов. При перемещении поршней в среднюю точку газы полностью разделяются. Непосредственно вычислить работу  $A$ , совершаемую при изотермическом перемещении поршней, и сравнить отношение  $A/T$  с изменением энтропии.

**4.60.** Найти изменение энтропии  $\Delta S$  30 г льда при превращении его в пар, если начальная температура льда  $-40^\circ\text{C}$ , а температура пара  $100^\circ\text{C}$ . Теплоемкости воды и льда считать постоянными, а все процессы — происходящими при атмосферном давлении. Удельная теплоемкость льда  $c = 0,5$  кал/(г $\cdot^\circ\text{C}$ ).

**4.61.** Найти суммарное изменение энтропии  $\Delta S$  (воды и железа) при погружении 100 г железа, нагретого до  $300^\circ\text{C}$ , в воду при температуре  $15^\circ\text{C}$ . Удельная теплоемкость железа  $c = 0,11$  кал/(г $\cdot^\circ\text{C}$ ).

**4.62.** Найти удельную энтропию  $s$  неоднородной системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара. Теплоемкость жидкости считать не зависящей от температуры.

**4.63\*** Два тела  $A$  и  $B$ , нагретые до разных температур, помещены в жесткую адиабатическую оболочку и приведены в тепловой контакт друг с другом. Тепло переходит от более нагретого тела  $A$  к менее нагретому телу  $B$ , пока температуры обоих тел не сравняются. Показать, что при этом процессе энтропия системы  $A + B$  увеличивается.

**4.64.** Найти изменение энтропии  $\Delta S$  вещества при нагревании, если его удельная теплоемкость  $c$  постоянна, а коэффициент объемного расширения равен нулю.

**4.65.** Приводимые в тепловой контакт одинаковые массы вещества имеют разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ . Считая, что  $C_P = \text{const}$ , найти приращение энтропии в результате установления теплового равновесия при  $P = \text{const}$ .

**4.66.** Найти изменение молярной энтропии одноатомного идеального газа при политропическом сжатии вдвое от первоначального объема, если в этом процессе приращение внутренней энергии равно половине работы сжатия, производимой над газом.

**4.67.** Найти изменение молярной энтропии двухатомного идеального газа при политропическом расширении до удвоенного объема,

если в этом процессе приращение внутренней энергии равно работе газа при расширении.

**4.68.** Сосуд разделен перегородкой на две равные части, в одной из которых вакуум, а в другой находится 1 моль двухатомного идеального газа. Перегородку удаляют и, после того, как газ равномерно заполнит весь сосуд, этот газ квазистатически возвращают в исходное положение теплонепроницаемым поршнем. На сколько изменится энтропия и температура газа по сравнению с первоначальными?

**4.69.** В двух сосудах находятся по одному молю разных идеальных одноатомных газов. Давление в обоих сосудах одинаковое. Температура газа в первом сосуде  $T_1$ , а во втором —  $T_2$ . Определить, на сколько изменится энтропия системы, если сосуды соединить. Как изменится результат, если газы одинаковы?

**4.70.** В двух сосудах находится по одному молю разных идеальных газов. Температура в обоих сосудах одинакова. Давление в первом сосуде  $P_1$ , а во втором —  $P_2$ . Определить, на сколько изменится энтропия системы, если сосуды соединить. Как изменится результат, если газы одинаковы?

## § 5. Термодинамические потенциалы

**5.1.** Исходя из второго начала термодинамики, показать, что внутренняя энергия данной массы идеального газа не зависит от его объема, а является функцией только температуры (закон Джоуля).

**5.2.** Исходя из второго начала термодинамики, показать, что энтальпия данной массы идеального газа не зависит от его давления, а является функцией только температуры.

**5.3.** Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость  $C_V$  которого не зависит от объема, а зависит только от температуры.

**5.4.** Найти общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость  $C_P$  которого не зависит от давления, а зависит только от температуры.

**5.5.** При  $25^\circ\text{C}$  объем одного моля воды (в  $\text{см}^3$ ) для давлений от 0 до 1000 атм определяется уравнением

$$V = a + bP + cP^2,$$

причем в этом интервале давлений

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \alpha + \beta T,$$

где коэффициенты  $a = 18,066$ ,  $b = -7,15 \cdot 10^{-4}$ ,  $c = 4,6 \cdot 10^{-8}$ ,  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta = 1,4 \cdot 10^{-6}$ . Определить работу  $A$ , необходимую для сжатия моля воды от 0 до 1000 атм при  $25^\circ\text{C}$ , и найти приращение ее внутренней энергии  $\Delta U$ .

**5.6.** Пользуясь условием, что дифференциальное выражение  $X(x, y) dx + Y(x, y) dy$  есть полный дифференциал, доказать, что элементарная работа  $\delta A$  не может быть полным дифференциалом.

**5.7.** Доказать, что если внутренняя энергия физически однородного тела не зависит от его объема, а зависит только от температуры, то она не зависит и от давления. То же справедливо и для энтакльпии.

**5.8.** Как доказывается в термодинамике, необходимыми условиями стабильности физически однородного и изотропного вещества являются

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, \quad C_V > 0.$$

Используя их, показать, что для любого вещества  $C_P > 0$ , причем  $C_P > C_V$ .

**5.9.** Пользуясь методом термодинамических потенциалов, найти термодинамические производные

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T.$$

**5.10.** Доказать соотношение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

**5.11.** Известно уравнение состояния физически однородного и изотропного вещества. Найти разность теплоемкостей  $C_P - C_V$  для этого вещества.

**5.12.** Выразить разность удельных теплоемкостей  $c_P - c_V$  физически однородного и изотропного вещества через температурный коэффициент расширения  $\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ , изотермический модуль всестороннего сжатия  $K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  и плотность вещества  $\rho$ .

**5.13.** Найти разность удельных теплоемкостей  $c_P - c_V$  для воды и ртути при  $t = 0^\circ\text{C}$  ( $T = 273,15\text{ K}$ ). Для воды  $\alpha = -6,10 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ ,  $K = 2 \cdot 10^9\text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 10^3\text{ кг/м}^3$ . Для ртути  $c_P = 140\text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$ ,  $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$ ,  $K = 2,6 \cdot 10^{10}\text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 13,6\text{ кг/м}^3$ . В чем причина малой разности  $c_P - c_V$  для воды (см. задачу 5.12)?

**5.14.** Физически однородное и изотропное вещество расширяется (или сжимается) адиабатически и квазистатически от давления  $P_1$  до давления  $P_2$ . Найти изменение его температуры  $T_2 - T_1$  в этом процессе.

**5.15.** Воду, находящуюся при  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 100\text{ атм}$ , расширяют адиабатически и квазистатически до атмосферного давления. Найти изменение температуры воды в этом процессе, если коэффициент объемного расширения воды в этих условиях отрицателен:  $\alpha = -6,1 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**5.16.** Ртуть, находящуюся при  $0^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 100$  атм, расширяют адиабатически и квазистатически до атмосферного давления. Найти изменение температуры ртути в этом процессе, если коэффициент объемного расширения ртути в этих условиях положительный и равен  $\alpha = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , удельная теплоемкость ртути  $c_p = 0,033$  кал/(г $\cdot$ °C), плотность  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

**5.17.** Железная проволока радиуса  $r = 1$  мм квазистатически и адиабатически нагружается при температуре  $T = 273$  К. Начальное значение растягивающей силы равно нулю, конечное  $F = 10$  Н. Определить изменение температуры проволоки  $\Delta T$ . Коэффициент линейного расширения железа  $\alpha_l = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , удельная теплоемкость железа  $c = 0,44$  Дж/(г $\cdot$ °C), плотность  $\rho = 7,9$  г/см<sup>3</sup>.

**5.18.** Серебряная проволока диаметром  $d = 1$  мм адиабатически нагружается при комнатной температуре силой  $F = 10$  Н. Полагая, что удельная теплоемкость серебра  $c = 0,234$  Дж/(г $\cdot$ К), плотность  $\rho = 10$  г/см<sup>3</sup>, а линейный коэффициент теплового расширения  $\alpha_l = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , определить изменение температуры проволоки.

**5.19.** Изобарическое нагревание моля жидкости от  $27^\circ\text{C}$  до  $29^\circ\text{C}$  увеличивает ее объем на  $0,1$  см<sup>3</sup>; последующее изотермическое повышение давления на  $20$  кг/см<sup>2</sup> возвращает объем к исходному значению. По этим данным найти разность молярных теплоемкостей  $C_p - C_v$ , считая, что объем в указанных выше пределах линейно меняется с давлением и температурой. Найти также изменение энтропии жидкости на изотермической стадии процесса.

**5.20.** При адиабатическом сжатии ртути на  $100$  атм ее объем уменьшился на  $0,035\%$ . Вычислить по этим данным отношение теплоемкостей  $C_p/C_v$ , если изотермическая сжимаемость ртути

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}.$$

**5.21.** Коэффициент объемного расширения воды при  $4^\circ\text{C}$  меняет знак, будучи при  $0^\circ\text{C} < t < 4^\circ\text{C}$  величиной отрицательной. Доказать, что в этом интервале температур вода при адиабатическом сжатии охлаждается, а не нагревается, подобно многим другим жидкостям и всем газам.

**5.22.** Килограмм ртути сжимают изотермически при температуре  $T = 300$  К, повышая давление от  $0$  до  $P = 10$  атм. Найти работу  $A$ , совершенную над ртутью, и количество тепла  $Q$ , полученное ею, если изотермический коэффициент сжимаемости ртути  $\beta_T = 4 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ , а коэффициент теплового расширения  $\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

**5.23.** При адиабатическом сжатии жидкости относительное изменение объема равно  $0,1\%$ , а температура поднимается на  $1$  К. Найти по этим данным  $C_p/C_v$ , если коэффициент теплового расширения жидкости  $\alpha = 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . На сколько при этом изменилось давление в жидкости, если ее изотермический коэффициент сжимаемости  $\beta_T = 10^{-4} \text{ атм}^{-1}$ ?

**5.24.** В стальной оболочке находится вода при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  и давлении  $P = 1000$  атм. Оболочка вдруг теряет жесткость и давление воды адиабатически быстро падает до 1 атм. Найти конечную температуру  $t_k$  воды. Теплоемкостью оболочки пренебречь. Плотность воды имеет максимум при температуре  $t_m = 4^\circ\text{C}$ , причем разность плотностей при  $4^\circ\text{C}$  и  $0^\circ\text{C}$   $\Delta\rho = 0,13$  мг/см<sup>3</sup>.

**5.25.** Из опыта известно, что резиновый жгут удлиняется при охлаждении (если его натяжение остается постоянным). Пользуясь этим, доказать, что жгут нагреется, если его адиабатически растянуть.

**5.26.** Из измерений найдено, что натяжение резинового жгута определяется выражением  $\tau = A(l)T$ , где  $T$  — абсолютная температура, а функция  $A(l)$  зависит только от длины жгута ( $A > 0$ ). Показать, что внутренняя энергия такого жгута  $U$  не зависит от его длины, а энтропия при изотермическом увеличении длины уменьшается.

**5.27.** Некоторое количество воды, взятое при  $0,1^\circ\text{C}$ , помещено под пресс. Цилиндр пресса хорошо теплоизолирован. При сжатии этой воды оказалось, что ее объем уменьшился на  $0,5\%$ . Как изменилась температура воды? Известно, что изотермический коэффициент сжатия (сжимаемость) воды в данном температурном диапазоне  $\beta_T = 5 \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>, а коэффициент расширения воды  $\alpha = -6 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>.

**5.28.** При изотермическом сжатии ( $T = 293$  К) одного моля глицерина от давления  $P_1 = 1$  атм до давления  $P_2 = 11$  атм выделяется теплота  $Q = 10$  Дж. При адиабатическом сжатии этого глицерина на те же 10 атм затрачивается работа  $A = 8,76$  мДж. Плотность глицерина  $\rho = 1,26$  г/см<sup>3</sup>, молекулярная масса  $\mu = 92$  г/моль,  $\gamma = C_p/C_v = 1,1$ . Определить по этим данным температурный коэффициент давления глицерина  $(\partial P/\partial T)_V$ , а также коэффициент теплового расширения  $\alpha$  и изотермическую сжимаемость  $\beta_T$ .

**5.29.** Модуль Юнга некоторого твердого тела известным образом зависит от температуры:  $E = E(T)$ . Определить плотность  $u$  энергии тела, обусловленной линейной деформацией  $\epsilon \equiv \Delta l/l$ . Считать, что изотермическая работа  $\epsilon^2 E/2$  включает в себя как механическую, так и тепловую часть.

**5.30.** При изотермическом сжатии меди при температуре 273 К существует такое давление  $P_0$ , при котором работа, затраченная на увеличение давления на малую величину  $\Delta P \ll P_0$ , равна количеству теплоты, выделяющейся при этом сжатии. Определить давление  $P_0$ , если в диапазоне давлений  $[P_0, P_0 + \Delta P]$  температурный коэффициент объемного расширения  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>, изотермический модуль объемного сжатия  $K = 1,3 \cdot 10^{11}$  Па.

**5.31.** Определить отношение  $\gamma = C_p/C_v$  для жидкого лантана La при температуре  $T = 1250$  К. При этой температуре скорость звука  $v_{зв} = 2$  км/с, удельная теплоемкость при постоянном давлении  $c_p = 247$  Дж/(кг·К), температурный коэффициент объемного расширения  $\alpha = 1,02 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>.

**5.32.** Свободная энергия  $\Psi$  одного моля некоторого вещества дается выражением  $\Psi = -\frac{RT}{2} \ln(AT^3V^2)$ , где  $A$  — некоторая константа. Найти теплоемкость  $C_p$  этого вещества.

**5.33.** Термодинамический потенциал  $\Phi$  одного моля некоторого вещества дается выражением  $\Phi = -\frac{RT}{2} \ln \frac{AT^5}{p^2}$ , где  $A$  — некоторая константа. Найти теплоемкость  $C_V$  этого вещества.

**5.34.** Уравнение состояния термодинамической системы имеет вид  $P = A(V)T^3$ . Найти  $\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T$  в точке  $P = 1$  атм,  $T = 300$  К.

**5.35.** Уравнение состояния термодинамической системы имеет вид  $P = A(V)T^3$ . Найти  $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T$  в точке  $P = 1$  атм,  $T = 300$  К.

**5.36.** Давление электромагнитного излучения, пребывающего в тепловом равновесии с веществом, дается формулой:  $P = \alpha T^4$ , где  $\alpha$  — известная константа. Определить энергию такого излучения в заданном объеме  $V$ .

**5.37.** Теплоизолированный сосуд разделен тонкой перегородкой на две равные части. В одной части при температуре  $T_0$  находится 1 моль идеального газа, другая откачана до высокого вакуума. Перегородку быстро убирают, и газ заполняет весь объем. Определить изменение свободной энергии газа после установления термодинамического равновесия.

**5.38.** Один из методов получения очень низких температур основан на использовании зависимости термодинамических величин некоторых веществ (парамагнитных солей) от индукции магнитного поля  $B$ . В не слишком сильных полях свободная энергия соли имеет вид  $\Psi = \Psi_0 - \frac{\alpha}{T} B^2$ . Определить количество теплоты, поглощаемое солью при изотермическом размагничивании от поля  $B = B_0$  до поля  $B = 0$  при температуре  $T$ .

**5.39.** Найти изменение энтропии равновесного теплового излучения абсолютно черного тела при расширении объема, занятого излучением, от  $V_1$  до  $V_2$ , при постоянной температуре  $T$ . Давление излучения  $P = \rho/3$ , где  $\rho$  [эрг/см<sup>3</sup>] — плотность энергии излучения.

**5.40.** Найти работу, которую совершает в цикле Карно равновесное тепловое излучение абсолютно черного тела. Давление излучения  $P = \rho/3$ , где  $\rho = \sigma T^4$  — плотность энергии излучения, а  $\sigma$  — известная константа.

**5.41.** Вселенная, возраст которой  $t \sim 10^{10}$  лет, заполнена равновесным реликтовым излучением с температурой  $T \approx 3$  К. Начиная с эпохи, когда температура составляла  $T_0 \sim 3000$  К и образовались нейтральные атомы, излучение слабо взаимодействовало с веществом, адиабатически расширяясь вместе со Вселенной. Оценить ее возраст к моменту образования нейтральных атомов. Скорость расширения Вселенной считать постоянной.

**5.42.** Уравнение состояния теплового излучения, находящегося в замкнутой полости тела, нагретого до температуры  $T$  (фотонный газ), может быть записано в виде  $\Psi = -AVT^4$ , где  $\Psi$  — свободная энергия такого «газа», занимающего полость объема  $V$ ,  $A$  — известная константа, равная  $\pi^2 k^2 / (45 \hbar^3 c^3) = 2,52 \cdot 10^{-15} \text{ г} / (\text{см} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{К}^4)$ ,  $k$  — константа Больцмана. Найти теплоемкость  $C_V$  фотонного газа с давлением  $P = 1$  атм, занимающего полость объема  $V = 1$  л, и сравнить ее с теплоемкостью  $C_V^{\text{ид}}$  идеального одноатомного газа с теми же значениями  $P$ ,  $V$  и  $T$ .

**5.43.** В условиях предыдущей задачи найти теплоемкость  $C_P$  и уравнение адиабаты фотонного газа.

**5.44.** Давление насыщенного водяного пара при температуре  $17^\circ\text{С}$  равно  $0,02$  атм. Пар занимает объем  $10$  л. Найти изменение свободной энергии  $\Delta\Psi$  и энтропии  $\Delta S$  системы при изотермическом сжатии до объема  $5$  л. Пар можно считать идеальным газом. Теплота парообразования при этой температуре  $\lambda = 2460$  кДж/кг.

**5.45.** Теплоемкость процесса, производимого над одним молем метана  $\text{CH}_4$  при давлении  $760$  Тор (температура  $0^\circ\text{С}$ ), оказалась равной  $-8,4$  Дж/(моль  $\cdot$  К). В результате процесса температура понизилась до  $-1^\circ\text{С}$ . Найти совершенную газом работу  $A$  и изменения: давления  $\Delta P$ , объема  $\Delta V$ , энтропии  $\Delta S$ , энтальпии  $\Delta I$ . Построить приблизительный график процесса (в виде прямолинейного отрезка) на диаграмме  $P$ ,  $V$ . Метан можно считать идеальным газом.

**5.46.\*** Согласно теории теплоемкостей Дебая, свободная энергия твердого тела при низких температурах выражается формулой

$$\Psi = U_0 - AT^4,$$

где  $U_0$  — внутренняя энергия тела при абсолютном нуле (нулевая энергия), а  $A$  — положительный коэффициент, зависящий только от объема  $V$ . Пользуясь этой формулой, показать, что при низких температурах отношение коэффициента объемного расширения тела  $\alpha$  к теплоемкости  $C_V$  не зависит от температуры (закон Грюнейзена).

**5.47.** В процессе Джоуля—Томсона энтальпия газа не изменяется. Пользуясь этим, найти общее термодинамическое выражение для изменения температуры в таком процессе (эффект Джоуля—Томсона).

**5.48.** Показать, что для идеальных газов эффект Джоуля—Томсона не имеет места ( $\Delta T = 0$ ).

**5.49.** В одном из методов получения низких температур используют охлаждение газа при его дросселировании через вентиль (эффект Джоуля—Томсона). В другом методе используют охлаждение газа при его обратимом адиабатическом расширении. Показать, что при одних и тех же начальном  $P_1$  и конечном  $P_2$  давлениях ( $P_1 > P_2$ ) понижение температуры во втором методе больше, чем в первом.

**5.50.\*** Показать, что в процессе Джоуля—Томсона энтропия газа увеличивается.

**5.51.** Одним из геологических процессов является просачивание воды сквозь пористые породы из областей с высоким давлением  $P = 1000$  атм в полости, находящиеся при атмосферном давлении  $P_0$ . Оценить долю  $x$  испарившейся при этом воды, если начальная ее температура  $t_0 = 90$  °С. Теплообменом с горными породами пренебречь, удельную теплоту парообразования  $\lambda$  принять равной 2260 Дж/г.

## § 6. Реальные газы. Газ Ван-дер-Ваальса

**6.1.** Найти выражение для давления, температуры и объема газа в критической точке и установить связь между этими величинами, предполагая, что вещество подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

**6.2.** Записать уравнение Ван-дер-Ваальса в приведенных параметрах

$$\tau = \frac{T}{T_{кр}}, \quad \pi = \frac{P}{P_{кр}}, \quad \varphi = \frac{V}{V_{кр}},$$

когда за единицы приняты критическая температура, критическое давление и критический объем моля газа.

**6.3.** Критическая температура углекислоты ( $\text{CO}_2$ ) равна 31 °С, критическое давление 73 атм. Определить критический объем  $V_{кр}$  моля  $\text{CO}_2$ .

**6.4.** Найти постоянные уравнения Ван-дер-Ваальса для азота, если  $t_{кр}$  азота равна  $-146,9$  °С,  $P_{кр} = 33,55$  атм.

**6.5.** Найти критическую плотность воды, если критическое давление для воды равно  $P_{кр} = 218,3$  атм, а критическая температура  $T_{кр} = 647,3$  К, предполагая, что вода подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

**6.6.** Принимая постоянной  $a$  Ван-дер-Ваальса для воды равной  $5,45 \cdot 10^6$  атм·см<sup>6</sup>/моль<sup>2</sup>, найти внутреннее давление воды  $P$ .

**6.7.** Если температура газа ниже так называемой температуры Бойля, то при изотермическом сжатии его произведение  $PV$  сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Если же температура газа выше температуры Бойля, то при изотермическом сжатии произведение  $PV$  монотонно возрастает. Убедиться в этом и выразить температуру Бойля через критическую температуру для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса.

**6.8.** Критические температура, давление и плотность водорода равны  $T_{кр} = 33,24$  К,  $P_{кр} = 12,8$  атм,  $\rho_{кр} = 0,0310$  г/см<sup>3</sup>. Пользуясь этими данными и предполагая, что водород подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти его молярную массу  $\mu$ .

**6.9.** Атмосфера Венеры почти целиком состоит из  $\text{CO}_2$ . Найти давление на поверхности планеты, если плотность газа  $\rho = 0,07$  г/см<sup>3</sup> и его температура  $T = 750$  К. Газ считать ван-дер-ваальсовским с критическими параметрами  $P_{кр} = 73$  атм,  $V_{кр} = 94$  см<sup>3</sup>/моль и  $T_{кр} = 304$  К. Провести сравнение с давлением идеального газа при тех же условиях.

**6.10.** Найти выражение для изотермической сжимаемости  $\beta_T$  газа Ван-дер-Ваальса.

**6.11.** Найти температурный коэффициент расширения  $\alpha$  для газа Ван-дер-Ваальса при постоянном давлении.

**6.12\*.** На рис. 353 кривая *CLMGD* представляет одну из реальных изотерм вещества, а пунктирная кривая *ALKGB* отделяет область однофазного состояния вещества от области двухфазного. Показать, что в состоянии, изображаемом точкой *M*, массы жидкой и газообразной фаз относятся как  $m_{ж}/m_{г} = MG/LM$  (правило рычага).

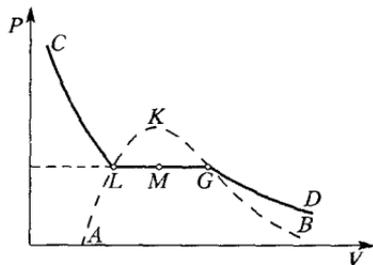


Рис. 353

**6.13.** Чему равна теплоемкость  $C_p$  вещества в двухфазном состоянии, изображаемом точкой под кривой *ALKGB* (рис. 353)?

**6.14\*.** Найти распределение плотности в поле силы тяжести физически однородного вещества, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, в окрестности критической точки.

**6.15.** Как впервые было указано А. Г. Столетовым (1892 г.), для приведения жидкости, заключенной в данный объем, в критическое состояние должно быть взято вполне определенное количество ее. Рассмотреть следующий пример. Сосуд, объем которого  $V_1 = 15 \text{ см}^3$ , должен быть наполнен водой при температуре  $t_1 = 18^\circ \text{C}$  с таким расчетом, чтобы при нагревании ее в данном сосуде (предварительно откачанном и запаянном) до критической температуры в нем установилось критическое давление. В предположении, что вода подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса, найти, какой объем воды должен быть налит в сосуд, если известно, что критическая температура воды  $T_{кр} = 647,3 \text{ K}$ , критическое давление  $P_{кр} = 218,3 \text{ атм}$ , молярная масса  $\mu = 18 \text{ г/моль}$ , плотность при  $18^\circ \text{C}$  равна  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ .

**6.16.** Для демонстрации исчезновения мениска в критической точке цилиндрическую ампулу высоты  $h_0$  наполняют смесью жидкости и ее паров со средней плотностью содержимого  $\rho$ . Каково допустимое отклонение  $\rho$  от критической плотности  $\rho_{кр}$ , при котором в процессе нагревания ампулы мениск исчезнет, не коснувшись ее дна или верхушки?

**6.17.** После демонстрации критического состояния вещества ампула, заполненная эфиром, охлаждается. Оказалось, что при некоторой температуре  $T$  жидкость, плотность которой  $\rho_{ж} = 1,9\rho_{кр}$ , заполняет ровно половину пробирки. Определить эту температуру  $T$ . Критическая температура эфира  $T_{кр} = 467 \text{ K}$ .

**6.18.** В откачанную ампулу заливают эфир при температуре  $18^\circ \text{C}$  и запаивают ее. Какая часть ампулы должна быть заполнена жидкостью, чтобы после нагрева до критической температуры  $T_{кр} = 467 \text{ K}$  эфир оказался в критическом состоянии? Известны  $P_{кр} = 35,5 \text{ атм}$ ,

плотность жидкого эфира  $\rho_{\text{ж}} = 0,714 \text{ г/см}^3$ ,  $P_{\text{нас}}(18^\circ\text{C}) = 400 \text{ Тор}$ . Считать, что к указанному эфиру применима модель газа Ван-дер-Ваальса.

**6.19.** Рассматривая удельную теплоту испарения  $\lambda$  как работу, затрачиваемую на преодоление внутреннего давления  $P_i$ , найти зависимость между  $P_i$ ,  $\lambda$  и плотностью жидкости  $\rho$ . Считать, что жидкость подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса.

**6.20.** Доказать, что теплоемкость  $C_V$  газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, не зависит от объема, а является функцией только температуры. Найти выражение для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса, теплоемкость которого не зависит от температуры.

**6.21.** Два моля газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T$  занимают объем  $V$ . Найти работу, которую совершит газ при квазистатическом изотермическом расширении до объема  $2V$ . Постоянные газа  $a$  и  $b$  считать известными.

**6.22.** Моль азота расширяется в вакуум от начального объема 1 л до конечного 10 л. Найти понижение температуры  $\Delta T$  при таком процессе, если постоянная  $a$  в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота равна  $1,35 \cdot 10^6 \text{ атм} \cdot \text{см}^6/\text{моль}^2$ .

**6.23.** Два сосуда с объемами  $V_1$  и  $V_2$  соединены трубкой с краном. В каждом из них при закрытом кране находится по одному молю одного и того же газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса. До открытия крана температура газа в обоих сосудах была одинакова и равна  $T$ . Нагреется или охладится газ, если открыть кран? На сколько при этом изменится температура газа? Определить давление газа после открытия крана. Стенки сосуда и соединяющей их трубки считать адиабатическими, а теплоемкость  $C_V$  — не зависящей от температуры.

**6.24.** Два баллона с объемами  $V_1 = V_2 = V = 1 \text{ л}$  соединены трубкой с краном. В объеме  $V_1$  находится воздух под атмосферным давлением, а объем  $V_2$  откачан до предельного вакуума. Считая, что воздух подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, а стенки баллонов и трубки адиабатические, определить, на сколько изменится температура газа после открытия крана. Начальная температура  $T = 290 \text{ К}$ , для воздуха  $a = 1,31 \cdot 10^6 \text{ атм} \cdot \text{см}^6/\text{моль}^2$ .

**6.25.** Азот при критической температуре  $T_{\text{кр}} = 126 \text{ К}$  имеет критический объем  $V_{\text{кр}} = 92,1 \text{ см}^3/\text{моль}$ . Считая, что азот подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти понижение температуры 7 г азота при расширении в вакуум от объема  $V_1 = 5 \text{ л}$  до объема  $V_2 = 50 \text{ л}$ .

**6.26.** Какое количество тепла надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в вакуум от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  его температура не изменилась?

**6.27.** Какое количество тепла надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в вакуум от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  его давление осталось постоянным и равным  $P$ ?

**6.28.** Найти  $C_p - C_v$  для моля газа Ван-дер-Ваальса.

**6.29.** Найти выражение для энтропии  $\nu$  молей газа Ван-дер-Ваальса.

**6.30.** Найти уравнение политропы для газа Ван-дер-Ваальса, считая, что его теплоемкость  $C$  не зависит от температуры.

**6.31.** Показать, что в критической точке для любого вещества разность  $C_p - C_v$ , а также теплоемкость  $C_p$  обращаются в бесконечность.

**6.32.** Два моля газа Ван-дер-Ваальса адиабатически и квазистатически расширяются от температуры  $T_1$  и объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Найти работу, совершенную газом. Постоянные газа  $a$  и  $b$  считать известными. Теплоемкость газа  $C_v$  не зависит от температуры.

**6.33.** Найти уравнение процесса для одного моля газа Ван-дер-Ваальса, в котором теплоемкость изменяется по закону  $C = kT^2$ , где  $k$  — постоянная величина. Считать, что  $C_v$  от температуры не зависит.

**6.34.** Найти уравнение процесса для произвольного вещества, при котором теплоемкость изменяется по закону  $C = \alpha\sqrt{T}$ , где  $\alpha$  — постоянная величина. Получить как частный случай уравнение такого процесса для газа Ван-дер-Ваальса. Постоянные газа Ван-дер-Ваальса и его теплоемкость при постоянном объеме ( $C_v = \text{const}$ ) считать известными.

**6.35.** Для газа Ван-дер-Ваальса найти уравнение процесса, для которого постоянна внутренняя энергия. Как молярная теплоемкость для этого процесса зависит от температуры  $T$ , если молярная теплоемкость  $C_v$  известна?

**6.36.** Два моля азота изотермически сжимаются от объема  $V$  при нормальных условиях до объема  $V/10$ . Какое количество тепла выделяется при этом? Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота  $a$  и  $b$  считать известными.

**6.37.** Один моль газа Ван-дер-Ваальса расширяется по политропе

$$(V - b)T = \text{const}.$$

Определить изменение энтропии газа, если его температура изменилась от  $T_1$  до  $T_2$ . Теплоемкость  $C_v$  постоянна.

**6.38.** Найти изменение энтропии одного моля газа, константы Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$  которого известны, при изотермическом процессе, в результате которого внутренняя энергия его увеличилась на  $\Delta U$ . В начале процесса объем газа был  $V_0$ .

**6.39.** Найти изменение энтропии одного моля двухатомного газа Ван-дер-Ваальса, расширяющегося по политропе

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)^3 = \text{const}$$

при изменении температуры от  $T_1 = 680$  К до  $T_2 = 250$  К. Считать, что  $C_v$  не зависит от температуры.

**6.40.** Газ Ван-дер-Ваальса вначале расширяют в вакуум от исходного объема  $V_0$  до  $2V_0$ , а затем изотермически сжимают до  $V_0/2$ .

Найти изменение энтропии одного моля газа, считая известными константы  $a$  и  $b$ , а теплоемкость  $C_V$  не зависящей от температуры  $T$ . Начальная температура газа  $T_0$ .

**6.41.** Газ Ван-дер-Ваальса сначала изотермически при температуре  $T_0$  сжимают от исходного объема  $V_0$  до  $V_0/2$ , а затем расширяют в вакуум до объема  $2V_0$ . Найти изменение энтропии одного моля газа, считая известными константы  $a$  и  $b$ , а теплоемкость  $C_V$  не зависящей от температуры  $T$ .

**6.42.** Для изотермического сжатия одного моля газа Ван-дер-Ваальса была затрачена работа  $A$ . При этом энтропия газа изменилась по абсолютной величине на  $R/8$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная. Определить температуру этого процесса, если исходный объем был равен утроенному критическому. Постоянные Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$  считать известными.

**6.43.** Теплонепроницаемый сосуд разделен теплонепроницаемой перегородкой на две части одинакового объема  $V$ . В каждой из частей находится по одному молю одного и того же газа Ван-дер-Ваальса, причем давление в одной части сосуда  $P_1$ , а в другой —  $P_2$ . Какое давление установится в сосуде после снятия перегородки? Константы  $a$  и  $b$ , а также теплоемкость  $C_V$  известны.

**6.44.** Теплонепроницаемый сосуд разделен теплопроницаемой перегородкой на две части с объемами  $V_1$  и  $V_2$  ( $V_2 \gg V_1$ ). В объеме  $V_1$  находится один моль газа Ван-дер-Ваальса под давлением  $P_{10}$ , а в объеме  $V_2$  газа нет. Затем перегородку убирают, а когда половина массы газа переходит из объема  $V_1$  в объем  $V_2$ , перегородку вновь устанавливают на то же место. Определить установившееся в объеме  $V_2$  давление  $P_2$ , полагая газ в объеме  $V_2$  идеальным. Константы  $a$  и  $b$ , а также теплоемкость  $C_V$  известны, теплоемкостью перегородки пренебречь.

**6.45.** Один моль азота сжат при температуре  $0^\circ\text{C}$  до объема, равного 1 л. Найти изменение его энтропии при расширении без подвода тепла и без совершения работы до атмосферного давления. Критическая температура азота равна  $-147^\circ\text{C}$ , а его критический объем составляет  $0,092$  л/моль. Считать, что в сжатом состоянии азот подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, а в расширенном ведет себя как идеальный газ. Теплоемкость  $C_V$  считать не зависящей от температуры.

**6.46.** Теплоизолированный сосуд объема  $V_0$  разделен непроницаемой перегородкой на две равные части, в одной из которых находится один моль газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T_0$ , а другая вакуумирована. Перегородку быстро удаляют, и после того, как газ равномерно заполняет весь сосуд, его квазистатически сжимают до начального объема теплонепроницаемым поршнем. Определить изменение энтропии  $\Delta S$  и внутренней энергии  $\Delta U$  по сравнению с их первоначальными значениями. Для газа Ван-дер-Ваальса известно, что  $a \neq 0$ , а  $b = 0$ . Считать, что  $C_V = \text{const}$ .

**6.47.** Теплоизолированный сосуд объема  $V_0$  разделен непроницаемой перегородкой на две равные части, в одной из которых находится один моль газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T_0$ , а другая вакуумирована. Перегородку быстро удаляют, и после того, как газ равномерно заполняет весь сосуд, этот газ квазистатически сжимают до начального объема теплонепроницаемым поршнем. Определить изменение энтропии  $\Delta S$  и внутренней энергии  $\Delta U$  по сравнению с их первоначальными значениями. Для газа Ван-дер-Ваальса известно, что  $b \neq 0$ , а  $a = 0$ . Считать, что  $b/V_0 \ll 1$  и  $C_V = \text{const}$ .

**6.48.** Моль газа адиабатически и квазистатически расширяется от начального объема  $V_0$  до некоторого объема  $V$ . В каком случае охлаждение газа будет больше: когда газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса или когда он идеальный? Теплоемкости  $C_V$  обоих газов равны между собой и не зависят от температуры.

**6.49.** Моль газа адиабатически и квазистатически расширяется от начального давления  $P_0$  и температуры  $T_0$  до некоторого давления  $P$ . Считая, что газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса с постоянными  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , найти его конечную температуру. Теплоемкость газа  $C_V$  от температуры не зависит. Сравнить конечную температуру этого газа с температурой, которую будет иметь идеальный газ с той же теплоемкостью  $C_V$ .

**6.50.** Найти теплоемкость газа Ван-дер-Ваальса в процессе, в котором тепло, сообщенное газу, равно уменьшению его внутренней энергии. Теплоемкость  $C_V$  и постоянную Ван-дер-Ваальса  $a$  считать известными.

**6.51.** Найти выражение для теплоты испарения  $\Lambda$  моля жидкости при постоянной температуре  $T$  под давлением ее насыщенного пара в предположении, что уравнением состояния жидкости и ее пара является уравнение Ван-дер-Ваальса. Считать известными температуру  $T$  и молярные объемы жидкости  $V_{\text{ж}}$  и ее насыщенного пара  $V_{\text{п}}$  при этой температуре.

**6.52.** Один моль эфира, находящегося в критическом состоянии, расширяется в теплоизолированный вакуумированный сосуд, так что его объем увеличивается в  $N = 17$  раз. Считая, что теплоемкость эфира  $C_V = 3R$  от температуры не зависит, определить изменение энтропии эфира в этом процессе.

**6.53.** При политропическом расширении одного моля многоатомного газа Ван-дер-Ваальса (теплоемкость процесса  $C = 4R$ ) энтропия увеличилась на  $\Delta S = R$ . Во сколько раз увеличился объем газа, если начальный объем равен утроенному критическому объему?

**6.54.** При политропическом расширении одного моля одноатомного газа Ван-дер-Ваальса от критического до утроенного критического объема энтропия газа увеличилась на  $\Delta S = 2R$ . Определить теплоемкость политропического процесса.

**6.55.** Вычислить изменение свободной энергии 1 кмоль газа Ван-дер-Ваальса ( $a = 1,39 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{кмоль}^2$ ,  $b = 0,039 \text{ м}^3/\text{кмоль}$ ) при изотермическом расширении ( $T_0 = 300 \text{ К}$ ) от  $V_0 = 0,05 \text{ м}^3$  до  $V_1 = 0,1 \text{ м}^3$ .

**6.56.** Закрытая с обеих сторон металлическая труба заполнена гелием при нормальных условиях. Оценить, с какой точностью надо измерять частоту акустического резонанса этой трубы, чтобы заметить, что газ не идеальный? Считать, что гелий подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Критическая температура гелия  $T_{\text{кр}} = 5,2 \text{ К}$ , а диаметр атома гелия  $d \approx 2 \text{ \AA}$ .

**6.57.** Найти скорость звука в газе Ван-дер-Ваальса вблизи критической точки. Константы  $a$  и  $b$  газа и его молекулярную массу  $\mu$  считать известными. Теплоемкость  $C_V$  задана и не зависит от температуры. Процесс считать адиабатическим.

**6.58.** Определить, во сколько раз отличаются изотермическая  $\beta_T$  и адиабатическая  $\beta_S$  сжимаемости  $\beta_T/\beta_S$  для 1 моля одноатомного газа Ван-дер-Ваальса при температуре  $T = 50 \text{ К}$  и давлении 20 атм. Считать, что теплоемкость  $C_V$  данного газа такая же, как у идеального, константа  $a = 0,0035 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$ .

**6.59.** В вертикальном цилиндре под поршнем массы  $M$  и площади  $\sigma$  находится один моль газа Ван-дер-Ваальса, константы  $a$  и  $b$  которого известны. Найти период малых колебаний поршня  $\tau$  около положения равновесия, считая процесс сжатия и разрежения изотермическим, причем  $T = 2T_{\text{кр}}$ . Равновесный объем газа в условиях опыта принять равным критическому.

**6.60.** Моль гелия имеет объем  $V = 0,1 \text{ л}$  и находится при температуре  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Измерение величины  $(\gamma - 1)$ , где  $\gamma = C_P/C_V$  в этих условиях показало, что эта величина на 3% отличается от своего значения для разреженного гелия. Используя модель Ван-дер-Ваальса, найти константу  $a$  для гелия, пренебрегая при анализе членами порядка  $a^2$ ,  $ab$ ,  $b^2$ .

**6.61.** Найти работу, совершаемую двигателем, работающим по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм. Рабочим веществом является один моль газа Ван-дер-Ваальса. Начальный объем  $V_1 = 5b$ , конечный  $V_2 = 6b$ , где  $b$  — константа Ван-дер-Ваальса. Температуры на изотермах  $t_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**6.62.** Найти КПД цикла, состоящего из адиабаты, изотермы (температура  $T_1$ , объем уменьшается от  $V_2$  до  $V_1$ ) и изохоры (объем  $V_1$ , температура увеличивается от  $T_1$  до  $T_2$ ). Рабочим веществом является 1 моль газа Ван-дер-Ваальса, константы  $a$  и  $b$  которого известны, а теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры.

**6.63.** Найти КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из двух изохор  $V$  и  $2V$  и двух изобар  $P$  и  $2P$ . Рабочим веществом является газ Ван-дер-Ваальса. Константы  $a$  и  $b$  считать известными. Теплоемкость газа  $C_V$  считать постоянной.

**6.64.** Определить КПД цикла, состоящего из двух изохор с объемами  $V_1$  и  $V_2$  и двух адиабат. Рабочим веществом является газ Ван-дер-Ваальса, константы  $a$  и  $b$  которого заданы, а теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры.

**6.65.** Теплоизолированный сосуд объемом 2 л с жесткими стенками разделен подвижной проводящей тепло перегородкой на две части. С обеих сторон перегородки находится кислород: слева — 5 молей, справа — 1 моль. В начальный момент перегородка удерживается и делит сосуд на две равные части. Затем она освобождается. Какое количество тепла  $Q$  нужно подвести к газу или отвести от него после установления равновесия для того, чтобы температура газа осталась неизменной? Считать, что кислород подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса с постоянной  $a = 1,3 \text{ атм} \cdot \text{л}^2/\text{моль}^2$ .

**6.66.** Получить формулу для изменения температуры газа в дифференциальном эффекте Джоуля—Томсона, предполагая, что газ подчиняется уравнению состояния Ван-дер-Ваальса.

**6.67.** Рассмотреть предельный случай формулы для эффекта Джоуля—Томсона (см. ответ предыдущей задачи), предполагая газ настолько разреженным, что квадратами и высшими степенями поправок  $a$  и  $b$  можно пренебречь. Показать, что при температурах выше так называемой температуры инверсии  $T_{\text{инв}}$  дифференциального эффекта Джоуля—Томсона газ при дросселировании будет нагреваться, а при температурах ниже температуры инверсии — охлаждаться. Получить выражение для  $T_{\text{инв}}$  и установить связь этой температуры с критической температурой  $T_{\text{кр}}$ .

**6.68.** Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, с  $a = 0$  в опыте Джоуля—Томсона всегда нагревается. Определить повышение температуры при расширении.

**6.69.** Показать, что газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, с  $b = 0$  в опыте Джоуля—Томсона всегда охлаждается. Определить понижение температуры при расширении.

**6.70.** При какой температуре  $T$  гелий в опыте Джоуля—Томсона начнет охлаждаться, если известно, что критическая температура гелия  $T_{\text{кр}} = 5,2 \text{ К}$ ? Считать, что состояние гелия описывается уравнением Ван-дер-Ваальса.

**6.71.** Предполагая, что газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса, найти уравнение кривой инверсии, т. е. такой кривой в плоскости  $(V, T)$ , при переходе через которую эффект Джоуля—Томсона меняет знак.

**6.72.** Расширение газа в процессе Джоуля—Томсона производится от начального состояния  $(T, V)$  до сильно разреженного состояния, в котором газ может считаться идеальным. Если начальное состояние газа изображать на диаграмме  $(T, V)$ , то на ней можно начертить кривую, которая делит плоскость  $T, V$  на две области: точкам одной области соответствует  $\Delta T < 0$  (газ охлаждается), а другой  $\Delta T > 0$  (газ нагревается). Эта кривая называется кривой инверсии интегрального эффекта Джоуля—Томсона. Найти ее уравнение и начертить кривые инверсии для азота, водорода и

гелия в предположении, что эти газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса.

**6.73.** Вычислить, во сколько раз отличаются изменения температуры при эффекте Джоуля—Томсона и при обратимом адиабатическом расширении газа Ван-дер-Ваальса. Перепад давления в обоих случаях одинаков и невелик,  $T_{кр}/T = 0,4$  и  $V_{кр}/V = 0,09$ , где  $T_{кр}$  и  $V_{кр}$  — критические температура и объем.

Указание. Коэффициент теплового расширения  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$  находится дифференцированием уравнения Ван-дер-Ваальса.

**6.74.** Теплоизолированный сосуд наполнен газообразным гелием при температуре  $T_0 = 10$  К (выше критической точки). Газ медленно вытекает через капиллярную трубку до тех пор, пока давление в сосуде не станет равным  $P_1 = 1$  атм, а температура  $T_1 = 4,2$  К (точка кипения гелия при нормальном давлении). Найти начальное давление газа в сосуде  $P$ , если в конце процесса сосуд оказался полностью заполненным жидким гелием. Молярная теплота испарения гелия при  $4,2$  К равна  $\Lambda = 20$  кал/моль. Газообразный гелий считать идеальным газом.

**6.75.** Двухатомный газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса, при температуре  $300$  К охлаждается в процессе Джоуля—Томсона на  $0,024$  К при уменьшении давления на  $0,1$  атм. Найти критическое давление и критический объем, если критическая температура равна  $-147^\circ\text{C}$

**6.76.** Аргон дросселируется от давления  $P_1 = 100$  атм до давления  $P_2 = 1$  атм. Предполагая процесс установившимся, определить количество теплоты  $Q$ , которое необходимо подводить к одному молю газа, чтобы температура его поддерживалась постоянной и равнялась  $T = 300$  К. Считать аргон газом Ван-дер-Ваальса с  $C_V = \text{const}$ ,  $b = 32,2$  см<sup>3</sup>/моль и критической температурой  $T_{кр} = 150,65$  К. При вычислениях пренебречь квадратами и высшими степенями поправок  $a$  и  $b$ .

**6.77.** Определить изменение внутренней энергии одного моля реального газа, подчиняющегося уравнению  $P = \frac{RT(V+b)}{V^2} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$  при изотермическом расширении с температурой  $T$  от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ . Константы  $a$  и  $b$  известны.

**6.78.** Определить приращение энтропии при изотермическом расширении ( $T_0$ ) одного моля реального газа от объема  $V_0$  до  $V_0 + dV$ , если его уравнение состояния имеет вид:  $P = \frac{RT}{V-b} \exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$ . Константы  $a$  и  $b$  известны.

**6.79.** Найти изменение теплоемкости  $\Delta C_V$  одного моля гелия при изотермическом расширении от объема  $V_1 = 0,5$  л до объема  $V_2 = 1$  л при температуре  $T = 10$  К. Считать газ подчиняющимся уравнению Бертелло:  $\left(P + \frac{a}{TV^2}\right)(V-b) = RT$ , в котором для гелия  $a/R = 1,9$  л $\cdot$ К<sup>2</sup>/моль.

## § 7. Распределение Максвелла<sup>1</sup>

7.1. Найти отношение числа молекул водорода  $n_1$ , скорости которых лежат в пределах от 3000 до 3010 м/с, к числу молекул  $n_2$ , имеющих скорости в пределах от 1500 до 1510 м/с, если температура водорода 300 °С.

7.2. Исходя из распределения Максвелла, найти средний квадрат  $x$ -компоненты скорости молекул газа. Найти отсюда среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы поступательного движения молекулы газа.

7.3. Найти наиболее вероятную  $v_m$ , среднюю<sup>2</sup>  $\bar{v}$  и среднюю квадратичную  $\bar{v}_{\text{кв}}$  скорости молекул хлора при температуре 227 °С.

7.4. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода равна таковой же скорости молекул азота при температуре 100 °С?

7.5. Показать, что если за единицу скорости молекул газа принять наиболее вероятную скорость, то число молекул, абсолютные значения скоростей которых лежат между  $v$  и  $v + dv$ , не будет зависеть от температуры газа.

7.6. Как зависит от давления средняя скорость молекул идеального одноатомного газа при адиабатическом сжатии или расширении?

7.7. Написать выражение для среднего числа  $dN$  молекул газа, кинетические энергии которых заключены между  $\epsilon$  и  $\epsilon + d\epsilon$ .

7.8. Найти наименее вероятное значение кинетической энергии  $\epsilon$  поступательного движения молекул газа, т. е. такое значение  $\epsilon_m$ , при котором в фиксированном интервале энергии  $d\epsilon$  в газе находится максимальное число молекул.

7.9. При каком значении температуры число молекул, находящихся в пространстве скоростей в фиксированном интервале  $(v, v + dv)$ , максимально?

7.10.\* Вычислить скорость  $v_{1/2}$  теплового движения молекулы газа, определяемую условием, что половина молекул движется со скоростью, меньшей, чем  $v_{1/2}$ , а другая половина — со скоростью, большей, чем  $v_{1/2}$ .

7.11. Найти среднее значение обратной величины скорости молекулы в газе.

7.12.\* Найти среднее число молекул, компоненты скорости которых, параллельные некоторой оси, лежат в интервале  $(v_{\parallel}, v_{\parallel} + dv_{\parallel})$ , а абсолютные значения перпендикулярной составляющей скорости заключены между  $v_{\perp}$  и  $v_{\perp} + dv_{\perp}$ .

<sup>1</sup> В задачах этого раздела предполагается, что размеры отверстий и толщина стенок сосудов малы по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Кроме того, везде, кроме особо оговоренных случаев, распределение молекул по скоростям следует считать считать максвелловским.

<sup>2</sup> В данном сборнике приняты два равноценных обозначения среднего. Например,  $\bar{v^2} \equiv \langle v^2 \rangle$ .

7.13. Во сколько раз изменится число молекул идеального двухатомного газа в малом интервале скоростей  $\Delta v$  с центром в наиболее вероятной скорости  $v_m$  ( $\Delta v \ll v_m$ ) при адиабатическом увеличении объема в два раза?

7.14. В диоде электроны, эмитируемые накалившимся катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых (вышедших из катода) электронов распределены по закону Максвелла с температурой  $T = 1150$  К, определить долю электронов  $\alpha$ , преодолевающих задерживающий потенциал: 1)  $V = 0,2$  В; 2)  $V = 0,4$  В. Катодом является тонкая цилиндрическая нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

7.15. На рис. 354 изображено горизонтальное сечение прибора, использованного в известном опыте Штерна по определению скорости молекул и атомов. Найти скорость атомов серебра, испаряющихся с центральной нити прибора, если при  $n = 50$  об/с на внешнем цилиндре смещение следа молекулярного пучка при вращающемся приборе по отношению к следу пучка в неподвижном приборе составило  $\delta = 4,8$  мм. Сопоставить результаты расчета скорости атомов серебра из приведенных данных с расчетом той же скорости при помощи соотношения между средней квадратичной скоростью атомов и температурой газа. Температура нити в том опыте Штерна, для которого приведены указанные выше данные, была равна  $1607^\circ\text{C}$  ( $1880$  К),  $R = 10$  см.

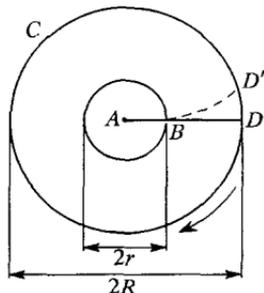


Рис. 354

7.16. Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое, могут рассматриваться как «двумерный» идеальный газ. Вычислить для этого газа величину  $\alpha$  — отношение наивероятнейшей и среднеквадратичной скоростей.

7.17. Стационарный точечный источник, находящийся в вакууме, непрерывно и изотропно испускает частицы массы  $m$ , скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре источника  $T$ . Считая, что, разлетаясь, частицы не сталкиваются, найдите их концентрацию на расстоянии  $r$  от источника. Источник испускает  $\nu$  частиц в секунду.

7.18. В центре сферы радиуса  $R$  в некоторый момент времени создается  $N$  молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре  $T$ . Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти плотность  $j$  потока молекул вблизи поверхности сферы как функцию времени. Определить момент времени  $t_0$ , когда поток максимален, и найти скорость молекул  $v_0$ , подлетающих к стенке в этот момент.

7.19. Выразить число молекул  $z$ , ударяющихся о квадратный сантиметр стенки сосуда в одну секунду, через среднюю скорость движения газовых молекул, если функция распределения молекул

по скоростям изотропна (т. е. зависит только от абсолютного значения скорости молекулы, но не от ее направления). Рассмотреть частный случай максвелловского распределения.

**7.20.** Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое полупроводника, могут рассматриваться как «двумерный» идеальный газ. Вычислить частоту  $z$  ударов электронов, приходящихся на единицу длины периметра границы области, в которой заключен этот «газ». Считать при этом заданными температуру  $T$ , поверхностную плотность частиц  $n$  и массу электрона  $m$ .

**7.21.** Записать выражение для давления  $dP$ , производимого на стенку сосуда молекулами идеального газа, скорости которых по абсолютной величине заключены между  $v$  и  $v + dv$ . Найти значение скорости  $v_0$ , при котором давление  $dP$  максимально, если ширина интервала  $dv$  постоянна. Число молекул газа в единице объема равно  $n$ , температура газа —  $T$ .

**7.22.** Записать выражение для среднего числа молекул идеального газа  $dN$ , ударяющихся ежесекундно о квадратный сантиметр стенки сосуда, скорости которых по абсолютной величине заключены между  $v$  и  $v + dv$ . Найти значение скорости  $v_0$ , при котором величина  $dN$  максимальна, если ширина интервала  $dv$  постоянна. Число молекул газа в единице объема равно  $n$ , температура газа —  $T$ .

**7.23.** Найти полную кинетическую энергию  $E$  молекул одноатомного газа, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки в единицу времени. Задачу решить сначала в общем виде для изотропной функции распределения, а затем применить результат к частному случаю максвелловского распределения.

**7.24.** В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при температуре  $T$ , имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Определить среднее значение  $\bar{\epsilon}$  кинетической энергии вылетевшей молекулы в предположении, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа в сосуде пренебрежимо малы.

**7.25.** В тонкостенном сосуде объема  $V$ , стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, находится идеальный газ. Сосуд помещен в вакуум. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул  $n$  газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие площади  $S$ ? Определить время  $t_{1/2}$ , по истечении которого давление газа внутри сосуда уменьшится в два раза. Считать, что истечение газа происходит настолько медленно, что оно практически не нарушает равновесность состояния во всем сосуде, за исключением малой области вблизи отверстия. Температуру газа в сосуде считать постоянной и равной внешней температуре.

**7.26.** Откачанный тонкостенный сосуд, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, погружен в атмосферу идеального газа, поддерживаемого при той же температуре, с постоянной концентрацией молекул  $n_0$ . Как будет меняться с течением

времени концентрация молекул газа внутри сосуда, если в его стенке сделать очень малое отверстие?

**7.27.** Через какое время давление воздуха в тонкостенном откачанном сосуде, в стенке которого имеется отверстие площадью  $S = 10^{-6} \text{ см}^2$ , возрастает от  $P_1 = 10^{-4} \text{ мм рт. ст.}$  до  $P_2 = 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ , если давление наружного воздуха  $P_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ , а температура  $20^\circ \text{C}$ ? Объем сосуда  $V = 1 \text{ л.}$  Через какое время давление в сосуде станет равным половине атмосферного давления?

**7.28\*.** Сосуд разделен перегородкой на две равные части объемом  $V$  каждая. В одной части находится азот, а в другой кислород при одинаковых давлениях  $P$  и температурах  $T$ . Газы в сосуде сильно разрежены (средняя длина свободного пробега велика по сравнению с размерами сосуда). В момент  $t = 0$  в перегородке открывается небольшое отверстие площади  $S$ . Найти давление в обеих частях сосуда в зависимости от времени. Температуру газа во все время процесса считать неизменной. Результат выразить через средние скорости молекул азота и кислорода  $\bar{v}_a$  и  $\bar{v}_k$ .

**7.29\*.** Полностью откачанный герметический сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси двух газов, молекулярные массы которых относятся как  $1 : 4$ , а отношение концентраций (т. е. числа молекул в единице объема) равно  $\alpha$ . Смесь газов вне сосуда поддерживается при постоянном давлении и температуре. В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое оба газа стали очень медленно натекают в сосуд. Определить максимальное и минимальное значения отношений концентраций легкой и тяжелой компонент газовой смеси в моменты времени, когда достигаются эти значения.

**7.30.** Полностью откачанный тонкостенный герметический сосуд помещен в атмосферу кислорода, поддерживаемого при постоянной температуре и невысоком давлении  $P$ . В стенке сосуда оказалось малое отверстие, через которое окружающий кислород стал натекают в сосуд. Через час давление газа в сосуде повысилось от нуля до  $P/2$ . Какое давление было бы в том же сосуде через то же время, если бы после откачки сосуд был помещен в атмосферу водорода при тех же давлении и температуре?

**7.31\*.** Тонкостенный сосуд объема  $V$ , наполненный идеальным газом, поддерживается при постоянной температуре  $T$ . В стенке сосуда имеется маленькое отверстие площади  $S$ , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Какое количество тепла  $Q = Q(t)$  надо подводить к сосуду в единицу времени для поддержания в нем постоянной температуры?

**7.32\*.** В тонкостенном сосуде, помещенном в вакуум, имеется очень малое отверстие, на которое извне направляется параллельный пучок одноатомных молекул, летящих с одной и той же скоростью  $v_0$ , перпендикулярной к плоскости отверстия. Концентрация молекул в пучке равна  $n_0$ . Найти среднюю скорость  $\bar{v}$ , концентрацию молекул  $n$  и температуру  $T$  газа в сосуде в установившемся равновесном состоянии.

**7.33.** Через малое отверстие в тонкостенном сосуде при температуре  $T$  вылетают в вакуум молекулы. При каком значении скорости  $v_0$  число молекул, вылетающих через отверстие в единицу времени в узком интервале скоростей  $(v, v + dv)$ , максимально, если ширина интервала постоянна? Как эта скорость связана со средней квадратичной скоростью молекулы внутри сосуда? Предполагается, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа в сосуде пренебрежимо малы.

**7.34.** Через малое отверстие в тонкостенном сосуде при температуре  $T$  вылетают в вакуум молекулы. При каком значении скорости  $v_0$  полная кинетическая энергия молекул, вылетающих через отверстие в единицу времени в узком интервале скоростей  $(v, v + dv)$ , максимальна, если ширина интервала  $dv$  постоянна? Как эта скорость связана со средней квадратичной скоростью молекулы внутри сосуда? Предполагается, что за время опыта изменения температуры газа и числа молекул в сосуде пренебрежимо малы.

**7.35.** В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при давлении  $P$ , имеется маленькое круглое отверстие радиуса  $r$ , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. На расстоянии  $L$  от отверстия находится круглый диск радиуса  $R$  ( $R \gg r$ ), так что плоскость диска параллельна плоскости отверстия и центры диска и отверстия лежат на прямой, перпендикулярной плоскости отверстия. Определить силу  $F$ , действующую на диск. Считать, что все частицы прилипают к диску.

Справка. 
$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\gamma x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1} \gamma^n} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

**7.36.** Какая доля частиц из пучка атомов гелия, вылетающих через малое отверстие в стенке сосуда, имеет абсолютное значение скорости, превышающее вторую космическую скорость? Газ в сосуде можно считать идеальным и находящимся в состоянии термодинамического равновесия при температуре 300 К.

**7.37.** Перед небольшим отверстием в вакуумной камере вращается диск с узкой прорезью (рис. 355). В момент, когда прорезь находится против отверстия, внутри камеры на расстоянии  $R$  от диска создается  $N$  молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре  $T$ . Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках камеры и на диске. При какой скорости вращения диска  $\omega$  количество молекул, пролетевших через прорезь при следующем ее совмещении с отверстием, будет максимальным? Найти также скорость молекул, пролетающих при этом через прорезь.

**7.38.** Кроме ракет со сравнительно широким соплом, обеспечивающим адиабатичность истечения, в принципе возможна ракета

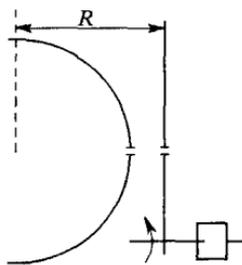


Рис. 355

другого типа, в которой газ вытекает сквозь множество отверстий, размер которых мал по сравнению с длиной свободного пробега. Сравнить силы тяги ракет обоих типов при движении их в вакууме, если в качестве рабочего вещества используется многоатомный идеальный газ. Начальная температура газа и расход топлива в обоих случаях одинаковы.

**7.39.** Откачанный тонкостенный теплоизолированный сосуд помещен в атмосферу, состоящую из смеси кислорода и гелия с температурой  $T_0$ , причем парциальные давления гелия и кислорода одинаковы. Эти газы натекают в сосуд через малое отверстие. Найти температуру смеси в сосуде, пока давление в нем мало по сравнению с наружным. Считать, что тепловое равновесие успевает устанавливаться.

**7.40.** Неон вытекает в вакуум из теплоизолированного сосуда через маленькое отверстие. Определить его температуру, когда в сосуде останется половина атомов. Начальные условия газа нормальные. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

**7.41.** В теплоизолированном сосуде находится воздух при начальной температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ . В сосуде имеется маленькое отверстие, через которое воздух медленно выходит в вакуум. Определить, как будет изменяться температура оставшегося в сосуде газа в зависимости от его давления.

**7.42.** Теплоизолированная полость разделяет два сосуда с одним и тем же газом. Температура газа в одном из сосудов  $T_1 = 200$  К, в другом —  $T_2 = 800$  К. Давление в обоих сосудах одинаково и равно  $P = 1$  атм. Полость сообщается с сосудами посредством малых отверстий (рис. 356). Оба отверстия одинаковы. Найти давление и температуру, установившиеся внутри полости.

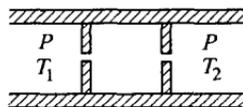


Рис. 356

**7.43.** Цилиндрический сосуд, стоящий вертикально (рис. 357), отделен от атмосферы поршнем с массой  $M = 1$  кг и площадью  $S = 10$  см<sup>2</sup> с очень мелкими порами; общая площадь сечения пор  $\sigma = 0,01$  см<sup>2</sup>. В сосуде находится воздух, температура которого  $T_1$  поддерживается равной 400 К. На сколько изменится высота поршня за 10 с, если температура окружающего воздуха  $T_0 = 300$  К? Воздух считать идеальным газом. Трением поршня о стенки пренебречь. Процесс считать квазистатическим.

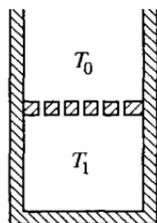


Рис. 357

**7.44.** Одноатомный идеальный газ находится в сосуде объема  $V$  с теплоизолированными стенками. В стенке сосуда имеется маленькое отверстие площади  $S$ , через которое молекулы газа вылетают в вакуум. Предполагая, что размеры отверстия настолько малы, что состояние газа в сосуде в любой момент времени можно рассматривать как равновесное, определить закон изменения температуры

газа в сосуде во времени. Начальную температуру газа  $T_0$  и все необходимые параметры газа считать известными. Теплоемкостью стенок сосуда пренебречь. Как качественно изменится результат, если сосуд может свободно перемещаться?

**7.45.** В замкнутом сосуде находится разреженный идеальный газ под давлением  $P$ . В стенке сосуда сделано малое отверстие площади  $\sigma$ . Определить реактивную силу  $F$ , испытываемую сосудом при истечении газа через отверстие.

**7.46.** Измерение спектра скоростей медленных нейтронов осуществляется при помощи монохроматора и расположенного за ним детектора. Монохроматор формирует одинаковые по длительности импульсы нейтронов со скоростями в интервале  $(v, v + \Delta v)$ , причем ширина его  $\Delta v$  постоянна ( $\Delta v \ll v$ ). Нейтроны регистрируются детектором с использованием реакции, сечение которой  $\sigma \propto 1/v$ . Полагая распределение скоростей нейтронов внутри источника максвелловским со среднеквадратичной скоростью  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 3 \text{ км/с}$ , найти величину  $v$ , при которой регистрируется максимальное число нейтронов.

**7.47.** Изотопы урана  $^{238}\text{U}$  и  $^{235}\text{U}$  разделяют, помещая газообразный фторид урана в центрифугу. На оси центрифуги концентрация обоих газов поддерживается постоянной с помощью внешнего источника. Максимальная скорость на периферии центрифуги  $v = 500 \text{ м/с}$ . Во сколько раз изменится отношение концентраций изотопов урана, если опыт проводить не при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$ , а при  $T_2 = 600 \text{ К}$ ?

**7.48.** Отношение молярных масс различных газов можно измерять по скорости их эффузии, т. е. по скорости истечения из сосуда с очень малым отверстием. Доказать, что время, в течение которого из сосуда вытекает определенный объем газа, пропорционально квадратному корню из молярной массы газа.

**7.49.** В сосуд с пористой перегородкой непрерывно поступает газовая смесь, содержащая равные молярные концентрации  $\text{H}_2$  и  $\text{D}_2$  (рис. 358). Считая, что свободный пробег в порах больше их поперечных размеров, определить установившееся в сосуде отношение концентраций  $n_{\text{D}}/n_{\text{H}}$ .

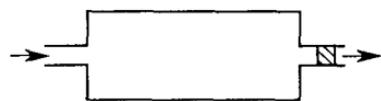


Рис. 358

**7.50.** Определить, какая часть молекул идеального газа, столкнувшихся со стенкой сосуда за определенное время (например, за одну секунду), имеет кинетическую энергию, превосходящую  $\epsilon$ .

**7.51.** Вольфрамовая нить, испаряясь в высокий вакуум при температуре  $T = 2000 \text{ К}$ , уменьшается в массе, как показали измерения, со скоростью  $q = 1,14 \cdot 10^{-13} \text{ г/(с} \cdot \text{см}^2)$ . Вычислить давление насыщенного пара вольфрама при этой температуре.

**7.52.** Какова бы была мгновенная скорость испарения воды с каждого квадратного сантиметра ее поверхности, если бы над этой поверхностью был вакуум, а температура воды в тот момент

равнялась 300 К? Табличное значение давления насыщенного водяного пара при этой температуре  $P = 27$  мм рт. ст. Сравнить полученную величину с величиной скорости испарения воды при обычных условиях (т. е. когда над поверхностью воды находится воздух при нормальном давлении) и объяснить получившееся расхождение.

**7.53.** В сферическом реакторе радиуса  $r = 1$  м идет химическая реакция между газом, заполняющим реактор, и материалом стенок реактора. Продуктом реакции является порошок, непрерывно удаляемый из реактора. В реакцию могут вступить только молекулы газа, имеющие кинетическую энергию  $E \geq E_{II} = 1$  эВ, при этом вероятность реакции при ударе молекулы о стенку  $\omega = 10^{-3}$ . С какой скоростью  $\frac{dM}{dt}$  надо подавать газ в реактор, чтобы поддерживать в нем постоянное давление  $P_0 = 10$  атм? Молярная масса газа  $\mu = 40$  г/моль. Считать, что вблизи стенок реактора распределение молекул по скоростям максвелловское при температуре  $T = 1160$  К.

**7.54.** Найти изменение энтропии 64 г кислорода, если в результате некоторого процесса число ударов молекул об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда за 1 с увеличилось в 4 раза, а полная кинетическая энергия этих молекул при этом выросла в 16 раз.

**7.55.** Как изменится число ударов  $\nu$  молекул газа об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда за 1 с, если объем газа адиабатически увеличится в два раза? Газ идеальный двухатомный.

**7.56.** Как изменится частота ударов о стенку молекул углекислого газа, если его объем увеличить в 10 раз по политропе с теплоемкостью, равной  $8,31$  Дж/(моль  $\cdot$  К)?

**7.57.** Азот расширили по некоторому политропическому процессу. При этом оказалось, что частота ударов молекул о стенку осталась постоянной. Какова теплоемкость при этом процессе?

**7.58.** Во сколько раз изменится полная кинетическая энергия молекул двухатомного газа, ударяющихся об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда за 1 с, если объем газа адиабатически увеличится в два раза?

**7.59.** Найти изменение энтропии моля одноатомного идеального газа при расширении до удвоенного объема. Число молекул, ударяющихся об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда, при расширении остается неизменным.

**7.60.** Найти изменение энтропии моля идеального газа при увеличении давления в два раза, если при этом кинетическая энергия молекул газа, ударяющихся об  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда, также увеличивается в два раза.

**7.61.** В сосуде объема  $V$  находится  $N$  молекул при температуре  $T$ . При соударении со стенкой сосуда каждая молекула может прилипнуть к стенке с вероятностью  $\beta = \text{const} \ll 1$ , если энергия молекулы меньше  $E_0$ . Молекулы с энергией, большей  $E_0$ , не прилипают к стенкам вообще. Определить количество молекул газа  $n$ ,

осаждающихся на стенках сосуда в единицу времени, если площадь этих стенок равна  $S$ .

**7.62.** Частицы с одинаковыми массами  $m$  с равной вероятностью имеют любую скорость  $v_x$  в интервале  $(-v_0, +v_0)$ . Равновероятны ли их энергии? Написать законы распределения: по скоростям  $dw_1(v_x)$  и по энергиям  $dw_2(\mathcal{E})$ . Найти  $\langle v_x \rangle$ ,  $\langle |v_x| \rangle$ ,  $\langle v_x^2 \rangle$ .

**7.63.** Найти зависимость числа метеоритов, падающих на Землю за единицу времени, от их начальной скорости  $v_0$ . Средняя плотность метеоритов в космическом пространстве  $n$ . Считать, что скорости метеоритов находятся в интервале  $(v_{\min}, v_{\max})$ , а их функция распределения по скоростям  $f(v) = \frac{1}{n} \frac{dn}{dv}$  постоянна. Масса Земли  $M$ , радиус  $R$ .

**7.64.** В реакторах, работающих на тепловых нейтронах, имеются очень медленные (ультрахолодные) нейтроны. Особенностью ультрахолодных нейтронов является то, что при скорости  $v < v_{\text{гран}}$  (обычно граничная скорость  $v_{\text{гран}} \sim 10$  м/с) нейтроны упруго отражаются от стенок при любых углах падения. Для вывода ультрахолодных нейтронов из реактора используют полые трубы — нейтронпроводы. На рис. 359 изображен реактор  $R$ , нейтронпровод специальной формы и на его конце — детектор нейтронов  $D$ .

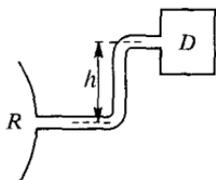


Рис. 359

Полагая, что спектр нейтронов по скоростям в реакторе максвелловский, найти, как зависит поток нейтронов  $\Phi$ , доходящих до детектора, от высоты его поднятия  $h$ . Оценить высоту  $H$ , на которой поток исчезает.

**7.65.** Проникновение нейтронов из вакуума в большинство веществ связано с преодолением определенного энергетического барьера. Поэтому в замкнутой полости достаточно медленные (тепловые) нейтроны оказываются «запертыми» и могут накапливаться. Оценить, какая доля частиц  $\alpha$  из пучка тепловых нейтронов, распределение по скоростям которых максвелловское, окажется запертой в медной камере. Предельный угол скольжения  $\varphi$  при полном внутреннем отражении для нейтронов, движущихся со средней тепловой скоростью, составляет 10 угловых минут. Соударения нейтронов со стенками могут рассматриваться как упругие.

**7.66.** В вакуумированном сосуде объемом  $V = 1$  л находятся ультрахолодные нейтроны, отражающиеся от стенок сосуда с коэффициентом отражения, практически равным единице. В сосуде имеется отверстие площади  $S$ , заклеенное фольгой, полностью прозрачной для ультрахолодных нейтронов. Какова площадь отверстия  $S$ , если известно, что наблюдаемое время сохранения нейтронов в сосуде лишь в два раза меньше среднего времени жизни свободных нейтронов  $\tau = 10^3$  с? Считать, что скорость всех ультрахолодных нейтронов одинакова и равна  $v = 5$  м/с.

## § 8. Распределение Больцмана

8.1. Вычислить массу земной атмосферы.

8.2. Найти отношение массы атмосферы  $m$  к массе планеты  $M$ . Гравитационное ускорение на поверхности планеты равно  $g$ , атмосферное давление  $P_0$ . Вычислить это отношение для Земли.

8.3. Галактику можно представить как тонкий однородный диск (цилиндрический слой). Радиус диска  $R = 10^{21}$  см, масса  $M = 10^{39}$  г. Диск окружен водородной атмосферой, давление которой у поверхности диска вблизи его оси  $P_0 = 10^{-16}$  дин/см<sup>2</sup>. Оценить массу атмосферы  $m_{\text{атм}}$ , если  $R \ll \frac{\gamma M}{kT_0/m_p}$ , где  $m_p$  — масса протона и  $T_0$  — температура в точке, где определено давление  $P_0$ .

8.4\*. Теплоизолированный сосуд с идеальным газом подвешен на нити в поле тяжести. Из-за действия силы тяжести плотность газа внизу сосуда больше, чем наверху. Нить пережигают, и сосуд свободно падает. Предполагая, что во время падения успевает установиться термодинамическое равновесие, определить равновесную температуру газа, которая в нем установится при падении.

8.5. Пользуясь формулой Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию  $\bar{\epsilon}_{\text{пот}}$  молекулы газа в земной атмосфере, считая последнюю изотермической (с температурой  $T$ ), а поле тяжести однородным. Вычислить теплоемкость газа  $C$  при этих условиях.

8.6. Теплоизолированный герметический цилиндрический сосуд высоты  $H$ , наполненный газом, подвешен в вертикальном положении в однородном поле тяжести. Температура газа в сосуде везде одинакова и равна  $T$ . Найти среднюю потенциальную энергию молекулы газа  $\bar{\epsilon}_{\text{пот}}$ .

8.7. В цилиндре предыдущей задачи помещен моль идеального газа с относительной молекулярной массой  $\mu$ . Найти теплоемкость этого газа, учитывая влияние поля тяжести и предполагая, что  $\mu gH \ll RT$ .

8.8. Смесь двух идеальных газов, состоящая из  $N_1$  и  $N_2$  частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно, заключена в цилиндрический сосуд высоты  $h$ , находящийся в поле тяжести. Определить положение центра масс этой смеси  $z_C$ , если температура смеси равна  $T$ .

8.9. Вычислить, где больше содержится воздуха: в слое у поверхности Земли толщиной 10 см или в слое толщиной 1 км на высоте 100 км. Считать атмосферу изотермической при  $T = 300$  К. Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

8.10. Вблизи поверхности Земли концентрация аргона  $^{40}\text{Ar}$  составляет 0,9%. Оценить, какой была бы концентрация аргона на высоте, где давление воздуха падает в 10 раз, если бы атмосфера была равновесной и изотермической.

8.11. Атмосфера планеты, на поверхности которой сила тяжести равна земной, состоит только из гелия и азота ( $\text{He}:\text{N}_2 = 7:1$ ). Найти скорость звука у поверхности такой планеты. Атмосферу

считать изотермической с температурой  $T = 200 \text{ К}$ , изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

**8.12.** В столбе воды при температуре  $20^\circ \text{С}$  взвешены шарообразные частицы смолы радиуса  $2,1 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ , плотность которых равна  $1,19 \text{ г/см}^3$ . Отношение концентраций частиц при разности высот  $1,1 \cdot 10^{-2} \text{ см}$  оказалось равным  $100 : 12$ . Из этих данных найти число Авогадро, если известна газовая постоянная  $R$ .

**8.13.** Для определения числа Авогадро Ж. Перрен измерял распределение по высоте шарообразных частиц гуммигута, взвешенных в воде. Он нашел, что отношение  $\alpha$  числа частиц в слоях, отстоящих друг от друга на расстояние  $l = 30 \text{ мкм}$ , равно  $2,08$ . Плотности частиц  $\rho = 1,194 \text{ г/см}^3$ , воды  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ . Радиусы частиц  $r = 0,212 \text{ мкм}$ . На основании этих данных вычислить число Авогадро  $N$ . Температура воды  $t = 18^\circ \text{С}$ .

**8.14.** Сферический сосуд радиуса  $R$ , наполненный идеальным газом, расположен в области однородного поля тяжести с ускорением свободного падения  $g$  (рис. 360). При какой температуре газа  $T$  наиболее вероятное положение молекулы газа будет находиться вблизи горизонтальной плоскости на расстоянии  $R/2$  от центра сферы? Масса молекулы газа  $m$ .

**8.15.** Конический сосуд высотой  $H$ , наполненный идеальным газом, расположен в области однородного поля тяжести с ускорением свободного падения  $g$  (рис. 361). Ускорение  $g$  параллельно оси конуса и направлено к его вершине. При какой температуре  $T$  наиболее вероятное положение молекулы газа будет находиться вблизи горизонтальной плоскости на высоте  $H/2$ ? Масса молекулы газа  $m$ .

**8.16.** В нижней половине цилиндрического теплоизолированного сосуда высоты  $H$ , отгороженной от верхней перегородкой, находится

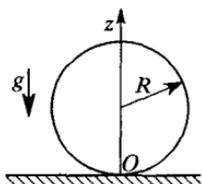


Рис. 360

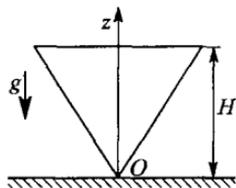


Рис. 361

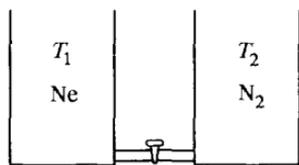


Рис. 362

идеальный газ при температуре  $T_0$ . Найти температуру газа  $T$  после того, как перегородка убрана. Молярная масса газа равна  $\mu$ , а его молярная теплоемкость  $C_V$ . Считать, что  $\mu gH / (RT_0) \ll 1$ .

**8.17.** Два одинаковых вертикальных сосуда бесконечной высоты, помещенных в однородное гравитационное поле, соединены у основания трубкой с краном (рис. 362). В первом сосуде находится 1 моль гелия при температуре  $T_1$ , во втором — 1 моль азота при температуре  $T_2$ . Кран открывается, и через достаточно длительный промежуток времени в сосудах устанавливается одинаковая

температура  $T$ . Определить эту температуру, считая теплоизоляцию сосудов идеальной.

**8.18.** Ракета, имеющая форму цилиндра высоты  $L$ , в которой заключен газ с массой молекул  $m$ , движется с ускорением  $a$  в направлении оси цилиндра. Затем тяга двигателей выключается. Найти изменение положения центра тяжести газа в ракете. Различия в плотности газа при ускоренном движении ракеты считать малыми.

**8.19.** Ракета с термостатированной кабиной, представляющей собой цилиндр высоты  $h$ , движется с ускорением  $a$  в направлении оси цилиндра. Масса воздуха внутри кабины равна  $M$ . Как изменится энтропия воздуха в кабине после выключения двигателя? Воздух рассматривать как идеальный газ с молярной массой  $\mu$ . Считать, что  $\mu ah/(RT) \ll 1$ , где  $T$  — температура воздуха в кабине. Рассмотреть два случая выключения двигателя: 1) мгновенно; 2) квазистатически.

**8.20.** Вычислить значение компоненты скорости молекулы, параллельной поверхности Земли,  $v_{\parallel}$  такое, что в среднем у одной молекулы из всей земной атмосферы наблюдалась бы указанная компонента скорости, превышающая  $v_{\parallel}$ . При расчетах принять модель изотермической атмосферы, находящейся в однородном поле тяжести с  $T = 300$  К,  $\mu = 29$ . Распределение молекул по скоростям — максвелловское.

**8.21.** Сосуд разделен перегородкой на две половины. В первой половине находится двухатомный идеальный газ. Вторая откачана. В некоторый момент времени в перегородке открывается небольшое отверстие, и газ начинает вытекать из первой половины во вторую. Вскоре отверстие закрывается. Найти температуру газа во второй половине сосуда после закрытия отверстия. Рассчитать массу газа во второй половине сосуда. Начальная температура газа равна  $T_0$ , давление  $P_0$ , площадь отверстия  $S$ , время натекания  $\Delta t$ , молярная масса газа  $\mu$ . Стенки сосуда и перегородку считать теплонепроницаемыми, их теплоемкостью можно пренебречь.

**8.22.** Закрытый сосуд разделен на две равные части вертикальной перегородкой, в верхней части которой имеется небольшое отверстие площади  $\sigma$ . Одна часть наполнена водой до уровня отверстия, уровень воды в другой части находится на расстоянии  $H$  ниже отверстия. Система поддерживается при постоянной температуре  $T$ . Предполагая площадь отверстия  $\sigma$  настолько малой, что в каждой из частей вода практически находится в равновесии с паром, определить время, в течение которого разность уровней воды уменьшится в два раза. Пар приближенно считать идеальным газом; давление насыщенных паров при температуре  $T$  равно  $P_0$ ; площадь основания каждой из частей сосуда равна  $S$ .

**8.23.** Цилиндр радиуса  $R$  и длины  $H$ , наполненный химически однородным газом, равномерно вращается в однородном поле тяжести вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью  $\omega$ . Найти распределение концентрации молекул газа внутри цилиндра, если его ось направлена вертикально.

**8.24.** Для определения относительных молекулярных масс коллоидальных частиц исследуют распределение их концентрации в поле центробежной силы, возникающей при вращении центрифуги. Найти относительную молекулярную массу  $\mu$  коллоидальных частиц, если известно, что отношение их концентраций в местах, расположенных от оси центрифуги на расстояниях  $r_2$  и  $r_1$ , равно  $\alpha$ . Плотности частиц  $\rho$ , растворителя —  $\rho_0$ . Угловая скорость вращения центрифуги  $\omega$ .

**8.25.** Найти, на сколько возрастает теплоемкость вращающегося газа по сравнению с теплоемкостью неподвижного газа. Аргон с молярной массой  $\mu = 40$  г/моль заполняет цилиндр радиуса  $a = 2,5$  см и вращается вокруг оси цилиндра с угловой скоростью  $\omega = 2 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup> при температуре  $T = 300$  К.

**8.26.** Цилиндрический сосуд радиуса  $r_0$ , заполненный газом с температурой  $T_0$ , вращается в невесомости с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси, и при этом плотность газа около оси вращения равна  $\rho_0$ . Цилиндр затормаживают. Определить установившееся значение плотности газа  $\rho_1$ . Различия в плотности газа в разных частях сосуда при его вращении считать малыми.

**8.27.** Внутри равномерно вращающейся центрифуги с радиусом 20 см находится газообразный кислород. Найти относительную разность плотностей газа у стенки и на оси, если центрифуга совершает 40 об/мин, а температура равна 300 К.

**8.28.** Измеряется распределение концентрации молекул белка в растворе, помещенном в центрифугу. На некотором расстоянии от оси центрифуги напряженность центробежных сил составляет  $G = 100g$ , а относительный градиент концентрации в этом месте оказывается равным  $\alpha = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = 10$  см<sup>-1</sup>. Плотность белка  $\rho = 1,1$  г/см<sup>3</sup>, растворителя —  $\rho_0 = 0,9$  г/см<sup>3</sup>, температура  $T = 20$  °С. Найти молярную массу белка  $\mu$ .

**8.29.** Заполненная азотом, запаянная с обоих концов, горизонтально расположенная трубка вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. Ось вращения пересекает ось трубки на расстоянии 10 см и 90 см от ее концов. Вычислить величину  $\omega$ , при которой давление азота в противоположных концах трубки относится как 2,72 : 1. Температура азота  $T = 300$  К.

**8.30.** Цилиндр длины  $l$  и с площадью основания  $S$  разделены на две части подвижным тонким поршнем так, что слева от поршня газа нет, а справа находится идеальный газ с молярной массой  $\mu$ . Цилиндр равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной

оси, проходящей через левое основание, и поршень при этом находится на расстоянии  $l/2$  от оси (рис. 363). Найти распределение давления справа от поршня. Масса поршня  $M$ , трением поршня о стенки можно пренебречь, температура газа  $T$ .

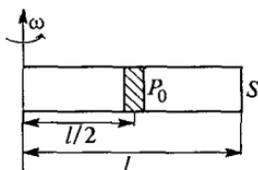


Рис. 363

**8.31.** Цилиндр с длиной  $l$  и площадью основания  $S$  разделен на две части подвижным поршнем так, что слева находится идеальный газ с молярной массой  $\mu$ , а справа газа нет. Цилиндр равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси, проходящей через левое основание, и поршень при этом находится на расстоянии  $3l/4$  от оси (рис. 364). Найти распределение давления слева от поршня, если в состоянии покоя давление газа равнялось  $P_0$  и поршень занимал положение на расстоянии  $l/2$  от оси, пружина в недеформированном состоянии имела длину  $l$ . Масса поршня  $M$ , трением поршня о стенки можно пренебречь, температура газа  $T$ .

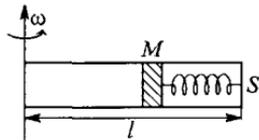


Рис. 364

**8.32.** В теплоизолированном цилиндрическом сосуде радиуса  $a$  при температуре  $T_0$  находится 1 моль идеального газа. Сосуд равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Затем оболочка сосуда быстро затормаживается. Пренебрегая теплоемкостью оболочки, найти изменение энтропии  $\Delta S$  газа и его температуры  $\Delta T$  после установления равновесия. Для упрощения расчетов принять, что линейная скорость  $v$  оболочки много меньше скорости звука в газе ( $v \ll v_{зв}$ ), а значит, допустимо пренебречь неравномерностью распределения плотности по радиусу. Молярную массу  $\mu$  и теплоемкость  $C_V$  газа считать известными.

**8.33.** Полюй цилиндр с внутренним радиусом  $a = 1$  м наполнен водяным паром при температуре  $t = 20^\circ\text{C}$  и давлении  $P_0$ , близком к давлению насыщенного пара  $P_H$  при данной температуре, так что  $(P_H - P_0)/P_0 = \Delta P/P_0 = 10^{-3}$ . С какой угловой скоростью  $\Omega$  надо вращать цилиндр вокруг оси, чтобы в изотермических условиях на его внутренней поверхности образовался жидкий водяной слой?

**8.34.** Как изменится энтропия одного моля идеального газа, находящегося в термостатированном цилиндрическом сосуде радиуса  $a$ , в результате медленного раскручивания сосуда вокруг своей оси до угловой скорости  $\omega \ll a^{-1}\sqrt{RT/\mu}$ , где  $\mu$  — молярная масса газа,  $T$  — его температура?

**8.35.** Найти момент инерции одного моля идеального газа, помещенного в цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , который вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Масса молекулы газа  $m$ , температура газа  $T$ . Вычислить момент инерции в пределе  $T \rightarrow \infty$ .

**8.36.** Два одинаковых цилиндрических сосуда расположены рядом вертикально в поле тяжести и заполнены газами с молярными массами соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ;  $\mu_1 > \mu_2$ . Давление в верхней части обоих сосудов одинаково и равно  $P_0$ , температура одинакова везде и равна  $T$ . На глубине  $h$  (считая от крышки) между сосудами открылась течь площади  $S$ , ее линейные размеры меньше длины свободного пробега молекул. Определить направление и величину потока энергии  $q$  между сосудами в начальный момент, считая, что относительный перепад давлений по высоте невелик.

**8.37.** В вертикальном цилиндрическом сосуде бесконечной высоты с площадью основания  $S$ , помещенном в однородное гравитационное поле, находится 1 моль идеального газа. В момент времени  $t = 0$  в боковой стенке цилиндра на высоте  $h$  пробивают отверстие сечением  $\sigma$  (рис. 365). Определить, как изменяется во времени давление газа около дна сосуда, считая температуру газа  $T$  постоянной, стенки сосуда тонкими, а давление вне сосуда равным 0. Считать, что длина свободного пробега молекул много больше размеров отверстия.

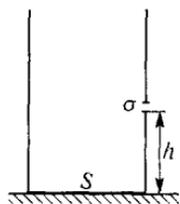


Рис. 365

**8.38.** Пользуясь распределением Больцмана, найти среднюю потенциальную энергию молекул идеального газа в поле  $U(x) = ax^2$ ;  $a > 0$ .

**8.39.** Вычислить среднюю энергию  $\bar{\epsilon}$  моля одноатомного газа, состоящего из молекул, имеющих два дискретных уровня энергии:  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . Показать, что при очень низких температурах теплоемкость такого газа равна  $3R/2$ . Вращением молекул пренебречь. Для упрощения записи формул принять  $\epsilon_1 = 0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon$ .

**8.40.** Энергия молекулы в магнитном поле может принимать три значения  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\epsilon_{1,2} = \pm \epsilon$ . Определить энергию  $\mathcal{E}$  взаимодействия одного моля таких молекул при температуре  $T = \epsilon/k$  с магнитным полем, где  $k$  — постоянная Больцмана.

**8.41.** Оценить максимальную величину радиуса газового облака, при котором оно будет сжиматься под действием сил гравитации. Облако не вращается, его масса  $M = 2 \cdot 10^{36}$  кг и температура  $T = 50$  К.

**8.42.** В ударной волне в двухатомном газе происходит вначале быстрое возрастание температуры газа от  $T_0$  до  $T_1$ . После этого постепенно возбуждаются колебательные степени свободы (выполняется условие  $kT_1 \gg \hbar\omega$ , где  $\omega$  — собственная частота колебаний в молекулах). Последний процесс («колебательная релаксация») происходит практически при постоянном давлении. Определить изменение температуры и энтропии одного моля газа в этом процессе. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

**8.43.** Двухатомный газ мгновенно нагревается от температуры  $T_0$  до  $T_1$ , после чего происходит постепенное возбуждение колебательных степеней свободы (при этом выполняется условие  $kT_1 \gg \hbar\omega$ , где  $\omega$  — собственная частота колебаний в молекулах). Считая, что процесс возбуждения колебаний происходит при постоянном объеме, определить изменение температуры и энтропии массы газа  $M$  в этом процессе. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

**8.44.** Вакансией называется дефект кристалла, возникающий при удалении атома из узла кристаллической решетки. При быстром охлаждении кристалла число вакансий, соответствовавших термодинамическому равновесию при высокой температуре, почти не изменяется, т. е. вакансии могут быть «заморожены». После чего

при низкой температуре происходит медленный процесс установления нового термодинамического равновесия, как говорят, «отжиг» вакансий. Определить изменение температуры алюминиевого образца при адиабатическом отжиге вакансий, замороженных в результате быстрого охлаждения образца от температуры плавления алюминия  $t_1 = 660^\circ\text{C}$  до комнатной температуры  $t_0$ . Теплоемкость алюминия можно определить из классической теории. Энергия образования вакансий в алюминии  $\varepsilon = 0,75$  эВ.

**8.45.** Определить среднеквадратичную угловую скорость вращения молекулы азота в воздухе при нормальных условиях. Расстояние между ядрами в молекуле  $\text{N}_2$   $r = 1,1$  Å.

**8.46.** Найти значение средней энергии  $\bar{\varepsilon}$ , приходящейся согласно классической кинетической теории газов, на одну степень свободы вращательного движения молекулы газа при  $t = 27^\circ\text{C}$ . Найти значение средней квадратичной частоты вращения молекулы кислорода при этих условиях. Момент инерции молекулы кислорода вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии молекулы,  $I_{\perp} = 19,2 \cdot 10^{-40}$  г·см<sup>2</sup>.

**8.47.** Найти суммарную кинетическую энергию  $K$  теплового движения всех молекул кислорода  $\text{O}_2$ , занимающих объем  $V = 5,5$  л при давлении  $P = 2$  атм. Считать, что температура газа настолько низка, что колебания атомов в молекулах еще не возбуждены, а вращения возбуждены полностью.

**8.48.** Определить энергию вращательного движения водорода  $\text{H}_2$ , находящегося при давлении  $P = 10^5$  Па в объеме  $V = 1$  л. Считать, что вращательные степени свободы полностью возбуждены.

**8.49.** Определить энергию вращательного движения метана  $\text{CH}_4$ , находящегося при давлении  $P = 10^5$  Па в объеме  $V = 1$  л. Считать, что вращательные степени свободы полностью возбуждены.

**8.50.** Какова будет средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы водорода, если первоначально он находился при нормальных условиях, а затем был адиабатически сжат в 32 раза?

**8.51.** Найти выражение для энтропии системы невзаимодействующих друг с другом  $N$  электронов, помещенных в магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Магнитный момент электрона  $\mu$  может принимать две ориентации: по полю  $\mathbf{B}$  и против поля. Разница в энергиях для этих двух ориентаций  $\Delta E = 2\mu B$ . Электроны находятся в тепловом равновесии со средой, имеющей температуру  $T$ . Рассмотреть частный случай  $kT \gg \Delta E$ .

**8.52.** Найти значения средней колебательной энергии теплового движения для двух различных атомных осцилляторов при температуре  $T = 300$  К. Частота колебаний осцилляторов  $\nu_1 = 10^{13}$  Гц и  $\nu_2 = 10^{14}$  Гц. Сравнить полученные значения с соответствующим классическим значением. Найти колебательную теплоемкость  $C_V$  одного моля газа таких осцилляторов для случая  $\nu = 4,7 \cdot 10^{13}$  Гц (кислород  $\text{O}_2$ ).

## § 9. Флуктуации. Статистический смысл энтропии

**9.1.** Пусть  $f$  и  $g$  — произвольные физические величины, флуктуирующие вокруг своих средних значений  $\bar{f}$  и  $\bar{g}$ , так что  $f = \bar{f} + \Delta f$ ,  $g = \bar{g} + \Delta g$ . Найти среднее значение произведения  $\overline{fg}$ .

**9.2.** Выразить средний квадрат флуктуации  $\overline{\Delta f^2} = \overline{(f - \bar{f})^2}$  произвольной физической величины  $f$  через  $\bar{f}^2$  и  $\bar{f}^2$ .

**9.3.** Величины  $f$  и  $g$  называются статистически независимыми, если  $\overline{\Delta f \Delta g} = 0$ . Показать, что для статистически независимых величин  $\overline{fg} = \bar{f} \bar{g}$ .

**9.4.** В закрытом сосуде объема  $V$  в отсутствие силовых полей находятся  $N$  молекул идеального газа. Определить среднее число молекул и его флуктуации в объеме  $v$ , являющемся малой частью объема  $V$ .

**9.5.** В кубическом сосуде емкостью  $V = 1$  л при комнатной температуре находится  $N$  молекул водорода. Найти вероятность  $P$  того, что эти молекулы соберутся в одной половине сосуда. Оценить величину  $N$ , при которой такое событие можно ожидать один раз на протяжении эпохи порядка возраста наблюдаемой части Вселенной ( $T \sim 10^{10}$  лет).

**9.6.** Определить величину объема  $V$  в идеальном газе, в котором средняя квадратичная флуктуация числа частиц составляет  $\alpha = 10^{-6}$  от среднего числа частиц в том же объеме. Определить также среднее число частиц  $\bar{n}$  в таком объеме. Газ находится в стандартных условиях.

**9.7.** В идеальном газе выделен объем  $V$ , содержащий  $N$  частиц. Давление  $P$  и температура  $T$  газа постоянны. Какова относительная флуктуация плотности в этом объеме?

**9.8.** Оценить предельную чувствительность  $\Delta T/T$  идеального газового термометра, в котором температура измеряется по объему газа при постоянном давлении. Количество газа в термометре равно  $10^{-3}$  моля.

**9.9.** В адиабатически изолированном сосуде, содержащем 1 моль кислорода при нормальных условиях, выделен объем размером  $10^{-6}$  см<sup>3</sup>. Во сколько раз вероятность состояния, в котором температура в этом объеме отличается от средней на  $10^{-3}$  К (при сохранении числа молекул внутри этого объема), меньше вероятности равновесного состояния?

**9.10.** Определить, в каком объеме гелия средняя относительная флуктуация температуры (при сохранении числа молекул в этом объеме) составляет  $10^{-4}\%$ ? Гелий находится при нормальных условиях в контакте с термостатом.

**9.11.** Найти отношение вероятности флуктуации температуры идеального одноатомного газа на величину  $\Delta T = 0,1$  К в объеме  $v = 1$  мкм<sup>3</sup> к вероятности равновесного состояния. Объем, занимаемый всем газом,  $V_0 = 25$  л, температура  $T_0 = 300$  К, давление  $P_0 = 10^5$  Па.

**9.12.** Во сколько раз изменится средний квадрат флуктуаций температуры  $\langle \Delta T^2 \rangle$  одноатомного идеального газа, находящегося в фиксированном малом объеме  $v$  при адиабатическом увеличении объема всей системы  $V$  в 8 раз ( $v \ll V$ )?

**9.13.** Два одинаковых сообщающихся сосуда заполнены газом при нормальных условиях. Каким должен быть объем  $V$  каждого сосуда, чтобы вероятность состояния, при котором давление в сосудах изменится на 0,1%, была бы в  $e^{100}$  раз меньше, чем вероятность исходного состояния?

**9.14.** Теплоизолированный цилиндр, наполненный идеальным одноатомным газом, герметически разделен теплонепроницаемым массивным поршнем на два равных объема  $V_0$ . Определить относительную флуктуацию каждого из этих объемов, если число частиц в цилиндре равно  $N$ .

**9.15.** Сосуд с  $N$  молекулами идеального газа разделен перегородкой на две части с объемами  $V_1$  и  $V_2$ . Найти вероятность того, что в первой части будет содержаться  $N_1$ , а во второй  $N_2$  молекул.

**9.16.** Газообразный водород при температуре  $T = 300$  К и давлении  $P = 10^{-6}$  атм вытекает в вакуум из тонкостенного сосуда через отверстие с площадью  $S = 0,1$  мм<sup>2</sup>. Через определенные промежутки времени на опыте измеряется полный поток атомов через отверстие за интервал времени  $t = 10^{-3}$  с. Предполагая, что давление водорода в сосуде остается постоянным, найти относительную флуктуацию этого потока.

**9.17.** Молекулярный пучок  $O_2$  вылетает в высокий вакуум из камеры с давлением  $P = 10^{-7}$  атм и  $T = 300$  К через систему двух последовательных щелей с размерами  $1$  см  $\times$   $2 \cdot 10^{-2}$  см каждая, разделенных промежутком в  $1$  мм. Оценить интенсивность пучка  $j$  (число частиц, прошедших через вторую щель в секунду). Какова будет относительная флуктуация числа частиц в импульсах с продолжительностью  $\tau = 10^{-3}$  с?

**9.18.** Атомный пучок He вылетает в высокий вакуум из камеры с давлением  $P = 10^{-4}$  Тор и  $T = 300$  К через систему из двух коаксиальных круглых отверстий с  $d = 0,2$  мм, разделенных расстоянием  $l = 1$  см. Оценить интенсивность пучка  $j$  (число частиц, прошедших через второе отверстие в секунду). Какова будет относительная флуктуация числа частиц в импульсах с продолжительностью  $\tau = 10^{-3}$  с?

**9.19.** Два одинаковых сосуда, в которых находится по молю одного и того же идеального газа при одинаковых условиях, сообщаются между собой через отверстие. Какое число молекул  $n$  должно перейти из одного сосуда в другой, чтобы возникшее состояние стало в  $\alpha = e$  раз менее вероятным, чем исходное?

**9.20.** Решить предыдущую задачу, используя формулу Больцмана  $S = k \ln P$  и термодинамическое выражение для энтропии идеального газа.

**9.21.** Получить распределение Гаусса из формулы Больцмана  $S = k \ln P$ , используя термодинамическое выражение для энтропии идеального газа.

**9.22.** Тепловые флуктуации малого объема  $\langle (\Delta V^2)_T \rangle$ , заполненного жидкостью или газом и окруженного средой, температура  $T$  которой поддерживается постоянной, можно рассчитать следующим образом. Предположим, что рассматриваемая часть жидкости или газа заключена в цилиндр, стенки которого идеально проводят тепло. Одна из стенок — поршень — может свободно без трения перемещаться в цилиндре. К движению поршня можно применить теорему о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы и таким образом найти искомую флуктуацию. Провести этот расчет.

**9.23.** На каком расстоянии  $L$  до экрана среднеквадратичное значение амплитуды колебания светового луча, отраженного от прикрепленного к математическому маятнику маленького зеркала (рис. 366; длина маятника  $l = 10$  см, его масса с зеркалом  $m = 0,1$  г), составит  $10^{-4}$  см? Температура среды равна  $27^\circ\text{C}$ , плоскость зеркала перпендикулярна плоскости колебаний.

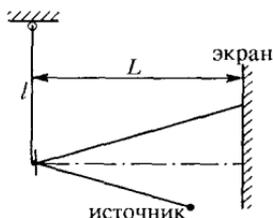


Рис. 366

**9.24.** Зеркальце висит на кварцевой нити, модуль кручения которой равен  $D$ , и освещается таким образом, что его повороты, вызванные ударами окружающих молекул газа, можно регистрировать на шкале. Положению покоя соответствует угол поворота  $\varphi = 0$ . Как изменяется средний квадрат угловой скорости  $\langle \dot{\varphi}^2 \rangle$  и средний квадрат углового отклонения  $\langle \varphi^2 \rangle$ , если момент инерции зеркальца, длину нити и ее диаметр увеличить соответственно в  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  раз? Какое значение получится для числа Авогадро  $N$  из измерений при температуре  $T = 287$  К, если  $D = 9,43 \cdot 10^{-9}$  дин·см,  $\langle \varphi^2 \rangle = 4,18 \cdot 10^{-6}$ ? (Данные взяты из опытов Герлаха и Капплера.)

**9.25.** Определить относительную флуктуацию длины свободного пробега молекулы газа, если средняя длина пробега молекулы много меньше размеров сосуда.

**9.26.** Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету  $K = 0,12$  А/Вт. Какова относительная флуктуация  $\alpha$  числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью  $\Phi = 1,3 \cdot 10^{-11}$  Вт? Время регистрации  $\tau = 10^{-3}$  с.

**9.27.** Известно, что тепловое движение механических пружинных весов определяет при заданной температуре  $T$  предел их чувствительности. Оценить предельно малую массу, которая может быть определена при однократном взвешивании на пружинных весах, считая, что коэффициент жесткости пружины равен  $\alpha$ .

**9.28.** Найти среднюю квадратичную относительную флуктуацию объема капельки ртути радиуса  $r = 0,01$  мм в воздухе при

температуре  $T = 300 \text{ К}$ . Изотермическая сжимаемость ртути  $\beta_T = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ атм}^{-1}$ .

**9.29.** Определить относительную флуктуацию числа частиц воздуха в малом объеме  $\Delta V$  как функцию расстояния  $h$  от поверхности Земли. Воздух считать идеальным газом. Его плотность у поверхности Земли  $\rho_0$ , молярная масса  $\mu$ , температура атмосферы постоянна и равна  $T$ .

**9.30.** Цилиндрический сосуд вращается относительно оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить относительную флуктуацию числа частиц идеального газа в малом объеме  $\Delta V$  этого сосуда как функцию расстояния  $r$  от оси цилиндра. Плотность газа на оси цилиндра  $\rho_0$ , молярная масса  $\mu$ . Температура газа постоянна и равна  $T$ . Силу тяжести не учитывать.

**9.31.** Найти относительную среднеквадратичную изотермическую флуктуацию высоты столбика жидкости в капиллярной трубке, опущенной в широкий сосуд. Плотность жидкости  $\rho$ , поверхностное натяжение  $\sigma$ , угол смачивания  $\theta = 0$ . (В равновесии высота столбика жидкости меньше длины капилляра.)

**9.32.** Вычислить относительную среднеквадратичную флуктуацию объема мыльного пузыря радиуса  $r$ . Давление воздуха вне пузыря равно  $P_0$ , коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки  $\sigma$ . Считать, что при флуктуациях форма пузыря остается сферической, а температура воздуха в нем — постоянной и равной температуре окружающей среды  $T$ .

**9.33.** Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию объема  $V$  газа Ван-дер-Ваальса в условиях, когда объем равен критическому, а  $T$  немного превышает  $T_{кр}$ .

**9.34.** В сосуде с водой взвешены частицы ртути, способные прилипать к стенкам сосуда. Оценить время, за которое вода очистится от взвеси, задавшись определенными размерами частиц. При каких условиях сила тяжести будет существенно влиять на процесс?

**9.35.** Вычислить среднюю относительную флуктуацию потенциальной энергии  $\Pi$  внутримолекулярных колебаний двухатомной молекулы идеального газа, а также одного моля таких молекул.

**9.36.** Найти выражение для флуктуации плотности жидкости или газа, возникающей из-за теплового движения в малом объеме  $V$ , мысленно выделенном в рассматриваемой среде.

**9.37.** Вычислить флуктуацию кинетической энергии поступательного движения молекулы идеального газа.

**9.38.** Малая макроскопическая часть системы (подсистема) является частью большей замкнутой системы. Флуктуации энергии и энтальпии такой подсистемы в принципе можно вычислить так же, как это было сделано для молекулы идеального газа (см. предыдущую задачу). Только вместо максвелловского распределения надо пользоваться его обобщением на макроскопические подсистемы (так называемым распределением Гиббса). Таким путем можно показать, что флуктуации внутренней энергии и

энтальпии подсистемы определяются выражениями

$$\langle(\Delta U^2)_V\rangle = kT^2C_V,$$

$$\langle(\Delta I^2)_P\rangle = kT^2C_P,$$

где  $C_V$  и  $C_P$  — теплоемкости подсистемы, а индексы  $V$  и  $P$ , как всегда, означают, что в первой формуле остается постоянным объем подсистемы  $V$ , а во второй — давление  $P$ . Пользуясь этими выражениями, найти для подсистемы  $\langle(\Delta T^2)_V\rangle$ ,  $\langle(\Delta S^2)_V\rangle$ ,  $\langle(\Delta S^2)_P\rangle$ ,  $\langle(\Delta P^2)_T\rangle$ , и  $\langle(\Delta P^2)_S\rangle$ .

**9.39.** Найти молярную энтропию кристаллического  $^{37}\text{Ag}$  при низкой температуре. Ядро  $^{37}\text{Ag}$  имеет спин  $3/2$ . Считать, что температура хоть и близка к абсолютному нулю, но все же достаточна, чтобы обеспечить полную разупорядоченность направлений.

## § 10. Явления переноса. Теплопроводность. Броуновское движение

**10.1.** Сколько столкновений  $z$  испытывает в среднем молекула  $\text{CO}_2$  за одну секунду при нормальном давлении и температуре? Газокинетический диаметр молекулы  $\text{CO}_2$   $d = 10^{-7}$  см.

**10.2.** Сколько столкновений  $\nu$  происходит каждую секунду в  $1 \text{ см}^3$  между молекулами кислорода, находящегося при нормальных условиях? Газокинетический диаметр молекулы кислорода  $d = 3,1 \cdot 10^{-8}$  см.

**10.3.** Идеальный газ нагревают при постоянном давлении. Как изменяются длина свободного пробега  $\lambda$  и число  $z$  столкновений его молекул в одну секунду с изменением температуры?

**10.4.** Идеальный газ сжимают изотермически. Найти зависимость  $\lambda$  и  $z$  от давления.

**10.5.** Идеальный газ сжимают адиабатически. Найти зависимость  $\lambda$  и  $z$  от давления.

**10.6.** Найти молярную теплоемкость процесса, совершаемого идеальным газом, при котором число столкновений между молекулами газа в единице объема в единицу времени остается неизменным.

**10.7.** Найти молярную теплоемкость процесса, совершаемого идеальным газом, при котором число столкновений между молекулами во всем объеме газа в единицу времени остается неизменным.

**10.8.** Во сколько раз изменится число столкновений  $z$ , испытываемых одной молекулой в единицу времени, и длина свободного пробега  $\lambda$  молекул одноатомного газа, если в процессе, при котором теплоемкость газа равна  $C_P/2$ , объем газа увеличивается вдвое?

**10.9.** Во сколько раз изменится длина свободного пробега  $\lambda$  некоторой частицы в смеси аргона и неона, если концентрацию аргона увеличить вдвое, а концентрацию неона уменьшить в два раза? Исходная концентрация обоих газов одинакова. Отношение радиусов аргона и неона равно  $1,2$ . Рассматриваемая частица значительно легче атомов смеси, а ее размеры существенно меньше размеров атомов смеси.

**10.10.** Оценить пробег ультрарелятивистских ядер азота до ядерного взаимодействия в жидководородной камере. Плотность жидкого водорода  $0,07 \text{ г/см}^3$ , а радиусы ядер описываются формулой  $R_A = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см}$ , где  $A$  — относительная атомная масса.

**10.11.** Найти верхний предел давления  $P$  водорода в сосуде объемом  $V = 1 \text{ л}$ , при котором длина свободного пробега молекулы больше размеров сосуда. Газокинетический диаметр молекулы водорода  $d = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , а температура  $T = 300 \text{ К}$ .

**10.12.** Стальной стержень длины  $l = 20 \text{ см}$  с площадью поперечного сечения  $S = 3 \text{ см}^2$  нагревается с одного конца до температуры  $t_1 = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ , а другим концом упирается в лед. Предполагая, что передача тепла происходит исключительно вдоль стержня (без потерь через стенки), подсчитать массу  $m$  льда, растаявшего за время  $\tau = 10 \text{ мин}$ . Теплопроводность стали  $\kappa = 0,16 \text{ кал/(с}\cdot\text{см}\cdot^\circ\text{C)}$ .

**10.13.** Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  заполнено проводящим тепло однородным веществом. Найти распределение температуры в этом пространстве, если температура внутреннего цилиндра  $t_1$ , а внешнего  $t_2$ .

**10.14.** Найти распределение температуры в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , заполненным проводящим тепло однородным веществом если температуры обеих сфер постоянны и равны  $t_1$  и  $t_2$ .

**10.15.** Урановый шар радиуса  $R = 10 \text{ см}$ , помещенный в сосуд с водой, облучается равномерным потоком нейтронов. В результате реакций деления ядер урана в шаре выделяется энергия  $q = 100 \text{ Вт/см}^3$ . Температура воды  $T_0 = 373 \text{ К}$ , теплопроводность урана  $\kappa = 400 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Найти стационарное распределение температуры в шаре, а также температуру в его центре.

**10.16.** По однородному цилиндрическому проводу без изоляции течет постоянный электрический ток. Определить стационарное распределение температуры в проводе, если его поверхность поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ .

**10.17.** Для получения самоподдерживающейся термоядерной реакции в дейтерии (или в смеси дейтерия с тритием) необходимо нагреть вещество до температуры порядка  $10^8 \text{ К}$ . При таких температурах вещество находится в состоянии плазмы, т. е. полностью ионизованного газа. При этом сильно возрастают потери энергии за счет теплопроводности. Как показывает теория, теплопроводность плазмы пропорциональна абсолютной температуре в степени  $5/2$ , т. е.  $\kappa = aT^{5/2}$ , где для дейтериевой или тритиевой плазмы в системе СГС  $a \approx 10^{-6}$ . Внутри малого объема, выделенного в плазме и имеющего форму шара радиуса  $r_0 = 1 \text{ см}$ , поддерживается температура  $T = 10^8 \text{ К}$ . Вне шара температура убывает в соответствии с законами теплопроводности. Какую мощность  $W$  надо подводить к этому объему, чтобы компенсировать потери энергии за счет теплопроводности? К остальным частям плазмы энергия не подводится.

**10.18.** В трубу с водой вставлена термопара медь—константан, один спай которой расположен на оси трубы, а другой — у ее стенки. Труба подвергается воздействию излучения метрового диапазона, которое поглощается водой равномерно во всем объеме, и при этом на 1 см длины трубы выделяется мощность  $W = 0,01$  Вт. Найти термо-ЭДС в стационарном режиме, если чувствительность термопары  $A = 40$  мкВ/К. Теплопроводность воды  $\kappa = 6 \cdot 10^{-3}$  Дж/(см·с·К). Конвекцией пренебречь.

**10.19.** Тонкая пластинка толщины  $2a$  изготовлена из сплава, удельная электропроводность которого  $\lambda$  не зависит от температуры, а теплопроводность пропорциональна абсолютной температуре  $\kappa = \alpha T$ , где  $\alpha$  — известная постоянная (закон Видемана—Франца). К пластинке длины  $l$  приложено напряжение  $U_0$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти распределение температуры по толщине пластинки. Температура поверхностей пластинки  $T_0$ .

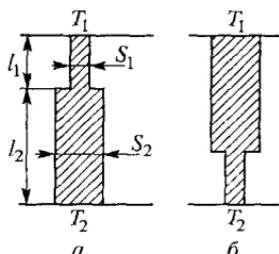


Рис. 367

**10.20.** Чтобы уменьшить поток тепла в кристалл по механической подвеске, экспериментатор решил сделать «тепловой замок» в виде утоньшения на высокотемпературном конце (рис. 367а). Однако затем ему посоветовали перевернуть подвес, т. е. утоньшение сделать на низкотемпературном конце, где меньше коэффициент теплопроводности (рис. 367б). Показать, что на самом деле

теплопритоки в обоих случаях одинаковы. Зависимость коэффициента теплопроводности  $\kappa$  от температуры считать известной, длины и площади поперечного сечения тонкой и толстой частей соответственно равны  $l_1, S_1$  и  $l_2, S_2$ , температуры равны  $T_1$  и  $T_2$ .

**10.21.** Медная пластинка толщины  $\Delta$ , находящаяся при температуре  $T_m$ , опущена в воду, температура которой  $T_0 = 0^\circ\text{C} > T_m$ . Найти связь между толщиной намерзающего льда  $x$  и временем  $t$ . Считать заданными удельную теплоемкость меди  $c$  и ее плотность  $\rho_m$ ; плотность льда  $\rho_l$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и удельную теплоту

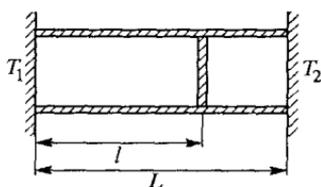


Рис. 368

плавления  $q$ . Толщина льда настолько мала, что теплота, идущая на изменение температуры льда, все время мала по сравнению с теплотой образования нового льда.

**10.22.** Цилиндрический сосуд длины  $L$ , боковые стенки которого не проводят тепло, а торцы проводят, зажат между тепловыми резервуарами с температурами  $T_1$  и  $T_2$  (рис. 368). Внутри сосуда находится

тонкий поршень, проводящий тепло, по обе стороны от которого в сосуде содержится по одному молю идеального газа. Определить, какое положение займет поршень после установления равновесия. Теплопроводность газа считать во всем объеме одинаковой.

**10.23.** В два рядом стоящих сосуда опущен  $U$ -образный медный стержень с поперечным сечением  $S = 1 \text{ см}^2$ . В каждый сосуд налита вода с массой  $M = 900 \text{ г}$ . Начальные температуры воды в сосудах  $t_{10} = 65^\circ\text{C}$ ,  $t_{20} = 10,6^\circ\text{C}$ . Находящаяся в воздухе часть стержня имеет длину  $l = 24 \text{ см}$ . Через какое время  $\tau$  разность температур между сосудами делается равной  $t_1 - t_2 = 20^\circ\text{C}$ ? Считать, что обмен теплом между сосудами осуществляется исключительно через стержень. Теплопроводность меди  $\kappa = 3,9 \text{ Вт}/(\text{К}\cdot\text{см})$ .

**10.24.** Сосуд, наполненный водой с массой  $M = 1,2 \text{ кг}$ , стоит в печи. Температура его внешних стенок  $t_0 = 150^\circ\text{C}$ . Нагреваемая поверхность воды  $S = 300 \text{ см}^2$ , толщина стенок сосуда  $h = 1 \text{ см}$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa = 0,008 \text{ Вт}/(\text{К}\cdot\text{см})$ . Сколько времени потребуется для нагревания воды от  $t_1 = 14^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ?

**10.25.** Капля воды радиуса  $a = 0,2 \text{ см}$ , падающая в воздухе с температурой  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , попадает в слой воздуха с температурой  $t_2 = -10^\circ\text{C}$ . Оценить время  $\tau$ , в течение которого она замерзнет. Теплота плавления льда  $q = 335 \text{ Дж}/\text{г}$ , коэффициент теплопроводности льда  $\kappa = 0,022 \text{ Вт}/(\text{К}\cdot\text{см})$ . Теплом, выделяющимся при охлаждении льда, можно пренебречь по сравнению с теплом, выделяющимся при замерзании воды. В этом приближении нет смысла различать плотность льда и воды. Температуру поверхности капли все время считать равной температуре окружающего воздуха.

**10.26.** Два теплоизолированных тела 1 и 2 с бесконечными теплопроводностями (например два куска металла) соединены между собой однородным, также теплоизолированным стержнем длины  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$  и теплопроводностью  $\kappa$ . Теплоемкости тел  $C_1$  и  $C_2$  очень велики по сравнению с теплоемкостью стержня. Найти температуры тел  $T_1$  и  $T_2$  в любой момент времени  $t$ , если при  $t = 0$  они были равны соответственно  $T_{10}$  и  $T_{20}$ . Найти также разность этих температур и время  $t_{1/2}$ , по истечении которого она уменьшается в два раза.

**10.27:** Определить толщину льда, образующегося в течение заданного времени  $t$  на спокойной поверхности озера. Считать, что температура  $T$  окружающего воздуха все время постоянна и равна температуре наружной поверхности льда ( $t < t_{\text{пл}}$ , где  $t_{\text{пл}}$  — температура плавления льда). Произвести численный расчет, предполагая, что  $t = -10^\circ\text{C}$ . Для льда  $\kappa = 2,22 \cdot 10^5 \text{ эрг}/(\text{с}\cdot\text{см}\cdot^\circ\text{C})$ ,  $q = 3,35 \cdot 10^9 \text{ эрг}/\text{г}$ ,  $\rho = 0,9 \text{ г}/\text{см}^3$ .

**10.28:** Сферический кусок льда (с начальным радиусом  $R_0 = 1 \text{ см}$ ) погружен в большую массу воды с температурой  $10^\circ\text{C}$ . Предполагая, что теплопередача в жидкости связана только с ее теплопроводностью, определить время  $\tau$ , в течение которого лед полностью растает. Теплопроводность воды  $\kappa = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}/(\text{с}\cdot\text{см}\cdot^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $q = 335 \text{ Дж}/\text{г}$ .

**10.29.** Жидкий гелий при температуре  $T_1$  и давлении насыщенных паров  $P_1$  течет по цилиндрической кварцевой трубке, наружная поверхность которой омывается жидким азотом при температуре

$T_2$ . При таких низких температурах теплопроводность кварца сильно зависит от температуры:  $\kappa = \alpha T^3$ . Внутренний диаметр трубки —  $R_1$ , внешний —  $R_2$ . На какую максимальную длину  $L$  может быть рассчитан такой трубопровод для подачи жидкого гелия с расходом (на выходе)  $q$  [г/с], если допустимые потери жидкости при испарении 50%? Удельная теплота испарения  $\lambda$ .

**10.30.** Оценить глубину промерзания почвы на широте Москвы за бесснежную зиму ( $\sim 120$  суток). Теплопроводность грунта принять  $\kappa \sim 1$  Вт/(м·К), его теплоемкость  $c \sim 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К).

**10.31.** Найти стационарное распределение температуры в идеальном газе между двумя плоскопараллельными бесконечными пластинами, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга. Температуры пластин  $T_1$  и  $T_2 > T_1$  поддерживаются постоянными. Зависимостью эффективного сечения столкновения молекул от температуры пренебречь.

**10.32.** По оси длинного цилиндра, заполненного идеальным газом, расположена тонкая проволока радиуса  $r$ , по которой течет ток. При этом выделяется постоянная мощность на единицу длины  $q$  [Вт/м]. Температура  $T_0$  внешнего цилиндра поддерживается постоянной, его радиус  $R$ . Найти разность температур  $\Delta T$  между нитью и цилиндром, учитывая зависимость коэффициента теплопроводности газа от температуры. При температуре  $T_0$  теплопроводность известна и равна  $\kappa_0$ .

**10.33.** Сфера радиуса  $R$  имеет постоянную температуру  $T_0$  и находится в бесконечной среде идеального газа. На большом удалении от сферы температура газа пренебрежимо мала по сравнению с  $T_0$ . Определить тепловую мощность  $q$  [Вт], которая подводится к сфере. Учесть зависимость теплопроводности газа от температуры. При температуре  $T_0$  коэффициент теплопроводности равен  $\kappa_0$ .

**10.34.** Вдоль оси длинной вертикальной цилиндрической трубки натянута тонкая металлическая нить, по которой можно пропускать электрический ток. Сначала трубка наполнена воздухом, и нить накалиена электрическим током до температуры 830 °С. Затем (при выключенном токе) трубка заполняется водородом при атмосферном давлении. Пренебрегая потерями энергии на лучеиспускание, вычислить температуру нити  $t$ , если по ней пропускается ток прежней мощности. Отношение коэффициентов теплопроводности водорода и воздуха равно 5,8. Температуру стенок трубки можно считать равной комнатной температуре 18 °С.

**10.35.** Для измерения теплопроводности азота им наполнили пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами, радиусы которых  $r_1 = 0,5$  см и  $r_2 = 2$  см. Внутренний цилиндр равномерно нагревался спиралью, по которой протекал ток  $i = 0,1$  А. Спротивление спирали, приходящееся на единицу длины цилиндра, равно  $R = 0,1$  Ом. Внешний цилиндр поддерживался при температуре  $t_2 = 0$  °С. При установившемся процессе оказалось, что температура внутреннего цилиндра равна  $t_1 = 93$  °С. Найти газокINETический

диаметр  $d$  молекулы азота. Давление газа в таких опытах берется малым (порядка десятков мм рт. ст.), и поэтому конвекцией можно пренебречь.

**10.36.** В цилиндрическом сосуде постоянного объема находится идеальный газ при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ . Боковые стенки сосуда — теплоизолирующие. Днище сосуда нагревают до  $T = 4T_0$ , а температуру крышки поддерживают равной  $T_0$ . Определить установившееся давление в сосуде. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры.

**10.37.** В цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ при температуре  $T_0$ . Боковые стенки сосуда не пропускают тепла. Днище сосуда нагревают до  $T = 9T_0$ , а температура поршня поддерживается равной  $T_0$ . Во сколько раз изменится первоначальный объем после установления стационарного режима теплопередачи? Коэффициент теплопроводности зависит от температуры. Внешнее давление постоянно.

**10.38.** Оценить, при каком давлении  $P$  воздуха в нем может распространяться звук с частотой  $\nu = 100$  кГц при температуре  $T$ .

**10.39.** Оценить, на какое расстояние распространяется звук частоты  $10^3$  Гц в спокойной атмосфере при нормальных условиях. Считать, что затухание звука обусловлено только теплопроводностью.

**10.40.** Найти среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекулы кислорода при нормальном давлении, если коэффициент диффузии кислорода при том же давлении и температуре  $0^\circ\text{C}$  равен  $D = 0,19$  см<sup>2</sup>/с.

**10.41.** При политропическом расширении идеального газа коэффициент диффузии его молекул оставался неизменным. Определить показатель политропы  $n$ .

**10.42.** Найти изменение энтропии 64 г газообразного кислорода в процессе, в результате которого коэффициент теплопроводности вырос в 2 раза, а коэффициент диффузии остался неизменным.

**10.43.** Как изменится коэффициент диффузии молекул одноатомного газа при его адиабатическом расширении в 8 раз?

**10.44.** Найти теплоемкость политропического процесса при котором коэффициент диффузии в идеальном газе остается постоянным.

**10.45.** Газообразный водород при нормальных условиях, непрерывно протекая по трубе, на небольшом участке трубы диффундирует через стенку с чрезвычайно мелкими порами в откачиваемое пространство (рис. 369).

Во сколько раз изменится концентрация дейтерия в откачиваемом газе против исходной (естественной) концентрации, близкой к  $2 \cdot 10^{-2}\%$ ?

**10.46.** Два сосуда разделены пористой перегородкой. В начальный момент первый сосуд наполнен гелием ( $A_1 = 4$ ), а второй — ксеноном ( $A_2 = 131$ ) при нормальных условиях. Перегородка не

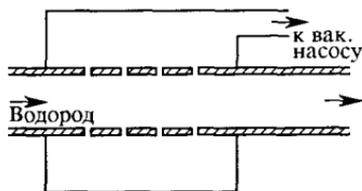


Рис. 369

влияет на скорость диффузии, она лишь препятствует перемешиванию газов при заполнении системы. Через некоторое время концентрация Хе в Не на расстоянии  $l = 1$  см от перегородки стала равной 0,01 атомных процентов. На каком расстоянии  $x$  от перегородки в этот момент концентрация Не в Хе также составит 0,01 атомных процентов? Сравнить также частоту соударений  $Z_1$  атомов гелия в ксеноне с частотой соударений  $Z_2$  атомов ксенона в гелии.

**10.47.** Сосуд представляет собой сферическую бомбу радиуса  $R_0$ , к которой пристыкована трубочка радиуса  $r$  и длины  $l$ . Трубочка присоединена к масс-спектрометру, а весь сосуд заполнен некоторым газом. Концентрация газа  $n$ , температура  $T$ , молярная масса  $\mu$ . Эффективное сечение рассеяния молекул  $\sigma$  таково, что  $(nr)^{-1} \gg \sigma \gg (nR_0)^{-1}$ . Внутри бомбы в некоторый момент времени возникает примесь изотопа того же газа, незначительно отличающегося по массе. Оценить время, через которое масс-спектрометр сможет его зарегистрировать.

**10.48.** В атмосфере газа  $A$  имеется точечный источник другого газа  $B$ , испускающий атомы с тепловыми скоростями, которые диффундируют в газе  $A$ . Длина свободного пробега атома  $B$  в газе  $A$  равна  $\lambda$ . В среднем после  $n$  соударений ( $n \gg 1$ ) атомы  $B$  соединяются с атомами  $A$ , образуя молекулы  $AB$ . Определить средний квадрат удаления атомов  $B$  от источника до момента образования молекул  $AB$ .

**10.49.** Свободный пробег молекул  $H_2$  в Не при нормальных условиях равен приблизительно  $3 \cdot 10^{-5}$  см. Найти среднеквадратичное смещение  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  молекул  $H_2$  в Не за 1 с; за 100 с. Как изменится результат, если: 1) давление Не увеличить в 4 раза; 2) температуру Не увеличить в 4 раза; 3) давление и температуру увеличить в 4 раза?

**10.50.** В сосуде объема 1 л находится воздух при нормальных условиях. В некоторой точке искусственно создано скопление молекул радиоактивного изотопа азота. Оценить время, через которое молекулы радиоактивного азота равномерно распределятся по всему объему.

**10.51.** В дальнем углу комнаты открыли флакон с духами. Человек чувствует запах духов через одну минуту. Температура воздуха в комнате  $t_1 = 30^\circ\text{C}$ . Оценить время, через которое человек почувствует запах духов в той же комнате, в том же месте, если температура воздуха упадет до  $t_2 = -30^\circ\text{C}$ .

**10.52.** По распространению радиоактивных газов после ядерных взрывов известно, что, благодаря турбулентности, время перемешивания по всей земной атмосфере составляет около одного года. Во сколько раз быстрее происходит процесс турбулентного перемешивания в условиях атмосферы по сравнению с молекулярной диффузией?

**10.53.** Рассеянный физик, уходя в отпуск, забыл в лаборатории тонкостенный резиновый мешок с гелием объемом около 20 л. Когда он вернулся, гелий весь продиффундировал наружу. Оценить изменение энтропии гелия. В обычном воздухе на один атом гелия приходится  $10^7$  молекул других газов. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать гелий обратно в мешок?

**10.54.** Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в некотором газе равна  $10^{-5}$  см, найти (приближенно) среднюю скорость дрейфа  $v$  иона в этом газе под действием однородного электрического поля  $E = 300$  В/см. Температура газа комнатная.

**10.55.** При прохождении электрического тока через слабо ионизованный газ энергия ионов превышает тепловую энергию нейтральных атомов. Оценить величину напряженности электрического поля, при которой это превышение энергии становится порядка тепловой энергии  $kT$ , если давление газа  $P = 0,01$  мм рт. ст., а эффективное сечение рассеяния ионов на атоме  $\sigma = 5 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>.

**10.56.** Оценить температуру  $T$  электронов,двигающихся под действием электрического поля напряженности  $E = 100$  В/см в воздухе при нормальных условиях. Концентрация электронов мала, сечение столкновения их с молекулами воздуха  $\sigma \approx 10^{-15}$  см<sup>2</sup>.

**10.57.** При прохождении быстрых заряженных частиц через камеру Вильсона, наполненную аргоном при давлении  $P = 1$  атм и насыщенными парами воды, происходит образование ионов аргона, являющихся центрами конденсации паров воды. Считая, что движение ионов обусловлено только диффузией, оценить ширину следа частиц, если конденсация наступает через  $\tau = 0,01$  с после пролета частиц. Эффективное сечение рассеяния ионов аргона на атомах  $\sigma = 10^{-15}$  см<sup>2</sup>. Атомная масса аргона  $A = 40$ , температура  $T = 300$  К.

**10.58.** При наблюдении за поведением капли жидкости, несущей на себе заряд  $q = 4,8 \cdot 10^{-10}$  ед. СГСЭ, в камере, наполненной водородом, было обнаружено, что сила тяжести, действующая на каплю, может быть уравновешена электрическим полем с напряженностью  $E = 10^4$  В/см. Наблюдение за каплей при включенном поле показало, что за время  $\tau = 100$  с капля передвигалась по сложной траектории и отошла от своего первоначального положения на величину  $\Delta r = 10^{-2}$  см. Найти скорость установившегося падения капли при выключенном поле. Давление водорода в камере  $P = 1$  атм, плотность  $\rho = 0,09$  г/л.

**10.59.** Оценить, на какое среднее расстояние  $l$  от своего исходного положения удалится за  $t = 10$  с молекула воздуха при нормальных условиях.

**10.60.** Для защиты от газообразных радиоактивных продуктов распада ториевую руду засыпают песком. При этом радиоактивный газ торон  ${}^{220}_{86}\text{Rn}$ , выделяемый рудой, во время прохождения через песок в значительной мере распадается. Вычислить расстояние, на котором концентрация торона падает в  $10^5$  раз. Период полураспада торона  $T = 54,5$  с, а коэффициент диффузии его в песке  $D = 0,04$  см<sup>2</sup>/с. Диффузию считать одномерной.

**10.61.** Космические лучи блуждают в Галактике, отклоняясь в межзвездных магнитных полях. Этот процесс подобен диффузии. Найти время  $\tau$ , за которое частицы пройдут путь порядка размеров Галактики  $R \approx 5 \cdot 10^{22}$  см, если эффективная длина свободного пробега  $\lambda \approx 3 \cdot 10^{20}$  см.

**10.62.** Изотермическая эффузия газа через пористую перегородку (поры которой малы по сравнению с длиной свободного пробега) используется для разделения изотопов. Естественная смесь изотопов помещается в сосуд с пористыми стенками. Газ, прошедший через поры сосуда в результате эффузии, откачивается и собирается в специальном резервуаре. С ним производится второй цикл эффузии, затем третий и т. д., пока не будет достигнута требуемая степень разделения изотопов. Сколько циклов эффузии необходимо произвести, чтобы отношение концентраций частиц легкого и тяжелого изотопов увеличилось в 10 раз, если относительные молекулярные массы их равны соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ?

**10.63.** Вязкость азота при температуре  $0^\circ\text{C}$  составляет величину  $\eta = 16,8 \cdot 10^{-5}$  дин·с/см<sup>2</sup>. Найти значение средней длины свободного пробега  $\lambda$  молекул азота при этих условиях.

**10.64.** Вязкость аргона (относительная атомная масса  $A = 40$ ) при  $0^\circ\text{C}$   $\eta = 21 \cdot 10^{-5}$  дин·с/см<sup>2</sup>. Вычислить следующие величины для аргона при нормальной температуре и давлении: 1) среднюю скорость теплового движения атомов; 2) среднюю длину свободного пробега атома; 3) среднее число  $\nu$  столкновений атомов в 1 см<sup>3</sup> за 1 с; 4) газокинетическое эффективное сечение атома  $\sigma$ ; 5) газокинетический радиус атома аргона  $r$ .

**10.65.** Согласно экспериментальным данным, отношение коэффициентов вязкости азота и водорода равно 1,94. Найти отношение коэффициентов теплопроводности тех же газов, пользуясь представлениями классической кинетической теории газов.

**10.66.\*** Определить расход массы газа  $Q$  при стационарном изотермическом пуазейлевом течении по цилиндрической трубе длины  $l$  и радиуса  $r$ , на концах которой поддерживаются давления  $P_1$  и  $P_2$  ( $P_1 > P_2$ ).

**10.67.** Для определения вязкости  $\eta$  углекислого газа им наполнили колбу с объемом  $V = 1$  л при давлении  $P_1 = 1600$  мм рт. ст. Затем открыли кран, позволяющий  $\text{CO}_2$  вытекать из сосуда через капилляр длины  $l = 10$  см и диаметра  $D = 0,1$  мм. Через время  $\tau = 22$  мин давление в колбе понизилось до  $P_3 = 1350$  мм рт. ст. Вычислить из этих данных вязкость и газокинетический диаметр  $d$  молекулы  $\text{CO}_2$ . Наружное атмосферное давление  $P_2 = 735$  мм рт. ст. Процесс можно считать изотермическим, происходящим при  $15^\circ\text{C}$ .

**10.68.** Камера объема  $V = 100$  л откачивается в помощью идеального насоса (т. е. улавливающего весь попадающий в него газ) через трубу радиуса  $r = 2$  см, длины  $L = 1$  м. Оценить, сколько времени должна длиться откачка камеры от начального давления  $P_1 = 1$  атм до давления  $P_2 = 10^{-1}$  мм рт. ст. Коэффициент вязкости воздуха считать равным  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  П.

**10.69.** Камера объема  $V = 100$  л откачивается при комнатной температуре с помощью идеального насоса (т. е. улавливающего все попадающие в него молекулы воздуха) через трубку радиуса

$r = 2$  см и длины  $L = 1$  м. Оценить время откачки от давления  $P_1 = 10^{-4}$  Тор до давления  $P_2 = 10^{-7}$  Тор.

**10.70.** Из большого объема откачивается воздух при давлении  $10^{-4}$  Тор и температуре  $T = 300$  К через трубку длины  $L = 2$  м и радиуса  $r = 10$  см. Насос имеет производительность  $\dot{V}_1 = 1000$  л/с. При какой производительности насоса  $\dot{V}_2$  будет обеспечена такая же скорость откачки (т. е. масса газа за одну секунду), если насос присоединен непосредственно к откачиваемому объему?

**10.71.** Сосуд через трубку откачивается идеальным (т. е. улавливающим все попадающие в него молекулы) высоковакуумным насосом. Из-за течей в стенках сосуда давление в нем не падает до нуля, а после длительной откачки устанавливается на уровне  $10^{-6}$  Тор. Как изменится этот предельный вакуум, если диаметр трубки уменьшить вдвое?

**10.72.** Из сосуда воздух вытекает в атмосферу через трубку, изготовленную из хорошего теплоизолятора. Найти массу газа  $m$ , вытекающую за секунду из трубки, если давление и температура в сосуде равны соответственно  $P_1$  и  $T_1$ , наружное давление —  $P_0$ , длина трубки равна  $l$ , ее диаметр —  $d$ . Поток газа в трубке считать ламинарным; пренебречь зависимостью вязкости  $\eta$  от температуры.

**10.73.** Вода вытекает из широкого открытого сосуда через цилиндрический капилляр радиуса  $R = 1$  мм и длины  $l = 10$  см, расположенный у дна сосуда. Какая энергия  $N$  расходуется каждую секунду на выделение тепла, когда высота воды в сосуде  $h = 5$  см? Температура окружающего воздуха равна  $20^\circ\text{C}$ .

**10.74.\*** Оценить массу  $M$  жидкого воздуха, испарившегося за время  $\tau = 1$  ч из плохо откачанного сосуда Дьюара, если давление воздуха (при комнатной температуре  $T_0 = 293$  К), оставшегося между стенками, равно  $P = 10^{-3}$  мм рт. ст. Поверхность сосуда  $S = 600$  см<sup>2</sup>, удельная теплота испарения жидкого воздуха  $\lambda = 48,4$  кал/г, а его температура  $T = 93$  К. Зазор между стенками сосуда мал по сравнению с длиной свободного пробега.

**Указание.** Для упрощения считать, что молекулы воздуха, попеременно ударяясь о холодную и теплую стенки, каждый раз отражаются от них со средними кинетическими энергиями поступательного движения, соответствующими температурам стенок. Различием между средней и средней квадратичной скоростями молекул пренебречь, рассчитывая скорость молекул по формуле для средней квадратичной скорости.

**10.75.\*** Течение ультраразреженного газа через трубу можно рассматривать как процесс диффузии. Коэффициент диффузии определяется исключительно столкновениями молекул газа со стенками трубы. Столкновениями молекул между собой можно полностью пренебречь. Роль длины свободного пробега играет диаметр трубы  $2r$ . Исходя из этих представлений, оценить число молекул  $N$ , каждую секунду проходящих через поперечное сечение цилиндрической трубы длины  $l$ , если на одном конце трубы концентрация молекул газа равна  $n_1$ , а на другом — нулю. Течение считать изотермическим.

**10.76.** Решить предыдущую задачу в предположении, что на одном конце трубы концентрация молекул равна  $n_1$ , а на другом —  $n_2$ . Результат сравнить с формулой Пуазейля.

**10.77.** Два сосуда одинакового объема соединены трубками. Диаметр одной из трубок очень велик, а другой очень мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа, находящегося в сосуде. Первый сосуд поддерживается при постоянной температуре  $T_1 = 800$  К, а второй — при постоянной температуре  $T_2 = 200$  К. В каком направлении будет перетекать газ по узкой трубке, если перекрыть краном широкую трубку? Какая масса  $m$  газа перейдет при этом из одного сосуда в другой, если общая масса газа в обоих сосудах равна  $M$ ?

**10.78.** Стекланный сосуд с толщиной стенок  $l = 5$  мм и объемом  $V = 1$  л наполнен азотом и окружен вакуумом. В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал радиуса  $a = 0,1$  мм. Начальное давление газа в сосуде настолько мало, что радиус канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время  $\tau$ , по истечении которого давление газа в сосуде уменьшится в  $e$  раз, если температура поддерживается постоянной и равной  $T = 300$  К.

**10.79.** Полностью эвакуированный стекланный сосуд с толщиной стенок  $l = 3$  мм и объемом  $V = 1$  л погружен в атмосферу углекислого газа  $\text{CO}_2$ . В стенке сосуда образовался узкий цилиндрический канал диаметра  $D = 0,1$  мм. Давление окружающего газа настолько мало, что диаметр канала пренебрежимо мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Как меняется во времени концентрация молекул газа в сосуде? Определить время  $\tau$ , по истечении которого давление газа в сосуде будет составлять  $(e - 1)/e = 0,628$  от давления окружающего газа при условии, что температура поддерживается постоянной и равной  $T = 300$  К.

**10.80.** Сосуды с объемами  $V_1$  и  $V_2$  соединены между собой цилиндрическим капилляром радиуса  $a$  и длины  $l$ , по которому происходит изотермическое кнудсеновское перетекание газа из одного сосуда в другой. Как будет меняться во времени концентрация молекул газа в сосудах  $n_1$  и  $n_2$ , если их начальные значения были равны  $n_{10}$  и  $n_{20}$ ?

**10.81.** Оценить по порядку величины установившуюся скорость, с которой будет двигаться в сильно разреженном воздухе плоский диск, одна из сторон которого нагрета до температуры  $T_1 = 310$  К, а другая до температуры  $T_2 = 300$  К. Температура воздуха  $T = 300$  К.

**10.82.** Определить, на какой угол  $\varphi$  повернется диск, подвешенный на упругой нити, если под ним на расстоянии  $h = 1$  см вращается с угловой скоростью  $\omega = 50$  рад/с второй такой же диск. Радиус дисков  $R = 10$  см, модуль кручения нити  $f = 100$  дин·см/рад, вязкость воздуха считать равной  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин·с/см<sup>2</sup>. Краевыми эффектами пренебречь. Движение воздуха между дисками считать ламинарным.

**10.83:** Решить предыдущую задачу в предположении, что диски помещены в сильно разреженный воздух с давлением  $P = 10^{-4}$  Тор, когда длина свободного пробега молекул воздуха велика по сравнению с расстоянием между дисками. Для упрощения расчета считать, что все молекулы движутся с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, равными средней скорости молекул воздуха  $v = 450$  м/с.

**10.84.** Известно, что в атмосфере Венеры, состоящей в основном из  $\text{CO}_2$ , сплошной облачный покров на высоте  $H = 50$  км вращается относительно планеты вокруг ее оси с периодом  $T = 3,6 \cdot 10^4$  с. Считая движение ламинарным, оценить мощность  $N$  на единицу площади поверхности, диссипирующую при этом движении вблизи экватора. Атмосфера предполагается изотермической с температурой  $T = 600$  К, радиус Венеры  $R = 6000$  км.

**10.85.** Характерный линейный масштаб широкого атмосферного турбулентного потока —  $L$ . В соответствии с законом Колмогорова—Обухова среднеквадратичное отклонение разности скоростей воздуха для двух точек наблюдения, расположенных на расстоянии  $r \ll L$  имеет вид  $\langle \Delta v^2 \rangle = C^2 r^{2/3}$ , где  $C$  — некоторая постоянная порядка единицы. Оценить характерный размер  $l$  вихря в турбулентном потоке, если вязкость среды есть  $\eta$ , а ее плотность —  $\rho$ .

**10.86:** В жидкости находятся одинаковые броуновские частицы, концентрация которых зависит только от одной координаты  $x$ . Выравнивание концентрации частиц происходит вследствие диффузии. Выразить коэффициент диффузии броуновских частиц  $D$  через средний квадрат смещения частицы в направлении оси  $X$  за время  $t$ .

**10.87:** Подвижностью  $B$  незаряженной броуновской (или какой-либо другой) частицы называется коэффициент пропорциональности между скоростью  $u$  установившегося движения ее под действием постоянной силы  $f$  и величиной самой силы:

$$u = Bf.$$

Взвесь одинаковых броуновских частиц в жидкости находится в поле силы тяжести. Написать выражение для суммарного потока частиц вследствие диффузии и поля силы тяжести. В стационарном состоянии суммарный поток должен равняться нулю. В то же время стационарное распределение броуновских частиц по высоте дается формулой Больцмана (барометрической формулой). Исходя из этих соображений, установить связь между подвижностью частицы и коэффициентом диффузии.

**10.88.** Используя результаты решения двух предыдущих задач, найти связь между средним квадратом смещения броуновской частицы за время  $t$  в каком-либо определенном направлении  $\overline{\Delta x^2}$  с подвижностью этой частицы. Какой вид принимает эта связь для шарообразной частицы радиуса  $a$ ? (По формуле Стокса  $B = 1/(6\pi\eta a)$ , где  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости.)

**10.89.** Определить среднее квадратичное горизонтальное перемещение зерен гуммигута в воде при температуре  $20^\circ\text{C}$  за 1 мин, если известно, что радиус их  $a = 0,5$  мкм, а вязкость воды  $\eta = 0,01$  дин·с/см<sup>2</sup>.

**10.90.** Согласно Эйнштейну и Смолуховскому, число Авогадро  $N$  можно определить, наблюдая броуновское движение зарен гуммигута и измеряя среднее квадратичное перемещение их в некотором фиксированном направлении. Чему равно это число, если среднее квадратичное перемещение за 5 мин зерен гуммигута радиуса  $a = 0,385$  мкм в глицерине при температуре  $20^\circ\text{C}$  равно  $1,5$  мкм? Вязкость глицерина  $\eta = 1,49$  дин·с/см<sup>2</sup>.

**10.91.** При обработке экспериментальных данных, относящихся к броуновскому движению, удобнее и проще вычислять не  $\langle \Delta x^2 \rangle$ , а  $\langle |\Delta x| \rangle$ . Предполагая, что распределение смещений  $\Delta x$  подчиняется закону ошибок Гаусса, найти выражение для среднего смещения броуновской частицы  $\langle |\Delta x| \rangle$  за время  $\tau$ .

**10.92.** Капелька масла массы  $m = 10^{-10}$  г падает в воздухе с высоты  $h = 1$  м, совершая при этом броуновское движение. Предполагая, что к ее падению применима формула Стокса, найти средний квадрат  $\langle r^2 \rangle$  отклонения капельки от ожидаемой точки падения, если температура воздуха  $T = 300$  К. Проверить, выполняются ли условия применимости формулы Стокса, если плотность масла  $\rho = 0,9$  г/см<sup>3</sup>, а вязкость воздуха  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин·с/см<sup>2</sup>.

**10.93.** При измерении заряда электрона по методу Милликена наблюдается броуновское движение масляных капель. При этом можно найти не только заряд электрона, но и число Авогадро. Обозначим через  $v_1$  скорость установившегося заряда капли в поле тяжести при отсутствии электрического поля. Пусть в электрическом поле напряженности  $E$  капля поднимается вверх с установившейся скоростью  $v_2$ . Из этих наблюдений, как известно, можно вычислить заряд капли  $e$ . Пусть  $\langle \Delta x \rangle^2$  — средний квадрат смещения частицы за время  $\tau$  в направлении (горизонтальной) оси  $X$ . Считая, что установившаяся скорость частицы пропорциональна приложенной силе, найти выражение для  $Ne$ , где  $N$  — число Авогадро.

**10.94.** При наблюдении броуновского движения масляной капли в конденсаторе Милликена (см. предыдущую задачу) было найдено  $\langle \Delta x \rangle^2 = 1,05 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>,  $\tau = 10$  с,  $v_1 + v_2 = 0,0268$  см/с,  $T = 300$  К. Напряжение на обкладках конденсатора  $V = 940$  В, расстояние между пластинами конденсатора  $d = 0,7$  см. Вычислить по этим данным число Авогадро  $N$ . Измеренный на опыте заряд капли оказался равным заряду электрона  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГСЭ.

**10.95.** Оценить минимальный радиус  $R_{\min}$  сферических водяных капель тумана, начиная с которого происходит падение этих капель на Землю. Температура атмосферы постоянна  $T = 300$  К. Вязкость воздуха  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин·с/см<sup>2</sup>.

**10.96.** В сферическом сосуде радиуса  $R = 0,015$  см при температуре  $T = 300$  К и давлении в несколько атмосфер в воздухе находятся

шарообразные частицы различного радиуса  $r$ . Плотность пылинки  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . При столкновении со стенкой частицы прилипают к ней. Коэффициент прилипания частиц не зависит от их размера и не уменьшается со временем. Концентрация пыли достаточно мала, так что столкновениями пылинок друг с другом можно пренебречь. Оценить радиус частиц пыли, которые будут наиболее долго удерживаться в воздухе.

**10.97.** Определить величину среднеквадратичного момента импульса капельки воды радиуса  $r = 10^{-5} \text{ см}$ , совершающей броуновское движение при  $T = 300 \text{ К}$ .

**10.98.** В микроскоп рассматривают тонкий слой крови. Какое время потребуется, чтобы заметить броуновское смещение эритроцитов (красных кровяных телец), если минимальное расстояние, которое можно зафиксировать, составляет  $l = 10^{-6} \text{ м}$ ? Вязкость крови  $\eta = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , эритроцит считать шариком радиуса  $r = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Температура  $t = 27^\circ \text{ C}$ .

**10.99.** Оценить размер алюминиевой частицы, взвешенной в жидкости с плотностью  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  и вязкостью  $\eta = 1 \text{ П}$ , для которой скорость вязкого падения сравнивается со скоростью теплового движения при комнатной температуре. Будут ли выпадать в осадок такие частицы в алюминиевой краске?

**10.100.** Жидкий азот хранится в цилиндрическом сосуде диаметром  $d = 10 \text{ см}$ , обернутом теплоизоляцией из пенопласта с наружным диаметром  $D = 30 \text{ см}$ . Считая, что теплопередача в пенопласте определяется теплопроводностью воздуха, заключенного в порах, определить, за какое время произойдет испарение 1% жидкого азота. Жидкий азот заполняет объем полностью и находится при температуре кипения  $t_1 = -195^\circ \text{ C}$ . Температура окружающего воздуха  $t_2 = 25^\circ \text{ C}$ . Коэффициент теплопроводности воздуха при температуре  $t_0 = 0^\circ \text{ C}$  равен  $\chi_0 = 0,025 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ . Теплота парообразования азота  $\Lambda = 5,6 \text{ кДж/моль}$ . Плотность жидкого азота  $0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

**10.101.** В рацион питания космонавта было включено молоко, которое за несколько суток до старта залили в вертикально расположенный цилиндрический сосуд. За это время в молоке образовался состоящий из капелек жира слой, толщина которого оказалась значительно меньше высоты сосуда. Успеет ли восстановиться однородное распределение капелек жира в сосуде за такое же время пребывания в невесомости? Считать, что размер капелек во времени не меняется и что запуск ракеты (ввиду его кратковременности) не привел к перемешиванию молока.

**10.102.** Оценить число Рейнольдса для отработанных газов в выхлопной трубе автомобиля «Москвич». Диаметр ее около 20 мм, а температура газов в ней  $\sim 100^\circ \text{ C}$ . Расход бензина при езде со скоростью 60 км/ч около 8 кг на 100 км. Бензин представляет собой смесь углеводородов типа  $\text{C}_n\text{H}_{2n}$  и молекулярной массой  $\sim 10^2$ . При оценке вязкости выхлопных газов эффективное сечение соударений можно считать  $\sim 10^{-14} \text{ см}^2$ .

**10.103.** Найти стационарный поток пара от сферической капли жидкости радиуса  $a$  в процессе ее испарения (или конденсации пара на капле). Коэффициент диффузии паров жидкости в воздухе равен  $D$ , плотность пара на большом расстоянии от капли  $\rho_\infty$ , плотность насыщенного пара  $\rho_n$ . Найти также плотность пара  $\rho$  в зависимости от расстояния  $r$  от центра капли. Зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости не учитывать.

**10.104.** Найти время испарения  $\tau_{\text{исп}}$  водяной капли с начальным радиусом  $a$  в воздухе с относительной влажностью  $\varphi$  и температурой  $t = 20^\circ\text{C}$ . Рассмотреть два случая: 1)  $\varphi = 40\%$ ,  $a = 1\text{ мм}$ ; 2)  $\varphi = 99\%$ ,  $a = 1\text{ мкм}$ . При  $t = 20^\circ\text{C}$  давление насыщенных водяных паров  $P_n = 17,5\text{ мм рт. ст.}$ , коэффициент диффузии  $D = 0,22\text{ см}^2/\text{с}$ .

**У к а з а н и е.** Считать процесс испарения капли стационарным. Это допустимо, если плотность пара  $\rho_n$  гораздо меньше плотности жидкости  $\rho_j$ .

**10.105.** В цилиндрическом сосуде с площадью основания  $S = 100\text{ см}^2$  налита вода. Наверху сосуда находится вещество, поглощающее водяные пары (давление паров вверху равно нулю). Расстояние между уровнем воды и поглотителем  $H = 10\text{ см}$ . Температура системы  $T = 300\text{ К}$ . Определить давление паров у поверхности воды, если известно, что за  $t = 1\text{ ч}$  количество воды уменьшилось на  $\Delta m = 0,14\text{ г}$ . Средний свободный пробег  $\lambda$  молекул в системе воздух—пар принять равным  $10^{-5}\text{ см}$ . Пар у поверхности воды считать насыщенным.

**10.106.** Найти время испарения воды из трубки длины  $l = 10\text{ см}$ , запаянной с одного конца. Температура  $t = 27^\circ\text{C}$ . Первоначально вода заполняла трубку наполовину; относительная влажность воздуха  $50\%$ . Давление насыщенных паров при температуре  $27^\circ\text{C}$   $P_n = 20\text{ Тор}$ . Длина свободного пробега  $\lambda$  в системе воздух—пар порядка  $10^{-5}\text{ см}$ . Пар у поверхности воды считать насыщенным, капиллярными явлениями пренебречь.

**10.107.** Открытый цилиндрический сосуд с теплоизолированными стенками частично заполнен водой, которая понемногу испаряется. Установившаяся температура воды на  $4^\circ$  ниже температуры окружающего воздуха ( $300\text{ К}$ ). Оценить разность концентраций пара над поверхностью воды и вне сосуда, считая, что перемещение пара вверх определяется диффузией. Средний свободный пробег молекул воды и воздуха считать одинаковым.

**10.108.** Вода из чайного блюда испаряется в комнате за время порядка суток. Оценить соотношение между числом вылетающих из жидкости в секунду молекул  $N_1$  и числом возвращающихся в жидкость  $N_2$ . Можно считать, что испарение небольшого количества воды практически не изменяет влажность воздуха, равную  $70\%$ . Какими явлениями определяется число возвращающихся в жидкость молекул? Оценить время испарения, пренебрегая токами воздуха в комнате.

**10.109.** Найти плотность потока  $J$  молекул жидкости, испаряющихся с единицы площади поверхности в единицу времени в вакуум

при температуре  $T$ , если известно давление насыщенных паров  $P_{\text{нас}}$  при этой температуре и коэффициент прилипания  $K$ . Последний равен отношению числа молекул пара, прилипающих к поверхности жидкости, к полному числу молекул пара, ударяющихся за это время о поверхность жидкости.

**10.110.** Во многих задачах принимается, что непосредственно над поверхностью жидкости ее пар является насыщенным. Оценить на следующем примере, насколько хорошо выполняется эта идеализация.

В цилиндрической трубке, открытой сверху, налита вода. Расстояние от открытого (верхнего) конца трубки до уровня воды  $L = 30$  см велико по сравнению с диаметром трубки. Трубка сверху обдувается поперечным потоком сухого воздуха, так что давление пара на верхнем конце трубки можно считать равным нулю. Учитывая диффузию пара в трубке и считая, что каждая молекула, ударяющаяся о поверхность воды, прилипает к ней, оценить величину  $(P_{\text{нас}} - P)/P$ , где  $P$  — фактическое давление пара непосредственно над поверхностью воды, а  $P_{\text{нас}}$  — давление насыщенного пара. Средняя длина свободного пробега молекулы пара в воздухе  $\lambda \approx 10^{-5}$  см.

**10.111.** Узкий цилиндрический сосуд, диаметр которого мал по сравнению с его высотой  $h_0 = 20$  см, полностью заполнен водой при температуре 300 К. Сосуд обдувается сверху поперечным потоком сухого воздуха, так что давление пара на верхнем конце сосуда можно считать равным нулю. Учитывая диффузию пара в сосуде, найти время, через которое испарится вся вода. Плотность насыщенного пара при рассматриваемой температуре  $\rho_n = 3 \cdot 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup>, а коэффициент диффузии паров воды в воздухе  $D = 0,3$  см<sup>2</sup>/с.

**10.112.** В столбике вертикально расположенного спиртового термометра на глубине  $L = 1$  см от верхнего уровня образовался небольшой воздушный пузырек, разделивший столбик на две части. Объем капилляра выше уровня жидкости заполнен только парами спирта. Пренебрегая возможностью растворения воздуха в спирте, а также переносом жидкости по поверхностной пленке, оценить время  $\tau$ , за которое целостность столбика может восстановиться. Плотность спирта  $\rho = 0,8$  г/см<sup>3</sup>, давление паров спирта при  $T = 300$  К равно  $P_0 = 45$  мм рт. ст., эффективное сечение столкновений молекул в парах спирта  $\sigma \approx 8 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>.

**10.113.** Найти изменение энтропии 88 г углекислого газа, если в результате некоторого процесса его вязкость увеличилась в  $\sqrt{2}$  раз, а коэффициент диффузии — вдвое.

**10.114.** Найти изменение энтропии 132 г углекислого газа в процессе, в результате которого его динамическая вязкость уменьшилась в 2 раза, а число ударов молекул об 1 см<sup>2</sup> стенки сосуда за 1 с уменьшилось в 4 раза.

**10.115.** Как изменится скорость падения маленькой капли жидкости в камере Вильсона после адиабатического увеличения объема в 2 раза. Воздух в камере для простоты считать идеальным газом.

**10.116.** При измерении вязкости методом Стокса стальные шарики плотности  $\rho$  и радиуса  $r$  сбрасываются точно в центре сосуда в жидкости плотности  $\rho_{\text{ж}}$  и температуры  $T$ . Каково среднеквадратичное расстояние  $\langle \Delta R^2 \rangle$  точек удара шариков о дно сосуда от его центра, если высота столба жидкости равна  $H$ ?

**10.117.** Установка для разделения изотопов методом газовой диффузии состоит из  $N$  каскадов, в каждом из которых газообразная смесь изотопов проходит через малое отверстие в тонкой перегородке, разделяющей две камеры. Прошедший во вторую камеру газ откачивается и направляется в первую камеру следующего каскада. Во всех первых камерах поддерживается одинаковое давление, во много раз большее давления газа во всех вторых камерах. Определить обогащение смеси легким изотопом т. е. отношение конечной относительной концентрации  $a = n_{\text{лег}}/n_{\text{тяж}}$  к начальной, для случая водорода (изотопы с атомными массами 1 и 2) при  $N = 20$ .

**10.118.** Найти разность молярных энтропий для молекулярного кислорода в условиях эффекта Кнудсена внутри стакана с пористыми стенками и вне его, если температура внутри стакана составляет  $T_1 = 350$  К, а вне его —  $T_2 = 300$  К.

**10.119.** Между двумя бесконечными непроницаемыми пластинами, параллельными друг другу и имеющими разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , находится разреженный одноатомный газ, так что длина свободного пробега значительно больше расстояния между пластинами. Концентрация молекул газа  $n$ . Определить среднюю кинетическую энергию атомов в единице объема между пластинами. Предполагается, что в пространстве между пластинами атомы имеют максвелловские распределения по скоростям с температурами  $T_1$  и  $T_2$ .

**10.120.** Между двумя бесконечными непроницаемыми пластинами, параллельными друг другу и имеющими разные температуры  $T_1$  и  $T_2$ , находится разреженный одноатомный газ, так что длина свободного пробега значительно больше расстояния между пластинами. Концентрация молекул газа  $n$ , масса атома  $m$ . Определить плотность теплового потока  $q$  между пластинами. Предполагается, что атомы газа в пространстве между пластинами имеют максвелловские распределения по скоростям с температурами  $T_1$  и  $T_2$ .

**10.121.** Цилиндр с теплоизолированными стенками разделен на две равные части теплопроводящей перегородкой, слева от которой находится фтористый водород  ${}^1\text{H}{}^{19}\text{F}$ , а справа  ${}^{20}\text{Ne}$ . В торцевых стенках находится по одному очень маленькому отверстию площади  $S$ , через которые молекулы газов начинают вытекать в вакуум, причем из-за теплообмена температуры газов можно считать одинаковыми. Определить тепловой поток  $J$  через перегородку в начальной стадии процесса, когда изменением концентрации молекул газа в цилиндре можно пренебречь. Начальная температура  $T$  и давление газов  $P$  одинаковы.

**10.122.** В центре куба, составленного из чередующихся пластин разного материала, в результате ядерной реакции образовались

моноэнергетические нейтроны. Найти отношение времен, через которые эти нейтроны будут зарегистрированы у граней куба, параллельной и перпендикулярной плоскости пластин. Пластины имеют одинаковую толщину и содержатся в одинаковом количестве. Длины свободного пробега нейтронов в материале пластин равны соответственно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  много меньше толщины пластины).

**10.123.** Пучок молекул азота, летящих со скоростью  $10^7$  см/с, проходит через сантиметровый слой азота, находящегося при давлении  $10^{-4}$  Тор и температуре  $0^\circ\text{C}$ . Оценить, как быстро будет расти температура азота, если плотность пучка такова, что через каждый квадратный сантиметр проходит  $10^6$  молекул в секунду. Диаметр молекул считать равным  $3,7 \cdot 10^{-8}$  см.

**10.124.** Оценить эффективное время выравнивания температуры в медном стержне длиной  $L = 10$  см в вакууме. Плотность меди  $\rho = 8,9$  г/см<sup>3</sup>, коэффициент теплопроводности  $\kappa = 3,8$  Дж/(с·м·К),  $T \gg \Theta$  ( $\Theta$  — дебаевская температура)<sup>1</sup>.

**10.125.** При температуре  $T$  вязкость некоторого газа с относительной молекулярной массой  $\mu$  равна  $\eta$ . Оценить по этим данным плотность сжиженного газа. Газ считать идеальным.

**10.126.** При теоретическом описании свойств реальных газов энергию взаимодействия двух атомов как функцию расстояния часто записывают в форме потенциала Леннарда—Джонса  $U(r) = 4\epsilon_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$ . Принимая, что для ксенона (относительная атомная масса 131)  $\epsilon_0 = 0,02$  эВ,  $r_0 = 4$  Å, оценить в рамках этой модели коэффициент самодиффузии ксенона в критической точке.

У к а з а н и е. Эффективное сечение столкновений определить из условия, что энергия взаимодействия при максимальном сближении частиц порядка кинетической энергии.

**10.127.** При теоретическом описании свойств реальных газов энергию взаимодействия двух атомов как функцию расстояния часто записывают в форме потенциала Леннарда—Джонса  $U(r) = 4\epsilon_0 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right]$ . Принимая, что для неона (относительная атомная масса 20)  $\epsilon_0 = 3 \cdot 10^{-3}$  эВ,  $r_0 = 2,8$  Å, определить в рамках этой модели температурную зависимость вязкости неона в пределе низких плотностей и высоких температур, т. е. когда  $kT \gg \epsilon_0$ .

См. указание к задаче 10.126.

**10.128.** Доска Гальтона имеет вид квадрата со стороной  $H$ , в который вбиты  $N \gg 1$  гвоздиков. Сверху в нее запускают стальной шарик радиуса  $r$ , который много больше радиуса гвоздика, но много меньше расстояния между ними. Оценить, насколько шарик отклонится от вертикальной прямой, проведенной через точку бросания, когда достигнет нижнего края доски.

<sup>1</sup> Неравенство  $T \gg \Theta$  указывает на то, что теплоемкость материала не зависит от температуры (закон Дюлонга—Пти).

## § 11. Фазовые превращения

**11.1.\*** В закрытом сосуде при  $0^\circ\text{C}$  находится один моль (18 г) воды. Какое количество тепла надо затратить, чтобы повысить температуру системы до  $100^\circ\text{C}$  и чтобы при этом вся вода превратилась в насыщенный пар? Удельная теплота испарения воды при  $100^\circ\text{C}$  и постоянном давлении  $\lambda = 539$  кал/г. Давлением насыщенного пара при  $0^\circ\text{C}$  и теплоемкостью стенок сосуда пренебречь. Пренебречь также объемом воды по сравнению с объемом ее насыщенного пара.

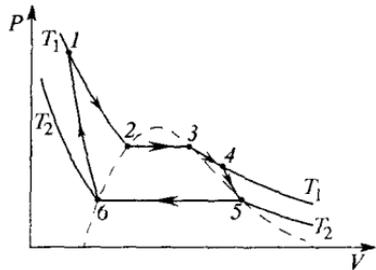


Рис. 370

**11.2.** Какую работу совершает за один цикл  $1-2-3-4-5-6-1$  машина Карно, рабочим телом которой является один моль воды, испытывающий во время работы машины фазовые превращения в пар и обратно (рис. 370). Изотермам  $1-2-3-4$  и  $5-6$  соответствуют температуры  $T_1 = 500$  К и  $T_2 = 373$  К. Нижняя изотерма  $5-6$  целиком лежит в двухфазной области

вещества, так что в  $6$  имеется только жидкость, а в  $5$  — только пар. Кривые  $1-6$  и  $4-5$  — адиабаты. Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2,26$  кДж/г (при  $T = 373$  К).

**11.3.** На дне сосуда, откачиваемого до высокого вакуума, заморожен плоскопараллельный слой льда толщиной  $l = 7$  мм, нижняя поверхность которого поддерживается при постоянной температуре  $t_0$ . Определить эту температуру, если известно, что при откачке сосуда на верхней поверхности слоя льда установилась температура  $t_1 = -50^\circ\text{C}$ . Теплопроводность льда  $\kappa = 5,3 \cdot 10^{-3}$  кал/(с·см·°C). Удельная теплота сублимации льда  $q = 680$  кал/г. Давление насыщенного пара над льдом при  $t_1 = -50^\circ\text{C}$  в отсутствии откачки равно  $P = 0,03$  мм рт. ст.

**11.4.\*** Рассмотрев цикл Карно для системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара, и применив к нему теорему Карно, выразить производную давления насыщенного пара по температуре  $dP/dT$  через удельные объемы пара и жидкости  $v_{\text{п}}$ ,  $v_{\text{ж}}$  и удельную теплоту парообразования  $\lambda$ .

**11.5.** Ромбическая сера превращается в моноклинную при  $t = 96,5^\circ\text{C}$ . При атмосферном давлении удельная теплота превращения  $q = 2,2$  кал/г. Скачок удельного объема серы при фазовом превращении  $\Delta v = 0,014$  см<sup>3</sup>/г. Найти смещение  $\Delta T$  точки фазового перехода серы при изменении давления на  $\Delta P = 1$  атм.

**11.6.** Уксусная кислота при атмосферном давлении плавится при температуре  $t = 16,6^\circ\text{C}$ . Разность удельных объемов жидкой и твердой фаз уксусной кислоты  $\Delta v = 0,16$  см<sup>3</sup>/г. Точка плавления уксусной кислоты смещается на  $\Delta T = 1$  К при изменении давления на  $\Delta P = 41$  атм. Найти удельную теплоту плавления  $q$  уксусной кислоты.

**11.7.** Найти давление насыщенного водяного пара при температуре  $101^\circ\text{C}$ . Считать пар идеальным газом.

**11.8.** Найти повышение температуры кипения воды при увеличении давления ее насыщенного пара на одну избыточную атмосферу вблизи точки кипения воды при давлении воздуха  $1\text{ атм}$ . Удельная теплота испарения воды в этих условиях  $\lambda = 539\text{ кал/г}$ .

**11.9.** Часть закрытого сосуда занимает вода при температуре  $T = 300\text{ К}$ . Найти относительное изменение плотности насыщенного пара при увеличении температуры на  $10\text{ К}$ . Теплота испарения при этой температуре  $\lambda = 580\text{ кал/г}$ . Пар считать идеальным газом.

**11.10.** Найти температуру приготовления пищи в скороварке, если диаметр отверстия предохранительного клапана скороварки  $d = 5\text{ мм}$ , а масса грузика, закрывающего клапан,  $m = 60\text{ г}$ . Теплоту парообразования для воды принять равной  $\lambda = 2260\text{ кДж/кг}$ . Пар считать идеальным газом.

**11.11.** Насыщенный водяной пар, находящийся в цилиндре под поршнем при  $100^\circ\text{C}$ , нагревают на  $1^\circ\text{C}$  и перемещают поршень так, что пар остается насыщенным, а конденсации не происходит. Найти относительное изменение объема пара, считая его идеальным газом. Теплота парообразования воды при  $100^\circ\text{C}$   $\lambda = 539\text{ кал/г}$ .

**11.12.** Найти удельный объем водяного пара  $v_{\text{п}}$  при  $100^\circ\text{C}$  и нормальном давлении, если известно, что при давлении  $735,5\text{ мм рт. ст.}$  температура кипения воды равна  $99,1^\circ\text{C}$ . Удельная теплота парообразования при  $100^\circ\text{C}$   $\lambda = 539\text{ кал/г}$ .

**11.13.** Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и прогреваемые подземным теплом (рис. 371). Выход из них на поверхность земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения гейзера канал заполнен только паром, который и выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала  $h = 90\text{ м}$ . Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2260\text{ Дж/г}$ .



**Рис. 371**

**11.14.** По одну сторону цилиндра, разделенного легким поршнем на две части, находится идеальный газ, по другую — небольшое количество воды с насыщенным паром. Найти относительное изменение объема идеального газа при нагревании всей системы от  $100^\circ\text{C}$  до  $101^\circ\text{C}$ . Теплота парообразования воды при  $100^\circ\text{C}$   $\lambda = 539\text{ кал/г}$ .

**11.15.** На дне сосуда, заполненного воздухом, разлито немного воды. Сосуд закрыт поршнем, который медленно выдвигают, поддерживая при этом температуру постоянной. Когда объем увеличивается в два раза, вода исчезает. Определить давление пара, а также полную массу воды (в жидкой и парообразной фазах) и массу воздуха в

камере, если известно, что вначале давление было  $P_1 = 3$  атм, а затем стало  $P_2 = 2$  атм, а начальный объем  $V_0 = 22,4$  л. Молярные массы воды и воздуха считать известными.

**11.16.** В закрытом сосуде с объемом  $V_0 = 5$  л находится 1 кг воды при температуре  $t = 100$  °С. Пространство над водой занято насыщенным водяным паром (воздух выкачан). Найти увеличение массы насыщенного пара  $\Delta m$  при повышении температуры системы на  $\Delta T = 1$  К. Удельная теплота парообразования  $\lambda = 539$  кал/г.

У к а з а н и е. Пар считать идеальным газом. Удельным объемом воды пренебречь по сравнению с удельным объемом пара.

**11.17.** Вода в сосуде нагревается до температуры кипения и затем быстро на лифте поднимается на 30-й этаж ( $h = 100$  м), так что изменением температуры воды за время подъема можно пренебречь. Оценить относительное изменение массы воды к моменту, когда после подъема прекратится процесс кипения. Теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  Дж/(г·К). Пар считать идеальным газом.

**11.18.** Вычислить удельную теплоту парообразования  $\lambda_1$  для воды при температуре  $T_1 = 323$  К, зная эту величину при температуре  $T_2 = 373$  К ( $\lambda_2 = 539$  кал/г). Теплоемкость воды считать постоянной, т. е. не зависящей от  $P$  и  $T$ . Пар считать идеальным газом, теплоемкость которого можно вычислить по классической теории. Удельным объемом воды по сравнению с удельным объемом пара пренебречь.

**11.19.** С помощью цикла, составленного из ветвей кривых, проходящих по границе фаз «вода—пар» и двух двухфазных изотерм при  $T_1 = 323$  К и  $T_2 = 373$  К, определить удельную теплоту парообразования воды при 323 К  $\lambda_{(323)}$ . Сжимаемостью жидкости пренебречь, пар считать идеальным газом. Известны  $\lambda_{(373)} = 2260$  Дж/г, удельная теплоемкость воды  $c_v = 4,18$  Дж/(г·К), молярная теплоемкость водяного пара  $C_v = 3,3R$ .

**11.20.** При определении влажности по точке росы было установлено, что конденсация водяного пара наблюдается при охлаждении поверхности гигрометра до температуры 10 °С. Найти значение абсолютной влажности, т. е. количество водяного пара (в граммах), находящегося в 1 м<sup>3</sup> воздуха, считая, что удельная теплота парообразования воды не зависит от температуры и равна  $\lambda = 2480$  Дж/г. Пар считать идеальным газом.

**11.21.** В цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится вода в равновесии с насыщенным паром при температуре  $t = 200$  °С. На сколько следует изменить относительную высоту поршня над уровнем воды, чтобы при одновременном повышении температуры на 1 К масса насыщенного пара не изменилась? Удельная теплота парообразования  $\lambda = 540$  кал/г.

**11.22.** В тонкостенный металлический шар радиуса  $r = 10$  см, из которого выкачан воздух, налита вода. Давление воздуха вне шара равно атмосферному. До какой максимальной температуры можно нагреть воду, чтобы стенки шара не разорвались, если предельное

натяжение на разрыв, которое они могут выдержать,  $\sigma = 88 \text{ Н/см}^2$ . Количество воды в шаре таково, что при этой температуре еще не вся вода испаряется, однако объем воды мал по сравнению с объемом пара.

**11.23.** В запаянной U-образной трубке содержится эфир и его пары (рис. 372). Оценить чувствительность этого дифференциально-го конденсационного термометра  $h/\Delta T$  при  $T_1 \sim T_2 \sim 300 \text{ К}$ , когда давление насыщенного пара  $P \sim 1 \text{ атм}$ , а плотность жидкости  $0,7 \text{ г/см}^3$ . Молярная теплота испарения эфира  $\Lambda = 3,88 \cdot 10^4 \text{ Дж/моль}$ . Температура кипения эфира при давлении 1 атм  $T_k = 467 \text{ К}$ .

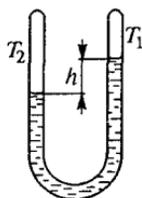


Рис. 372

**11.24.** Вывести формулу, выражающую зависимость давления насыщенного пара от температуры при следующих предположениях: 1) пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона; 2) удельная теплота испарения  $\lambda$  является линейной функцией температуры, т. е.  $\lambda = \lambda_0 - aT$ ; 3) удельный объем жидкости пренебрежимо мал по сравнению с удельным объемом насыщенного пара.

**11.25.** Определить температуру кипения воды  $T$  на высоте  $H$  от поверхности Земли. Атмосферу предполагать изотермической с температурой  $T_a$ . Давление воздуха на поверхности Земли равно  $P_0$ . Удельная теплота парообразования  $\lambda$  не зависит от температуры.

**11.26.** Найти изменение температуры кипения воды на одной из вершин Памира ( $H = 7150 \text{ м}$ ). Температуру воздуха считать постоянной и равной  $0^\circ \text{С}$ .

**11.27.** Из большого теплоизолированного объема выкачан воздух. В нем установлены два открытых сосуда с эфиром, один на три метра выше другого. Определить разность температур эфира в сосудах после установления равновесия, если в начальный момент температура в обоих сосудах  $t = 27^\circ \text{С}$ . Удельная теплота испарения эфира  $\lambda = 355 \text{ Дж/г}$ . Удельным объемом жидкого эфира по сравнению с удельным объемом паров пренебречь.

**11.28.** Терморегулятор автомобильного двигателя представляет собой цилиндрический сосуд с гофрированными стенками (сильфон), наполненный спиртом и его парами. При низкой температуре воды давление в сильфоне малое, он сжат и закрывает клапан, ослабляя таким образом циркуляцию воды в системе охлаждения двигателя (рис. 373). При достаточно высокой температуре воды сильфон растягивается и открывает клапан, вода начинает циркулировать сильнее, охлаждается и т.д. Какова должна быть сила давления пружины клапана, чтобы клапан открывался при температуре  $t = 90^\circ \text{С}$ ? Диаметр сильфона  $d = 20 \text{ мм}$ , точка кипения спирта при  $P_0 = 1 \text{ атм}$   $t_0 = 78^\circ \text{С}$  (формула спирта  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ). Удельная теплота испарения спирта  $\lambda = 850 \text{ Дж/г}$ .

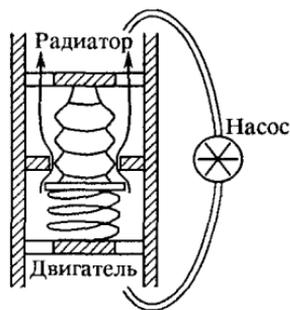


Рис. 373

**11.29.** Насыщенный водяной пар при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$  адиабатически расширяется, при этом его температура падает на  $\Delta T = 1\text{ K}$ . Считая, что равновесие между жидкой и газообразной фазами успевает установиться, определить, какая часть водяного пара при этом конденсируется. Пар считать идеальным газом.

**11.30.** Насыщенный водяной пар при температуре  $T = 300\text{ K}$  подвергается адиабатическому сжатию и адиабатическому расширению.

В каком из этих процессов пар превращается в ненасыщенный и в каком в пересыщенный?

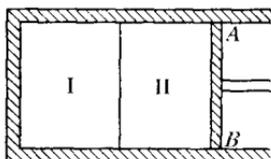


Рис. 374

**11.31.** Теплоизолированный сосуд разделен неподвижной теплопроводящей перегородкой на две равные части (рис. 374). В части I находятся 1,2 моля азота и 1 моль паров воды с относительной влажностью  $\varphi = 0,9$ ; в части II — 4 моля неона. Температура газов  $T_0 = 373\text{ K}$ . Отделяющий неон от внешней

среды поршень  $AB$  начинают медленно выдвигать. При каком относительном увеличении объема части II начинается конденсация паров воды на стенках сосуда? Молярная теплота парообразования воды  $\Lambda = 41\text{ кДж/моль}$ , теплоемкостью стенок пренебречь.

**11.32.** Пары воды вытекают в атмосферу через капилляр диаметра  $d = 2 \cdot 10^{-3}\text{ м}$  и длины  $l = 0,1\text{ м}$  из закрытого сосуда, в который налита вода. Сосуд поддерживается при температуре  $T = 374\text{ K}$ . Оценить количество тепла  $Q$ , подводимое к сосуду за 1 с. Теплота парообразования  $\lambda = 2260\text{ Дж/г}$ . Пар считать идеальным газом. Предполагается, что в каждый момент времени успевает установиться равновесие между водой и паром. Вязкость паров воды принять равной  $\eta = 1,3 \cdot 10^{-5}\text{ Па}\cdot\text{с}$ .

**11.33.** При  $0^\circ\text{C}$  давление насыщенного водяного пара над льдом  $P_1 = 4,58\text{ мм рт. ст.}$  Удельная теплота плавления льда при  $0^\circ\text{C}$   $q = 80\text{ кал/г}$ . Удельная теплота испарения воды при  $0^\circ\text{C}$   $\lambda = 596\text{ кал/г}$ . Найти давление насыщенного водяного пара над льдом при температуре  $t = -1^\circ\text{C}$ .

**11.34.** Кусок льда помещен в адиабатическую оболочку при температуре  $0^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении. Как изменится температура льда, если его адиабатически сжать до давления  $P = 100\text{ атм}$ ? Какая доля льда  $\Delta m/m$  при этом расплавится? Удельные объемы воды  $v_{\text{в}} = 1\text{ см}^3/\text{г}$ , льда  $v_{\text{л}} = 1,09\text{ см}^3/\text{г}$ . Теплоемкости воды и льда связаны соотношением  $c_{\text{л}} \approx 0,6c_{\text{в}}$ .

**11.35.** В Антарктиде под трехкилометровой толщиной льда обнаружены озера пресной воды. Определить температуру воды в этих озерах, если удельная теплота плавления льда  $q = 335\text{ кДж/кг}$ , а отношение плотности льда и плотности воды составляет 0,917.

**11.36.** Вертикальная труба частично заполнена водой с температурой  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  до высоты  $H = 20\text{ м}$ . На сколько изменится высота содержимого трубы, если ее температура понизится до  $t_1 = -0,01^\circ\text{C}$ ? Удельная теплота плавления льда  $q = 80\text{ кал/г}$ , а плотность льда равна  $\rho_{\text{л}} = 0,92\text{ г/см}^3$ . Известно, что к этой трубе лед не примерзает.

**11.37\*** В толстостенном закрытом сосуде помещен кусок льда, над которым находится насыщенный водяной пар. В сосуд можно нагнетать воздух до высокого давления. На сколько надо повысить давление воздуха в сосуде, чтобы давление насыщенного пара над льдом повысилось на один процент, если температура ( $T = 250 \text{ К}$ ) поддерживается постоянной? Удельный объем льда  $v_{\text{л}} = 1,1 \text{ см}^3/\text{г}$ .

**11.38.** Удельный объем льда при  $0^\circ \text{С}$  равен  $1,091 \text{ см}^3/\text{г}$ , а воды —  $1 \text{ см}^3/\text{г}$ ; молярная теплота плавления льда  $6000 \text{ Дж/моль}$ . При какой температуре плавится лед под давлением собственного пара, равным  $4,6 \text{ Тор}$ ?

**11.39.** Из духового ружья стреляют пулей, сделанной из льда. Скорость пули  $v = 165 \text{ м/с}$ . При каких температурах окружающего воздуха пуля будет плавиться? Вязкостью воздуха пренебречь.

**11.40.** На ледяную поверхность, температура которой равна  $-1^\circ \text{С}$ , ставится штанга, площадь основания которой равна  $10 \text{ см}^2$ . При каком весе штанги лед под ней начнет таять? Теплота плавления льда равна  $335 \text{ Дж/г}$ , удельный объем льда при нормальных условиях  $\approx 1,1 \text{ см}^3/\text{г}$ .

**11.41.** Найти изменение температуры плавления льда  $\Delta T$  при повышении давления на  $\Delta P = 1 \text{ атм}$ . Удельный объем воды при  $0^\circ \text{С}$   $v_{\text{ж}} = 1 \text{ см}^3/\text{г}$ , удельный объем льда  $v_{\text{л}} = 1,091 \text{ см}^3/\text{г}$ , удельная теплота плавления льда  $q = 80 \text{ кал/г}$ . По найденному значению  $\Delta T$  рассчитать приближенно температуру тройной точки воды.

**11.42\*** Определить изменение энтропии системы, состоящей из воды и насыщенного пара, при переходе ее в насыщенный пар. Начальная температура системы  $T_1$ , конечная  $T_2$ . Начальная масса пара  $m_1$ , конечная  $m_2$ . Зависимостью удельной теплоты парообразования  $\lambda$  от температуры пренебречь. Пар рассматривать как идеальный газ.

**11.43.** Три фазы  $1, 2, 3$  находятся в равновесии друг с другом в тройной точке (рис. 375). Их удельные объемы в этой точке равны соответственно  $v_1, v_2, v_3$ . Пусть  $P_{12} = P_{12}(T)$ ,  $P_{23} = P_{23}(T)$ ,  $P_{31} = P_{31}(T)$  — уравнения кривых равновесия между фазами  $1$  и  $2$ ,  $2$  и  $3$ ,  $3$  и  $1$ . Показать, что в тройной точке имеет место соотношение

$$(v_1 - v_2) \frac{dP_{12}}{dT} + (v_2 - v_3) \frac{dP_{23}}{dT} + (v_3 - v_1) \frac{dP_{31}}{dT} = 0.$$

**11.44.** Определить приближенно давление и температуру (по шкале Цельсия) в тройной точке воды, пользуясь следующими данными. Давление насыщенного пара над жидкой водой  $P_1 = 4,579 \text{ мм рт. ст.}$  при  $t = t_1 = 0^\circ \text{С}$ ,  $P_2 = 4,926 \text{ мм рт. ст.}$  при  $t = t_2 = 1^\circ \text{С}$ . Удельный объем льда при  $0^\circ \text{С}$  и нормальном атмосферном давлении ( $P_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ )  $v_1 = 1,091 \text{ см}^3/\text{г}$  удельный

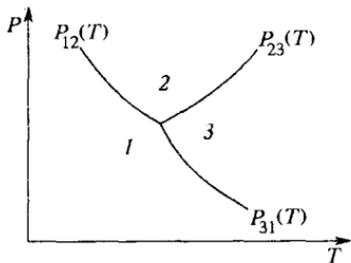


Рис. 375

объем воды при тех же условиях  $v_2 = 1 \text{ см}^3/\text{г}$ . Удельная теплота плавления льда  $q = 80 \text{ кал/г}$ .

**11.45.** Температура воды в тройной точке  $t = 0,0075 \text{ }^\circ\text{C}$ , удельная теплота плавления льда при той же температуре  $q_{12} = 80 \text{ кал/г}$ . Удельный объем водяного пара в тройной точке  $v_3 = 206\,000 \text{ см}^3/\text{г}$ . По сравнению с ним удельными объемами льда  $v_1$  и воды  $v_2$  можно пренебречь. Что больше: давление насыщенного пара над водой  $P_1$  или над льдом  $P_2$  при температуре  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ? Чему равна разность  $P_1 - P_2$ ?

**11.46.** В цилиндре под поршнем помещена вода, над которой находится смесь воздуха и насыщенных водяных паров. Начальное давление на поршень равно атмосферному (1 атм). Затем давление на поршень увеличивают в два раза. На сколько процентов изменится давление насыщенного водяного пара в цилиндре, если температура ( $T = 300 \text{ К}$ ) сохраняется неизменной?

**11.47.** В закрытом сосуде при температуре  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  находится влажный воздух с относительной влажностью  $\varphi = 80 \%$ . На сколько градусов надо понизить температуру стенок сосуда, чтобы на них начала выпадать роса? Удельная теплота парообразования воды при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$   $\lambda = 600 \text{ кал/г}$ . Водяной пар рассматривать как идеальный газ.

**11.48.** В сосуде находятся вода и насыщенный пар при давлении  $P$ . В верхней части сосуда имеется небольшое отверстие, через которое пар истекает в пустоту. Определить скорость истечения пара  $v$ , предполагая процесс адиабатическим. Пар приближенно считать подчиняющимся уравнению состояния идеального газа. Удельная теплота парообразования воды равна  $\lambda$  и не зависит от температуры.

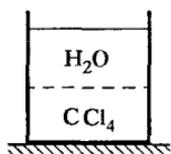


Рис. 376

**11.49.** Известно, что точка кипения неоднородной системы, помещенной в стакане (рис. 376) и состоящей из слоев несмешивающихся жидкостей: четыреххлористого углерода  $\text{CCl}_4$  и воды  $\text{H}_2\text{O}$  — равна  $66 \text{ }^\circ\text{C}$ , что ниже точки кипения воды, равной  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , и чистого  $\text{CCl}_4$  ( $76,7 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Эти данные относятся к нормальному давлению.

Как изменится точка кипения такой системы, если внешнее давление возрастет на 10%? Молярная теплота парообразования воды равна  $40,5 \text{ кДж/моль}$ , четыреххлористого углерода —  $29 \text{ кДж/моль}$ .

**11.50.** В закрытый сосуд диаметра  $d = 10 \text{ см}$  налита вода до уровня  $H = 20 \text{ см}$ . Пары воды могут истекать в атмосферу через капилляр радиуса  $r = 1 \text{ мм}$  и длины  $l = 10 \text{ см}$ , вставленный в крышку сосуда. Оцените время, в течение которого испарится вся вода. Температура системы постоянна и равна  $t = 101 \text{ }^\circ\text{C}$ . Пар считать идеальным газом. Коэффициент внутреннего трения пара  $\eta = 128 \text{ мкП}$ .

**11.51.** В предварительно откачанный закрытый сосуд диаметра  $D$  налита вода до уровня  $H_1$ . В боковой стенке у дна сосуда вделан горизонтальный трубопровод круглого сечения радиуса  $r$ , длины  $l$ , через который вода вытекает в атмосферу. Через какое время уровень воды в сосуде понизится до  $H_2$ ? Температура воды в сосуде постоянна и превышает температуру кипения  $T_0$  при нормальном

давлении  $P_0$  на  $\Delta T \ll T_0$ . Удельная теплота парообразования воды равна  $\lambda$ . Течение воды в трубопроводе считать ламинарным, вязкость воды равна  $\eta$ . Плотностью водяного пара по сравнению с плотностью воды  $\rho$  пренебречь. Пар считать идеальным газом.

**11.52.** В предварительно откачанный закрытый широкий сосуд налита вода до уровня  $h = 20$  см. В боковой стенке у дна сосуда сделано отверстие, которое можно закрывать пробкой. До какой температуры  $T$  следует нагреть воду в сосуде, чтобы скорость ее истечения через боковое отверстие при этой температуре превышала в два раза скорость истечения при температуре  $T_0 = 373$  К?

**11.53.** В воздухе помещения при температуре  $15^\circ\text{C}$  и некоторой относительной влажности содержится 1 кг паров воды. При какой температуре  $T$  (и той же относительной влажности) количество воды в воздухе достигнет 2,7 кг?

**11.54.** В сосуде находятся один моль воды при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$  и пренебрежимо малое количество водяного пара. Система нагревается до температуры  $T$ , так что вся вода превращается в пар. Теплота парообразования при температуре  $T_0$  равна  $\lambda_0$ . Определить изменение внутренней энергии системы в этом процессе. Считать пар идеальным газом.

**11.55.** В теплоизолированном сосуде при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  находится большой кусок льда. Сверху в лед с силой  $F = 400$  Н вдавливается медный стержень сечением  $S = 0,1$  см<sup>2</sup>. Оценить, за какое время стержень погрузится в лед на глубину  $H = 1$  см. Температура стержня над льдом тоже равна  $0^\circ\text{C}$ , коэффициент теплопроводности меди  $\kappa_m = 4 \cdot 10^7$  эрг/(с·см·К), удельная теплота плавления льда  $q = 80$  кал/г, плотность льда  $\rho_{\text{л}} \approx 0,9$  г/см<sup>3</sup>, коэффициент теплопроводности льда  $\kappa_{\text{л}} \ll \kappa_m$ .

**11.56.** Тонкая проволока, охватывающая петлей брусок льда, под действием нагрузки способна пройти сквозь лед. Полагая, что скорость движения проволоки  $v$  определяется скоростью подвода тепла через проволоку от области над проволокой, где вода замерзает, к области под проволокой, где плавится лед, оценить величину скорости  $v$ . Теплопроводностью льда пренебречь. Температура льда  $0^\circ\text{C}$ , теплота плавления  $q = 335$  Дж/г, плотность льда  $\rho = 0,917$  г/см<sup>3</sup>. Диаметр проволоки  $d = 0,1$  мм, коэффициент теплопроводности  $\kappa = 130$  Вт/(м·К), давление  $P$ , создаваемое под проволокой, принять равным 10 атм.

**11.57.** Найти удельную теплоту испарения бензола  $\lambda$  вблизи его тройной точки, если известно, что при этих условиях его удельная теплота плавления  $q = 30,2$  кал/г, температура тройной точки  $T = 279$  К, равновесное давление в той же тройной точке  $P = 36$  мм рт. ст. и для кривой возгонки в той же точке известно  $dP/dT = 2,43$  мм рт. ст./К. Считать пар бензола идеальным газом.

**11.58.** Найти коэффициент объемного расширения  $\alpha$ , изотермическую сжимаемость  $\beta_T$  и теплоемкость  $C_P$  неоднородной равновесной системы, состоящей из жидкости и ее насыщенного пара.

**11.59.** Определить адиабатическую сжимаемость двухфазной системы, состоящей из насыщенного пара и небольшого количества жидкости. Пар считать идеальным газом.

**11.60.** В теплоизолированном цилиндре с поршнем заключено небольшое количество жидкого гелия, находящегося в равновесии со своими парами. Температура гелия  $T = 4,2$  К. Поршень медленно выдвигают до тех пор, пока весь гелий не испарится. В результате такого адиабатического процесса относительное приращение объема гелия оказалось равным  $\Delta V/V = 0,02$ . Определить относительное изменение давления  $\Delta P/P$  газообразного гелия, предполагая, что он подчиняется уравнению состояния идеального газа. Теплота испарения гелия  $\lambda = 21,8$  Дж/г. Считать, что в начальный момент масса пара существенно превышает массу жидкости.

**11.61.** Определить удельную теплоемкость  $c$  насыщенного пара, расширяющегося (или сжимающегося) таким образом, что во время процесса он все время остается насыщенным. Пренебречь удельным объемом жидкости по сравнению с удельным объемом ее насыщенного пара. Считать, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона. Произвести численный расчет для воды при температуре  $T = 373$  К, считая, что к водяному пару применима классическая теория теплоемкостей. Удельная теплота парообразования для воды при 373 К равна  $\lambda = 539$  кал/г.

**11.62.** Решить предыдущую задачу, зная удельную теплоту испарения  $\lambda$  и ее производную по температуре  $d\lambda/dT$ , но не предполагая, что пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона. Для воды при  $t = 100^\circ\text{C}$   $d\lambda/dT = -0,64$  кал/(г·К),  $c_{\text{ж}} = 1,01$  кал/(г·К).

**11.63.** Под невесомым теплопроводящим поршнем, разделяющим цилиндрический замкнутый сосуд на две части, помещен один моль воды. Над поршнем находится 1 моль воздуха. Давление и температура в сосуде соответственно равны  $P = 760$  Тор и  $t = 100^\circ\text{C}$ . Определить теплоемкость системы (без учета материала сосуда и поршня). Удельная теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г.

**11.64.** В условиях предыдущей задачи определить теплоемкость вещества под поршнем, если поршень теплонепроницаемый, а воздух над поршнем поддерживается при постоянной температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ .

**11.65.** В замкнутом сосуде находится вода в равновесии с насыщенным паром при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ . Отношение масс пара и воды равно  $\beta = 0,1$ . Удельная теплоемкость воды  $c_0 = 4,2$  Дж/(г·К). Найти удельную теплоемкость  $c$  такой системы. Пар считать идеальным газом, удельная теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г.

**11.66.** Найти удельную теплоемкость при постоянном объеме редкого тумана (т. е. насыщенного пара с капельками воды, полная масса которых много меньше массы пара) при  $t = 100^\circ\text{C}$ . Молярная теплота испарения воды  $\Lambda = 41$  кДж/моль не зависит от температуры.

**11.67.** Найти скорость изменения удельной теплоты испарения жидкости от температуры  $d\lambda/dT$ , считая насыщенный пар идеальным газом. Удельная теплоемкость жидкости равна  $c$ , коэффициент

объемного расширения жидкости —  $\alpha$ . Рассчитать  $d\lambda/dT$  для воды вблизи точки кипения при атмосферном давлении.

**11.68.** Конденсация пара на ионах, образованных заряженной частицей в газе камеры Вильсона, осуществляется путем адиабатического расширения объема камеры. Камера наполняется газом и содержит насыщенные пары жидкости. Найти отношение  $m_1/m_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — массы насыщенных паров до и после расширения камеры в  $\eta$  раз. Для смеси газа и пара  $C_p/C_v = \gamma$ , начальная температура  $T$  много ниже критической. Молярную теплоту испарения  $\Lambda$  считать постоянной, а пар — идеальным газом. Теплом, выделенным при конденсации, пренебречь.

**11.69.** Стенки сосуда объема  $V = 1$  л, в котором помещен водород при давлении 760 Тор и температуре 273 К, резко охлаждаются до температуры тройной точки ( $P = 60$  Тор,  $T = 14$  К). Оценить время «вымораживания» водорода, т. е. время, в течение которого давление в сосуде существенно уменьшится. Как будет влиять присутствие гелия на этот процесс?

**11.70.** Превращение  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  из ромбической в ромбоэдрическую форму происходит при атмосферном давлении при 32,0 °С. Оно сопровождается поглощением тепла 1600 Дж/моль, плотность при этом уменьшается с 1,72 до 1,66 г/см<sup>3</sup>. Найти температуру такого превращения при давлении 10 атм.

**11.71.** В тонкостенном откачанном сосуде помещен твердый антрацен  $\text{C}_{10}\text{H}_8$ . Пары антрацена, образующиеся при его сублимации, вытекают наружу через малое отверстие в стенке сосуда. В течение фиксированного промежутка времени измеряется потеря веса антрацена в сосуде. Оказалось, что при повышении температуры от  $T_1 = 283$  К до  $T_2 = 303$  К потеря веса антрацена за одно и то же время увеличилась в  $a = 9,6$  раза. Вычислить теплоту сублимации антрацена  $q$ , предполагая, что в каждый момент времени успевает устанавливаться равновесие между твердым антраценом и его паром. Пар можно рассматривать как идеальный газ. Удельным объемом твердого антрацена по сравнению с удельным объемом пара пренебречь.

**11.72.** При температуре  $T_1 = 0,1$  К и давлении  $P_1 = 31$  атм жидкая и твердая фазы изотопа  ${}^3\text{He}$  находятся в равновесии. При температурах  $T$  вплоть до нескольких милликельвин энтропия жидкого  ${}^3\text{He}$  пропорциональна температуре:  $S_{\text{ж}} = \gamma T$ , где коэффициент пропорциональности  $\gamma = 4,6R$ , а энтропия твердого гелия остается постоянной и равной  $S_{\text{т}} = R \ln 2$ . На сколько нужно увеличить давление  $P$  в смеси жидкого и твердого  ${}^3\text{He}$ , чтобы температура фазового равновесия  $T_1$  упала в 10 раз? Считать, что разность молярных объемов жидкого и твердого  ${}^3\text{He}$  постоянна и равна  $\Delta V = V_{\text{ж}} - V_{\text{т}} = 1,3$  см<sup>3</sup>/моль.

**11.73.** Кривая плавления изотопа  ${}^3\text{He}$  проходит через точку  $T_1 = 0,12$  К и  $P_1 = 31$  атм. При каком давлении  $P_2$  жидкая и твердая фазы гелия-3 будут находиться в равновесии при температуре

$T_2 = 0,42$  К? Найти уравнение кривой плавления  ${}^3\text{He}$  в переменных  $T, P$  в интервале между этими температурами. Молярная энтропия жидкого  ${}^3\text{He}$  в рассматриваемой области температур и давлений определяется выражением  $S_{\text{ж}} = RT/\theta$ , где  $\theta = 0,46$  К. Молярная энтропия твердого  ${}^3\text{He}$  не зависит от температуры и равна  $S_{\text{тв}} = R \ln 2$ . Разность молярных объемов жидкого и твердого гелия-3 считать постоянной и равной  $V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} = 1,25$  см<sup>3</sup>/моль. Найти также величину и знак молярной теплоты плавления  $q$  для температур  $T_1$  и  $T_2$ .

**11.74.** Молярная энтропия жидкого гелия-3 при низких температурах меняется по закону  $S_{\text{ж}} = RT/\theta$ , константа  $\theta \approx 0,46$  К при давлениях, близких к 30 атм. Энтропия одного моля твердого гелия при этих условиях не зависит от температуры и равна  $S_{\text{тв}} = 0,7R$ . Зная, что при  $T_1 = 0,25$  К гелий-3 затвердевает при давлении  $P_1 = 29$  атм, найти давление, когда он затвердевает при  $T = 0,1$  К. Разность молярных объемов жидкого и твердого гелия-3 при этих температурах  $\Delta V = V_{\text{ж}} - V_{\text{т}} = 1,25$  см<sup>3</sup>.

**11.75.** Согласно одной из моделей, центральная часть Земли (так называемое ядро) состоит из железа. Внешняя часть ядра расплавлена, а внутренняя радиуса  $R \approx 1200$  км, твердая. Ядро остывает со скоростью  $u$ , примерно равной 100 К за  $10^9$  лет. На сколько изменится радиус твердой части ядра за  $10^9$  лет? Считать, что теплота плавления железа при условиях, соответствующих поверхности ядра,  $q \approx 125$  Дж/г, температура на ней  $T \approx 3700$  К и изменение плотности железа при затвердевании  $\Delta \rho = 0,3$  г/см<sup>3</sup>.

**11.76.** Определить теплоту испарения жидкого гелия в пределе  $T \rightarrow 0$ , считая, что гелий подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Известно, что для гелия  $T_{\text{кр}} = 5,2$  К.

**11.77.** Влажный шарик находится в воздухе с плотностью водяного пара на больших расстояниях от шарика равной  $\rho_0 = 8,6 \cdot 10^{-6}$  г/см<sup>3</sup>. Оценить установившуюся разность температур шарика и воздуха (на больших расстояниях от шарика). Плотность насыщенных паров воды при комнатной температуре (20 °С) равна  $\rho_{\text{нас}}^0 = 1,7 \cdot 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup>. Коэффициент диффузии паров воды в воздухе равен  $D = 3 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплопроводности воздуха равен  $\kappa = 2,4 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К). Теплота испарения воды равна  $\lambda = 2,2 \cdot 10^6$  Дж/кг. Считать, что движения воздуха не происходит.

**11.78.** Определить скорость звука в парожидкостной смеси (жидкость с небольшим содержанием водяного пара), находящейся в состоянии равновесия при температуре  $T = 293$  К. Пар распределен равномерно в жидкости в виде пузырьков, причем эта смесь стабильна, — например в невесомости, где архимедовой силы нет. Частота звука такова, что при его распространении успевает установиться фазовое равновесие, и с изменением давления меняется только содержание пара. Считать пар идеальным газом. Удельная теплота парообразования  $\lambda = 2260$  Дж/г не зависит от температуры,

удельная теплоемкость воды  $c_v = 4,2 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К})$ . Плотность насыщенного пара  $\rho_{\text{п}} = 17 \text{ г}/\text{м}^3$ . Содержание пара  $\varphi = \frac{m_{\text{п}}}{m_{\text{п}} + m_{\text{в}}} = 10^{-7}$ , где  $m_{\text{п}}$ ,  $m_{\text{в}}$  — массы пара и воды соответственно.

**11.79.** При сжижении газов по простой схеме Линде доля сжиженного газа  $\alpha$  определяется его давлением  $P$  и температурой  $T$  на входе. Максимальной значение  $\alpha$  наблюдается, когда при постоянной температуре  $T$  энтальпия газа  $I$  в зависимости от его энтропии  $S$  минимальна, т. е.  $\left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_T = 0$ . Рассматривая водород как газ

Ван-дер-Вааальса с критическими значениями давления и температуры  $P_{\text{кр}} = 13 \text{ атм}$  и  $T_{\text{кр}} = 33 \text{ К}$ , оценить при  $T = 80 \text{ К}$  величину давления  $P$  на входе.

## § 12. Поверхностные явления

**12.1.** Для определения поверхностного натяжения воды взвешивают капли, отрывающиеся от капилляра, и измеряют диаметр  $d$  шейки капли в момент отрыва. Оказалось, что масса 318 капель воды равна 5 г, а  $d = 0,7 \text{ мм}$ . Найти поверхностное натяжение воды.

**12.2.** Как велико поверхностное натяжение жидкости  $\sigma$ , если петля из резинового шнура длиной  $l$  с поперечным сечением  $S$ , положенная на пленку этой жидкости, растянулась в окружность радиуса  $R$  после того, как пленка была проколота внутри петли? Считать, что при малых растяжениях для резины справедлив закон Гука и модуль Юнга резины равен  $E$ .

**12.3.** Капля несжимаемой жидкости совершает пульсационные колебания, становясь последовательно вытянутой, сферической, сплюснутой, сферической, снова вытянутой и т. д. Как зависит период этих пульсаций  $T$  от плотности  $\rho$ , поверхностного натяжения  $\sigma$  и радиуса капли  $r$ ?

**12.4.** Известно, что видимая яркость некоторых звезд (пульсаров) периодически колеблется. По одной из теорий изменение яркости связано с изменением формы звезд, колеблющихся подобно капле воды под действием силы поверхностного натяжения. Предполагается, что пульсары состоят из нейтронов. Оценить поверхностное натяжение нейтронного вещества, если положить, что масса звезды  $M = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}$ , а период колебаний  $T$  составляет около 1 с. Капля воды массой  $m = 1 \text{ г}$  колеблется с периодом  $\tau = 0,05 \text{ с}$ . Коэффициент поверхностного натяжения воды равен  $\sigma_0 = 70 \text{ дин}/\text{см}$ .

**12.5.\*** Рассмотрев цикл Карно для пленки жидкости в предположении, что температуры нагревателя и холодильника бесконечно мало отличаются друг от друга, и применив теорему Карно, найти производную поверхностного натяжения  $\sigma$  жидкости по температуре  $T$ .

**12.6.\*** Найти выражение для внутренней энергии пленки  $U$ .

**12.7.** Определить изменение температуры пленки при адиабатическом расширении.

**12.8.** Мыльная пленка имеет толщину  $h = 10^{-3}$  мм и температуру  $T = 300$  К. Вычислить понижение температуры этой пленки, если ее растянуть адиабатически настолько, чтобы площадь пленки удвоилась. Поверхностное натяжение мыльного раствора убывает на  $0,15$  дин/см при повышении температуры на  $1$  К.

**12.9.** В сосуде с адиабатическими стенками находится мыльный пузырь радиуса  $r = 5$  см. Общее количество воздуха в сосуде и в пузыре  $\nu = 0,1$  моль, его температура  $T = 290$  К (предполагается, что она одинакова внутри и вне пузыря). При этой температуре поверхностное натяжение  $\sigma = 70$  дин/см,  $d\sigma/dT = -0,15$  дин/(см·К). Как изменится температура воздуха в сосуде, если пузырь лопнет? Теплоемкостью образовавшихся капелек пренебречь.

**12.10\*.** Показать, что вблизи абсолютного нуля поверхностное натяжение жидкости перестает зависеть от температуры, т. е.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{dT} = 0.$$

(Конкретно речь может идти только о гелии — единственном веществе, остающемся жидким при абсолютном нуле температуры.)

**12.11.** Чему равно капиллярное давление  $P$  в капельке ртути с диаметром  $d = 1$  мкм при температуре  $15^\circ\text{C}$ , если поверхностное натяжение ртути при этой температуре  $\sigma = 487$  дин/см?

**12.12.** Чему равно добавочное давление  $P$  внутри мыльного пузыря с диаметром  $d = 0,8$  см, если поверхностное натяжение мыльной воды  $\sigma = 40$  дин/см?

**12.13.** Оценить максимальное количество воды, которое можно налить в решето с парафинированным дном диаметра  $D = 20$  см, если последнее сделано из металлического листа с круглыми отверстиями диаметра  $d = 1$  мм. Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 70$  дин/см. Как зависит максимальное количество наливаемой жидкости от ее плотности?

**12.14.** В дне сосуда имеется трещина шириной  $a = 0,02$  мм. До какой высоты  $h$  можно налить ртуть в сосуд, чтобы она еще не вытекала через трещину? Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>. Поверхностное натяжение (при  $15^\circ\text{C}$ )  $\sigma = 487$  дин/см.

**12.15.** Насколько изменится разность уровней  $h_1 - h_2$  воды в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами  $d_1 = 0,1$  мм и  $d_2 = 0,3$  мм при нагревании от  $20$  до  $70^\circ\text{C}$ , если поверхностное натяжение воды для этих температур равно соответственно  $73$  и  $64$  дин/см?

**12.16.** Чтобы стряхнуть ртуть в медицинском термометре, нужно ускорение  $a \sim 10g$ . Оценить диаметр перетяжки в капилляре термометра. Поверхностное натяжение ртути  $\sigma = 490$  дин/см, длина столбика ртути выше перетяжки  $h \sim 5$  см, плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

**12.17.** С какой силой  $F$  притягиваются две вертикальные и параллельные стеклянные пластинки, частично погруженные в воду так, что расстояние между ними равно  $d = 0,1$  мм? Ширина пластинок  $l = 15$  см,  $\sigma = 73$  дин/см,  $\theta = 0^\circ$ . Высота пластинок такова, что поднимающаяся вода не доходит до их верхних краев.

**12.18.** Какова разность уровней жидкости в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ ? Поверхностное натяжение жидкости равно  $\sigma$ , плотность —  $\rho$ . Краевые углы менисков равны нулю.

**12.19.** Вертикально расположенный стеклянный капилляр длины  $l$  и радиуса  $r$  запаян с верхнего конца. На какую высоту  $h$  поднимется вода в капилляре, если его нижний конец привести в соприкосновение с поверхностью воды?

**12.20.** На какую высоту  $h$  поднимается вода между двумя вертикальными стеклянными пластинками, частично погруженными в эту жидкость, если расстояние между ними  $d = 0,5$  мм? Для воды  $\sigma = 73$  дин/см. Краевой угол  $\theta$  в этом случае можно считать равным  $0^\circ$ .

**12.21.** Две стеклянные вертикальные пластинки, погруженные частично в жидкость, образуют друг с другом очень малый двугранный угол  $\alpha$ . Найти высоту поднятия жидкости  $h$  как функцию расстояния  $x$  от ребра двугранного угла.

**12.22.** Капля воды с массой  $m = 0,1$  г введена между двумя плоскими и параллельными между собой стеклянными пластинками, смачиваемыми водой, причем краевой угол  $\theta = 0^\circ$ . Как велика сила  $F$  притяжения между пластинками, если они находятся друг от друга на расстоянии  $d = 10^{-4}$  см? Поверхностное натяжение воды (при  $18^\circ\text{C}$ )  $\sigma = 73$  дин/см.

**12.23.** Грамм ртути помещен между двумя плоскими стеклянными пластинками. Какую силу  $F$  надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть приняла форму круглой лепешки однородной толщины и радиуса  $R = 5$  см. Поверхностное натяжение ртути (при  $15^\circ\text{C}$ )  $\sigma = 487$  дин/см, краевой угол между ртутью и стеклом  $\theta = 40^\circ$ .

**12.24.** На дне пруда глубиной  $h = 2$  м выделяются пузырьки газа с диаметром  $d_1 = 0,05$  мм. Чему будут равны диаметры  $d_2$  этих пузырьков, когда они поднимутся к поверхности воды? Поверхностное натяжение воды  $\sigma = 73$  дин/см.

**12.25.** На какую величину  $\Delta T$  температура воздуха внутри мыльного пузыря должна превышать температуру окружающего воздуха  $T$ , чтобы пузырь стал подниматься? Радиус пузыря равен  $r$ , поверхностное натяжение мыльной пленки  $\sigma$ . Массой пленки можно пренебречь. Учесть, что давление воздуха внутри пузыря мало отличается от атмосферного давления  $P$ .

**12.26.** В цилиндре с подвижным поршнем заключен мыльный пузырь радиуса  $r$ , наполненный воздухом. Вначале давление воздуха вне пузыря равно атмосферному давлению  $P_0$ . Медленным вдвиганием поршня мыльный пузырь сжимают, так что радиус его уменьшается вдвое. Определить давление наружного воздуха в цилиндре в этот момент.

**12.27.** На сколько изменится по сравнению с  $C_p$  молярная теплоемкость идеального газа  $C$ , если его нагреть внутри мыльного пузыря радиуса  $r = 1$  см? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 50$  дин/см. Зависимость  $\sigma$  от температуры пренебречь. Давление вне пузыря  $P_0 = 1$  атм.

**12.28.** Мыльный пузырь радиуса 1 см нагревается от температуры 20 °С до температуры 52 °С. Найти радиус  $r$  нагретого пузыря. Коэффициент поверхностного натяжения принять равным 40 дин/см и считать, что он не зависит от температуры.

**12.29.** В вакуумную камеру помещен масляный пузырь, внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Газ внутри пузыря нагревают. Найти молярную теплоемкость  $C$  газа в этом процессе. Зависимостью поверхностного натяжения от температуры пренебречь.

**12.30.** Определить молярную теплоемкость воздуха  $C$  внутри мыльного пузыря, который при внешнем давлении  $P_0$ , температуре  $T_0$  имеет радиус  $r$ . Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки  $\sigma$  от температуры не зависит.

**12.31.** В вакуумной камере находится масляный пузырь радиуса  $r_0 = 3$  см. Введением поверхностно-активного вещества коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma_0 = 60$  эрг/см<sup>2</sup> был понижен в  $a = 1,29$  раз. Какое количество тепла надо подвести к газу внутри пузыря, чтобы температура его осталась неизменной? Газ считать идеальным.

**12.32.** Мыльный пузырь радиуса  $r$ , поднявшийся до некоторой высоты, увеличил свой радиус вдвое. Считая атмосферу Земли изотермической, найти изменение энтропии мыльного пузыря. Давление у поверхности Земли равно  $P_0$ , коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки —  $\sigma$ , удельная теплота образования мыльной пленки —  $q$ .

**12.33.** Мыльный пузырь выдут через цилиндрическую трубку с внутренним радиусом  $r = 1$  мм и длиной  $l = 10$  см. Когда радиус пузыря достигает значения  $R_0 = 10$  см, перестают дуть, и воздух из пузыря начинает выходить через трубку. Через какое время, начиная с этого момента, пузырь исчезнет? Поверхностное натяжение мыльного раствора  $\sigma = 50$  дин/см, вязкость воздуха  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$  дин·с/см<sup>2</sup>. Изменением плотности воздуха за время процесса пренебречь.

**12.34.** В стенке шарового мыльного пузыря сделано круглое отверстие радиуса  $a = 1$  мм (такое отверстие, например, можно получить, поместив на стенку пузыря петельку из нити, а затем проткнув мыльную пленку внутри этой петельки). Найти время, в течение которого весь воздух выйдет из пузыря, если его начальный радиус  $r_0 = 10$  см. Температура воздуха вне и внутри пузыря  $t = 20$  °С. Поверхностное натяжение мыльного раствора при этой температуре  $\sigma = 50$  дин/см. Атмосферное давление  $P = 760$  мм рт. ст. Среднюю относительную молекулярную массу воздуха принять равной  $\mu = 29$ . При истечении через отверстие воздух считать идеальной несжимаемой жидкостью.

**12.35.** Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны  $R_1$  ее поверхности в нижней точке от радиуса кривизны  $R_2$  в верхней точке, если расстояние между этими точками  $d = 2$  мм? Поверхностное натяжение  $\sigma = 70$  дин/см.

**12.36.** Внутри мыльного пузыря радиуса  $r_0$  находится воздух (идеальный газ) при температуре  $T_0$  и давлении  $P_0$ . Поверхностное натяжение мыльного раствора при этой температуре равно  $\sigma_0$ . Удельная теплота изотермического образования единицы поверхности мыльной пленки при той же температуре равна  $q_0$ . Найти производную радиуса пузыря по температуре  $dr/dT$  для  $T = T_0$ . Наружное давление остается постоянным.

**12.37.** Найти поверхностное натяжение  $\sigma$  жидкости, если в капилляре с диаметром  $D = 1$  мм она поднимается на высоту  $h = 32,6$  мм. Плотность жидкости  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>. Краевой угол мениска равен нулю.

**12.38.** В вакуумной камере на двух концах трубки находятся два почти одинаковых по размеру масляных пузыря, наполненных воздухом. В начальный момент трубка перекрыта краном. Что произойдет после открытия крана? Считая процесс изотермическим, вычислить, насколько изменится суммарная энтропия газа. Начальные радиусы пузырей  $r_0 = 5$  см. Поверхностное натяжение масла  $\sigma = 30$  дин/см. Температура  $T = 300$  К.

**12.39.** В вакуумной теплоизолированной камере на двух концах трубки находятся два почти одинаковых по размеру масляных пузыря, наполненных гелием. В начальный момент трубка перекрыта краном. Что произойдет после открытия крана? Во сколько раз изменятся температура и давление в пузырях? Изменится ли энтропия системы? Теплоемкостью пленки и трубки пренебречь по сравнению с теплоемкостью газа. Считать, что поверхностное натяжение не зависит от температуры.

**12.40.** Поверхностное натяжение на границе вода—масло равно  $\sigma$ . Какую работу  $A$  нужно произвести, чтобы каплю масла массы  $M$  при температуре  $T$  изотермически раздробить в воде на капельки малого радиуса  $r$ ? Как при этом изменится энтропия масла? Плотность масла равна  $\rho$ , удельная теплота образования поверхности —  $q$ .

**12.41.** В горизонтальной трубке переменного сечения, разрез которой показан на рис. 377, находится капля воды массы  $m = 4 \cdot 10^{-2}$  г. Определить положение равновесия капли. Вычислить период малых колебаний капли около положения равновесия, если коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma = 72$  дин/см, а краевой угол равен нулю. Радиус мениска считать равным радиусу трубки.

**12.42.** Определить глубину  $h$  ртутной лужицы на плоском горизонтальном стекле. Поперечные размеры лужицы велики по сравнению с ее глубиной. Поверхностное натяжение ртути на границе с воздухом  $\sigma = 490$  дин/см, краевой угол на стекле  $\theta = 140^\circ$ . Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>.

**12.43.** Известно, что в поршневых насосах вода из бассейна при нормальных внешних условиях не поднимается за поршнем выше 10 м. На какую высоту поднимется вода в абсолютно смачиваемом капилляре практически неограниченной длины и диаметром 1 мкм?

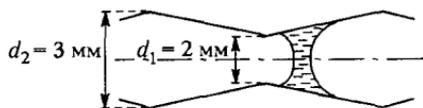


Рис. 377

**12.44.** Абсолютно смачиваемый канал переменного сечения (рис. 378), радиус которого связан с высотой как  $r = r_0 e^{-h/r_0}$ , расположен вертикально в однородном гравитационном поле. Внутрь канала помещается мыльная пленка массы  $m$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Считая пленку плоской, определить, на какой высоте она установится.

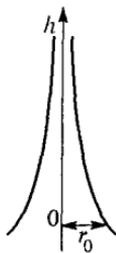


Рис. 378

**12.45.** Во время дождя можно наблюдать, как через брезент палатки начинает пробиваться мельчайшая водяная пыль. Принимая, что размер отверстий между нитями в брезенте  $d = 0,05$  мм, оценить минимальный размер капель дождя, способных «пробить» брезент. Ткань палатки тонкая, несмачиваемая водой, а сила сопротивления  $F$  воздуха движению капли радиуса  $R$  равна  $\rho_{\text{возд}} v^2 \pi R^2$ .

**12.46:** На тонкое проволочное кольцо радиуса  $R$  натянута мыльная пленка. Масса пленки  $M = 1$  г, а коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 30$  дин/см. Вычислить время схлопывания мыльной пленки, если «прокол» пленки сделан в ее центре. Какая часть энергии пленки перейдет в кинетическую энергию движения жидкости пленки?

**12.47.** Сосуд разделен на две части горизонтальной теплоизолирующей перегородкой, в которой имеется маленькое отверстие с размером много меньше длины свободного пробега молекул газа. Давление в нижней части сосуда равно  $P_0 = 6$  Тор. Верхняя часть сосуда высотой  $h = 9$  см заполнена маслом ( $\sigma = 0,03$  Н/м,  $\rho = 870$  кг/м<sup>3</sup>). Над отверстием сверху образовался газовый пузырь радиусом 1 мм (рис. 379). При каком отношении температур масла и газа размер пузыря останется неизменным? Температуры газа в пузыре равна температуре масла.

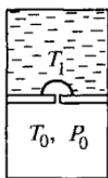


Рис. 379

**12.48.** Сосуд с газом разделен на две части теплоизолирующей перегородкой, в которой имеется маленькое отверстие с размером, много меньшим длины свободного пробега молекул газа. Давления газа по обе стороны перегородки одинаковы и равны  $P_0 = 2$  Тор. С одной стороны перегородки над отверстием имеется пузырь из мыльной пленки ( $\sigma = 0,03$  Н/м) радиуса 5 мм. Температура газа, заключенного между перегородкой и пузырем, равна температуре газа с той стороны пленки, в которой находится пузырь (рис. 380). При каком отношении температур газа по обе стороны перегородки размер пузыря будет оставаться неизменным?

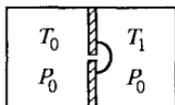


Рис. 380

**12.49.** Вычислить давление насыщенного водяного пара при 20 °С над сферической поверхностью капли воды, если ее радиус: 1)  $r_1 = 10^{-5}$  см (капелька тумана), 2)  $r_2 = 10^{-7}$  см. При такой температуре для воды  $\sigma = 72,7$  дин/см,  $v_{\text{ж}} = 1,002$  см<sup>3</sup>/г,  $P_0 = 17,5$  мм рт. ст.

**12.50.** Сосуд с водой нагревают при постоянном давлении  $P_0 = 1$  атм. Оценить, на сколько температура вскипания воды будет

выше  $100^\circ\text{C}$ , если из нее предварительно удалены растворенные газы, а максимальный размер твердых песчинок находящейся в ней взвеси составляет  $r_{\text{max}} = 10$  мкм. Коэффициент поверхностного натяжения принять равным  $\sigma = 60$  эрг/см<sup>2</sup>, а теплоту испарения  $\Lambda = 9,7$  ккал/моль.

**12.51.** Вода без примесей нагревается до температуры  $t = 101^\circ\text{C}$  при внешнем давлении  $P_0 = 1$  атм. Оценить минимальный размер песчинки, которая при попадании в воду вызовет вскипание воды. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 58,8$  эрг/см<sup>2</sup>, удельная теплота парообразования  $\lambda = 2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг, удельный объем водяного пара  $v_{\text{п}} = 1,7$  м<sup>3</sup>/кг при  $t = 100^\circ\text{C}$ .

**12.52.** Пары воды, находящиеся в помещении, начинают конденсироваться на гладкой поверхности при охлаждении ее до  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ . Начиная с какой температуры они будут конденсироваться на пористом теле с радиусом пор  $r = 10^{-5}$  см? Удельная теплота парообразования воды  $\lambda = 2,48$  кДж/г, а коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см. Считать, что поверхность пор смачивается водой, причем угол смачивания равен нулю.

**12.53.** Насыщенный пар спирта в камере Вильсона имеет при температуре  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  давление  $P_1 = 40$  Тор. На какую величину  $\Delta P_{\text{п}}$  надо изменить давление пара путем адиабатического охлаждения, чтобы в нем началось образование тумана с начальным радиусом капель  $r = 10^{-6}$  см? Теплота испарения спирта  $\Lambda = 39,3$  кДж/моль, молярный объем жидкости  $V_{\text{ж}} = 58,2$  см<sup>3</sup>/моль, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 20$  дин/см. Считать, что молярная теплоемкость пара  $C_p = 4R$ .

**12.54.** Сферическая капля ртути испаряется на открытом воздухе в ветреную погоду. Плотность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, молярная масса  $\mu = 200$ , поверхностное натяжение  $\sigma = 4,7 \cdot 10^{-5}$  Н/м. Температура воздуха  $t = 27^\circ\text{C}$ . При каких размерах капли скорость испарения с единицы поверхности практически не зависит от радиуса капли?

**12.55.** Оценить максимальное давление, при котором водяной пар может оставаться пересыщенным при температуре  $100^\circ\text{C}$ , находясь в сосуде с несмачиваемыми стенками. Коэффициент поверхностного натяжения воды принять  $\sigma = 70$  дин/см.

**12.56.** Переохлажденный водяной пар находится при давлении  $P_0 = 1$  атм и температуре  $t_0 = 99^\circ\text{C}$  в сосуде с несмачиваемыми стенками. Каков минимальный размер капли, которая должна образоваться, чтобы произошла конденсация пара? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять  $\sigma = 70$  дин/см, удельную теплоту испарения  $\lambda = 2,3$  кДж/г.

**12.57.** Небольшое облако, состоящее из водяных капель диаметра  $d = 0,1$  мкм, постепенно сконденсировалось в одну каплю массой  $M = 1$  г. Считать процесс адиабатическим, вычислить изменение энтропии и температуру капли. Температура облака  $t = 27^\circ\text{C}$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см, а  $d\sigma/dT = -0,15$  дин/(см $\cdot$ К).

**12.58.** Туман состоит из капелек воды с радиусом  $0,0005$  мм. Насколько должен быть пересыщен водяной пар в окружающем пространстве, температура которого  $10^\circ\text{C}$ , чтобы капельки находились в равновесии с паром? Давление пара, насыщающего пространство при  $10^\circ\text{C}$ , равно  $9,2$  Тор. Коэффициент поверхностного натяжения равен  $70$  дин/см.

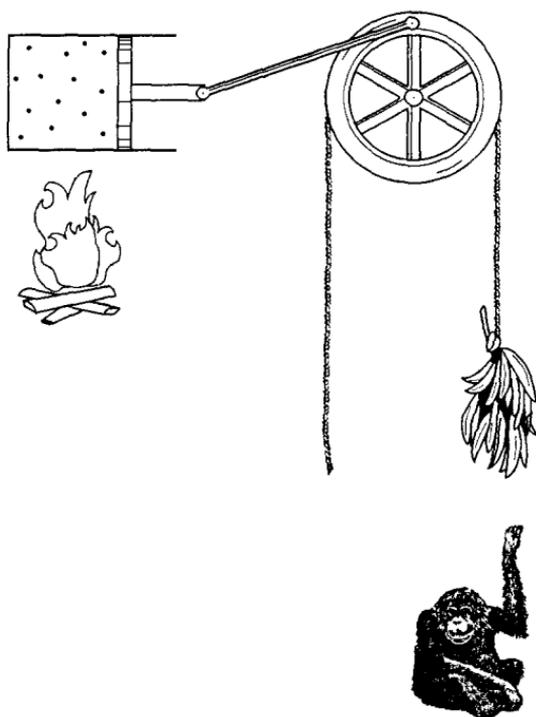
**12.59.** Мельчайшая капелька воды ( $r = 10$  мкм) находится в замкнутой полости объемом  $V$  в равновесии с паром. При каком размере полости это равновесие может быть устойчивым? Стенки полости несмачиваемы, других капель и центров конденсации нет. Рассмотреть изотермические условия с  $T = 300$  К, пар считать идеальным газом, его давление  $P_{\text{н}} = 27$  мм рт. ст.

**12.60.** Жидкий  ${}^4\text{He}$  (He-I) при нормальном атмосферном давлении в точке кипения имеет плотность  $\rho = 0,125$  г/см<sup>3</sup>. При этом коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 0,35$  дин/см. Оценить удельную теплоту парообразования  $\lambda$   ${}^4\text{He}$  при этих условиях. В качестве модели жидкого гелия принять плотную упаковку шаров.

**12.61.** В закрытый сосуд, в котором над слоем воды находится насыщенный пар плотности  $\rho$  и температуры  $T$ , вносится капля воды радиуса  $a$ , имеющая ту же температуру. Через какое время радиус капли изменится в 2 раза? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен  $\sigma$ , плотность —  $\rho_0$ , молярная масса —  $\mu$ . Изменением давления паров вблизи капли за счет испарения с ее поверхности пренебречь.

**12.62.** В центре сферы радиуса  $a = 1$  см находится капля воды. Пространство между каплей и сферой заполнено насыщенным паром. На внутренней поверхности сферы имеется очень тонкий слой воды. В начальный момент времени радиус капли  $b_0 = 0,5$  см. Полагая температуру системы  $T = 300$  К постоянной, оценить время  $\tau$ , за которое масса капли уменьшится на  $\Delta m = 10$  мг. При этой температуре давление насыщенного пара над плоской поверхностью  $P_\infty = 3,5 \cdot 10^3$  Па, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см, эффективный коэффициент диффузии  $D = 10$  см<sup>2</sup>/с. Насыщенный пар считать идеальным газом.

**12.63.** В центре сферы радиуса  $a = 1$  см находится капля воды. Пространство между каплей и сферой заполнено насыщенным паром. На внутренней поверхности сферы имеется очень тонкий слой воды. В начальный момент времени радиус капли  $b_0 = 0,1$  мм. При постоянной температуре системы  $T_1 = 300$  К время испарения 20% капли составило  $\tau_1 \sim 1$  ч. Оценить относительное изменение времени испарения  $(\tau_2 - \tau_1)/\tau_1$  20% массы такой же капли, если температура системы  $T_2 = 320$  К. При температуре  $T_1 = 300$  К коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 70$  дин/см,  $\frac{d\sigma}{dT} = -0,15$  дин/(см·К), коэффициент диффузии  $D = 10$  см<sup>2</sup>/с. Насыщенный пар считать идеальным газом.



# ОТВЕТЫ и избранные решения

§ 1. Кинематика материальной точки

1.1. См. рис. 381.

К рис. 381а. Зависимость скорости от времени описывается законом  $v = at$ .

К рис. 381б. График составлен из чередующихся отрезков горизонтальных ( $v = \text{const}$  при  $a = 0$ ) и наклонных ( $v = at$  при  $a = \text{const} \neq 0$ ) прямых.

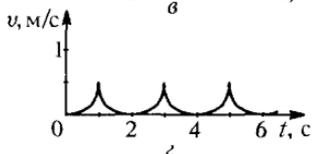
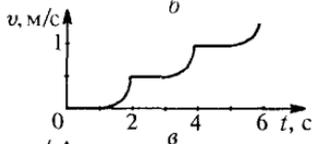
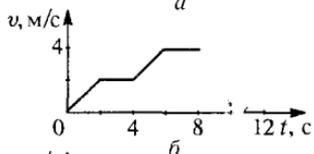
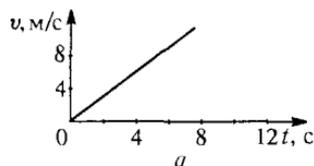


Рис. 381

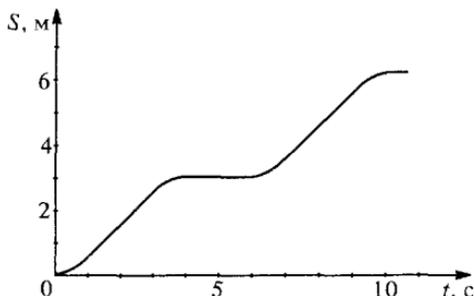


Рис. 382

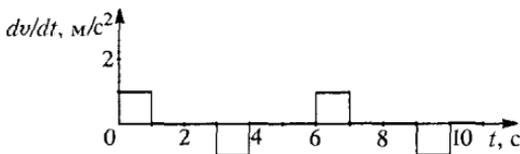


Рис. 383

К рис. 381в. График составлен из отрезков горизонтальных прямых и отрезков парабол, описываемых уравнением вида  $v = kt^2/2$  (при  $a = kt$ ), если при построении этих парабол принимать за начало координат точки  $t = 1, 3, 5$ .

К рис. 381г. График составлен из отрезков парабол. От точек 0, 2, 4, 6 построены параболы, удовлетворяющие уравнению вида  $v = kt^2/2$ . В пределах участков оси времени 1—2, 3—4, 5—6 расположены отрезки парабол, удовлетворяющие уравнению  $v = v_{\text{max}} - kt^2/2$ .<sup>1</sup>

1.2. См. рис. 382 и 383.

<sup>1</sup> Функциональные зависимости кинематических величин от времени, приводимые здесь и в решении задачи 1.2, отыскиваются путем графического или аналитического дифференцирования и интегрирования.

К рис. 382. На участке 0–1 зависимость  $S$  от  $t$  описывается уравнением  $S = at^2/2$ , на участках 1–3, 3–4, 4–6 — уравнениями  $S = v_{\max}t$ ,  $S = v_{\max}t - at^2/2$ ,  $S = \text{const}$  и т. д.

К рис. 383. На участке 0–1  $\frac{dv}{dt} = a = \text{const} > 0$ . На участках 1–3 и 3–4 — соответственно  $a = 0$  и  $a = \text{const} < 0$  (см. сноску к ответу задачи 1.1).

$$1.3. v(t) = v_0 \pm \int_{t_0}^{t_1} |a(t)| dt \equiv v_0 \pm I.$$

$$t_x = \begin{cases} t_1, & \text{когда } v(t) = v_0 + I \text{ (направления } \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{v} \text{ совпадают)}, \\ t_1, & \text{когда } v(t) = v_0 - I, \text{ если } I > 2|v_0|, \\ t_0, & \text{когда } v(t) = v_0 - I, \text{ если } I < 2|v_0|. \end{cases}$$

1.4.  $\alpha = 3\pi/8$ .

1.5.  $\varphi = \pi/8$ .

1.6.  $\alpha = \pi/6$ .

1.9. Условие возврата шарика на траекторию падения после завершения подъема  $v_0^2 \sin 2\alpha = Dg$ . Число соударений за период движения в цилиндре  $N = 2k + 3$ , где  $k$  — число ударов шарика за время движения шарика от первого удара о стенку до первого удара о дно.

1.10.  $T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 116$  земных суток.

1.11. Тень движется с запада на восток со скоростью  $v = 2\pi \left( \frac{R_{\text{Л}}}{T_{\text{мес}}} - \frac{R_{\text{З}}}{T_{\text{сут}}} \right) \approx 0,5$  км/с, где  $T_{\text{мес}}$  — продолжительность месяца,  $T_{\text{сут}}$  — продолжительность суток.

1.12. Тень будет двигаться вверх с постоянным ускорением  $a = \frac{4\pi^2 R}{T_{\text{сут}}^2} = 3,4$  см/с<sup>2</sup>;  $t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4$  мин.

1.13.  $v_x = v_0(1 + \cos \varphi)$ ;  $v_y = -v_0 \sin \varphi$ ;  $v_{\text{полн}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}$ ;

$$\alpha = -\text{arctg} \left( \text{tg} \frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{\varphi}{2}.$$

1.14.  $\rho = 4R$ .

Решение. Ускорение движущейся точки направлено к центру катящегося круга и равно  $v^2/R$ . В вершине циклоиды скорость точки равна  $2v$ , ускорение нормальное и может быть представлено в виде  $(2v)^2/\rho$ . Отсюда ответ.

1.15. Для обеих точек колеса  $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}|\sqrt{2}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость качения колеса; вектор скорости передней точки будет наклонен вперед и вниз под углом  $45^\circ$  к горизонтальному диаметру. Для задней точки — соответственно вверх и вперед под тем же углом. Вектор ускорения передней точки будет горизонтален и направлен против хода движения колеса. Вектор ускорения задней точки — горизонтален и направлен по ходу движения колеса.

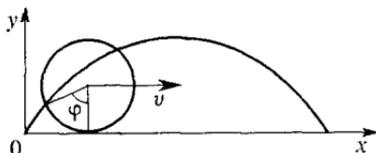


Рис. 384

1.16.  $x = R(\varphi - \sin \varphi) = R(\omega t - \sin \omega t)$ ,  $y = R(1 - \cos \varphi) = R(1 - \cos \omega t)$ , где  $\varphi = \omega t$  и  $\omega = v/R$  есть угловая скорость вращения колеса. Траекторией

точек находящихся на ободке движущегося колеса, будет простая циклоида, уравнения которой в параметрической форме и получены (рис. 384).

$$1.17^* S = 8R.$$

Решение.

$$v_{\text{полн}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2} = 2\omega R \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \frac{d\varphi}{dt} R \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$dS = v_{\text{полн}} dt = 2 \frac{d\varphi}{dt} R \cos \frac{\varphi}{2} dt = 2R \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Таким образом, для подсчета пройденного точкой пути интегрирование по времени можно свести к интегрированию по углу поворота  $\varphi$  колеса. Очевидно, что угол поворота колеса  $\varphi$  между двумя последовательными касаниями дороги одной и той же точкой на ободке колеса изменяется в пределах от 0 до  $+2\pi$ . Таким образом, находим

$$S = 2 \cdot 2R \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8R.$$

1.18\*

$$h_{\text{max}} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}, \quad (*)$$

$$(\cos \varphi)_{h_{\text{max}}} = -\frac{Rg}{v^2}, \quad (**)$$

где  $\varphi$  — угловая координата искомой точки на ободке колеса (см. рис. 7 к задаче 1.16).

Решение. Координата  $y$  произвольной точки на ободке колеса может быть записана выражением

$$y = R \left( 1 - \cos \frac{vt}{R} \right),$$

откуда

$$\dot{y} = v \sin \frac{vt}{R}.$$

Величины  $y$ ,  $\dot{y}$  и  $h$  связаны соотношением

$$h = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}.$$

Подстановкой в последнее выражение находим (\*\*) из условия  $\frac{dh}{d\varphi} = 0$ . После этого получаем (\*).

1.19.  $a_{\text{гориз}} = \frac{v^2}{R} \sin \varphi$ ,  $a_{\text{верт}} = \frac{v^2}{R} \cos \varphi$ . При равномерном вращении полное ускорение всегда направлено к центру колеса.

$$1.20. \rho = \frac{(v_0^2 + \omega^2 R^2)^{3/2}}{\omega^3 R^2}.$$

$$1.21. \rho = \frac{(v_0 \cos \alpha + \omega R)^2}{\omega^2 R + g}.$$

1.22. Искомая мгновенная ось вращения будет описывать окружность с радиусом  $r = \omega_2 R / (\omega_1 + \omega_2)$  вокруг оси первого диска. Угловая скорость вращения вокруг этой мгновенной оси будет  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

1.23. При повороте автомобиля его внешние и внутренние (по отношению к центру закругления дороги) колеса описывают разные окружности, т. е. проходят разные пути, и угловая скорость вращения колес, если они не скользят по дороге, должна быть различной. Это условие для задних ведущих колес

обеспечивает дифференциал в заднем мосту автомобиля. Колеса, не имеющие привода от мотора, могут вращаться независимо друг от друга с различной угловой скоростью, так как они установлены на подшипниках.

$$1.24. v_{in} = 9,88 \text{ м/с}, v_{ex} = 10,12 \text{ м/с}.$$

## § 2. Динамика материальной точки. Статика

$$2.1. F_1 = -\frac{4}{5} F.$$

$$2.2. a = \frac{m}{m+M} g; T = \frac{Mm}{m+M} g.$$

2.3.  $F \geq 40$  Н. Сила натяжения нити, связывающей два тела, определяется только величиной приложенной к ним силы  $F$  и не зависит от коэффициента трения между телами и столом, если только он одинаков для обоих тел.

$$2.4. a = \frac{M}{M+m_1+m_2+m_3} g;$$

$$T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a; T_2 = (m_2 + m_3)a; T_3 = m_3a.$$

$$2.5. a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g; T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \alpha) g.$$

$$2.6. a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + m_2/2} g; a_2 = -\frac{a_1}{2}; T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

У к а з а н и е. Условие, связывающее ускорения  $a_1$  и  $a_2$ , можно получить, обозначив через  $x_1$  и  $x_2$  расстояния от масс  $m_1$  и  $m_2$  до горизонтальной плоскости; тогда  $x_1 + 2x_2$  есть величина постоянная. Дифференцируя это равенство два раза, получаем искомое условие  $a_1 = -2a_2$ .

$$2.7. a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} g; T_1 = \frac{8m_1 m_2 m_3 g}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)};$$

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2 m_3 g}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}.$$

У к а з а н и е. Обозначив через  $x_1, x_2, x_3$  расстояния от масс  $m_1, m_2, m_3$  до плоскости, к которой прикреплен блок, можно написать следующее равенство:  $x_2 + x_3 + 2x_1 = \frac{1}{2}l_2 + 2l_1 + \text{const}$ , где  $l_1$  и  $l_2$  — длины нитей. Дифференцируя его два раза, получаем необходимое для решения задачи соотношение между ускорениями всех трех масс:  $a_2 + a_3 + 2a_1 = 0$ .

$$2.8. m_3 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$2.9. m_3 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.10. Силы становятся равными, когда длина свешивающейся части нити принимает значение  $x_1 = \frac{3}{5} l$ ;  $T = \frac{2}{5} mg$ ;  $\ddot{x}_1 = \frac{3}{5} g$ .

$$2.11. a_1 = \frac{m_1 g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2}; R = \frac{m_1 m_2(2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

2.12. При  $k < \frac{m}{M}$   $a \geq \frac{(m-M)gH}{ML - mH}$ ; при  $k \geq \frac{m}{M}$  ускорение любое.

**2.13.** Обе обезьяны достигнут блока одновременно через промежуток времени  $\tau = l/(3v)$ . Действительно, натяжение веревки по обе стороны от блока одинаково. Значит, одинаковы ускорения и скорости обезьян относительно блока. Так как они приближаются друг к другу со скоростью  $3v$ , то весь путь  $l$  они пройдут за время  $l/(3v)$ .

**2.14.** Блока достигнет раньше более легкая обезьяна, потому что ее ускорение относительно блока будет направлено вверх, а ускорение тяжелой обезьяны — вниз.

**2.15.** Обе обезьяны достигнут блока одновременно через промежуток времени  $\tau = \sqrt{2l/(3a)}$ ; чтобы достичь блока, они обе вместе должны пройти путь  $l$ .

**2.16.** Обезьяна и груз поднимутся на расстояние  $3l/4$  и  $l/4$ , а шест опустится на  $l/4$ .

**2.17.** Груз будет подниматься вверх со скоростью  $v/4$ , независимо от того, постоянна или нет скорость  $v$ .

$$\mathbf{2.18.} \quad F > 0,25(M + m)g + 0,5(M + m)g \approx 22,5 \text{ Н.}$$

$$\mathbf{2.19.} \quad t = \frac{v_0}{g(k_1 + k_2)(1 + m/M)}.$$

$$\mathbf{2.20.} \quad t = \frac{v_0}{kg(1 + m/M)}.$$

$$\mathbf{2.21.} \quad m_{\min} = M \frac{\operatorname{tg} \alpha - k}{k}; \text{ при } m > m_{\min} \text{ доска остановится.}$$

**2.22.** Будет двигаться;  $a_1 = g \left[ \sin \alpha - k_1 \cos \alpha - (k_1 - k_2) \frac{m_2}{m_1} \cos \alpha \right]$ ;  $a_2 = g(\sin \alpha - k_2 \cos \alpha)$ , т. е.  $a_2 > a_1$ . При  $k_1 < k_2 < \operatorname{tg} \alpha$   $a_1 = a_2 = g(\sin \alpha - k_1 \cos \alpha)$ .

$$\mathbf{2.23.} \quad x(t) = L(1 - e^{-\gamma t/M}); \quad x(\infty) = \frac{v_0 M}{\gamma} = L.$$

$$\mathbf{2.24.} \quad v(t) = v_0 \cos \alpha - k(v_0 \sin \alpha + gt).$$

$$\mathbf{2.25.} \quad \alpha = \frac{4kh\Delta}{l^2} = 0,032 \text{ рад} \approx 1^\circ 50'.$$

$$\mathbf{2.26.} \quad S_1 = 2S_0 \left( 1 - \frac{kh}{l} \right) = 1,6S_0; \quad S_2 = 2S_0 \left( 1 + \frac{kh}{l} \right) = 2,4S_0.$$

$$\mathbf{2.27.} \quad F = \frac{(k_1 + k_2)Mgl}{2[l - h(k_1 - k_2)]}.$$

$$\mathbf{2.28.} \quad h = \frac{1}{2g} \left\{ v^2 - \left[ \frac{4mg}{\pi r v d^2 (1 - \cos \alpha)} \right]^2 \right\} \approx 60 \text{ см.}$$

**2.29.** Изменение скорости лодки  $v$  со временем будет происходить по закону  $v = \frac{mv_0}{m + rv_0 t}$ , где  $m$  — масса лодки.  $r$  — коэффициент сопротивления воды.

При сделанном предположении о зависимости силы сопротивления от скорости лодка должна двигаться бесконечно долго, и пройденный ею путь также будет стремиться к бесконечности:  $S = \frac{m}{r} \ln \left( 1 + \frac{rv_0}{m} t \right)$ . Но это предположение о силе сопротивления перестает быть справедливым при малых скоростях движения лодки, когда сила сопротивления становится пропорциональной первой степени скорости (см. следующую задачу).

**2.30.**  $v = v_0 e^{-rt/m}$ , и очевидно, что при сделанном предположении движение лодки будет продолжаться неограниченно долго. Однако для пути  $S$ , пройденного лодкой после спуска паруса, будет иметь место условие  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = v_0 m / r$  (ср. с результатом предыдущей задачи).

2.31.  $v = v_0 - \frac{r}{m} S$ , где обозначения те же, что в предыдущей задаче.

2.32.  $\tau = \frac{m}{2kv} = 50$  с.

2.33.  $T_{\max} = mg \frac{v_{\text{пад}}^2}{v_{\text{приземл}}^2} = 180$  кН.

**Примечание.** Такого натяжения не выдержали бы ни стропы парашюта, ни парашютист, на которого стропы действовали бы с такой силой. В действительности парашют раскрывается не мгновенно, и натяжение строп оказывается гораздо меньше.

2.34. Скорость большего шарика будет в  $\sqrt{2}$  раз больше скорости меньшего.

2.35.  $v = \frac{2}{9} \frac{d_2 - d_1}{\eta} gr^2 = 0,25$  см/с.

2.36.  $v = \frac{(M - m)g + \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_r - \rho_b)}{6\pi\eta R} + \frac{mg}{6\pi\eta R} e^{-6\pi\eta R t / (M - m)}$ .

2.37\*.  $v = \frac{mg}{r} \left[ \left( v_0 \frac{r}{mg} + 1 \right) e^{-rt/m} - 1 \right]$ , где  $m$  — масса тела,  $r$  — коэффициент сопротивления воздуха.

**Решение.** Уравнение движения имеет вид  $m \frac{dv}{dt} = -mg - rv$ . Полученный выше результат найден интегрированием этого уравнения с начальным условием  $v = v_0$  при  $t = 0$ .

2.38.  $t_1 = t_0 \frac{v_*}{v_0} \ln \left( 1 + \frac{v_0}{v_*} \right)$ , где  $v_*$  — скорость установившегося движения тела в вязкой среде,  $t_0 = v_0/g$ .

2.39.  $H = \frac{v_1^2}{g} \left[ \frac{v_0}{v_1} \sin \alpha - \ln \left( 1 + \frac{v_0}{v_1} \sin \alpha \right) \right] \approx 1,6$  км;  $\tau \approx 14$  с.

2.40. 1)  $\Delta S = g\tau \left( t + \frac{\tau}{2} \right)$ ; 2)  $\Delta S = v_0 \left[ \tau + \frac{m}{r} e^{-rt/m} (1 - e^{-r/m}) \right]$ , где  $v_0$  — скорость установившегося движения капель,  $r$  — коэффициент сопротивления при падении капель в воздухе. Время  $t$  отсчитывается от начала падения первой капли.

2.41.  $x(t) = \frac{mV_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t/m})$ , т. е. если глубина океана не ограничивает времени падения  $x_{\max} = \frac{mV_0}{\beta} = 50$  м.

2.42. С точностью до размеров колобка  $H = \left( \frac{m}{\beta} \right)^2 \frac{g'}{e} \approx 0,7$  м, где  $g' = \frac{g}{21}$  — ускорение свободного падения с учетом архимедовой силы;  $e \approx 2,718$ .

2.43.  $t = \frac{R}{v_0 k} (e^{\pi k} - 1)$ .

2.44.  $k = \frac{v^2}{Rg} \approx 0,4$ .

2.45.  $a_{\max} = 5$  м/с<sup>2</sup>;  $a_{\min} = 0,625$  м/с<sup>2</sup>;  $k \geq 0,5$ .

2.46. При движении по синусоиде нормальное ускорение максимально в ее вершинах, где кривизна кривой максимальна. Если  $y = y(x)$  — уравнение синусоиды, то в вершинах  $y' = 0$  и радиус кривизны в этих точках можно

вычислить по формуле  $1/R = |y''|$ . Записав уравнение синусоиды в виде  $y = A \sin(2\pi x/l)$  (амплитуда  $A$  и пространственный период  $l$  постоянны), нетрудно получить условие, при котором заноса не будет:  $v < \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{A}}$ , где  $\mu$  — коэффициент трения,  $g$  — ускорение свободного падения. Подстановка данных задачи дает  $v < 20$  м/с.

$$2.47. v = \sqrt{Rg \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$2.48. r = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}.$$

У к а з а н и е. Когда самолет летит прямолинейно, плоскость крыла горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх, т. е. перпендикулярна к плоскости крыла. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на тот же угол, т. е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

$$2.49. F = \frac{PL}{R} = 1,75 \text{ кН.}$$

$$2.50. \omega = \sqrt{\frac{2g\alpha\beta}{R(\alpha^2 + \alpha\beta - 1)}}.$$

$$2.51. v = \sqrt{gl \left( \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right)}, \text{ где } \cos \varphi = \frac{d^2 + l^2 + R^2}{2ld}.$$

$$2.52. \omega^2 = \frac{g}{\sqrt{(R+l)^2 - (R+r)^2}}.$$

$$2.53^* \alpha = 0, \text{ если } \omega^2 < \frac{kg}{ml_0(g/l_0 + k/m)}, \text{ иначе } \cos \alpha = g \frac{k - m\omega^2}{\omega^2 k l_0} \quad (\omega < \sqrt{k/m}).$$

Р е ш е н и е. Пусть  $T$  — натяжение пружины. Тогда

$$T = k(l - l_0), \quad l = l_0 + \frac{T}{k},$$

$$T \cos \alpha = mg, \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha}, \quad T \sin \alpha = m\omega^2 r,$$

где  $r = l \sin \alpha$ . Если  $\alpha \neq 0$ , то имеем:

$$mg \left( 1 - \frac{m\omega^2}{k} \right) = m\omega^2 l_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_2^2} \right),$$

где  $\Omega_1^2 = \frac{g}{l_0}$ ,  $\Omega_2^2 = \frac{k}{m}$ . Это справедливо, если  $\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} < \omega < \Omega_2$ . Если  $\omega < \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}$ , то  $\alpha = 0$ ; при  $\omega \rightarrow \Omega_2$   $l \rightarrow \infty$ , т. е. пружина обрывается.

$$2.54. \omega^2 = \frac{g(\cos \alpha - k \sin \alpha)}{h \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + k \cos \alpha)}.$$

$$2.55. x = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$2.56. F_x = Fe^{-4} \approx 183 \text{ Н.}$$

2.57. Если  $a_1$  — ускорение в сторону груза массы  $m_1$ , а  $a_2$  — ускорение системы в сторону груза  $m_2$ , то  $a_1 = \frac{m_1 - m_2 e^{k\pi}}{m_1 + m_2 e^{k\pi}}$ ;  $a_2 = \frac{m_2 - m_1 e^{k\pi}}{m_2 + m_1 e^{k\pi}}$ . Условие неподвижности системы  $e^{-k\pi} < \frac{m_2}{m_1} < e^{k\pi}$ .

2.58.  $\Delta t$  будет минимальной при  $\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2}$ .

$$2.59. \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{kl_0} \left[ 1 - \frac{M}{2(M+m)} \right].$$

$$2.60. \Delta l = \frac{1}{2k} \frac{Mm}{M+m} g.$$

2.61. На рис. 385 изображено геометрическое место точек, куда на столе можно поставить гирию:

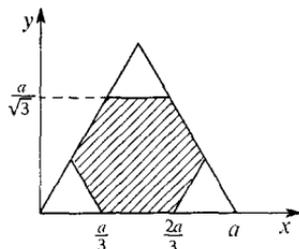


Рис. 385

$$\begin{cases} y \leq \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ y \geq \sqrt{3}x - \frac{2}{\sqrt{3}}a, \\ y \geq \frac{a}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}x. \end{cases}$$

$$2.62. v = \sqrt{2gh} \frac{1 - \sqrt{k_h}}{1 + \sqrt{k_h}} = 0,12 \text{ м/с.}$$

$$2.63. k \geq \frac{R}{l} + \frac{m}{M} \frac{(l^2 + R^2)}{lR}.$$

$$2.64. k \geq \frac{l}{2R} + \frac{R}{2l}.$$

$$2.65. v = \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - l_0^2)}, \quad x = l_0 \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Указание. Решение получается интегрированием уравнения  $m\ddot{x} = \frac{m}{l} gx$ , где  $m$  — масса всей веревки, а  $x$  — длина ее части, свешивающейся в данный момент времени со стола. Начальные условия:  $v = 0$  при  $l = l_0$ .

### § 3. Движение тел с переменной массой

3.1. Ускорение платформы  $\frac{dv}{dt} = \frac{f}{M - \Delta mt}$ . Интегрируя это уравнение и учитывая, что  $v = 0$  при  $t = 0$ , получаем  $v = \frac{f}{\Delta m} \ln \frac{M}{M - \Delta mt}$ .

$$3.2. M = M_0 \left[ \exp \left( \frac{\mu L}{v_0 M} \right) - 1 \right].$$

$$3.3. v = v_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\alpha L}{v_0 M} \right) \right].$$

$$3.4. T = \frac{L}{v_0} \left( 1 + \frac{m_1}{2m_0} \right).$$

3.5. Канат не оборвется.

3.6.  $F = \Delta m_1 v / \Delta t \approx 25$  кН, где  $\Delta m_1$  — масса угля и  $\Delta t$  — время, за которое эта масса погружена на платформу.

3.7. Работа  $F \Delta S' = \frac{\Delta m}{\Delta t} v \Delta S' = \Delta m v^2$ , кинетическая же энергия угля равна  $\Delta m v^2 / 2$ , т. е. вдвое меньше. При соприкосновении с платформой куски угля сначала скользят по полу платформы (в сторону, противоположную движению платформы), и работа паровоза идет также на преодоление возникающих при этом сил трения. Эта работа (превращающаяся в тепло) равна  $\Delta m v^2 / 2$ .

$$3.8^* v = -u \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\mu}{M} t \right) \right]; \eta = 2 \left( 1 - \frac{|v|}{|u|} \right) \frac{|v|}{|u|}; \eta_{\max} = 0,5 \text{ при } v = \frac{u}{2}.$$

Решение. Приравнявая импульсы системы в моменты времени  $t$  и  $t + dt$ , получаем уравнение

$$Mv = M(v + dv) - (u - v)\mu dt.$$

Интегрируя его, находим зависимость модуля скорости корабля от времени. Для получения КПД системы надо составить отношение величины полезной работы (в данном случае это будет приращение кинетической энергии корабля  $d(Mv^2/2) = Mv dv$ ) к величине работы насоса ( $\mu dt \cdot u^2/2$ ) за одинаковые промежутки времени:  $\eta = (2Mv dv) / (\mu u^2 dt)$ ; пользуясь приведенным выше уравнением, можно написать:

$$\eta = 2(u - v)v/u^2.$$

Отыскивая максимум этого выражения как функции  $v/u$ , находим  $\eta_{\max} = 1/2$  при  $v = u/2$ .

$$3.9. t = \frac{aM_0 g - \mu v}{a\mu g} \approx 6 \text{ мин.}$$

$$3.10. v(t) = \frac{\mu u}{\mu + A\eta D} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\mu + A\eta D}{M} t \right) \right]; \text{ при } t \rightarrow 0 \quad v = u \frac{\mu t}{M}.$$

$$3.11. v_1 = v_0 \exp \left( -\frac{\mu t}{m_0} \right); v_2 = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \mu t}.$$

$$3.12. v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \frac{\rho \pi r^2 H^{3/2}}{M}.$$

$$3.13. v = 6\sqrt{2gh_0}.$$

$$3.14. \tau = \frac{v_0}{g} \left( 1 + 2 \frac{M_0}{\Delta m} \right).$$

$$3.15. \frac{v_{\Pi}}{v_{60}} = \sqrt{\frac{M}{m}} = 3,16.$$

$$3.16. x = 4,5 (\ln 10)^2 \frac{u}{\lambda} \approx 24 \frac{u}{\lambda}.$$

$$3.17. m(t) = m_0 (1 - vt)^{v_0/u}.$$

$$3.18. L = \left( v_0 + \frac{u}{2} \right) \sqrt{\frac{2H}{g}} = 32 \text{ км.}$$

$$3.19. \frac{m_2}{m_1} = 2 \exp \left( -\frac{am_0}{2\mu u} \right); \frac{v_2}{v_1} = \frac{am_0}{u\mu 2 \ln 2}.$$

$$3.20. m = \frac{m_0}{2} \exp \left( -\frac{am_0}{2\mu u} \right); v = u \ln 2 + \frac{m_0 a}{2\mu}.$$

$$3.21^* \mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u} \exp\left(-\frac{g}{u} t\right).$$

Решение. Уравнение движения ракеты

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - mg$$

перепишем в форме

$$m \frac{d}{dt} (v + gt) = -u \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d(v + gt)}{dm} = -\frac{u}{m}.$$

Это дает

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v + gt}{u}\right), \quad v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Величина  $\mu$ , очевидно, равна  $-\frac{dm}{dt}$  и находится из условия, что для неподвижной ракеты  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

$$3.22. m = m_0 \exp\left(-\frac{g}{u} t\right); t_{1/2} = 2 \text{ мин } 21 \text{ с}; t_1 = 7 \text{ мин } 50 \text{ с}.$$

$$3.23. t = \frac{u}{g} \ln\left(1 + \frac{m_0}{m_1 + m_2}\right) = 22 \text{ с. Приблизительно ввиду малости } \frac{m_0}{m_1 + m_2}$$

получаем:  $t \approx \frac{m_0}{m_1 + m_2} \frac{u}{g} = 25 \text{ с}, l = vt = 220 \text{ м}.$

$$3.24. a = 29 \text{ м/с}^2; v = 900 \text{ м/с}.$$

$$3.25. \frac{\Delta m}{m} = 1 - \exp\left[-\frac{gR_3 t}{u(R_3 + vt)}\right] = 86,5\%.$$

$$3.26. \frac{\Delta m}{m} = 1 - \exp\left(-\frac{2gR_3}{3uv}\right) \approx 98,6\%.$$

$$3.27. \mu(t) = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0(g+a)}{u} \exp\left[-\frac{(g+a)}{u} t\right].$$

$$3.28. T = \frac{u}{2g}.$$

$$3.29. M_1 = \sqrt{Mm}, \text{ где } M_1 \text{ — масса ракеты после старта}.$$

$$3.30. v = 2 \text{ км/с}; H = 100 \text{ км}.$$

$$3.31. H = 1,5 \text{ км}.$$

3.32. Если  $v_k$  — конечная скорость ракеты с космонавтом после сжигания заданного количества топлива, а  $v_{\max}$  — максимальная скорость, то  $v_k/v_{\max} = 2/3$ .

$$3.33. \frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{v_0 + g\tau/6}{u}\right) \approx e^{1,1} \approx 3.$$

3.34. Для обычного старта  $v_1 \approx 8 \text{ км/с} \approx v_{1 \text{ косм}}$  — первая космическая скорость ( $v_{1 \text{ косм}} = \sqrt{gR_3}$ ). При пролете сквозь шахту  $v_2 = \sqrt{3}v_{1 \text{ косм}}$ .

3.35. Выгоднее сначала включить двигатель с меньшей скоростью газовой струи.

$$3.36. \alpha = \frac{2(1 + \alpha_0)^2}{2 + \alpha_0} - 1 \approx 19,2.$$

$$3.37. \Delta v = u \ln\left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha - k}\right) = 3,4 \text{ км/с}.$$

$$3.38. u_{\min} = v_2 \left[ \ln \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha - k)(1 - k)} \right]^{-1} = 2,8 \text{ км/с.}$$

$$3.39. \frac{m_0}{m_k} \approx 148; m_k = 1470 \text{ кг.}$$

$$3.40. \frac{m_2}{m_1} = \sqrt{m}.$$

**Решение.** Если бы не было притяжения Луны, то задача свелась бы к нахождению невыгоднейшего отношения  $m_2/m_1$  для достижения заданной скорости ракеты. Поэтому от действия силы тяжести можно отвлечься и считать, что ракета движется в пространстве, свободном от тяготения. Примем за единицу массы полную массу ракеты в момент старта. Тогда

$$m_1 + m_2 + m = 1. \quad (*)$$

После выгорания топлива в первой ступени масса системы уменьшится на  $\alpha_1 m_1$ . Если при этом будет достигнута скорость  $v_1$ , то по формуле Циолковского

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m}.$$

Масса  $(1 - \alpha_1)m_1$  отделяется, и включается двигатель второй ступени. После выгорания топлива во второй ступени скорость ракеты возрастает еще на величину  $v_2$ , причем

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2)m_2 + m}.$$

В этом можно убедиться, если перейти в систему отсчета, в которой ракета в момент отделения первой ступени покоится. Полная достигнутая скорость найдется перемножением двух предыдущих соотношений и последующим логарифмированием. Исключая еще при этом массу  $m_2$  с помощью соотношения (\*), получим

$$\frac{v}{u} = \ln(1 - m_1) - \ln(1 - \alpha_1 m_1) - \ln[(1 - \alpha_2)(1 - m_1) + \alpha_2 m].$$

Здесь  $m$  и  $u$  играют роль постоянных параметров, а  $m_1$  — аргумента, от которого зависит скорость  $v$ . Дифференцируя по  $m_1$  и приравнявая производную нулю, получим условие максимума

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma - m_1} = 0, \quad (**)$$

где введены обозначения

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} m.$$

Условие (\*\*) приводит к квадратному уравнению относительно  $m_1$ , решая которое, найдем

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}.$$

Перед корнем взят минус, так как по смыслу задачи  $0 < m_1 < 1$ . С помощью (\*) находим массу  $m_2$ , а затем искомое отношение  $m_2/m_1$ . Возвращаясь при этом к прежним параметрам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , получим

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}} m} \sqrt{m}.$$

Решение имеет смысл при выполнении условия

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} m < 1.$$

В реальных условиях, когда  $m \ll 1$ , а параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отличаются не очень сильно, это условие соблюдается. При  $\alpha_1 = \alpha_2$  получается простая формула

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{m}.$$

3.41.  $v_{\max} = u(1 - e^{-1})$ .

3.42.  $\alpha = \frac{u}{v} \ln \frac{m_0}{m}$ .

3.43. Первый способ требует меньшей затраты топлива.

3.44. Кинетическая энергия ракеты  $K = \frac{1}{2} (M_0 - \mu t) \left[ g^2 t^2 + \left( u \ln \frac{M_0}{M} \right)^2 \right] = 2,3 \text{ МДж}$ .

3.45.  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{g}$ .

3.46.  $\eta = \frac{K_p}{K_r} = \frac{x^2}{e^x - (1 + x^2)}$ , где  $x = \frac{v_k}{u}$ . При  $x = 4$   $\eta = 45\%$ .

3.47.  $\eta = \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2q(e^{v/u} - 1)} \approx 13\%$ .

3.48. 1) Кинетическая энергия ракеты будет максимальна, когда  $v = 2u$ .

2) Импульс ракеты будет максимален, когда  $m = \frac{m_0}{e}$ .

3.49.  $T_2 = \frac{m_0^2 - (m_0 - aT_1)^2}{am_0} = 19 \text{ с}$ .

3.50.  $h = \frac{P}{\rho g} \left( \frac{m}{M} \right)^2$ , где  $\rho$  — плотность воды.

3.51.  $v = \frac{2l}{3M} \sqrt{2km}$ .

3.52.  $v = \frac{l^{3/2}}{M} \sqrt{\frac{km}{2}}$ .

3.53\*. Равноускоренное движение,  $a = g/4$ .

Решение. Уравнение движения капли

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} = g.$$

Так как  $m \propto r^3$  и, по предположению,  $\frac{dm}{dt} \propto r^2$ , то  $\frac{dr}{dt} = C = \text{const}$ . Отсюда с учетом начальных условий получаем  $r = Ct$ . Уравнение движения приводится к виду

$$\frac{dv}{dt} + 3 \frac{v}{t} = g.$$

Решая его и учитывая, что при  $t = 0$   $v = 0$ , получаем  $v = gt/4$ . Падение капли будет равноускоренным с ускорением  $a = g/4$ .

## § 4. Работа, энергия, импульс.

### Законы сохранения импульса и энергии. Столкновения

4.1.  $\Delta v_x \approx 6,3 \text{ см/с}$ ;  $A \approx 45 \text{ эрг}$ .

4.2.  $v_c > v_a > v_b$ .

4.3.  $A = mg(H + kL)$ .

4.4.  $A = mg(H - kL)$ .

4.5.  $N_{\max} = N + mgv \sin \alpha \approx 81,2 \text{ л. с}$ .

4.6.  $F_{\text{тр}} = \frac{N}{v} - Mg \sin \alpha \approx 4,3 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

4.8.  $k = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \approx 0,05$ .

4.9.  $F = \frac{m^2 v^2}{2SM} \approx 170 \text{ Н}$ , где  $M$  и  $m$  — массы винтовки и пули.

4.10.  $v = \frac{M}{m} \frac{\sqrt{2gl \sin \alpha}}{\cos \alpha}$ .

**У к а з а н и е.** Приведенное выражение для  $v$  легко получить, применив закон сохранения импульса к слагающим импульса пушки и снаряда, направленным вдоль наклонной плоскости, непосредственно до и после момента выстрела. Импульс силы тяжести (действующий на оба тела) за короткий промежуток времени  $\Delta t$  выстрела пренебрежимо мал.

4.11\*  $S_2 = 5000 \text{ м}$ .

**Р е ш е н и е.** Падение одной половины снаряда под местом разрыва показывает, что весь импульс, который имел снаряд в верхней точке, передан второй половине снаряда. Падение за  $1 \text{ с}$  с высоты в  $19,6 \text{ м}$  говорит о том, что падающая часть получила при разрыве начальную скорость  $v_0$  вниз, следовательно, и вторая половина получила такой же импульс вверх. Поэтому вторая часть снаряда после разрыва имеет начальную скорость  $2v_{\text{гор}}$  в горизонтальном направлении (где  $v_{\text{гор}}$  есть горизонтальная составляющая скорости снаряда при выстреле), а в вертикальном направлении  $v_0$ . Скорость  $v_0$  определится из равенства  $h = v_0 t + gt^2/2$ , где  $t$  — время падения первого осколка. Горизонтальная составляющая скорости  $v_{\text{гор}}$  определится из равенства  $S_1 = v_{\text{гор}} t$  и  $h = gt^2/2$ :

$$v_{\text{гор}} = \sqrt{g/2h} S_1.$$

Расстояние до места падения второго осколка от места разрыва по горизонтальному направлению можно определить по формулам, описывающим полет снаряда в безвоздушном пространстве:

$$S_2 - S_1 = 2v_{\text{гор}} \left[ \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left( \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} \right)^2} \right].$$

Заменяя  $v_{\text{гор}}$  на  $\sqrt{g/2h} S_1$ , получаем ответ:

$$S_2 = S_1 \left\{ \sqrt{\frac{2g}{h}} \left[ \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left( \frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} \right)^2} \right] + 1 \right\}.$$

4.12.  $v_1 = \frac{m_1(v+u) + mv}{m+m_1}$ ;  $v_2 = v$ ;  $v_3 = \frac{m_1(v-u) + mv}{m+m_1}$ .

4.13\*  $x_\infty = l/2$ .

Решение. В рассматриваемом случае центр масс системы будет смещаться за счет действия внешних сил (сил трения). Обозначим силу натяжения веревки между лодками  $T$ . Тогда:

$$m_1\ddot{x}_1 + h\dot{x}_1 = T, \quad m_2\ddot{x}_2 + h\dot{x}_2 = -T, \quad m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + h(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0.$$

Последнее равенство справедливо и после того момента, когда лодки столкнутся и будут двигаться совместно до остановки. Проинтегрируем его по времени от 0 до  $\infty$ :

$$m_1\dot{x}_1 \Big|_0^\infty + m_2\dot{x}_2 \Big|_0^\infty + h(x_1 + x_2) \Big|_0^\infty = 0;$$

так как  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(\infty) = \dot{x}_2(\infty) = 0$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = l$ ,  $x_1(\infty) = x_2(\infty) = x_\infty$ , получим  $2x_\infty - l = 0$ ,  $x_\infty = l/2$ .

4.14. 9 м/с и 1 м/с.

4.15.  $v_{\text{кон}} = v_0 \frac{m_0}{m + m_0}$ ;  $S = \frac{mv_0^2}{2kg(m + m_0)}$ .

4.16.  $v = \frac{1}{2} \sqrt{kgL}$ .

4.17.  $\Delta L \geq \frac{v^2}{a_{\text{max}}}$ ;  $k = \frac{Ma_{\text{max}}}{v^2}$ .

4.18.  $F = \frac{2Mv}{\tau}$ .

4.19.  $x_0 = 2\sqrt{2} \frac{amg}{k}$ .

4.20.  $v = \sqrt{\frac{2M}{m(M+m)} \left( \frac{kx_0^2}{2} - amgL \right)}$ .

4.21.  $\mathbf{w} = \frac{M\mathbf{u}}{M+m}$ ;  $\mathbf{v} = -\frac{m\mathbf{u}}{M+m}$ .

4.22.  $\mathbf{S}_1 = -\frac{ml}{M+m}$ ;  $\mathbf{S}_2 = \frac{Ml}{M+m}$ .

4.23.  $\mathbf{a}_1 = \frac{M\mathbf{a}}{M+m}$ ;  $\mathbf{a}_2 = -\frac{m\mathbf{a}}{M+m}$ ;  $\mathbf{F} = -\frac{mM\mathbf{a}}{M+m}$ .

4.24.  $\mathbf{v} = -\frac{\Delta m\mathbf{u}}{M+m}$ ;  $\mathbf{S}_1 = -\frac{\Delta ml}{M+2m+\Delta m}$ ;  $\mathbf{S}_2 = \frac{(M+2m)l}{M+2m+\Delta m}$ .

4.25.  $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

4.26.  $x = \frac{m}{M+m} (a - b)$ .

4.27\*  $v = \frac{l}{(1 + m/M)\sqrt{2h/g}}$ .

Решение. Из закона сохранения импульса имеем  $Mu = -mv$ , где  $u$  — скорость лодки с человеком после броска,  $v$  — скорость ядра. Скорость ядра относительно лодки  $v_{\text{отн}} = u + v = v(1 + m/M)$ . Для того чтобы ядро попало в корму лодки, необходимо, чтобы смещение ядра по горизонтали относительно лодки за время его падения ( $t = \sqrt{2h/g}$ ) было равно длине лодки:  $v_{\text{отн}}t = l$ .

4.28.  $\frac{F_{\text{max}}}{mg} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{a}} = 6$ .

4.29. Площадь парашюта можно уменьшить в  $\sqrt{1 + \frac{k_{\text{нр}} L_{\text{нр}}^2}{2F_{\text{нор}} L_{\text{нор}}}} = 1,23$  раз.

4.30.  $l_{\text{тела}} = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 3$  м;  $l_{\text{кл}} = R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right) = 5,5$  м.

4.31.  $h = 0,005 \frac{M}{m} l$ .

4.32.  $h = \frac{v_0^2 + gl}{3g}$  (парабола);  $H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{l}{2} \left(\frac{v_0^2}{3gl} - \frac{2}{3}\right)^3$ .

4.33\*  $\dot{x}_1 = v_0 = \sqrt{gl/2}$ ;  $x_{1 \text{ max}} = l\sqrt{2}$ .

Решение. Отсчитывая координаты грузов от уровня осей блоков, запишем для положения равновесия:

$$\cos \varphi_0 = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_1^0 = \frac{l}{2}.$$

Из условия нерастяжимости нити следует кинематическая связь:

$$x_2 + \sqrt{x_1^2 + (l/2)^2} = L, \quad \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \cos \varphi = 0,$$

где  $L$  — полудлина нити.

Записывая полную энергию  $E = K + \Pi$  для трех положений системы  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = x_1^0 = l/2$ ,  $x_1 = x_{1 \text{ max}}$ :

$$E = -2m_2g \left(L - \frac{l}{2}\right) = \frac{m_1}{2} (1 + \cos^2 \varphi_0) v_0^2 - m_1 g x_1^0 + 2m_2g \sqrt{(x_1^0)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} - \\ - 2m_2gL = -m_1 g x_{1 \text{ max}} + 2m_2g \sqrt{x_{1 \text{ max}}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2},$$

получим два уравнения, из которых следуют значения, приведенные в ответе.

4.34. По часовой стрелке, так как при этом работающий участок ремня будет меньше провисать и охватывать большую часть окружности шкивов, чем при вращении против часовой стрелки, а сцепление ремня со шкивом будет больше.

4.35.  $N = \frac{(mg)^2}{M} t$ ;  $t = \frac{M}{(mg)^2} N_{\text{max}}$ .

4.36.  $h = \frac{v_0^2 + 2gR}{3g}$ .

4.37.  $\frac{R}{2} \sin \alpha \leq h \leq \frac{R}{4} \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha}$ .

4.38.  $h = \frac{v_0^2}{3g} + \frac{R}{3} \cos \varphi$ .

4.39.  $h = 5R/3$ ;  $H = 50R/27$ .

4.40.  $v = \frac{V_0}{e} = 3,7$  м/с.

4.41.  $k = \frac{(m_1 - m_2)(3 \cos \alpha - 2) \sin \alpha}{M + (m_1 + m_2)(3 \cos \alpha - 2) \cos \alpha} \approx \frac{m_1 - m_2}{M} \alpha = 4,4 \cdot 10^{-3}$ .

4.42.  $h_{\text{л}} \approx 9,8$  м.

4.43.  $h_{\text{л}} \approx 6,1$  м.

$$4.44. E_{\min} = \frac{mg}{2} (h + \sqrt{L^2 + h^2}) \approx 34 \text{ Дж};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L} + \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{L} = 1,25 \quad (\alpha \approx 52^\circ).$$

$$4.45. v = \sqrt{\frac{kgL}{2}} \approx 2,2 \text{ м/с}.$$

$$4.46. v = \sqrt{\frac{gL(2M - k_0m)}{m + M}}.$$

$$4.47. \text{Бруски имеют длину } l = \frac{v_0^2}{6kg}.$$

$$4.48. A = k_1 MgL \left( \frac{3}{2} + k_1 \right) \frac{1 - 2k_1}{1 + 2k_1}.$$

$$4.49. A_{\min} = \frac{mgR}{1 + k \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{k}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$4.50. H = \frac{50}{27} R + \frac{35}{54} \frac{v^2}{g} - \frac{11}{27} \frac{v^4}{g^2 R} - \frac{5}{54} \frac{v^6}{g^3 R^2}. \text{ При } v \geq \sqrt{gR} \text{ тело падает сразу свободно вниз и подсакивает на } 2R.$$

$$4.51. S = \frac{l_0 F_2^2}{4mgF_1} = 37,5 \text{ м}.$$

$$4.52. v_0 = \sqrt{\frac{F_0 l}{m + M/3}} = 7 \text{ м/с}.$$

$$4.53. V = \frac{km}{M} v.$$

$$4.54. p = \frac{2m\sqrt{2gl}}{3} = 1,2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

4.55\* Решение. Дополнительное давление на стол (сверх веса части каната, уже лежащей на столе) вызвано потерей импульса падающими элементами каната при их ударе о стол. Пусть за элемент времени  $dt$  на стол падает элемент каната с массой  $dm = \mu dx$ , где  $\mu$  — масса, приходящаяся на единицу длины каната, а  $dx$  — элемент длины каната. Сила, действующая со стороны этого элемента на стол будет

$$\Delta F = v \frac{dm}{dt} = v\mu \frac{dx}{dt} = \mu v^2,$$

где  $v$  — скорость, с которой элемент  $dm$  достигает стола. Но, как нетрудно заметить,  $v^2 = 2gx$ , где  $x$  — длина части каната, лежащей на столе. Отсюда  $\Delta F = 2\mu gx$ . Таким образом, полная сила, действующая на стол, будет равна  $3\mu gx$ .

$$4.56. v = \sqrt{\frac{g}{2l} [x^2 - (\Delta l)^2]}.$$

4.57. Шарик отразится от клина в горизонтальном направлении и полетит дальше по параболе (рис. 386).

4.58. Ящик не будет двигаться, потому что сообщаемые ему нормальная  $p_n$  и тангенциальная  $p_t$  (по отношению к наклонной плоскости) составляющие импульса  $\mathbf{p}$  вертикально падающего тела будут удовлетворять

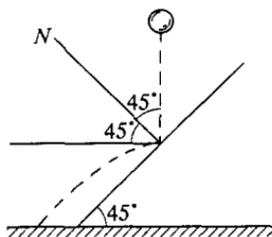


Рис. 386

соотношению  $p_n/p_t = \operatorname{tg} \alpha$ , которому удовлетворяют слагающие веса ящика  $mg_n/mg_t = \operatorname{tg} \alpha = k$ , а в результате действия последних ящик не приходит в движение. После полной остановки падающего тела в ящике увеличение веса ящика по той же причине не приведет его в движение.

$$4.59. \tau = \frac{1}{2g} \left( \frac{V - kv \cos \alpha}{k \cos \alpha - \sin \alpha} - v \right); k \leq \operatorname{tg} \alpha + \frac{V}{v \cos \alpha}.$$

$$4.60. \text{Фокус системы } F \approx \frac{Rv_0^2}{2gR_1} = 13,5 \text{ см;}$$

$$\text{условие фокусировки } \frac{gR_1^2}{2R} \ll v_0^2 \ll gR_1.$$

$$4.61. N_{\max} = \frac{2}{3} \mu \omega FR.$$

$$4.62. F = F_0 \frac{v}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2}}, \text{ где } F_0 = 2\pi r \delta \mu P \text{ — сила, с которой можно снять}$$

диск с неподвижного вала.

$$4.63. K_{\max} = TV/2 = 500 \text{ МДж.}$$

$$4.64^* \quad 2\bar{K} = \bar{U}.$$

Решение. Поместив начало координат в одной из точек пола и направив ось  $X$  вертикально вверх, получаем

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\dot{x}^2 - mgx = 2K - U,$$

где  $K$  — кинетическая, а  $U = mgx$  — потенциальная энергия шарика. Проинтегрируем это соотношение от  $t = 0$  до  $t = T$ , а затем устремим  $T$  к бесконечности. В результате найдем ответ.

$$4.65. F(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \exp \left( -\frac{r}{r_0} \right); r_1 = 6 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

$$4.66. 1) v = 2 \frac{M+m}{m} \sqrt{lg} \sin(a/2);$$

$$2) v = \frac{2M\sqrt{lg} \sin(a/2) - mv'}{m};$$

$$3) v = \frac{2M\sqrt{lg} \sin(a/2)}{m}.$$

Примечание. Решение задачи о соударении баллистического шарика и пули проведено путем применения закона сохранения импульса к системе маятник — пуля. Этот способ решения, очевидно, справедлив только в том случае, если удар пули не передается оси вращения маятника. Дело обстоит именно так в том случае, когда пуля ударяется в так называемый центр качания маятника, находящийся на расстоянии приведенной длины физического маятника от его оси вращения, и скорость пули перпендикулярна к прямой, соединяющей точку подвеса маятника с его центром качания. При ударе же пули в произвольную точку маятника для решения задачи необходимо воспользоваться законом сохранения момента импульса в системе маятник — пуля. В первом же случае применение закона сохранения момента импульса будет эквивалентно применению закона сохранения импульса.

$$4.67. a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} a; a_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} a \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

$$4.68. v_0 = \frac{(P_1 + P_2 + mg)\sqrt{P_1 + P_2}}{2m\sqrt{kg}}.$$

$$4.69. p = 2mv \cos \alpha.$$

4.70.  $\Delta K = 2m(v - u)u$ ;  $\Delta p = -2m(v - u)$ ; тело после удара остановится, если  $u = v/2$ .

У к а з а н и е. Законы упругого удара о движущуюся стенку легко получить, если в формулах для скоростей, имеющих место после удара двух упругих тел, перейти к пределу, полагая массу одного тела (стенки) бесконечно большой.

$$4.71. t \approx \frac{Mu_0}{2mv^2 n S} = 16 \text{ мкс, где } v \text{ — скорость атомов He в пучке.}$$

$$4.72. vL = \text{const.}$$

$$4.73. \Pi = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

4.74. При условии, что  $m_1/m_2 > 20$ , где  $m_1$  — масса шара, имевшего меньшую энергию. Ответ легко найти из следующих соотношений:

$$20m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2, \quad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} > 0,$$

где  $v$  — скорость шаров после удара,  $v_1$  и  $v_2$  — их скорости до удара.

$$4.75. S = \frac{v^2}{4kg}.$$

$$4.76. S = \frac{mv}{2\alpha}.$$

$$4.77. l > \frac{\Delta m}{m} \geq \frac{4}{5}.$$

$$4.78. \frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{3}.$$

4.79.  $\frac{v}{v_0} \approx 0,98$ . Ответ легко найти, решая следующие уравнения

$$M\dot{v} = -S\rho v^2; \quad Q\dot{M} = -\frac{1}{2} S\rho v^3,$$

где  $\rho$  — плотность атмосферы.

$$4.80. x_{\max} = \left(\frac{5}{8} \frac{m}{k}\right)^{2/5} v_0^{4/5}.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Кёнига.

$$4.81. v_1 = v \frac{\sqrt{13}}{4}; \quad v_2 = \frac{v}{4}.$$

4.82\*. Р е ш е н и е. Пусть  $\mathbf{v}$  — скорость первой частицы до столкновения,  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — скорости частиц после столкновения. Законы сохранения импульса и энергии дают

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Возводя первое соотношение в квадрат и вычитая из него второе, получим  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ . Если оба вектора  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  не равны нулю, что будет при нелобовом ударе, то угол между ними будет равен  $90^\circ$ . При лобовом столкновении  $\mathbf{v}_1 = 0$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ , т. е. частицы просто обмениваются скоростями.

4.83.  $r = e^2/(2E)$ , где  $e$  — заряд протона. Для вычислений эту формулу целесообразно преобразовать, положив  $E = eV$ . Тогда  $r = e/(2V) = 1,4 \cdot 10^{-13}$  см ( $2V = 10^6$  В). Опыты по рассеянию ядерных частиц показали, что радиус действия ядерных сил по порядку величины равен  $10^{-13}$  см. Поэтому при расчете столкновения протонов, энергии которых превосходят примерно 0,5 МэВ, помимо электростатических сил, надо учитывать также ядерные силы.

$$4.84. r_{\min} = \frac{2e^2}{E_0} \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_p} \right) \approx 3,6 \cdot 10^{-13} \text{ см};$$

$$a_p \approx 2,2 \cdot 10^{27} \text{ г}; a_\alpha \approx 0,54 \cdot 10^{27} \text{ г}.$$

$$4.85. \frac{1}{4} \text{ МэВ и } \frac{3}{4} \text{ МэВ}.$$

$$4.86. \frac{\Delta K}{K} = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \text{ Потеря энергии максимальна при } m_1 = m_2.$$

4.87. Масса  $\alpha$ -частицы должна быть меньше массы ядра:  $m < M$ ;

$$v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}; V = \frac{mv_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}; \text{tg } \theta = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

$$4.88. v \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ см/с}.$$

$$4.89. p \approx 7,7 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

$$4.90. \frac{m_1}{m_2} = 3.$$

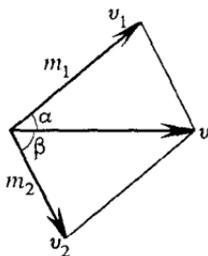
$$4.91. \gamma = 2\theta.$$

4.92.  $\alpha = 4A/(1+A)^2$ , где  $A$  — атомная масса частицы, с которой сталкивается протон.

$A$	1	2	4	12
$\alpha$	1	0,89	0,64	0,284

4.93\*. Для  $\alpha$ -частицы  $\theta = 14^\circ 30'$ , для дейтрона  $\theta = 30^\circ$ .

Решение. Пусть  $m_1$  — масса рассеиваемой частицы ( $\alpha$ -частицы или дейтрона),  $v$  — ее скорость до рассеяния;  $m_2$  — масса рассеивающей частицы (атом водорода);  $v_1$  и  $v_2$  — скорости частиц после рассеяния (рис. 387). Законы сохранения импульса и энергии дают



$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta,$$

$$m_1 v_1 \sin \alpha = m_2 v_2 \sin \beta,$$

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Исключив отсюда угол  $\beta$  и скорость  $v_2$ , получим для  $v_1$  квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2) v_1^2 - 2m_1 v v_1 \cos \alpha + (m_1 - m_2) v^2 = 0.$$

Условие вещественности его корней, как легко видеть, имеет вид  $\sin \alpha \leq m_2/m_1$ . Максимальный угол  $\alpha$ , удовлетворяющий этому условию, и будет равен углу  $\theta$ . Таким образом,  $\sin \theta = m_2/m_1$ .

Отсюда находим для  $\alpha$ -частицы  $\theta = 14^\circ 30'$ , для дейтрона  $\theta = 30^\circ$ .

4.94.  $v = \frac{3}{2} \frac{mV}{M}$ ;  $E = \frac{3mV^2}{8} \left(1 - \frac{3m}{M}\right)$ , где  $m$  — масса протона. Процесс невозможен, если  $M < 3m$ .

$$4.95. Q \leq E \left(1 - \frac{m}{m_1 + m_2}\right).$$

4.96. Нет, не может.

4.97.  $\frac{K_p}{Q} > \frac{M}{M-m} = \frac{7}{6}$ , где  $K_p$  — кинетическая энергия налетающего протона,  $Q$  — энергия возбуждения лития.

4.98.  $E_p = \frac{m_{\text{Be}}^2}{m_{\text{Be}}^2 - m_p^2} E_{\text{пор}} = \frac{49}{48} E_{\text{пор}} = 1,92$  МэВ. При больших энергиях появятся нейтроны, летящие назад.

$$4.99. E > 2,97 \text{ МэВ}; E_1 = 3,23 \text{ МэВ}.$$

$$4.100. K_\alpha = \frac{11}{7} Q \approx 4,5 \text{ МэВ}.$$

$$4.101. K_\alpha \approx 1,3 \text{ МэВ}.$$

$$4.102. K_D = \frac{m_D + m_T}{m_T} K \approx 250 \text{ кэВ}.$$

4.103. Выгоднее ускорить легкую частицу. Выигрыш в энергии равен  $\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} K \approx 20$  кэВ.

$$4.104. E = E_n \left(1 + \frac{m_n}{m_{\text{He}}}\right) - 2E_D \approx 3,26 \text{ МэВ}.$$

4.105.  $\alpha$ -частица уносит 3,5 МэВ, нейтрон — 14,1 МэВ.

$$4.106. E \approx 3,25 \text{ МэВ}.$$

$$4.107. E = 2K_{1\alpha} - \left(1 - \frac{m_p}{m_\alpha}\right) K_p - 2\sqrt{\frac{m_p}{m_\alpha}} K_p K_{1\alpha} \cos \theta_1 \approx 17,2 \text{ МэВ}.$$

$$4.108. \sin \theta_{\text{max}} = \frac{1}{12}, \text{ т. е. } \theta_{\text{max}} \approx 4^\circ 47'.$$

У к а з а н и е. Перейти в систему центра масс.

## § 5. Гармонические колебания материальной точки

$$5.1. T = 2\pi \sqrt{\frac{\hbar}{g}} \approx 1,4 \text{ с}.$$

$$5.2. x = \frac{gT^2}{4\pi^2} \approx 6,2 \text{ см}.$$

$$5.3. t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$5.4. T = \frac{\pi}{4} T_0.$$

$$5.5. T = 2\pi \sqrt{m \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}.$$

**5.6.\*** Решение. Если сила, действующая на груз со стороны доски,  $F' = -F$ , то уравнение движения груза  $P - F' = m \frac{d^2x}{dt^2}$ , где  $P = mg$ . Значение ускорения груза находим из закона его колебаний:  $x = A \cos \omega t$ ; тогда получаем

$$-F' = F = -P - mA\omega^2 \cos \omega t = -(1 + 0,32 \cos 4\pi t) \text{ Н.}$$

Рекомендуем начертить график изменения силы  $F$  со временем.

**5.7.**  $A > \frac{mg}{m\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,8}{16\pi^2}$  м. При предельной амплитуде  $A_0 \approx 6,2$  см сила давления груза в верхней точке становится равной нулю.

**5.8.** При  $\omega^2 A > g$  грузик будет подскакивать, при  $\omega^2 A < g$  — колебаться вместе с мембраной.

$$\mathbf{5.9.} \quad k = \frac{4\pi^2 A}{gT^2} \approx 0,1.$$

$$\mathbf{5.10.} \quad A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}.$$

$$\mathbf{5.11.*} \quad M > m.$$

Решение. При снятии груза  $M$  положение равновесия сместится вверх на величину  $x_0 = Mg/k$ . Возникнут колебания чашки относительно нового положения равновесия:  $x = x_0 \cos \omega t$ . Когда чашка начнет подниматься вверх, то вместе с ней будет подниматься и грузик  $m$ . В верхнем положении ускорение чашки достигает максимального значения  $a_{\max} = \omega^2 x_0 = kx_0/m = Mg/m$  и направлено вниз. Если  $a_{\max} < g$ , т.е.  $M < m$ , то при обратном движении чашки вниз грузик будет продолжать лежать на ней, и подскакивания не возникнут. Если  $a_{\max} > g$ , т.е.  $M > m$ , то грузик отстанет от чашки и появятся подскакивания.

$$\mathbf{5.12.} \quad x \leq \frac{mg}{k} = 20 \text{ см.}$$

$$\mathbf{5.13.} \quad x > \frac{\mu(M+m)g}{k_1+k_2}.$$

$$\mathbf{5.14.} \quad x > \frac{(M+m)g}{k_1+k_2}.$$

$$\mathbf{5.15.} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Mm}{(M+m)(k_1+k_2)}}.$$

$$\mathbf{5.16.} \quad \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\frac{M}{M+m}}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m+M}{M}}.$$

**5.17.**  $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$ , где  $\omega$  — частота колебаний незакрепленной, а  $\omega_0$  — закрепленной коробки.

**5.18.**  $\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$ , где  $\omega$  — частота колебаний незакрепленного, а  $\omega_0$  — закрепленного бруска.

$$\mathbf{5.19.} \quad \varphi_0 = \frac{Q^2 l_0}{mgl_0^3 + 2Q^2 L}; \quad T = 2\pi l_0 \sqrt{\frac{mLl_0}{mgl_0^3 + 2Q^2 L}}.$$

$$\mathbf{5.20.} \quad A = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

$$5.21. H = \frac{(\sqrt{2gh} + 4\pi vA)^2}{2g}$$

$$5.22. \text{ а) } T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r^2 - l^2} \text{ (перпендикулярно плоскости рисунка);}$$

$$\text{ б) } T = \frac{2\pi r}{\sqrt{g\sqrt{r^2 - l^2}}} \text{ (в плоскости рисунка).}$$

$$5.23. T = 2\pi \left[ \frac{m \cos^2 \alpha + (1 + m/M) \sin^2 \alpha}{k} \frac{1}{1 + m/M} \right]^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{13m}{16k}}$$

$$5.24. T = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

$$5.25. \omega^2 = g \frac{\sqrt{R^2 - L^2/4}}{4 \left( R^2 - R\sqrt{R^2 - L^2/4} \right)}$$

$$5.26. T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{kg}}$$

$$5.27. T = \frac{2\pi l}{\sqrt{Rg}}$$

$$5.28. T = 2\pi \left[ \frac{2h}{g} \frac{\rho_{ж}}{(\rho_{в} + \rho_{м})} \right]^{1/2}$$

$$5.29. T = 2\pi \left( \frac{0,75k}{\pi \rho_{ж} R^3} + \frac{0,48 \rho_{рт} g}{\rho_{ж} R} \right)^{-1/2}$$

$$5.30. T = \pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}; A \leq mg \frac{k_1 + k_2}{4k_1 k_2}$$

$$5.31. A = \frac{2\pi n m g}{(M + m)k} \sqrt{M(M + m)}$$

$$5.32. \varphi_0 = \frac{2mL}{\pi n(M + m)l}$$

$$5.33. \omega^2 = \frac{g}{2\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$$

$$5.34. \omega^2 = \frac{g}{R} \frac{\sin(\alpha/2)}{\pi - \alpha/2}$$

$$5.35. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + 4m_2}{k}}; \text{ веревка будет терять натяжение при } A > \frac{g}{2\omega^2}.$$

$$5.36. \omega_0^2 = \frac{2g}{l} \frac{(2m_2/m_1) \sin^3 \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} = \frac{g}{l} \sqrt{3}.$$

Решение. Для малых колебаний около положения равновесия кинетическая энергия системы равна

$$K = \frac{m_1}{2} \left( 1 + \frac{2m_2}{m_1} \cos^2 \varphi_0 \right) \dot{\xi}^2,$$

а потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1^0} \xi^2 = \frac{1}{2} \frac{2m_2}{l/2} g \sin^3 \varphi_0 \xi^2.$$

Здесь  $\xi = x_1 - x_1^0$  — малое отклонение среднего груза от положения равновесия. Полагая  $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  и  $U_{\max} = K_{\max}$ , находим искомый ответ.

$$5.37. T = \pi \sqrt{\frac{mL}{P}}$$

$$5.38. T = 2\pi R \sqrt{\frac{2}{g(R-r)}}.$$

$$5.39. T = \frac{2}{3} T_0.$$

5.40. Может при условии  $v_0 \geq \sqrt{g\Delta l} \approx 1$  м/с.

$$5.41. T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F}}.$$

$$5.42. T = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{m}{k}}; x_{\max} \leq \frac{2mg}{k \sin 2\alpha}.$$

$$5.43. \omega = \sqrt{\frac{4kg}{m}}.$$

$$5.44. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

5.45. Центр масс системы движется со скоростью  $v = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ; в системе центра масс происходят колебания с периодом  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$  и амплитудой  $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

$$5.46. v_0 = \sqrt{8\mu g \left( l + \frac{mg\mu}{k} \right)}.$$

5.47. После соударения второй шар отскочит назад.  $A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}$ .

$$5.48. t = \frac{2L}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$$5.49. t = \frac{2L}{v_0} + \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$$5.50. K = \frac{(mv)^2}{2(M+m)}; E_{\text{вн}} = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}; A = v \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}.$$

$$5.51. x = \pi v \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

$$5.52. x = \frac{gt^2}{2} + \frac{mg}{2k} (1 - \cos \omega_0 t) = \left( \frac{9\pi^2}{4} + 1 \right) \frac{mg}{k}.$$

$$5.53. x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (l - l_0) (1 - \cos \omega t) + \frac{gt^2}{2};$$

$$x_2 = l - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (l - l_0) (1 - \cos \omega t) + \frac{gt^2}{2}.$$

$$5.54. K = \frac{K_0}{4}; E_{\text{кол}} = \frac{K_0}{4}.$$

$$5.55. v = \frac{2mm_1 v_0}{(m_1 + m)(m_1 + m_2)}; A = \frac{2m v_0}{m + m_1} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}.$$

$$5.56. \Delta\varphi \approx 3\varphi_0 \frac{H}{l}; \varphi_n = \varphi_0 \left( 1 + \frac{3H}{l} \right)^n \approx \varphi_0 \left( 1 + \frac{3nH}{l} \right).$$

$$5.57. \text{Угловая амплитуда колебаний } \alpha_0 = \frac{2}{3} \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2H}{l}}.$$

$$5.59. \frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{m}{M+m} \approx -5 \cdot 10^{-4}.$$

5.60. При резонансе сила трения равна внешней силе:  $F_{\text{тр}} = 100$  дин. Амплитуда скорости  $v_0 = A_p \omega = 20\pi$  см/с,  $k = F_{\text{тр}}/v_0 = 5/\pi$  г/с.

5.61. При резонансе фаза скорости совпадает с фазой внешней силы и амплитуда скорости наибольшая, поэтому работа внешней силы за период

$$A = \int_0^T f ds = \int_0^T f v dt \text{ будет наибольшей.}$$

$$5.62. A = \frac{f_0}{6k}.$$

5.63.  $\tau \approx \sqrt{\frac{2\pi m}{PR}} \approx 2 \cdot 10^{-2}$  с. Для численной оценки принято:  $m = 0,5$  кг,  $P = 10^5$  Па,  $R = 10$  см.

$$5.64. n < 2.$$

$$5.65. f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\pi} \sqrt{\frac{6m}{M}}.$$

У к а з а н и е. Применить для каждого шарика адиабатический инвариант движения  $\oint p dx = \text{const}$ .

## § 6. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

$$6.1. S = \frac{1}{2} \tau v_0 r_0.$$

$$6.2. l_1 = l_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

$$6.3. x = 0,85 \text{ м.}$$

$$6.4. x = 4h \left( \frac{m}{4m + M} \right)^2 = 0,167 \text{ м.}$$

$$6.5. \omega = \frac{6}{5} \frac{v_0}{l}.$$

$$6.6. \omega_x = \omega_0^2 + \frac{g}{2a}, \text{ где } \omega_0 = \frac{\sqrt{3}v_0}{4a}.$$

$$6.7^* v_{\max} = \sqrt{2gh_{\max}}, v_{\min} = \sqrt{2gh_{\min}}.$$

Р е ш е н и е. На основании закона сохранения энергии  $v^2 + 2gh = \text{const}$ .

Момент силы тяжести относительно точки подвеса не имеет вертикальной составляющей. Момент силы натяжения веревки равен нулю. Поэтому при движении человека вертикальная составляющая его момента импульса остается неизменной. В положениях, где высота  $h$  максимальна или минимальна, скорость человека  $v$  горизонтальна, а момент импульса равен  $mvr$ , где  $r$  — расстояние до вертикальной оси, вокруг которой вращается человек. Значит, в этих положениях величина  $vr$  одна и та же. В момент, когда высота  $h$  максимальна или минимальна, опишем в вертикальной плоскости окружность с центром в точке подвеса  $O$ , проходящую через точку нахождения человека  $M$

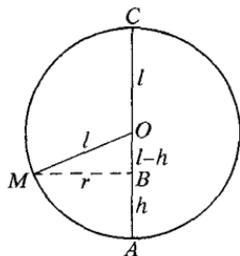


Рис. 388

(рис. 388). По известной геометрической теореме  $r^2 = AB \cdot BC$ , или  $r^2 = (2l - h)h$ . Поэтому в положениях, где  $h$  максимальна и минимальна,

$$(2l - h)hv^2 = \text{const}.$$

Запишем найденные соотношения для этих положений, имея в виду, что максимуму  $h$  соответствует минимум  $v$  и наоборот. Получим:

$$v_{\max}^2 + 2gh_{\min} = v_{\min}^2 + 2gh_{\max},$$

$$(2l - h_{\min})h_{\min}v_{\max}^2 = (2l - h_{\max})h_{\max}v_{\min}^2.$$

Решая эти уравнения, получим

$$v_{\max}^2 = \frac{2gh_{\max}(2l - h_{\max})}{2l - (h_{\max} + h_{\min})}, \quad (*)$$

$$v_{\min}^2 = \frac{2gh_{\min}(2l - h_{\min})}{2l - (h_{\max} + h_{\min})}. \quad (**)$$

При этом учтено, что в реальных условиях  $h < l$ , так что величина (\*) действительно максимальна, а (\*\*) — действительно минимальна. Если  $h_{\max}$  и  $h_{\min}$  пренебрежимо малы по сравнению  $l$ , то  $v_{\max}^2 = 2gh_{\max}$ ,  $v_{\min}^2 = 2gh_{\min}$ .

6.8.  $v_0^2 = \frac{2gh^2}{h + h_0}$ ;  $v^2 = \frac{2gh_0^2}{h + h_0}$ .

6.9.  $\omega = \frac{\text{const}}{r^2}$ ;  $F = \frac{\text{const}}{r^3}$ ;  $A = \frac{3}{2} m\omega_0^2 R_0^2$ .

6.10.  $\tau = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{l}{2r\omega}$ .

6.11.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ;  $S = \frac{\pi l}{\omega m}$ ;  $\bar{\Pi} = \bar{K}$ . Жесткость  $k$  должна уменьшиться в  $\sqrt{2}$  раз, тогда частота уменьшится вдвое.

6.12.  $\Omega = \frac{25}{88} \frac{v_0}{R}$ ;  $u = \frac{v_0}{4}$ .

6.13.  $\Omega = \frac{18}{19} \frac{u}{l}$ .

6.14.  $v_2 = \frac{\pi r^2 + 3ar + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2}{\pi r^2 + 3ar} v_1$ .

## § 7. Гравитация

7.1. Не сможет, так как  $v_{2 \text{ косм}} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 11,5 \text{ м/с} > v_{\text{прыжка}} = \sqrt{2g_3 h_3} \approx 7 \text{ м/с}$ , где  $g_3$  и  $h_3$  — ускорение свободного падения и возможная высота прыжка на Земле.

7.2. Решение задачи сводится к поиску полной энергии ракеты после выключения двигателей. Оказывается  $E = \frac{g_0 R_3}{2} - \frac{g_0 R_3}{1,23} < 0$ , т.е. ракета не покинет пределы Земли;  $g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $R_3$  — радиус Земли.

7.3. См. ответ предыдущей задачи.  $E = \frac{5}{4} g_0 R_3 > 0$ , т.е. ракета покинет Землю.

7.4.\*  $U(R) = -mg_0 R_0^2/R$ , где  $R_0$  — радиус Земли.

Решение. Сила тяготения, действующая на тело, находящееся на расстоянии  $r$  от центра Земли, равна  $f = mgR_0^2/r^2$ . Тогда потенциальная энергия

на расстоянии  $R$  будет

$$U(R) = \int_{\infty}^R f dr = - \frac{mgR_0^2}{R}.$$

$$7.5. r_{\min} = - \frac{\gamma M}{2v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma M}{2v_0^2}\right)^2 + l^2}.$$

$$7.6. K \equiv \frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}, \text{ где } \gamma \text{ — гравитационная постоянная.}$$

У к а з а н и е. Рассмотреть круговое движение планеты.

**7.7\* Р е ш е н и е.** Когда масса планеты пренебрежимо мала, Солнце можно считать неподвижным и написать  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ . С учетом движения Солнца это уравнение заменится на  $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ , где  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$  — приведенная масса. Переписав его в форме  $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{M+m}{M}\mathbf{F}$ , видим, что учет движения Солнца формально эквивалентен увеличению гравитационной постоянной в  $(M+m)/M$  раз. Поэтому

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{M+m}{M} \gamma \frac{M}{4\pi^2} \quad \text{или} \quad \frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{\gamma}{4\pi^2}.$$

**7.8.**  $\Delta T = T \frac{\Delta I_3}{I_3} = 5T \frac{\Delta R_3}{R_3} \approx 2,7$  с, где  $T$  — продолжительность земных суток,  $R_3$  — радиус Земли,  $I_3$  — момент инерции Земного шара.

$$7.9. T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m}} \approx 10^{-3} \text{ с.}$$

**7.10.** Уменьшилась бы в  $\sqrt{2}$  раз.

$$7.11. R = R_0 \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1 + M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ км.}$$

$$7.12. M_2 \approx M_1 = M; R^3 = \frac{\gamma M T^2}{2\pi^2}; R \approx 1,1 \cdot 10^8 \text{ км.}$$

$$7.13. r_2 = \left( \frac{2\gamma M}{2\gamma M - r_1 v_1^2} - 1 \right) r_1; \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1. \quad \text{Звезда распадается, если } v_1 \geq \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_1}}.$$

$$7.14. 1) r_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}; 2) r_{\text{равн}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; 3) F(r_0) = -\frac{3}{4} b, F(r_{\min}) = 3b > 0;$$

$$4) v_{\text{ГК}}^2 = \frac{\sqrt{ab}}{r} \left( \frac{r}{r_{\text{равн}}} - \frac{r_{\text{равн}}}{r} \right) \text{ — имеет смысл при } r > r_{\text{равн}}.$$

$$7.15^* \frac{\omega}{\omega_{\text{Л}}} = 0,573, T = 47,7 \text{ сут, } a = 5,58 \cdot 10^{10} \text{ см.}$$

**Р е ш е н и е.** Используя приведенные данные, находим: момент инерции Луны относительно оси вращения Земли  $I_{\text{Л}} = ma_0^2 = 1,08 \cdot 10^{47} \text{ г} \cdot \text{см}^2$  (моментом инерции Луны относительно ее собственной оси пренебрегаем), угловую скорость вращения Луны  $\omega_{\text{Л}} = 2,67 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}$ , момент импульса Луны  $L_{\text{Л}} = I_{\text{Л}} \omega_{\text{Л}} = 28,9 \cdot 10^{40} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$ ; полный момент импульса системы Земля—Луна  $L = L_3 + L_{\text{Л}} = 34,8 \cdot 10^{40} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$ . По закону сохранения момента импульса  $(I_3 + ma^2)\omega = L$ . По закону Кеплера  $a^3 \omega^2 = a_0^3 \omega_{\text{Л}}^2$ . Из этих двух



с силой притяжения, действующей на комету. Для такой частицы в вершине гиперболы

$$r^2 - \gamma \frac{Mm}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Разность положительных корней написанных уравнений и дает искомую длину

$$2a = \gamma \frac{Mm}{E} = \gamma \frac{M}{\epsilon},$$

где  $\epsilon = E/m$  — полная энергия, приходящаяся на единицу массы планеты.

**7.22\* Решение.** Если  $\mathbf{p}$  — импульс, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор планеты относительно Солнца, то

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{pr}) = (\mathbf{Fr}) + (\mathbf{pv}) = -\gamma \frac{Mm}{r} + 2K = U + 2K = E + K.$$

При периодическом движении среднее по времени значение  $\frac{d}{dt} (\mathbf{pr})$ , очевидно, равно нулю, откуда и вытекает результат:  $\bar{E} + \bar{K} = 0$ .

**7.24.**  $v = v_{II} \sqrt{1 - R/(2a)} = 8,1$  км/с, где  $v_{II} = \sqrt{2gR} = 11,2$  км/с — вторая космическая скорость,  $2a$  — длина большой оси эллиптической орбиты.

$$\mathbf{7.25.} \quad \frac{\Delta E}{E} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} \approx -0,02 \quad (E < 0).$$

$$\mathbf{7.26.} \quad M_M = 0,11 M_3.$$

**7.27.**  $M = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27}$  г, где  $a$  — большая полуось эллиптической орбиты спутника.

**7.28.**  $\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \approx 0,11$ , где  $R_1 = R + h = 6625$  км — среднее расстояние корабля-спутника от центра Земли.

$$\mathbf{7.29.} \quad T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}; \text{ для спутника нейтронной звезды } T \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$\mathbf{7.30.} \quad R = \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_0}} R_0 \approx 6,61 R_0, \text{ где } \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ рад/с.}$$

**У к а з а н и е.** Центростремительное ускорение спутника  $\omega^2 R$  должно быть равно ускорению  $gR_0^2/R^2$ , сообщаемому спутнику силой тяготения.

$$\mathbf{7.31.} \quad 2a = \frac{2gR_0^2}{v_1 v_2} \approx 14\,400 \text{ км.}$$

$$\mathbf{7.32.} \quad 2a = \frac{2gR_0^2}{v^2} \approx 14\,300 \text{ км.}$$

$$\mathbf{7.33*} \quad \text{Первый.} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{2gR_0}{v_0^2}.$$

**Р е ш е н и е.** Для первого снаряда, по закону сохранения энергии, имеем

$$\frac{v_0^2}{2} - gR_0 = -g \frac{R_0^2}{R_1} \quad \text{или} \quad R_1 = \frac{2gR_0^2}{2gR_0 - v_0^2},$$

так как его скорость в верхней точке равна нулю. Для второго снаряда, по закону сохранения энергии,

$$\frac{v_0^2}{2} - gR_0 = \frac{v_1^2}{2} - g \frac{R_0^2}{R_2},$$

где  $v_1$  — скорость в наиболее удаленной точке; кроме того, по закону сохранения момента импульса  $v_0 R_0 = v_1 R_2$ . Отсюда получаем

$$R_2 = \frac{v_0^2 R_0}{2gR_0 - v_0^2}.$$

$$7.34. R_1 = \frac{R_0}{\mu_1 - 1} \approx 6,8R_0; R_2 = \frac{R_0}{\mu_2 - 1} \approx 2,52R_0, \text{ где } \mu_{1,2} = \frac{2gR_0}{(v_0 \pm \omega R_0)^2},$$

$R_0$  — радиус,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

У к а з а н и е. См. решение предыдущей задачи.

$$7.35. x = \frac{2R_3 v_0^2}{2gR_3 - v_0^2} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ км.}$$

$$7.36. v = \frac{2\pi R}{T} \sqrt{\frac{2R}{r}} \approx 60 \text{ км/с.}$$

7.37. Посередине между центром Земли и начальным положением корабля.

7.38\*. Решение. Так как энергия корабля зависит только от длины  $2a$  большой оси его орбиты, то переход на круговую орбиту произойдет на расстоянии  $a$ , т. е. в точке пересечения эллипса с его малой осью. Направление скорости корабля надо повернуть так, чтобы оно оказалось перпендикулярным к линии, соединяющей корабль с центром Земли.

7.39. Увеличить в  $\sqrt{2}$  раз.

$$7.40. v_2 = v_1 \frac{h}{l} = 54,6 \text{ км/с.}$$

$$7.41. \frac{M_{\text{II}} + M_X}{M_3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{R^3}{gR_3^2} = 0,0024.$$

7.42\*. Решение. Пусть центр масс тел  $A$  и  $B$  находится в точке  $O$  (рис. 391). Неизменное расстояние между телами  $A$  и  $B$  будет сохраняться только при вращении их с угловой скоростью  $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\gamma(M_A + M_B)}{R}}$  вокруг точки  $O$ .

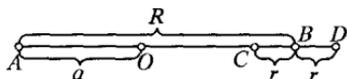


Рис. 391

Условия равновесия тел  $C$  и  $D$  во вращающейся (связанной с телами  $A$  и  $B$ )

системе координат) запишутся так:

$$M_C \left[ -\frac{\gamma M_A}{(R-r)^2} + \omega^2 (R-a-r) + \frac{\gamma M_B}{r^2} \right] + F_C = 0,$$

$$M_D \left[ -\frac{\gamma M_A}{(R+r)^2} + \omega^2 (R-a+r) - \frac{\gamma M_B}{r^2} \right] + F_D = 0,$$

где положительное направление выбрано от  $A$  к  $B$ ,  $F_C$  и  $F_D$  — искомые силы,  $\gamma$  — постоянная тяготения. Исключая  $\omega$ , принимая во внимание соотношение  $a\omega^2 = \gamma M_B / R^2$  и пренебрегая членами высших порядков относительно  $r/R$ , получаем окончательно:

$$F_C = \gamma M_C \left[ -\frac{M_B}{r^2} + \frac{r}{R^3} (3M_A + M_B) \right],$$

$$F_D = \gamma M_D \left[ \frac{M_B}{r^2} - \frac{r}{R^3} (3M_A + M_B) \right],$$

т. е. при  $M_C = M_D$  обе силы меньше силы притяжения этих масс телом  $B$  на одинаковую величину.

$$7.43. \Delta v = \frac{R}{2a} \sqrt{\frac{g}{a}} \Delta a = -42 \text{ м/с.}$$

$$7.44. v = \frac{v_0}{2} (1 + \sqrt{5}) \approx 1,62v_0.$$

$$7.45. R_{\max} = \frac{\alpha^2 R}{2 - \alpha^2}; T_2 = \frac{T_1}{(2 - \alpha^2)^{3/2}} (\alpha^2 \leq 2).$$

7.46\* Минимальное удаление  $\rho_1 = 1,25R_3$ ; максимальное удаление  $\rho_2 = 2,1R_3$ .

Решение. Энергия спутника в полярных координатах равна:

$$E = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + (\rho^2 \dot{\varphi})^2] - \frac{C}{\rho} \quad (C = \gamma m M_3).$$

Момент импульса относительно центра сил равен:  $L = m\rho(\rho\dot{\varphi})$ . Исключая из уравнения энергии  $\dot{\varphi}$  и учитывая, что в точках максимального и минимального удаления спутника от центра Земли  $\dot{\rho} = 0$ , уравнение энергии можно записать в следующем виде:

$$\rho^2 - \frac{\gamma}{|E|} \rho + \frac{L^2}{2m|E|} = 0.$$

Здесь учтено, что полная энергия спутника  $E$  на эллиптических орбитах всегда отрицательна. Два корня этого уравнения дают расстояние до перигея  $\rho_1$  и апогея  $\rho_2$  эллиптической орбиты. Согласно теореме Виета

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a = \frac{C}{|E|}, \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{L^2}{2m|E|},$$

где  $a$  — главная полуось эллиптической орбиты. Используя уравнение эллипса в полярных координатах, записанное для перигея и апогея  $\rho_{1,2} = \rho/(1 \pm \epsilon)$ , можно представить все геометрические параметры орбиты через механические константы движения.

В данной задаче полная энергия спутника

$$E = -\frac{C}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -0,3 \frac{C}{R_3},$$

где  $v_0^2 = v_1^2 = \frac{C}{mR_3}$  — квадрат первой космической скорости. Большая ось орбиты  $2a = \frac{C}{|E|} = \rho_1 + \rho_2$ , отсюда  $\rho_1 = 1,25R_3$ ,  $\rho_2 = \frac{C}{|E|} - \rho_1 \approx 2,1R_3$ .

$$7.47* v_A = \frac{\sqrt{1,5}}{3} v_0.$$

Решение. Для круговой орбиты  $v_0^2 = \frac{C}{mR_0}$ ,  $R_0 = \rho_1$  — радиус круговой орбиты,  $C = \gamma m M_3$ ,  $m$  — масса спутника,  $\gamma$  — гравитационная постоянная. Для эллиптической орбиты:  $v_1 = v_0 \sqrt{1,5} = v_p$ . Полная энергия спутника

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{C}{R_0} = \left(\frac{1,5}{2} - 1\right) \frac{C}{R_0} = -\frac{1}{4} \frac{C}{R_0}.$$

Большая ось орбиты

$$2a = \rho_1 + \rho_2 = \frac{C}{|E|} = 4R_0 = 4\rho_1, \text{ откуда } \rho_2 = 4\rho_1 - \rho_1 = 3\rho_1 = 3R_0.$$

Для концов большой оси орбиты имеет место равенство  $L = m\rho_1 v_P = m\rho_2 v_A$  ( $L$  — момент импульса), откуда

$$v_A = v_P \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{1,5}}{3} v_0 = \frac{v_0}{\sqrt{6}}.$$

$$7.48^* T_3/T_k = 2\sqrt{2} \approx 2,82.$$

Решение. Выражая момент импульса через секториальную скорость для эллиптической орбиты  $L = 2m ds/dt$ , получаем для периода

$$T_3 = \frac{2m}{L} S = 2\pi \frac{m}{L} ab.$$

Поскольку  $b^2 = a \frac{L^2}{mC}$ , то

$$T_3^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{C} a^3 \quad (C = \gamma mM_3).$$

Для круговой орбиты

$$T_k^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{C} R^3.$$

Отсюда, с учетом данных задачи, получим

$$\left(\frac{T_3}{T_k}\right)^2 = \frac{a^3}{R^3} = \frac{2^3 R_3^3}{R_3^3} = 2^3, \text{ или } \frac{T_3}{T_k} = 2\sqrt{2}.$$

$$7.49^* v_p = \sqrt{\frac{2gR_3}{3}} = \frac{v_{II}}{\sqrt{3}}, v_{II} — \text{вторая космическая скорость.}$$

Решение. Условие преодоления спутником земного притяжения  $\frac{mv^2}{2} - \frac{C}{R} = E = 0$ , где  $C = \gamma mM_3$ ,  $E$  — полная энергия спутника; откуда

$$v^2 = v_p^2 + v_\phi^2 = \frac{2C}{mR}. \text{ На круговой орбите } v_\phi^2 = \frac{C}{mR}, \text{ поэтому}$$

$$v_p^2 = \frac{2C}{mR} - \frac{C}{mR} = \frac{C}{mR} = \frac{2}{3} gR_3 = \frac{v_{II}^2}{3}.$$

$$7.50^* \rho_{\min} = \frac{mv_\phi^2 R^2}{2C} = \frac{R}{2} = R_3, v = \frac{R}{\rho_{\min}} v_\phi = \sqrt{\frac{2C}{mR_3}} = v_{II}, v_{II} — \text{вторая кос-$$

мическая скорость.

Решение. Момент импульса спутника массы  $m$  на новой орбите определяется из условия:

$$L = mv_\phi R = mv_p \rho_{\min} = \text{const.}$$

Квадрат скорости движения спутника на круговой орбите равен:

$$v_\phi^2 = \frac{C}{mR} \quad (C = \gamma mM_3).$$

Полная энергия спутника на новой орбите:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{C}{\rho_{\min}} = \frac{m}{2} (v_\phi^2 + v_p^2) - \frac{C}{R} = 0,$$

откуда и следует ответ.

7.51\* Скорость запуска с Земли  $v_1 = (2/\sqrt{3})v_1 \approx 1,16v_1$ , где  $v_1$  — первая космическая скорость. Добавочная скорость в апогее  $\Delta v = (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3})v_1 \approx 0,13v_1$ .

Решение (см. решение задачи 7.46). Для эллиптической орбиты большая ось равна

$$2a = 2R_3 + R_3 = 3R_3 = \frac{C}{|E|} \quad (C = \gamma m M_3).$$

Энергия спутника

$$|E| = \frac{C}{3R_3} = \frac{C}{R_3} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{C}{2R_3} - \frac{mv_2^2}{2},$$

откуда скорость запуска спутника  $v_1^2 = \frac{4}{3} \frac{C}{mR_3} = \frac{4}{3} v_1^2$ , скорость в апогее

$v_2^2 = \frac{1}{3} \frac{C}{mR_3} = \frac{1}{3} v_1^2$ , скорость на круговой орбите  $v_k^2 = \frac{1}{2} v_1^2$ ; отсюда добавочная скорость

$$\Delta v = v_k - v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) v_1.$$

$$7.52. \frac{m_k}{m_c} \leq \frac{2}{5} (\sqrt{6} - 1).$$

$$7.53. v_{\min}^2 = \frac{g}{R_0} (R_0 - R_3)^2.$$

$$7.54. 2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) < u < 2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right);$$

$$2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) < u < 2\sqrt{gR} \left( \sqrt{\frac{5}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

$$7.55. u = \frac{\sqrt{gR}}{2} (2\sqrt{5} \mp 5\sqrt{2}).$$

$$7.56. m_1 = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} m = 8,66 \text{ т}; m_2 = \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \right) m = 1,34 \text{ т}.$$

$$7.57. m_1 = \frac{\sqrt{2r_2/(r_1 + r_2)} + 1}{\sqrt{2} + 1} m = 8,8 \text{ т}; m_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2r_2/(r_1 + r_2)}}{\sqrt{2} + 1} m = 1,2 \text{ т}.$$

7.58.  $v_{\min} = (\sqrt{2} - 1)v_1 \sqrt{\frac{R_3}{a}} \approx 1,6 \text{ км/с}$ , где  $v_1$  — первая космическая скорость для Земли.

$$7.59. T = \frac{T_1}{2\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{2/3} \right]^{3/2} = 33,3 \text{ года}.$$

$$7.60. T_2 = T_1 \left[ 2 \left( \frac{T}{T_1} \right)^{2/3} - 1 \right]^{3/2} = 2,78 \text{ года}.$$

7.61.  $\Delta v = v_k - v_3 \approx 2,9 \text{ км/с}$ , где  $v_3 = \sqrt{\frac{\gamma M_C}{R_3}} = 29,7 \text{ км/с}$  — орбитальная скорость Земли, а  $v_k = \sqrt{\frac{2\gamma M_C R_M}{R_3(R_3 + R_M)}} = 32,6 \text{ км/с}$  — требуемая скорость

корабля. Время перелета  $\tau = \frac{1}{4\sqrt{2}} T_3 \left( 1 + \frac{R_M}{R_3} \right)^{3/2} \approx 261 \text{ сут}$ .

7.62.  $\tau = 147 \text{ сут}$ ,  $\Delta v = -2,5 \text{ км/с}$  (см. ответ предыдущей задачи).

$$7.63. \Delta v = v_k - v_B = V_0 \left[ \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \approx 2,71 \text{ км/с.}$$

$$7.64. \Delta v = v_k - v_M = V_0 \left( \sqrt{\frac{2}{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \approx -2,65 \text{ км/с.}$$

$$7.65. R_0 = \frac{2R_3 v_{1k}}{\sqrt{2\alpha W/m}} = 3,4 \cdot 10^5 \text{ км, где } v_{1k} \text{ — первая космическая скорость.}$$

$$7.66. \Delta v \approx 1,2\gamma \frac{M}{R}.$$

$$7.67. x \approx 6\pi \Delta v \sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 12 \text{ км.}$$

7.68. Скорость отстающего спутника  $B$  сначала нужно уменьшить на величину  $\Delta v \ll v$ , в результате чего он перейдет на эллиптическую орбиту с меньшим периодом. А затем через  $n$  оборотов, когда спутник опередит свое первоначальное положение на круговой орбите на нужное расстояние, следует снова увеличить скорость спутника на  $\Delta v$ . Тем самым спутник перейдет на прежнюю орбиту с прежней скоростью, т.е. относительная скорость спутников снова станет нулевой.

$$\Delta v = -\frac{L}{3nT},$$

где  $L = 45$  км;  $T \approx 1,5$  ч — период обращения спутников. При  $n = 1$   $\Delta v > 8$  км/ч, минимальное  $n = 2$ ,  $\Delta v \approx 5$  км/ч.

7.69. Если  $v_1$  — скорость аппарата относительно Солнца в точке, лежащей на орбите Юпитера,  $V_{Ю}$  — скорость Юпитера,

$$v_1 = V_{Ю} \sqrt{\frac{2}{R_{Ю}/R_3 + 1}}.$$

После облета Юпитера скорость аппарата относительно Солнца  $v = 2V_{Ю} - v_1 \approx 1,42V_{Ю} > \sqrt{2}V_{Ю}$ . Таким образом, аппарат может уйти на бесконечность (так был запущен «Вояджер»).

$$7.70. t_{\text{пад}} \approx \frac{T}{4\sqrt{2}}; \text{ в системе Земля—Солнце } t_{\text{пад}} \approx 2 \text{ мес.}$$

$$7.71. t \approx \frac{T}{4\sqrt{2}}.$$

7.72.  $\Delta v = v_3 \left( \sqrt{\frac{2R_M}{R_3 + R_M}} - 1 \right) \approx 3 \text{ км/с, где } v_3 \text{ — орбитальная скорость Земли.}$

$$7.73. \frac{\Delta R}{R} \sim \frac{3\pi R \rho}{r \rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-5}, \Delta R \sim -8 \text{ м, где } R \text{ — радиус земного шара.}$$

(При решении использовано выражение для силы сопротивления  $F \sim \rho v^2 S$ , где  $S = \pi r^2$  — площадь поперечного сечения спутника.) Почему снижение спутника не зависит от гравитационной постоянной?

$$7.74. \rho = \frac{\Delta R}{H} \frac{mH}{4\pi^2 r^2 (R_0 + H)} \approx 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ кг/м}^3.$$

$$7.75^*. \text{ Время снижения } \tau = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3 R_3}{g}}.$$

Решение. Большая ось орбиты снижения  $2a = R_3 + 2R_3 = 3R_3$ . Время обращения по эллиптической орбите

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} a^3 = 2\tau \quad (C = \gamma mM_3).$$

Время снижения

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{\gamma mM_3}} \left(\frac{3}{2}\right)^3 R_3^3 \approx \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R_3^3}{gR_3^2}} = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R_3}{g}}.$$

7.76. Тангенциальная составляющая ускорения спутника

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{2v} \frac{R}{r^2} \frac{dr}{dt} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $R$  — радиус Земли, а  $\frac{dr}{dt}$  — скорость снижения спутника. Сила сопротивления среды

$F = m \frac{dv}{dt} \approx 80$  дин. При вычислениях допустимо считать, что скорость спутника  $v \approx 8$  км/с.

$$7.77. T = \frac{\pi\gamma M}{|E|\sqrt{2|E|}}; \frac{\Delta T}{T} = -\frac{6\pi F}{g}.$$

$$7.78. \Delta v \approx 0,01\sqrt{gR_3} \approx 79 \text{ м/с}.$$

$$7.79. \Delta M \approx 450 \text{ кг}.$$

$$7.80. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1,5} \approx 0,9.$$

$$7.81. v_\infty = R\sqrt{\frac{2gR}{l^2 - R^2}}. \text{ При } l = 2R \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2}{3}}gR \approx 6,5 \text{ км/с}.$$

$$7.82. \frac{m_0 - m}{m_0} = (\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{gR}}{u} \approx 0,17.$$

$$7.83. m(t) = m_0 e^{-t/\tau}, \text{ где } \tau = \frac{u \sin \alpha}{g} \approx 230 \text{ с}; T = \alpha \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 100 \text{ с}; \frac{m_0}{m} \approx 1,5.$$

Перегрузка космонавтов  $g_{\text{экр}} = \sqrt{g^2 + \dot{v}_x^2} \approx \dot{v}_x = 16 \text{ м/с}^2$ , где  $\dot{v}_x$  — ускорение ракеты.

7.84. На Землю упадет весь рой.

$$7.85. N = \pi R_3^2 h n \left(1 + 2 \frac{gR_3}{v^2}\right) = 7,75 \cdot 10^{10}.$$

$$7.86. \Delta M = 2\pi r^2 h \rho = 2,55 \cdot 10^{19} \text{ кг}.$$

$$7.87. v^2 = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 g_0 h \frac{\frac{h}{R} - 2 \frac{m}{m_0} \left(2 + \frac{m}{m_0}\right)}{1 + \frac{h}{R}}; v \approx 17,1 \text{ км/с}.$$

$$7.88. m = m_0 \left(\frac{4R}{h} + 1 \pm \sqrt{\left(\frac{4R}{h} + 1\right)^2 - 1}\right) \approx 6 \text{ кг}; (m \approx m_0 \frac{h}{8R}).$$

$$7.89. R_{\max} - R_{\min} \approx \frac{2mv}{M} \sqrt{\frac{R_3}{g}} = 256 \text{ м}.$$

$$7.90. R_{\max} - R_{\min} = \frac{4mvR_3}{M\sqrt{gR_3} + 2mv} \approx 256 \text{ м.}$$

$$7.91. \frac{b}{a} \approx 1 - 2 \left( \frac{\Delta v}{v_0} \right)^2 \approx 0,98.$$

$$7.92. \frac{b}{a} = \cos \delta.$$

$$7.93. R_{\max} - R_{\min} = 4 \frac{W \cos \alpha}{mc} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 9,5 \text{ м.}$$

$$7.94. R_a = 4,67R_3.$$

7.95.  $m_{\min} = M_0 \left[ \exp \left( \frac{v_0 + g_{\text{ЛЛ}} \tau}{u} \right) - 1 \right]$ , где  $v_0 = \sqrt{2g_{\text{ЛЛ}}R_{\text{Л}}}$ ,  $g_{\text{ЛЛ}}$  — ускорение свободного падения на поверхности Луны.

$$7.96. \Delta v = \frac{h_1 - h_2}{4} \sqrt{\frac{g}{R_3}} \approx 47 \text{ м/с.}$$

$$7.97. \frac{l_{\max}}{l_{\min}} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{3}.$$

$$7.98. \tau_1 = \tau_2 \sqrt{2 - \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{2/3}} \approx 7 \text{ лет } 137 \text{ дней.}$$

7.99. *Первый вариант:* здесь необходимо просто «остановить» аппарат в орбитальном движении, после чего он сам свободно упадет на Солнце  $\left( \frac{m}{m_{\text{к}}} \right)_1 \approx 22\,000$ ; продолжительность падения  $t_1 \approx \frac{1}{4\sqrt{2}}$  лет.

*Второй вариант:*  $\left( \frac{m}{m_{\text{к}}} \right)_2 \approx e^{5,9} \approx 400$ ; продолжительность падения  $t_2^{\text{пад}} = 5,6$  лет, продолжительность полета от Земли до афелия  $t_2^{\text{аф}} = 6,5$  лет;  $t_2 = 12,1$  лет. Выигрыш в энергии в 55 раз, однако существенное отличие во времени. В пределе (при бесконечной длительности полета)  $\frac{m}{m_{\text{к}}} \approx 63$ .

7.100.  $\frac{\delta T}{T} = \frac{2\delta r}{r} \frac{\omega_1}{\omega_2 \sin \theta} \approx 18,5$  с, где  $\omega_1$  — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца,  $\omega_2$  — угловая скорость вращения Земли вокруг оси.

7.101. Во время корректировки  $T = 1,75T_0$ ; до и после корректировки часы стоят.

7.102.  $\varphi = \pi \left[ 1 - \left( \frac{T_3}{T_M} \right) \left( \frac{R_3}{a} \right)^{3/2} \right]$ , где  $T_3$  и  $T_M$  — периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца,  $a = \frac{R_3 + R_M}{2}$  — большая полуось эллипса перелета.  
 $\varphi = 0,77 \text{ рад} = 44,3^\circ$ .

7.103.  $\varphi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2T}{T_3} - 1 \right) = 0,66 \text{ рад} = 37,6^\circ$ , где время перелета

$$T = \frac{T_3}{2} \left( \frac{R_M + R_3}{2R_3} \right)^{3/2}.$$

7.104.  $\frac{M_{\Gamma}}{M_{\text{С}}} = \frac{\alpha_{\Gamma} R_{\Gamma}}{\alpha_{\text{С}} R_{\text{С}}} \approx 10^{13}$ .

**7.105.** Движение Меркурия по небу в достаточном приближении — гармонические колебания с угловой амплитудой  $A = 22,8^\circ$ . Угловая частота этих колебаний  $\omega = \frac{2\pi}{115} \text{ сут}^{-1}$ . Искомое время  $\tau = \frac{0,5^\circ}{A\omega} \approx 9,7 \text{ ч}$ .

**7.106.**  $h_1 \min = 3R$ ;  $h_1 \max = \infty$ ;  $h_2 \min = 0$ ;  $h_2 \max = R$ .

**7.107.** Через полпериода колебаний  $t = \frac{\pi}{\omega}$ , где  $\omega = \sqrt{k \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}}$ , надо увеличить силу тяги до  $2F$ . При этом массы  $M_1$  и  $M_2$  сблизятся на  $\Delta x = \frac{2FM_2}{k(M_1 + M_2)}$ .

**7.108.** При устойчивом равновесии угол  $\theta_1$  между тросом и продолжением радиуса планеты равен нулю, а период малых колебаний вокруг него  $T = T_0/\sqrt{3} \approx 0,9 \text{ ч}$ . При  $\theta = \pi/2$  равновесие неустойчиво.

**7.109.**  $F \approx \frac{3mgl}{8R_3} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ .

**7.110.**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R^2 - r^2)^3}{2\gamma MR(3R^2 + r^2)}} \approx 1 \text{ ч } 33 \text{ мин}$ .

**7.111.**  $\varphi = 2\pi \frac{3a/R^2}{1 - 3a/R^2} \approx 6\pi \frac{a}{R^2}$ .

**7.112.**  $R = \frac{16}{25} \left( \frac{r_2^{5/2} - r_1^{5/2}}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2$ .

**7.113.**  $\frac{\Delta T}{T} = 3 \frac{M_{10} - M_{20}}{M_{10} M_{20}} \Delta M_1 = 3 \frac{\Delta m}{M_0} = 3 \cdot 10^{-2}$ ;  $\frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} = 2 \cdot 10^{-2}$ .

Перенос происходит от легкой звезды к тяжелой, т. к.  $\frac{\Delta a}{a} > 0$ .

**7.114.**  $M = m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 l^3 \varphi^3}{\gamma T^2} \approx 3,8 \cdot 10^{30} \text{ кг} \approx 1,5 M_{\text{С}}$ .

**7.115.**  $m = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 R^3 M_{\text{п}}^2}{\gamma T^2}} \approx 16 \cdot 10^{24} \text{ кг} \approx 3m_{\text{С}}$ .

**7.116.** В силу симметрии, точки всегда будут находиться в вершинах некоторого квадрата. Их орбиты — одинаковые эллипсы с фокусом в центре описанной окружности. Общим параметром этого движения является период обращения  $T = \frac{2\pi(R+r)^{3/2}}{[2(1+2\sqrt{2})\gamma M]^{1/2}}$ . Большая ось эллипсов  $R+r$ , малая —  $2\sqrt{Rr}$ .

**7.117.**  $v_1 - v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{3\gamma(M+m)}{R}}$ .

**7.118.**  $T = \frac{2L^2}{\sqrt{a}}$ .

**7.119.**  $W_{\text{г}} = \frac{3}{5} \frac{\gamma m^2 A_{\text{зв}}^{5/3}}{R_0} \approx 0,9 \cdot 10^{53} \text{ эрг}$ , где  $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ,  $m$  — масса нейтрона.

**7.120.**  $A \approx 6,12 \cdot 10^6 \text{ кгс} \cdot \text{м}$ .

**Решение.** Минимальная работа по перемещению массы  $m$  с Земли на Луну может быть записана следующим образом:  $A \approx mR_3 g_3 - mR_{\text{Л}} g_{\text{Л}}$ , где  $R_3$  и  $R_{\text{Л}}$  — радиусы Земли и Луны,  $g_3$  и  $g_{\text{Л}}$ , соответственно, ускорения свободного падения на поверхности этих планет, вызванные силами тяготения самих планет.

$$7.121^* \quad v_{\min} \approx 16,7 \text{ км/с}, \quad v_{\max} \approx 72,7 \text{ км/с}.$$

**Решение.** Все скорости относительно Земли условимся обозначать малыми, а относительно Солнца — большими буквами. Разделим движение ракеты на два этапа. На первом этапе движение будем рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, пренебрегая при этом полностью неоднородностью поля солнечного тяготения. В этом приближении сила гравитационного притяжения Солнца полностью компенсируется силой инерции, связанной с ускоренным движением центра Земли. Считая массу Земли  $M$  бесконечно большой по сравнению с массой корабля  $m$ , запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \frac{mv_{\infty}^2}{2},$$

где  $v_{\infty}$  — скорость ракеты в тот момент, когда она практически выходит из зоны действия земного тяготения. Вводя круговую скорость  $v_K^2 = \gamma M/r$ , получим  $v_{\infty}^2 = v^2 - 2v_K^2$ . После того, как ракета выйдет из зоны действия земного тяготения, будем относить ее движение к системе отсчета, в которой неподвижно Солнце. Скорость ракеты в этой системе отсчета векторно складывается из скорости  $\mathbf{v}_{\infty}$  и скорости кругового движения Земли  $\mathbf{V}_K$ :  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_K + \mathbf{v}_{\infty}$ . Возведя в квадрат, получим

$$V^2 = V_K^2 + v_{\infty}^2 + 2\mathbf{V}_K \mathbf{v}_{\infty} = V_K^2 + v_{\infty}^2 + 2V_K v_{\infty} \cos \theta.$$

Чтобы найти третью космическую скорость, надо в этом соотношении положить  $V = V_{\Pi} = \sqrt{2}V_K$ , где  $V_{\Pi}$  — параболическая, а  $V_K = 29,8$  км/с — круговая скорости движения ракеты относительно Солнца. Это приводит к уравнению

$$v_{\infty}^2 + 2V_K v_{\infty} \cos \theta - V_K^2 = 0,$$

из которого находим

$$v_{\infty} = (\sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta) V_K$$

(Положительный знак перед квадратным корнем выбран потому, что величина  $v_{\infty}$  по своему смыслу существенно положительна.) После этого получаем

$$v^2 = (\sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta)^2 V_K^2 + 2v_K^2.$$

Наименьшее значение третьей космической скорости получается при  $\theta = 0$  (ракета выпущена в направлении орбитального движения Земли), наибольшее при  $\theta = \pi$  (ракета выпущена в направлении против орбитального движения Земли):

$$v_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)V_K^2 + 2v_K^2} \approx 16,7 \text{ км/с},$$

$$v_{\max} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)V_K^2 + 2v_K^2} \approx 72,7 \text{ км/с}.$$

$$7.122^* \quad v_{\min} \approx 29,2 \text{ км/с}, \quad v_{\max} \approx 31,8 \text{ км/с}.$$

**Решение.** Ракета на старте движется вокруг Солнца вместе с Землей со скоростью  $\mathbf{V}_K$ . Чтобы ракета упала на Солнце, надо ее движение затормозить. Как и в предыдущей задаче, находим, что по выходе из поля земного тяготения ракета будет иметь скорость  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_K + \mathbf{v}_{\infty}$  (относительно Солнца). Наименьшая для замедления ракеты затрата энергии соответствует случаю, когда скорости  $\mathbf{V}_K$  и  $\mathbf{v}_{\infty}$  направлены противоположно. В соответствии с этим полагаем

$V = V_k - v_\infty$  (все скорости положительны) и находим энергию, приходящуюся на единицу массы ракеты:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (V_k - v_\infty)^2 - \frac{\gamma M}{R} = -\frac{1}{2} (V_k^2 + 2V_k v_\infty - v_\infty^2)$$

( $R = CA$  — расстояние ракеты до центра Солнца, рис. 392). Если эта величина отрицательна, то ракета будет описывать вокруг Солнца эллипс с большой осью

$$2a = -\frac{\gamma M}{\varepsilon} = \frac{2RV_k^2}{V_k^2 + 2V_k v_\infty - v_\infty^2}$$

Один из фокусов этого эллипса находится в центре Солнца. Пусть  $x = CP$  — расстояние от центра Солнца до ближайшей вершины этого эллипса, тогда  $2a = R + x$ . Это приводит к квадратному уравнению, меньший корень которого

$$v_\infty = V_k \left( 1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right)$$



Рис. 392

Заданием расстояния  $x$  на поверхности Солнца определяется линия, на которой должна лежать заданная точка. Таким образом, искомая скорость  $v$  определяется выражением

$$v^2 = v_\infty^2 + 2v_k^2 = V_k^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right)^2 + 2v_k^2$$

При  $x = 0$  (прямолинейное движение по направлению к центру Солнца) скорость  $v$  максимальна и равна:

$$v_{\max} = \sqrt{V_k^2 + 2v_k^2} \approx 31,8 \text{ км/с.}$$

Ракета упадет в ближайшей точке Солнца. При  $x = r$  ( $r$  — радиус Солнца) скорость минимальна:

$$v_{\min} \approx \sqrt{V_k^2 \left( 1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}} \right)^2 + 2v_k^2} \approx \sqrt{V_k^2 (1 - \sqrt{a})^2 + 2v_k^2} \approx 29,2 \text{ км/с.}$$

Ракета упадет в наиболее удаленной точке Солнца, двигаясь по касательной к его поверхности.

**7.123.** Точка, в которой  $g = 0$ , делит отрезок прямой линии между центрами этих планет в отношении 9 : 1 и, следовательно, лежит на расстоянии  $r \approx 36,7$  км от поверхности Луны.

$$\mathbf{7.124^*} \quad U = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R}$$

**Решение.** Гравитационная энергия шара есть потенциальная энергия, обусловленная силами тяготения, действующими между материальными точками, на которые можно мысленно разбить шар. Она равна взятой с противоположным знаком работе, которую должны затратить внешние силы, чтобы привести вещество шара в бесконечно разрозненное состояние, когда каждая частица вещества удалена в бесконечность. Эта работа не зависит от способа, каким шар переводится из начального состояния в конечное. Поэтому при вычислении можно поступить следующим образом. Разделим мысленно шар на бесконечно тонкие концентрические слои и будем последовательно удалять в бесконечность каждый из тонких слоев, начиная с самого крайнего. Напряженность поля тяготения в любой точке выделенного слоя, создаваемая веществом, внешним по отношению к этому слою, равна нулю. Поле создается только

веществом, которое окружено рассматриваемым слоем. Если  $m$  — масса этого вещества, а  $dm$  — масса слоя, то работа, затрачиваемая на удаление слоя в бесконечность, равна  $dA = \gamma \frac{mdm}{r}$ . Но для однородного шара  $m = M \frac{r^3}{R^3}$ , где  $M$  — масса всего шара. Поэтому  $dA = 3\gamma \frac{M^2}{R^6} r^4 dr$ . Учитывая, что  $dA = -dU$  и интегрируя, получим

$$U = -3 \frac{\gamma M^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R}.$$

За нуль потенциальной энергии мы приняли энергию шара в бесконечно разрозненном состоянии.

$$7.125^* \quad \mathbf{g} = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{R}.$$

**Решение.** Вообразим, что полость заполнена веществом, плотность которого равна плотности шара. Тогда искомое гравитационное поле  $\mathbf{g}$  представляется разностью гравитационных полей двух сплошных шаров с центрами в  $O$  и  $O_1$  соответственно. Точка наблюдения  $A$  расположена внутри каждого из этих шаров. Поэтому можно написать

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r} - \left( -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}_1 \right) = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{R},$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, проведенный из центра шара  $O$  к центру полости  $O_1$ . Поле однородно, т. е. во всех точках полости одинаково по величине и направлению.

7.126.  $v = \sqrt{3gR_3}$ , где  $R_3$  — радиус Земли.

7.127. Если  $\rho = \text{const}$ , то  $T_1 = T_2$ . Если  $\rho$  возрастает к центру планеты, то  $T_2 > T_1$ .

7.128.  $T_{3m} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}}$ ;  $T_{mm} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$ ;  $\frac{T_{3m}}{T_{mm}} = 10^3$  по условию. Разность сил, действующих на первый и второй грузы в тоннеле,  $\delta F = mg \frac{l_0}{R}$ , где  $l_0$  — длина нерастянутой пружины. С другой стороны, эта разность  $\delta F = 2k\delta l$ , откуда  $\frac{\delta l}{l_0} = \left( \frac{T_{mm}}{T_{3m}} \right)^2 = 10^{-6}$ .

7.129. Гармонические колебания с периодом  $T = 2\pi \sqrt{R_0/g_0}$ , где  $R_0$  — радиус земного шара,  $g_0$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

7.130.  $\mathbf{g}_A = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный в точку  $A$  из центра шара.

$$7.131. \quad T = T_0 \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

$$7.132. \quad \rho(r) = \frac{2}{3} \pi \rho^2 \gamma (R^2 - r^2); \quad \rho(0) \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2.$$

$$7.133. \quad \rho(r) = \frac{1}{4\pi\gamma} \left[ \frac{2g(r)}{r} + \frac{dg(r)}{dr} \right].$$

$$7.134. \quad v = 13,9 \text{ км/с}.$$

$$7.135. \quad \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{H-2h}{2R} \approx 8 \cdot 10^{-5}.$$

$$7.136. \quad \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\pi R^2 \gamma \rho}{gH} \approx 10^{-7}.$$

$$7.137. \tau \approx \pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 42 \text{ мин.}$$

$$7.138. z = -\frac{\gamma M}{g(R+H)} \approx -16 \text{ см.}$$

$$7.139. r(g_{\max}) = \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} R_3 \approx 5690; \frac{g_{\max}}{g_0} = \frac{64}{63} \approx 1,016.$$

$$7.140. r(g_{\max}) = R_{я}; \frac{g_{\max}}{g_{\text{пов}}} = \frac{\rho_1 R_{я} / R_M}{(\rho_1 - \rho_2)(R_{я} / R_M)^3 + \rho_2} \approx 1,2.$$

7.141.  $T = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma \rho}}$ , где  $\gamma$  — гравитационная постоянная, а  $\rho$  — плотность вещества слоя.

7.142.  $T = \pi r \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu}}$ , где  $r$  — радиус орбиты,  $\mu$  — погонная плотность стержня.

7.143.  $\mathbf{g}_A = -\frac{4}{3} \pi \gamma \rho \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{R}$  — вектор, проведенный в точку  $A$  от оси цилиндра через центр полости.

$$7.144. \Delta v_{\perp} = \frac{2\pi \gamma \mu}{v}; \Delta \varphi = \frac{2\pi \gamma \mu}{v^2}.$$

## § 8. Специальная теория относительности

8.1. Если на корабле отсчитан промежуток собственного времени  $\Delta t'$ , то по земным часам будет отсчитан промежуток  $\Delta t = \Gamma \Delta t'$ , где  $\Gamma = 25/7^{\frac{1}{2}}$ , поэтому

$$S = V \Delta t = \frac{24}{25} c \cdot \frac{25}{7} \Delta t' = 24c\tau \quad (\Delta t' = 7\tau, \tau = 1 \text{ с}).$$

8.2. Да, увидит. Если пренебречь временем реакции глаза, то мгновенно.

$$8.3. l = x_2 - x_1 = c \Delta t = l_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \text{ где } \beta = \frac{v_0}{c}.$$

$$8.4. v = \frac{2l_0\tau}{\tau^2 + l_0^2/c^2}.$$

8.5. Размер системы в направлении движения  $l_{\parallel} = \frac{2d_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ; в перпендикулярном направлении  $l_{\perp} = d_0$ .

$$8.6. \Delta t = \frac{2L}{v} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) \approx \frac{L}{c} \frac{v}{c} = 0,0143 \text{ лет} = 5,24 \text{ сут.}$$

8.7. По собственным часам корабля пройдет промежуток времени  $\Delta T_0 = \frac{LV}{c\sqrt{c^2-v^2}} = 1,5 \text{ мес.}$

<sup>1</sup> В релятивистский множитель  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  входит скорость  $V$  относительного движения двух систем отсчета. Поэтому  $\Gamma$  — постоянная величина. В некоторых задачах встречается множитель  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ , в который входит переменная скорость частиц  $v$ .

$$8.8. \beta = \frac{V}{c} = \frac{1 - \tau_2/\tau_1}{1 + \tau_2/\tau_1} = 0,6; T_3 = T \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} = 1 \text{ мес.}$$

$$8.9. l_0 = 375 \text{ м; } \beta = \frac{3}{5}.$$

$$8.10. l_0 = 400 \text{ м; } \beta = \frac{4}{5}.$$

8.11. Ване будет 20 лет, а Пете 25 лет.

$$8.12. V_0 = c \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2} = \frac{4}{5} c, \text{ где } \tau_0 = 15 \text{ лет, } \tau = 25 \text{ лет.}$$

8.13\* Помимо обычного возможно графическое решение этой задачи. Из

$$\text{рис. 393: } x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1 v}{2c} \Rightarrow x_1 = \frac{2x_2}{1 + \beta}; \quad \tau_3 = \frac{x_1 - x_2}{c} = \frac{x_2}{c} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \tau_1 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = 0,5 \text{ с.}$$

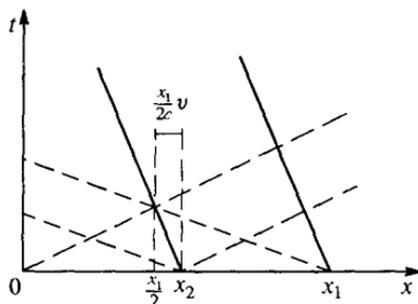


Рис. 393

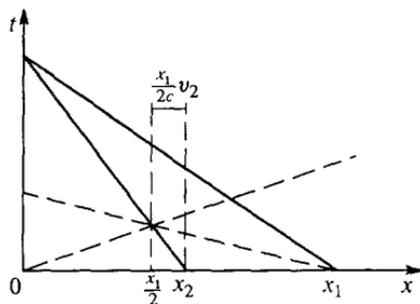


Рис. 394

8.14. Здесь возможно графическое решение, аналогичное задаче 8.13 (рис. 394)  $\tau_3 = \tau_1 \sqrt{1 - \beta^2} = 4 \text{ с.}$

$$8.15^* \text{ При удалении } \omega' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \omega_0, \text{ при сближении } \omega' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \omega_0.$$

Решение. Пусть источник покоится в  $K$ , а наблюдатель — в  $K'$ . Если источник посылает импульсы с интервалом  $T$ , то удаляющийся наблюдатель в  $K'$  получает эти сигналы через промежуток времени

$$T' = \frac{1}{1 - V/c} T$$

(по часам  $K$ ). Чтобы получить промежуток времени по часам наблюдателя  $K'$ , следует перейти к собственному времени наблюдателя  $T'_0$ , для которого  $T'_0 = T'/\Gamma$  (здесь  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$ ), и мы получим  $T'_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} T$ . Переходя к

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \omega_0 \quad (\omega_0 = 2\pi/T).$$

Аналогично, при сближении источника и наблюдателя

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \omega_0.$$

$$8.16^* l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi'}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Gamma \operatorname{tg} \varphi'.$$

Решение. В системе  $K$  проекции стержня на оси  $x$  и  $y$  будут равны  $\Delta x = \Delta x'/\Gamma$ ,  $\Delta y = \Delta y'$ . Очевидно,  $l_0^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$ , а  $\operatorname{tg} \varphi' = \Delta y'/\Delta x'$ . Таким образом, в системе  $K$ :

$$l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + (\Delta y')^2} = \\ = \sqrt{l_0^2 - \frac{v^2}{c^2} (\Delta x')^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi'},$$

так как  $\Delta x' = l_0 \cos \varphi'$ . Что касается угла  $\varphi$ , то он определится из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Gamma \operatorname{tg} \varphi'.$$

8.17\* Решение. Фотоаппарат фиксирует лучи, которые приходят в него одновременно. Поэтому, вследствие конечности скорости света, точки предмета, лежащие дальше от фотоаппарата, чтобы дать вклад в изображение, должны испустить лучи раньше, чем более близкие точки.

Рассмотрим, например, светящийся предмет кубической формы со стороной  $l$ , пролетающий на большом расстоянии от точки фотографирования со скоростью  $v$  перпендикулярно к лучу света, направленному на фотоаппарат (рис. 395а). Вследствие движения тыльная грань  $ABEF$ , невидимая при неподвижном кубе, становится видимой при движении, так как из точек  $E$  и  $F$  свет излучился на время  $l/c$  раньше, чем с грани  $ABCD$ , когда точки  $E$  и  $F$  находились в положении  $E'$  и  $F'$ . На фотографии (рис. 395б) грань  $ABEF$  выйдет в виде прямоугольника  $A'B'E'F'$  со стороной  $A'F' = \frac{v}{c} l$ .

С другой стороны, грань  $ABCD$  вследствие сокращения Лоренца будет сжатой в направлении движения в  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  раз так, что ее изображение  $A'B'C'D'$  на фотографии получится в виде прямоугольника со стороной  $A'D' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Нетрудно видеть, что на фотографии общая форма движущегося куба не искажается, так как он кажется повернутым на угол  $\varphi = \arcsin(v/c)$  при сохранении своих пропорций (рис. 395б).

Аналогично, для движущегося шара вследствие совместного действия запаздывания света и сокращения Лоренца видимая форма шара не искажается: на фотографии он получается в форме круга. Чтобы наблюдать при помощи фотоаппарата сокращение Лоренца в чистом виде, нужно воспользоваться внешним источником освещения, например, лампой-вспышкой, который исключает кажущийся поворот движущихся предметов.

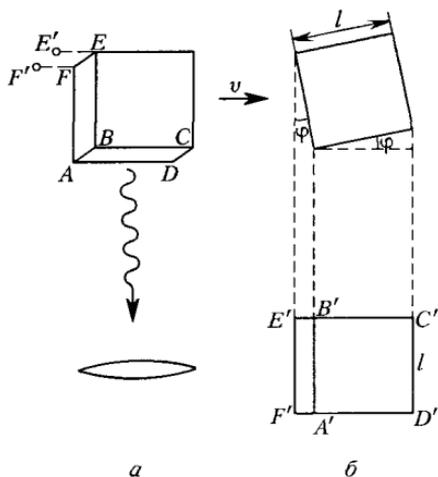


Рис. 395

$$8.18^* v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \sqrt{\frac{1 + eV/(2mc^2)}{[1 + eV/(mc^2)]^2}}.$$

Решение. Кинетическая энергия равна работе поля, так что

$$K_r \equiv mc^2(\gamma - 1) = eV, \text{ где } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда  $\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2}$ , а следовательно,  $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ . Окончательно:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \sqrt{\frac{1 + eV/(2mc^2)}{[1 + eV/(mc^2)]^2}}.$$

Если  $eV \ll mc^2$ , то

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{eV}{mc^2}\right);$$

если  $eV \gg mc^2$ , то

$$v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \sim c.$$

В последних двух случаях используется разложение подкоренного выражения основной формулы в ряд по малому параметру.

$$8.19^* l = (\mathcal{E}_0 - mc^2)/eE.$$

Решение. По закону сохранения энергии кинетическая энергия  $K_r$  полностью расходуется на работу против сил поля:  $K_r \equiv \mathcal{E} - mc^2 = eEl$ , откуда и можно определить  $l$ .

Другой способ использует соотношение

$$l = \int_0^{\tau} v dt,$$

где  $\tau$  — время полной остановки частицы. Известно, что  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$ , откуда  $v = c^2 p/\mathcal{E}$ . Кроме того  $d\mathcal{E} = eE dt$ , поэтому

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\tau} v dt = \frac{c^2}{eE} \int_{p_0}^0 \frac{p dp}{\mathcal{E}} = \frac{c}{eE} \int_{p_0}^0 \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \\ &= \frac{c}{eE} \left(\sqrt{p_0^2 + m^2 c^2} - mc\right) = \frac{1}{eE} (\mathcal{E}_0 - mc^2). \end{aligned}$$

$$8.20^* \frac{K_r}{mc^2} \approx \frac{v^2/c^2}{2} = \frac{1}{150}.$$

Решение. Воспользовавшись разложением бинома:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots,$$

получим для  $(v/c) \ll 1$ :

$$K_r = mc^2(\gamma - 1) = \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{mv^4}{c^2} + \dots$$

Составив отношение второго члена  $K_r$  к первому, приравняем это отношение

одной соотой:  $\frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} = 0,01$ , откуда  $\frac{v}{c} = 0,1\sqrt{\frac{4}{3}}$ . В этом же приближении:

$$\frac{K_r}{mc^2} \approx \frac{v^2/c^2}{2} = \frac{1}{150}.$$

8.21.  $pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)}$ .

8.22.  $m_0c^2 \approx h\nu\sqrt{2\frac{c-V}{c}} \approx 1,8 \cdot 10^{-8}$  эВ.

8.23.  $E \approx \frac{m_0c^2}{\sqrt{2\frac{c-V}{c}}} = 7,9$  МэВ.

8.24.  $\tau \approx 12,5$  мин.

8.25.  $L = 40$  см.

8.26.  $F' = \Gamma^2 SnmV^2 = 1,5 \cdot 10^9$  дин ( $m = 1,7 \cdot 10^{-24}$  г);  $\mu' = \frac{F'}{c} = 0,05$  г/с.

8.27.  $\mathcal{E} = m_0c^2\gamma = m_0c^2\frac{\tau}{\tau_0} = 1,3 \cdot 10^{12}$  МэВ, где  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ .

8.28.  $\mathcal{E} = mc^2\sqrt{\frac{L}{2c\Delta t}} \approx 560$  кэВ.

8.29. Стрелка совершит два оборота.

8.30.  $\Delta t' = \Delta t\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3$  с, где  $\beta = \frac{v}{c} = 0,8$ .

8.31.  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-5}$  с;  $\frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t} \approx 0,06\%$ .

8.32.  $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{mc^2} \tau_0 \approx 2,1 \cdot 10^{-5}$  с.

8.33.  $c - v \approx \frac{m_0^2c^2}{2(\sqrt{3}-2\sqrt{2})M^2v^2} c = 8 \cdot 10^{-28} c = 2,4 \cdot 10^{-17}$  см/с;

$$K_{сн}/K_3 \approx 2(\sqrt{2}-1)c/v \approx 8,3 \cdot 10^3.$$

8.34.  $c - v \approx \frac{9}{2} \left(\frac{m_0c^2}{MR\omega}\right)^2 c = 1,56 \cdot 10^{-15}$  см/с;  $\frac{K_{сн}}{K_{вр.3}} \approx \frac{2c}{\omega R} = 1,3 \cdot 10^6$ .

8.35.  $N = 3 \cdot 10^9$  кВт, что превосходит мощность Братской ГЭС примерно в 1000 раз.

8.36.  $K = mc^2 = 9 \cdot 10^{27}$  эрг =  $9 \cdot 10^{20}$  Дж;  $M = 13\,000$  т;

$$v = c\sqrt{3}/2 = 2,6 \cdot 10^5$$
 км/с.

8.37. При сжатии бесконечно разреженного вещества до звезды радиуса  $R$  выделяется энергия  $E_{гр} = \gamma \frac{M^2}{R}$ , которая при  $R \rightarrow 0$  стремится к бесконечности. Но это невозможно, так как общая выделяющаяся энергия не может превышать  $Mc^2$ . Откуда и следует условие  $R \gg \gamma \frac{M}{c^2}$ . Если  $M = M_c$ , то  $R \gg 1$  км.

8.38.  $M = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \frac{2K_2m_1}{c^2}}$ ; суммарная масса образовавшейся частицы приблизительно равна сумме масс исходных частиц, если

$$\frac{K_2m_1}{c^2} \ll (m_1 + m_2)^2, \quad v = \frac{c\sqrt{K_2(K_2 + 2m_2c^2)}}{(m_1 + m_2)c^2 + K_2}.$$

$$8.39. M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2; E = E_1 + E_2; E_{1,2} = c\sqrt{p_{1,2}^2 + m_{1,2}^2 c^2}; \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$

где индексы 1 и 2 относятся к частицам, возникшим после распада,

$$M^2 c^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \\ = (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2 \left( \sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1 p_2 \cos \theta \right).$$

$$8.40. K_1 = \frac{c^2}{2M} \left[ (M - m_1)^2 - m_2^2 \right]; K_2 = \frac{c^2}{2M} \left[ (M - m_2)^2 - m_1^2 \right].$$

$$8.41^* K_1 = \frac{K_0 \cos^2 \theta_1}{1 + \frac{1}{2} \frac{K_0}{mc^2} \sin^2 \theta_1}.$$

Решение. Запишем законы сохранения энергии и импульса для процесса соударения:

$$K_0 = K_1 + K_2, \quad K_2 = K_0 - K_1,$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1,$$

$$(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2 = \mathbf{p}_2^2, \quad p_2^2 - p_1^2 - p_0^2 = -2p_0 p_1 \cos \theta_1.$$

Но  $p^2 c^2 = K(K + 2mc^2)$ , поэтому

$$p_2^2 - p_1^2 - p_0^2 = - \frac{2K_1(K_0 + 2mc^2)}{c^2}.$$

С другой стороны,

$$-2p_0 p_1 \cos \theta_1 = - \frac{2 \cos \theta_1}{c^2} \sqrt{K_0 K_1 (K_0 + 2mc^2) (K_1 + 2mc^2)}.$$

Приравнявая, получим после некоторых алгебраических преобразований:

$$K_1 = \frac{K_0 \cos^2 \theta_1}{1 + \frac{1}{2} \frac{K_0}{mc^2} \sin^2 \theta_1}.$$

$$8.42. \cos \theta = \frac{K}{K + 4m_p c^2}.$$

$$8.43. \sin \frac{\theta}{2} = \frac{m_0 c^2}{2\sqrt{E_1 E_2}}.$$

$$8.44. K_\nu = E_\nu = \frac{1}{2} \frac{(m_\pi c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2}{m_\pi c^2} \approx 30 \text{ МэВ};$$

$$K_\mu = m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - K_\nu \approx 4 \text{ МэВ}.$$

$$8.45. m_\Omega c^2 = (E_\Lambda + E_K)^2 - (P_\Lambda + P_K)^2 c^2 = 1,7 \text{ ГэВ}.$$

$$8.46. m_\xi c^2 = 8,3 \text{ ГэВ}; \beta = \frac{E_\gamma}{m_\gamma c^2 - E_\gamma} \approx 0,13.$$

$$8.47^* K = 5,62 \text{ ГэВ}.$$

Решение. Условие, при котором рассматриваемая реакция происходит с минимальной затратой энергии, легко найти, рассмотрев процесс в системе центра масс. Затраченная энергия будет минимальна, если в этой системе все четыре образовавшихся частицы покоятся. В лабораторной системе они будут двигаться с одинаковыми скоростями, как если бы образовалась одна частица

с массой покоя  $M = 4m_p$  или энергией покоя  $4m_p c^2$ . Эту энергию удобно обозначить  $2E$ . Таким образом,  $2E = 4m_p c^2 = 4E_0$ , где  $E_0$  — энергия покоя протона. Полная энергия движущегося протона (с импульсом  $p$ ) до реакции будет  $\sqrt{E_0^2 + (pc)^2}$ . Поскольку при столкновении импульс сохраняется, полная энергия образовавшихся частиц представится выражением  $\sqrt{(2E)^2 + (pc)^2}$ . Закон сохранения энергии дает

$$\sqrt{E_0^2 + (pc)^2} + E_0 = \sqrt{(2E)^2 + (pc)^2};$$

отсюда

$$(pc)^2 = 4(E^4 - E^2 E_0^2)/E_0^2.$$

Чтобы найти исходную кинетическую энергию протона, надо из полной энергии его вычесть энергию покоя. Это дает

$$K = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} - E_0 = 2 \left( \frac{E^2}{E_0} - E_0 \right).$$

В рассматриваемом случае  $E = 2E_0$ , так что  $K = 6E_0 = 5,62$  ГэВ.

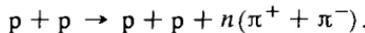
8.48.  $K_p^{\min} = 7,08$  ГэВ.

8.49.  $K = 4M_{\Lambda_c} c^2 + \frac{2(M_{\Lambda_c} c^2)^2}{M_p c^2} \approx 19,9$  ГэВ.

8.50.  $\varphi \approx \frac{M_\pi c^2}{\sqrt{E_1 E_2}} \approx 0,05$  рад  $\approx 3^\circ$ .

8.51.  $K_\nu = 29,7$  МэВ;  $K_\mu = 4,25$  МэВ;  $P_\mu = P_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c}{2m_\pi} = 29,7 \frac{\text{МэВ}}{c}$ .

8.52. Реакция идет по схеме



Полное число пионов  $2n = 28$ .

8.53.  $m_Z^0 c^2 \approx 90$  ГэВ;  $\beta = 0,9$ .

8.54.  $m_{D^0} c^2 \approx 1,85$  ГэВ;  $\beta = 0,94$ ;  $\tau_c \approx 4,2 \cdot 10^{-13}$  с.

8.55.  $E_{\pi^0} = \frac{4m_p^2 c^4 - 3m_\pi^2 c^4}{4m_p c^2} \approx 0,99$  ГэВ;  $E_{\pi^\pm} = 0,505$  ГэВ.

8.56.  $E_\mu = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \frac{m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4}{2m_\mu c^2} = 330$  МэВ.

8.57.  $\tau_0 = \frac{\tau_{\text{лаб}}}{\gamma} = \frac{l}{\gamma \beta c} \approx 2,2 \cdot 10^{-16}$  с ( $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1,8$ ;  $\beta = \frac{v}{c} \approx 0,84$ ).

8.58.  $\tau_\pi = 3,7 \cdot 10^{-7}$  с;  $\tau_K = 5,0 \cdot 10^{-8}$  с.

Средние пробеги частиц  $l_\pi = 111$  м;  $l_K = 15$  м. Поскольку интенсивность частиц убывает по закону  $N = N_0 e^{-L/l}$ , то

$$\frac{N_\pi}{N_K} = \frac{N_{0\pi}}{N_{0K}} \exp \left[ L \left( \frac{1}{l_K} - \frac{1}{l_\pi} \right) \right] \approx 1600.$$

8.59.  $E' = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = 2 \frac{E^2}{E_0} - E_0 \approx 2 \frac{E^2}{E_0} \approx 213$  ГэВ,

где  $E_0 = 0,937$  ГэВ — энергия покоя протона,  $\beta'$  — относительная скорость движущейся частицы, которую следует вычислить по теореме о сложении

скоростей

$$\beta' = \beta_{\text{отн}} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}.$$

$$8.60. A = \sqrt{\frac{K}{2E_0}} - 1 = 38 \text{ (на жидководородной мишени); } A \approx \frac{K}{E_0} \approx 3000$$

(на встречных пучках). Здесь  $A$  — максимальное массовое число образовавшегося ядра;  $K$  — кинетическая энергия протона ( $E \approx K$  в ультрарелятивистском случае);  $E_0$  — энергия покоя протона.

## § 9. Плоское движение твердого тела

$$9.1. I_x = \frac{3}{10} MR^2; I_z = \frac{3}{20} MR^2 + \frac{3}{5} ML^2.$$

$$9.2. a_2 = -a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{I}{r^2}} g.$$

$$\text{Натяжение нитей } T_1 = \frac{2m_1m_2g + m_1gl/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2}; T_2 = \frac{2m_1m_2g + m_2gl/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2}.$$

$$\text{Усилие } T_3 = T_1 + T_2 + Mg.$$

$$9.3. \varphi = \frac{gt^2}{2R \left(1 + \frac{Mg}{2P}\right)}.$$

$$9.4. \frac{d\omega}{dt} = \frac{m_2R - m_1r}{m_2R^2 + m_1r^2 + I} g; T_1 = m_1 \left(g + r \frac{d\omega}{dt}\right); T_2 = m_2 \left(g - R \frac{d\omega}{dt}\right).$$

$$9.5. a = \frac{2(M+m)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(M+m)r^2} g.$$

$$9.6. \Delta P = \frac{(b-a)mg}{(b+a) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}.$$

$$9.7^* a \approx 0,049 \text{ м/с}^2; T \approx 8,0 \text{ Н.}$$

Решение. Пока движение совершается без рывка, диск опускается и поднимается с одним и тем же ускорением, направленным вниз:

$$a = \frac{2r^2}{R^2 + 2r^2} g.$$

Натяжение нити при опускании и поднятии диска также одно и то же и равно

$$T_0 = \frac{Mg}{2} \left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4,83 \text{ Н.}$$

Для оценки среднего натяжения нити во время рывка  $T_{\text{рыв}}$  обозначим через  $v$  максимальную скорость диска в нижнем положении. За время поворота диска  $\Delta t = \pi r/v$  импульс диска изменяется на  $2Mv$ . Это изменение равно импульсу силы, действующей на диск, за то же время, т. е.  $(2T_{\text{рыв}} - Mg)\Delta t$ . Вычисления дают

$$T_{\text{рыв}} = \frac{Mg}{2} \left(1 + \frac{4al}{\pi r g}\right).$$

Во время рывка нить испытывает дополнительное натяжение

$$\Delta T \approx \frac{l}{\pi r} \frac{2a}{g} Mg \approx 3,14 \text{ Н.}$$

Полное натяжение нити во время рывка  $T = T_0 + \Delta T \approx 8,0 \text{ Н.}$

$$9.8. T = \frac{Mg}{1 + Mr^2/I} = \frac{Mg}{1 + Mr^2/(4mR^2)} = 0,99T_0;$$

$$T_{\text{рыв}} = Mg + \frac{Mhr}{\pi mR^2} T \approx 1,42T_0, \text{ где } I \text{ — момент инерции системы,}$$

$T_0$  — натяжение нити при неподвижном грузе.

$$9.9. T = \frac{Mg}{2}; a = \frac{Mgr^2}{I}; A = MgL.$$

$$9.10^* a_2 = \frac{2ma}{M + 4m}.$$

**Решение.** Уравнение движения обеих обезьян по вертикали относительно неподвижной системы координат, уравнение вращательного движения блока и уравнение кинематической связи можно записать в виде

$$ma_1 = T_1 - mg, \quad ma_2 = T_2 - mg, \quad \frac{MR^2}{2} \beta = (T_1 - T_2)R, \quad a_1 = a - a_2,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — ускорения первой и второй обезьян,  $\beta$  — угловое ускорение блока, равное  $\beta = a_2/R$ ,  $T_1$  и  $T_2$  — соответствующие натяжения веревки,  $R$  — радиус блока. Отсюда и получаем  $a_2$ .

$$9.11. a = mgR^2/I.$$

$$9.12^* \frac{dv}{dt} = \frac{g}{3} \text{ и } k \geq 2/9.$$

**Решение.** Уравнение моментов вращения цилиндра около оси, лежащей на плоскости качения,

$$mR^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{d\omega}{dt} = FR,$$

где  $R$  — радиус цилиндра. При качении без скольжения центр масс цилиндра получает горизонтальное ускорение  $\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$ , которое сообщает сила трения; следовательно,

$$k \left(g + \frac{F}{m}\right) \geq R \frac{d\omega}{dt} = \frac{F}{m(1+1/2)},$$

где  $k$  — искомый коэффициент трения. По условию задачи  $\frac{F}{m} = \frac{g}{2}$ . Таким образом,  $\frac{dv}{dt} = \frac{g}{3}$  и  $k \geq 2/9$ .

**9.13\* Решение. Качение без скольжения.** Силы, действующие на цилиндр, показаны на рис. 396. Сила натяжения веревки  $F$ , сила трения  $f$ , ускорение груза  $a$ . Уравнения поступательного движения:

$$\text{цилиндра } F + f = ma/2, \quad \text{груза } Mg - F = Ma \text{ и}$$

$$\text{уравнение вращения цилиндра } (F - f)R = \frac{1}{2} \frac{mR^2 a}{2R}.$$

$$\text{Отсюда получаем } f = \frac{ma}{8}, F = \frac{3ma}{8}, a = \frac{g}{1 + 3m/(8M)}.$$

Скольжения не будет, если  $|f| \leq kmg$  или  $k \geq (8 + 3m/M)^{-1}$ , где  $k$  — коэффициент трения.

**Качение со скольжением.** Угловое ускорение цилиндра  $\beta$ , ускорение оси цилиндра  $b$ . В этом случае уравнения движения

$$F + f = mb, \quad (F - f)R = mR^2\beta/2, \quad Mg - F = Ma.$$

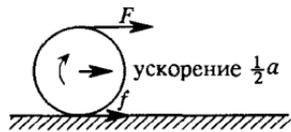


Рис. 396

Ускорения связаны условием  $a = b + \beta R$ , сила трения  $f = kmg$ . Отсюда получаем  $a = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{km}{M}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M}\right)^{-1} g$ , при условии  $k < (8 + 3m/M)^{-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Полезно рассмотреть движение при  $f = 0$  в отсутствие сил трения.

**9.14.** Вертикальное ускорение груза  $a_1 = \frac{13}{16\sqrt{15}} g$ ; горизонтальное —  $a_2 = \frac{3}{16} g$ ; ускорение блока  $a_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} g$ .

**9.15.** а)  $a = \frac{mgr(R-r)}{I + Mr^2 + m(R-r)^2}$ ; б)  $a = \frac{mg}{M + m + MmR^2/I}$ .

**9.16.**  $v \approx 4 \cdot 10^{12}$  см/с  $\gg c$ , где  $c$  — скорость света.

**9.17.**  $\omega(t) = \frac{M}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{I}\right)\right]$ ;  $\omega_{уст} = \frac{M}{k}$ .

**9.18.**  $L = \frac{2}{5} mR^2\omega \approx 5,2 \cdot 10^{41}$  г·см<sup>2</sup>/с.

**9.19.**  $M = 1,67 \cdot 10^{15}$  Н·км.

**9.20.**  $a_{отн} = \frac{2}{3} (g + a)$ ;  $T = \frac{1}{3} m(g + a)$ .

**9.21.**  $N = \frac{I_M^2 \omega^2}{4\pi M_0 l}$ ;  $t = \frac{I_M}{M_0} \omega$ , где  $I_M = \frac{mr^2}{2}$ ,  $I = I_0 + m\left(d^2 + \frac{r^2}{2}\right)$ .

**9.22.** Кинетическая энергия вращения уменьшится на величину  $\Delta K = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} (\omega_1 - \omega_2)^2$ .

**9.23.**  $N = \frac{3\pi r n^2}{4kg}$ .

**9.24.**  $v = \sqrt{\frac{56}{33} gH}$ .

**9.25\*.**  $v = \sqrt{\frac{5}{3} gh}$ ;  $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{gh}{3}}$ .

**Р е ш е н и е.** Закон сохранения момента импульса для системы желоб—тело

$$I_0 \omega + m(u \cos \varphi + R\omega)R = 0,$$

где  $u$  — скорость тела относительно желоба,  $\omega$  — угловая скорость вращения желоба,  $I_0$  — момент инерции желоба. Закон сохранения энергии для этой системы дает

$$I\omega^2 + m[(u \cos \varphi + R\omega)^2 + u^2 \sin^2 \varphi] = 2mgh.$$

Отсюда:

$$\omega = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{u}{R}, \quad u^2 = \frac{8}{3} gh,$$

$$v^2 = (u \cos \varphi + R\omega)^2 + u^2 \sin^2 \varphi = 5gh/3 \approx 1,67gh.$$

**9.26.** Змеевик будет вращаться против часовой стрелки  $\omega_3 = \frac{2\pi N\mu}{m_0 + M}$ .

Угол, на который повернется змеевик после закрытия крана

$$\varphi = 2\pi N \left(1 - \frac{M}{m_0} \ln \frac{m_0 + M}{M}\right).$$

При  $m_0 \ll M$  число оборотов  $n = \frac{m_0}{2M} N$ ; при  $m_0 \gg M$   $n = N$ .

$$9.27. Q = \frac{\pi^3 \rho n^2 (R_1 R_2)^4 d_1 d_2}{R_1^4 d_1 + R_2^4 d_2} = 62,5 \text{ Дж.}$$

$$9.28. \omega_1 = \frac{M_0 \omega_0}{M_0 + \mu t}; \quad \omega_2 = \omega_0 \exp\left(-\frac{2\mu t}{M_0}\right).$$

$$9.29. \omega_{\max} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2g}}{I} \rho l \pi r^2 H^{3/2}.$$

$$9.30. \text{Угловое ускорение цилиндра } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgr \sin \varphi \cos \varphi}{I + mr^2 \sin^2 \varphi}; \text{ ускорение}$$

$$\text{шарика относительно цилиндра } a = \frac{(I + mr^2)g \sin \varphi}{I + mr^2 \sin^2 \varphi}.$$

$$9.31. t = \sqrt{\frac{2L}{g} \left[ 1 + \frac{4\pi^2 I_1 I_2}{mh^2(I_1 + I_2)} \right]}$$

9.32. Скорость вращения возрастает в  $(1 + mR^2/I)$  раз. Кинетическая энергия вращения возрастает во столько же раз. Увеличение энергии происходит за счет работы, произведенной человеком при перемещении его по диску.

$$9.33. \omega = \frac{mrv}{MR^2/2 + mr^2}.$$

$$9.34. \omega_1 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2} \omega_0; \quad \omega_2 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2} \frac{a}{r_2} \omega_0 = \frac{a}{r_2} \omega_1.$$

$$\text{Потеря энергии } \Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)} \omega_0^2.$$

$$9.35. r = 2r_0.$$

9.36. Цилиндр опрокинется и свалится с диска при угловой скорости вращения диска  $\omega = \sqrt{Dg/(Rh)}$ .

9.37.  $a = \frac{F(R \cos \alpha - r)R}{I + mR^2}$ , где  $I$  и  $m$  — момент инерции и масса катушки соответственно;  $a > 0$ , если  $\cos \alpha > r/R$ ; сила трения  $f = F \cos \alpha - ma$ .

$$9.38. a = \frac{r \sin \alpha - k(r+R) \cos \alpha}{I_0 + mr^2} mgr.$$

$$9.39. a = \frac{r \sin \alpha - k(R-r) \cos \alpha}{I_0 + mr^2} mgr.$$

$$9.40. t = \frac{mvR \sin \alpha}{M}.$$

$$9.41. \omega = 0, 1\pi n_0 r^2 \left[ 3r^2 + 2 \frac{M}{m} (l^2 + d^2) + 6 \frac{M}{M+m} l^2 \right]^{-1}.$$

9.42\*. Движение после перехода границы будет сначала равнозамедленное, а затем с постоянной скоростью;  $1/3$  энергии превратится в тепло,  $2/9$  — во вращательную энергию и  $4/9$  останется в виде энергии поступательного движения.

Решение. Пусть масса цилиндра  $m$ , момент инерции  $I$ , сила трения  $f$  и начальная скорость  $v_0$ . Тогда

$$m \frac{dv}{dt} = -f, \quad I \frac{d\omega}{dt} = fr,$$

откуда

$$v = v_0 - \frac{f}{m} t, \quad \omega = \frac{f r t}{I}.$$

После перехода границы шероховатости скорость скольжения будет  $v_{\text{ск}} = v - \omega r = v_0 - \alpha ft$ , где  $\alpha = \frac{1}{m} + \frac{r^2}{I} = \frac{3}{m}$  (так как  $I = mr^2/2$ ). Через время  $T = v_0/\alpha f$  скорость скольжения обратится в нуль, и дальше начнется чистое качение без скольжения. Скорость поступательного движения при чистом качении будет

$$v_{\text{к}} = v_0 - \frac{fv_0}{m\alpha f} = v_0 \left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right) = \frac{2v_0}{3}.$$

Угловая скорость качения

$$\omega_{\text{к}} = \frac{frv_0}{I\alpha f} = v_0 \frac{r}{I\alpha}.$$

Следовательно,

$$Q_{\text{пост}} = \frac{mv_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right)^2, \quad Q_{\text{вращ}} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{r^2}{m\alpha^2 I},$$

в тепло превращается энергия

$$Q_{\text{тепл}} = \frac{mv_0^2}{2} - Q_{\text{пост}} - Q_{\text{вращ}} = \frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{m\alpha}.$$

Можно также независимо подсчитать работу сил трения и показать, что она равна  $\frac{mv_0^2}{2} \frac{1}{m\alpha}$ .

$$9.43. \text{ а) } \omega = \frac{mr}{I + mr^2} v_0 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r}; \quad v = \omega r; \quad \Delta K = \frac{1}{2} \frac{I}{I + mr^2} mv_0^2 = \frac{1}{7} mv_0^2.$$

$$\text{ б) } v = \frac{Ir}{I + mr^2} \omega_0 = \frac{2}{7} r\omega_0; \quad \omega = \frac{v}{r}; \quad \Delta K = \frac{1}{2} \frac{mr^2}{I + mr^2} I\omega_0^2 = \frac{1}{7} mr^2\omega_0^2.$$

$$9.44. |v_A| = |v_B| = \sqrt{2gkr_0}; \quad |a_A| = |a_B| = gk.$$

9.45.  $\omega = \omega_0 - 0,2 \frac{g}{R} t$ ;  $v = 0,1gt$ , где  $\omega = 2\pi n$ . Из условия  $v = \omega R$  получается  $T \approx 2,14$  с. При  $t > T$  ускорение равно нулю.

$$9.46. \omega = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} \omega_0.$$

$$9.47. a = F \left( \frac{3}{4} m + M \right)^{-1}.$$

$$9.48. v = 2\sqrt{\frac{Ia_0}{3}}.$$

$$9.49. v_{\text{абс}} = \frac{5}{7} v_0.$$

$$9.50. v_0 = 3kR\sqrt{\frac{2g}{R-r}} \approx 8,6 \text{ км/ч.}$$

$$9.51. \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{16}{21}.$$

$$9.52. v = \frac{Mr^2 v_0}{2I + Mr^2} \approx 56 \text{ м/с.}$$

$$9.53. \omega_{\infty} = \frac{\omega_0}{3}; \quad v_{\infty} = \frac{\omega_0 r}{3}; \quad \frac{\Delta K}{K_0} = \frac{2}{3}.$$

$$9.54. v = \frac{2}{7} \omega_0 r \sin \varphi; \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

9.55. Проскальзывание начнется при  $\varphi = \varphi_{\max} = \frac{4}{3} \frac{kg}{\Omega^2 R}$ .

9.56. Проскальзывание начнется при угле, являющемся корнем уравнения  $\sin \alpha = k(7 \cos \alpha - 4)$ . Если предположить, что угол достаточно мал, то  $\alpha^2 + \frac{2\alpha}{7k} - \frac{6}{7} = 0$ , откуда  $\alpha = 0,2 \text{ рад} \approx 11,5^\circ$ , что оправдывает приближение.

9.57.  $k = \frac{2 \sin \varphi}{17 \cos \varphi - 10} = 0,21$ .

9.58.  $\cos \alpha \geq \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \frac{v_0^2}{gr}$ .

9.59.  $f = \frac{1}{3} mg \sin \alpha = 0,5 \text{ Н}$ .

9.60. а)  $a = \frac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin \alpha$ , где  $\rho$  — радиус инерции шарика,  $2h$  — ширина желоба;

б)  $a = \frac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin \alpha$ .

9.61.  $H = \frac{5r^2 + \rho^2}{2r^2} R$ . Для сплошного шара  $H = \frac{27}{10} R$ , для полого  $H = \frac{17}{6} R$ .

9.62.  $\text{tg } \alpha > \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$ , где  $\rho$  — радиус инерции катящегося тела. Для сплошного шара  $\text{tg } \alpha > \frac{7}{2} k$ , для полого  $\text{tg } \alpha > \frac{5}{2} k$ . Для сплошного цилиндра  $\text{tg } \alpha > 3k$ , для полого  $\text{tg } \alpha > 2k$ .

9.63\*  $t = \frac{r\omega_0}{2g \sin \alpha}$ .

**Решение.** Пусть  $F$  — сила трения, действующая на цилиндр, в месте соприкосновения его с наклонной плоскостью (рис. 397). Она заставляет цилиндр подниматься по наклонной плоскости. Сначала, пока не установилось чистое качение,  $F$  является силой трения скольжения. После перехода движения в чистое качение  $F$  становится силой трения покоя (сцепления). Однако, независимо от характера движения, оно всегда подчиняется уравнению движения центра масс  $m \frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha$  и уравнению моментов (относительно геометрической оси цилиндра)  $I \frac{d\omega}{dt} = -Fr$ . Исключая  $F$ , получим

$$mr \frac{dv}{dt} = -I \frac{d\omega}{dt} - mgr \sin \alpha.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия ( $\omega = \omega_0$  при  $t = 0$ ) дает

$$mrv = I(\omega_0 - \omega) mgt \sin \alpha.$$

Это соотношение справедливо в течение всего времени движения, независимо от того, происходит ли оно со скольжением или является чистым качением. В наивысшей точке должно быть  $v = 0$ . Отсюда следует, что в той же точке  $\omega = 0$ . В противном случае цилиндр продолжал бы вкатываться, и рассматриваемая точка не была бы наивысшей.

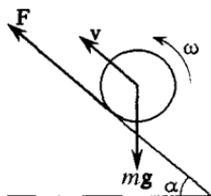


Рис. 397

Поэтому время подъема  $t$  найдется, если в предыдущем уравнении положить  $v = \omega = 0$ . Это дает

$$t = \frac{I \omega_0}{m g r \sin \alpha} = \frac{r \omega_0}{2 g \sin \alpha}.$$

Любопытно, что время поднятия  $t$  не зависит от коэффициента трения между цилиндром и наклонной плоскостью. Результат не изменился бы даже тогда, когда коэффициент трения стал переменным. Решение предполагает, однако, что трение достаточно велико, чтобы цилиндр мог вкатываться на наклонную плоскость. При недостаточном трении будет происходить лишь замедление скорости вращения цилиндра. Нетрудно подсчитать, что время замедления определяется прежней формулой.

Напротив, время обратного скатывания цилиндра вниз, а также наибольшая высота поднятия его зависят от коэффициента трения. Такое различие объясняется тем, что скатывание цилиндра все время является чистым качением. Поднятие же его вверх сначала происходит со скольжением, а затем переходит в чистое качение.

**9.64.** 1)  $a_1 = g(k \cos \alpha - \sin \alpha)$ , направлено вверх;

$$2) t_1 = \frac{I \omega_0 r}{(I + m r^2) a_1 + m r^2 g \sin \alpha} = \frac{\omega_0 r}{(3k \cos \alpha - \sin \alpha) g};$$

$$3) H_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \sin \alpha,$$

$$4) a_2 = \frac{m r^2}{I + m r^2} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha;$$

$$5) H_2 = \frac{a_1}{a_2} H_1;$$

$$6) H = H_1 + H_2 = \frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{4g(3k \cos \alpha - \sin \alpha)} \omega_0^2 r^2;$$

$$7) \bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2 \sin \alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g \sin \alpha} \sqrt{\frac{3(k \cos \alpha - \sin \alpha)}{3k \cos \alpha - \sin \alpha}}.$$

**9.65.**  $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$ . Сила трения равна  $\frac{2}{7} m g \sin \alpha$ , где  $m$  — масса шара.

$$9.66. \omega = -\frac{\omega_0}{3}; \frac{\Delta K}{K} = \frac{2}{3}.$$

$$9.67. v = \frac{2}{3} v_0; \frac{\Delta K}{K} = \frac{1}{3}.$$

$$9.68. F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} m(g - a) \sin \alpha; a_{\text{отн}} = \frac{2g - 5a}{3} \sin \alpha.$$

$$9.69. l = \frac{3M + m + 2m \sin^2 \varphi}{4g(M + m) \sin \varphi} v^2.$$

$$9.70. t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ с}; \omega = 40 \text{ с}^{-1}.$$

$$9.71. \text{Впереди должен быть полый цилиндр}; a = \frac{4g \sin \alpha}{k + 7}; N = \frac{mg \sin \alpha}{k + 7}.$$

$$9.72. a = 2g \frac{(M + m) \sin \alpha}{4M + 3m}.$$

**9.73.** Положение точки  $B$ , в которой шарик отрывается от сферы и начинает свободно двигаться под действием силы тяжести, определяется углом  $\alpha$ , косинус которого равен

$$\cos \alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

где  $\rho$  — радиус инерции шарика. Результат не зависит от радиуса сферы. Для сплошного шарика  $\cos \alpha = 10/17$ , для полого  $\cos \alpha = 6/11$ .

**9.74.**  $h \approx 1,59R$ ;  $H \approx 1,78R$ .

**9.75.**  $\omega_{\min} = \frac{v_0}{R}$ ;  $v = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}$ .

**9.76.** 1)  $a = \frac{mg \sin \alpha}{2M + m(1 + \cos \alpha)}$ ;

2)  $F_{\text{тр}} = (M + m)a$ ;

3)  $t = \frac{N_{\max}}{2M + m} \frac{1}{a^2}$ ,  $v_{\max} = \frac{N_{\max}}{(2M + m)a}$ .

**9.77\***  $a = \frac{m + m_1}{2m + m_1(1 + \cos \alpha)} g \sin \alpha$ .

**Решение.** Будем рассматривать все движения в системе отсчета, в которой наклонная плоскость неподвижна. Так как центр масс системы и мгновенная ось вращения  $A$  (рис. 177) движутся параллельно, то уравнение моментов относительно этой движущейся оси имеет вид  $J \frac{d\omega}{dt} = M$ . Момент импульса системы  $L$  складывается из момента импульса цилиндра  $J\omega$  и момента импульса собаки  $m_1 v h$ , где  $h = r(1 + \cos \alpha)$  — длина перпендикуляра, опущенного на наклонную плоскость из точки  $S$ . Итак,

$$L = J\omega + m_1 r v (1 + \cos \alpha),$$

причем под  $J$  следует понимать момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси, т. е. величину  $2mr^2$ . Из-за отсутствия скольжения  $v = \omega r$ , а поэтому

$$L = [2m + m_1(1 + \cos \alpha)] r v.$$

Так как центр масс системы и мгновенная ось  $A$  движутся параллельно, то производная  $L$  по времени должна равняться моменту внешних сил относительно мгновенной оси  $A$ , т. е.  $(m + m_1)gr \sin \alpha$ . Приравнявая оба выражения, получим ответ.

**9.78.**  $x = \frac{7}{3}$ ;  $\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{4}{7}$ .

**9.79.** Скорость первого шара  $v_1 = 2v/7$ , второго  $v_2 = 5v/7$ . Потеря кинетической энергии на трение составляет  $20/49$  начального значения кинетической энергии.

**9.80.** Шар будет двигаться равномерно, если точка удара лежит выше его центра на расстоянии  $2/5$  радиуса. Такие удары называются нормальными. Если она лежит еще выше, то движение шара будет ускоренным. Если же точка удара лежит ниже, то шар будет двигаться замедленно. Соответствующие удары называются высокими и низкими. Решение получено в предположении, что сила трения шара о плоскость стола пренебрежимо мала по сравнению с силой, с которой на шар действует кий во время удара.

9.81. Случай 1) реализуется при высоких ударах, случай 2) — при нормальных, случай 3) — при низких.

$$9.82. K_{\text{пост}} = \frac{p^2}{2m}; K_{\text{вр}} = \frac{5p^2k^2}{4m}; \text{ при } k = \frac{2}{5}.$$

$$9.83. x = \frac{v^2}{4kg}.$$

$$9.84. x = \frac{v^2}{kg}.$$

$$9.85. v_0 = \left(1 + \frac{7M}{5m}\right) V.$$

$$9.86. v = \frac{5}{7} \frac{m}{M} V.$$

$$9.87. v = \frac{5}{7} \frac{m}{M} \left(1 - \frac{h}{R}\right) v_0.$$

$$9.88. \omega_0 > \frac{5v_0h}{2R^2}.$$

$$9.89. v = \sqrt{3}v_0 - \frac{14}{5\sqrt{3}} \frac{M}{m} v_1.$$

$$9.90. \Delta E = \frac{1}{2} \left( \frac{mMv_0^2}{M+m} + \frac{Imr^2\omega_0^2}{I+mr^2} \right), \text{ где } I = \frac{2}{5} MR^2.$$

$$9.91. v = \frac{3}{7} v_0.$$

$$9.92. \Delta K = \frac{67}{216} \frac{Mv_0^2}{2}.$$

$$9.93. V = V_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} v = 80 \text{ м/с}.$$

$$9.94. d = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$9.95. \omega = \frac{mM}{m+M} \frac{av}{I}.$$

$$9.96. \operatorname{tg} \varphi = \frac{2VL}{\omega r^2}; \cos \psi = 1 - \frac{3m^2(4V^2L^2 + \omega^2r^2)}{4gL^3(2m+M)(3m+M)}.$$

$$9.97. \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\omega r^2}{2VL \left(1 + \frac{M}{M+m} \frac{R^2}{2L^2}\right)}, \text{ где } v_{\parallel} \text{ — составляющая скорости}$$

маятника вдоль по оси цилиндра,  $v_{\perp}$  — в перпендикулярном направлении.

$$9.98. \omega = \sqrt{3g/l}.$$

$$\text{У к а з а н и е. По закону сохранения энергии } \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} l m\omega^2 = \frac{mgl}{2}.$$

$$9.99. l = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

$$9.100^* h = \frac{6m^2}{(M+2m)(M+3m)} H.$$

Р е ш е н и е. Скорость шарика в нижнем положении до удара  $v_0 = \sqrt{2gH}$ . Так как удар неупругий, то непосредственно после удара шарик и нижний конец стержня в нижнем положении будут иметь одну и ту же скорость  $v$ . Она найдется из закона сохранения момента импульса относительно оси  $A$

$$m v_0 = m v + I \omega,$$

где  $I = Ml^2/3$  — момент инерции стержня относительно той же оси. Так как  $v = l\omega$ , то написанное уравнение дает

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2} v_0 = \frac{3m}{M + 3m} v_0.$$

Теперь надо решить, будут ли шарик и стержень после столкновения двигаться вместе или при дальнейшем движении они разойдутся. С этой целью вычислим скорость шарика  $v_1$  и нижнего конца стержня  $v_2$  при поднятии на одну и ту же высоту  $h_1$ , если бы при этом они двигались независимо друг от друга. Эти скорости найдутся из уравнений сохранения энергии

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2} \frac{I}{l^2} (v^2 - v_2^2) = Mg \frac{h_1}{2}.$$

Преобразовав второе уравнение к виду

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

видим, что  $v_1 > v_2$ . Поэтому в любом положении шарик будет стремиться обогнать стержень. А так как шарик движется позади стержня, то он все время будет прижиматься к стержню. Отсюда следует, что после удара шарик и стержень будут подниматься как единое тело. Высоту поднятия  $h$  легко определить из закона сохранения энергии. Она равна

$$h = \frac{I + ml^2}{(M + 2m)gl^2} v^2 = \frac{6m^2}{(M + 2m)(M + 3m)} H.$$

**9.101.**  $ML^2 = ml^2$ . Так как  $L \geq l$ , то для возможности процесса необходимо  $M \leq m$ . При  $M > m$  процесс невозможен.

**9.102.**  $\cos \varphi = -0,154$ , т. е.  $\varphi \approx 99^\circ$ .

**9.103\*.**  $v = \frac{2M\sqrt{3gl}}{M + 3m}$ .

**Решение.** Применяя закон сохранения энергии к стержню до удара и законы сохранения момента импульса и энергии к системе стержень—тело во время удара, получим

$$\frac{Mgl}{2} = \frac{Ml^2\omega^2}{6}, \quad \frac{Ml^2\omega}{3} = \frac{Ml^2\omega'}{3} + mvl, \quad \frac{Ml^2\omega^2}{6} = \frac{Ml^2\omega'^2}{6} + \frac{mv^2}{2},$$

где  $\omega$  и  $\omega'$  — угловые скорости вращения стержня при его вертикальном положении до и после удара соответственно,  $v$  — скорость тела после удара. Из решения этой системы уравнений получаем значение  $v$ .

**9.104\*.**  $S = \frac{1}{6} \frac{M^2 l}{m^2 k}$ .

**Решение.** Применяя закон сохранения энергии к стержню до удара и закон сохранения момента импульса к системе стержень—тело во время удара, получим

$$Mg \frac{l}{2} = \frac{1}{3} \frac{ml^2\omega^2}{2}, \quad \frac{1}{3} Ml^2\omega = mvl,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения стержня в момент удара,  $v$  — скорость тела  $m$  сразу после удара. Перемещение  $S$  тела можно найти из условия  $mv^2/2 = kmgS$ . Из написанных уравнений следует ответ.

$$9.105. \cos \varphi = 1 - \frac{3(mv \sin \alpha)^2}{gl(M+3m)(M+2m)}.$$

$$9.106. \cos \varphi_d = 1 - (1 - \cos \varphi) \left( \frac{M-3m}{M+3m} \right)^2; \cos \varphi_H = 1 - \frac{6M^2(1 - \cos \varphi)}{(M+3m)^2}.$$

$$9.107. m_1 = 3m \left( \frac{l}{l_1} \right)^2 = \frac{4}{3} m; T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$9.108. \beta = \alpha \sqrt{\frac{2a}{l}} \approx 0,11; \frac{t_c}{t_{\text{из}}} = \sqrt{\frac{2l}{3a}} \approx 1,07.$$

$$9.109. v_{0 \text{ min}} = \sqrt{6\sqrt{2}gl}.$$

$$9.110. v = v_0 - \frac{M}{m} \sqrt{\frac{2}{3}} gL \sin \frac{\alpha}{2} = 440 \text{ м/с}.$$

$$9.111. F = \left( 1 + \frac{4a^2 m}{I} \right) mg, \text{ где } m - \text{масса, } I - \text{момент инерции человека}.$$

$$9.112. v = \frac{M}{m} \sqrt{\frac{2gl}{3}}.$$

9.113\* Лозу следует рубить участком сабли, отстоящим на  $2/3$  длины от ручки сабли.

Решение. Пусть удар с силой  $F$  пришелся на расстоянии  $r$  от середины сабли, которую будем считать однородной пластинкой (рис. 398). Под действием этой силы пластинка начнет двигаться поступательно и вращаться; если при этом точка  $O$  останется в покое, то рука не будет чувствовать удара. Напишем уравнение движения центра тяжести  $C$  пластинки:

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

где  $\frac{dv}{dt}$  — ускорение центра тяжести. Для вращения пластинки относительно оси, проходящей через центр тяжести  $C$ ,

$$\frac{ml^2}{12} \frac{d\omega}{dt} = Fr,$$

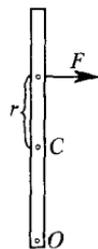


Рис. 398 где  $\frac{d\omega}{dt}$  — угловое ускорение пластинки,  $m$  — масса пластинки,  $\frac{ml^2}{12}$  — момент инерции пластинки относительно центра тяжести  $C$ .

Точка  $O$  будет в покое, если скорость поступательного движения  $v$  и линейная скорость точки  $O$ , обусловленная вращением пластинки вокруг точки  $C$  с угловой скоростью  $\omega$ , будут равны по величине и противоположны по направлению, или если  $\frac{dv}{dt} = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt}$ . Подставляя это условие в уравнение движения, получаем  $r = l/6$ , откуда уже легко найти ответ.

Искомая точка на пластинке (сабле) есть так называемый центр удара, совпадающий с центром качаний физического маятника той же пластинки, подвешенной в точке  $O$ . Разгрузка оси вращения от действия удара особенно необходима в случае баллистического маятника.

$$9.114. x = \frac{l}{6} \frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}. \text{ Результат не зависит от характера удара}.$$

$$9.115. x = \frac{l}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{m}} - 1. \text{ Для возможности описанного процесса необходи-}$$

мо  $M \geq m$ . Условие  $x \leq l/2$  дает еще  $M \leq 4m$ .

$$9.116. K = 16 \frac{m}{M} \frac{mv_0^2}{2}.$$

$$9.117. K = \frac{4M - 7m}{4M} \frac{mv_0^2}{2}.$$

9.118.  $U = \frac{M}{M + 4m} \frac{mv^2}{2}$ . В предельных случаях  $M = 0$  и  $M = \infty$  получаем  $U = 0$  и  $U = mv^2/2$ , соответственно.

$$9.119^*. \omega = \frac{12mv_0}{(4m + M)l}.$$

Решение. Если  $F$  — сила, действующая на шарик во время удара, то уравнение движения шарика

$$m \frac{dv}{dt} = -F.$$

Уравнение движения центра масс стержня

$$M \frac{dV}{dt} = F.$$

Уравнение моментов для стержня относительно центра масс

$$I \frac{d\omega}{dt} = \frac{Fl}{2}.$$

Почленным делением исключаем  $F$  и получаем

$$\frac{m}{I} \frac{dv}{d\omega} = -\frac{2}{l}, \quad \frac{M}{I} \frac{dV}{d\omega} = \frac{2}{l}.$$

Интегрируя в пределах от начального значения угловой скорости  $\omega = 0$  до конечного, найдем

$$v - v_0 = -\frac{2}{l} \frac{I}{m} \omega, \quad V = \frac{2}{l} \frac{I}{M} \omega,$$

причем в этих уравнениях  $v$ ,  $V$  и  $\omega$  означают величины соответствующих скоростей после удара. Угловая скорость  $\omega$  найдется из уравнения сохранения энергии. Если в него подставить значения  $v$  и  $V$ , то для  $\omega$  получится квадратное уравнение

$$\left[ 1 + \frac{4I}{l^2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \right] \omega^2 - 4 \frac{v_0}{l} \omega = 0.$$

Один из корней этого уравнения ( $\omega = 0$ ) дает угловую скорость стержня до удара, второй — после удара. По условию задачи надо взять второй корень.

С учетом соотношения  $I = \frac{1}{12} Ml^2$  для него получаем  $\omega = \frac{12mv_0}{(4m + M)l}$ .

$$9.120. v_0 = \frac{M + 2m}{2m} V_0; \quad \omega = \frac{Ml}{2I} V_0.$$

$$9.121. x = \frac{l^3}{l^2 + r^2/2}.$$

$$9.122. \omega = \frac{6mxv_0}{Ml^2 + 3mx^2}; \quad x = l\sqrt{\frac{M}{3m}}; \quad \omega_{\max} = \frac{v_0}{l} \sqrt{\frac{3m}{M}}.$$

$$9.123. n = \frac{3v^2 \sin^2 \alpha}{28\pi kgl} \approx 1.$$

$$9.124. \varphi = \frac{8\pi}{135}.$$

$$9.125. v = \frac{2Mx\omega_0 l^2}{Ml^2 + 3mx^2}; x = l\sqrt{\frac{M}{3m}}; v_{\max} = l\omega_0\sqrt{\frac{M}{3m}}.$$

$$9.126. n = \frac{3v^2}{32\pi kgl} \approx 1.$$

$$9.127. \omega = \frac{8}{15} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3\pi kg}{2l}}.$$

$$9.128. \omega_{\max} = \frac{u}{l} \ln \left( 1 + \frac{6m_0}{M} \right).$$

$$9.129. a_{\min} = g \frac{b}{h}; N = mg; x = \frac{ah}{2g}.$$

$$9.130. \omega = \sqrt{\frac{12m(2gl \sin \varphi - v_r^2)}{l^2(4M + 3m)}} \approx 0,3 \text{ с}^{-1}.$$

$$9.131. \text{Время падения } t = 1,3 \text{ с. Число оборотов } n \approx \frac{\omega t + \arccos 0,6}{2\pi} \approx 0,65.$$

При вычислениях был принят рост человека 2 м.

9.132. В руке у жонглера окажется другой конец палочки, т. к. палочка сделает  $n = \frac{3gt^2}{\pi l} \approx 15$  оборотов (нечетное целое число).

9.133.  $v = \sqrt{3gl}$ . Искомая точка находится на расстоянии  $x = 2l/3$  от основания столба.

$$9.134^*. F_{\text{гор}} = \frac{3}{2} mg; F_{\text{верт}} = \frac{1}{4} mg.$$

Решение. Кинетическая энергия стержня в горизонтальном положении  $I\omega^2/2 = mgl/2$ . Центробежное ускорение центра масс стержня в том же положении  $\omega^2 l/2$ . Отсюда по теореме о движении центра масс

$$F_{\text{гор}} = m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2I} mg = \frac{3}{2} mg.$$

Применив к вращению стержня в положении 2 уравнение  $I \frac{d\omega}{dt} = M$ , получим  $I \frac{d\omega}{dt} = mg \frac{l}{2}$ . Отсюда находим вертикальную составляющую ускорения центра масс в том же положении:

$$a = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4} g.$$

Далее,  $ma = mg - F_{\text{верт}}$ . В результате получится

$$F_{\text{верт}} = m(g - a) = \frac{1}{4} mg.$$

$$9.135. v = (L - h) \sqrt{\frac{6g(L + h)}{4L^2 - 3h^2}}.$$

$$9.136. v = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gR\sqrt{3}}{5}}.$$

$$9.137. v = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

$$9.138. \Delta K = \frac{mv^2}{8}; \Delta p = \frac{mv}{4}.$$

$$9.139. h = \frac{\varphi l}{24 \cos \varphi} \frac{(1 + 3 \cos^2 \varphi)^2}{(1 - 3 \cos^2 \varphi)}; 3 \cos^2 \varphi < 1.$$

$$9.140. T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (l^2 - x^2); T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2; K_{\max} = \frac{1}{3} v T_{\max} = 10^7 \text{ Дж.}$$

$$9.141. \omega_{\text{ст}} = \frac{M - 3m}{M + 3m} \sqrt{\frac{3g}{L} (1 - \cos \varphi)}; v_{\text{ш}} = \frac{2M}{M + 3m} \sqrt{3gL(1 - \cos \varphi)};$$

$$t = \frac{4}{7} \sqrt{\frac{6L}{g}} \frac{M}{k(M + 3m)} \sin \frac{\varphi}{2}; v_{\text{кач}} = \frac{10M\sqrt{6gL}}{7(M + 3m)} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

9.142. Шар будет двигаться вправо со скоростью  $\frac{7}{13} v_0$  и вращаться с угловой скоростью  $\frac{v_0}{R}$ . Угловая скорость стержня равна  $\frac{6v_0}{13L}$ ;  $t = \frac{40}{91} \frac{v_0}{kg}$ .

$$9.143. x_{\max} = \sqrt{\frac{2mgH}{k[1 + M/(3m)]}}.$$

9.144. В горизонтальной плоскости центр масс стержня движется со скоростью  $\sqrt{\frac{3}{2}} gh$ ; стержень вращается вокруг центра масс с угловой скоростью  $\frac{\sqrt{6gh}}{L}$ .

$$9.145. U = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{I + ml^2} Mgl = \frac{3}{2} \frac{Mm}{M + 3m} gl, \text{ где } I \text{ — момент инерции стержня.}$$

$$9.146. \omega = \frac{12m\omega_0}{4M + 3m} \approx 1 \text{ с}^{-1}.$$

9.147.  $x = \frac{3}{16} \frac{(2-k)^2}{k} a$ , где  $a$  — высота, на которую был поднят центр масс,  $k$  — коэффициент трения между табуреткой и полом.

$$9.148. \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

9.149.  $H = 2l = \frac{I_1^2 \omega^2}{2Mg(I_2 + Ml^2)}$ , т. е. при  $\omega^2 \geq \frac{4Mgl(I_2 + Ml^2)}{I_1^2}$  мотор может совершить полный оборот вокруг точки  $A$ .

9.150. Импульс силы реакции  $\int_0^{\tau} N dt = \frac{p}{2}$  направлен в ту же сторону, что и сила удара.

9.151. Импульс силы реакции опоры за время удара  $\tau$  равен

$$\int_0^{\tau} N dt = \frac{1}{10} Mv.$$

$$9.152. \frac{\omega_1}{\omega_2} = -5.$$

$$9.153. \frac{\omega_1}{\omega_2} = -3; \frac{v_1}{v_2} = -5.$$

$$9.154. F = \frac{P}{1 + 3(l/L)^2}; \text{ при } l = L \quad F = \frac{P}{4}.$$

$$9.155. \frac{N}{N_0} = \frac{8}{13}; v = \sqrt{\frac{3}{4}} gl.$$

$$9.156. v_C = \sqrt{\frac{9}{13}} gl; N = \frac{28}{169} mg.$$

$$9.157. N = \frac{1 + 4(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + 4 \sin^2 \alpha)^2} mg \approx \frac{1}{4} mg.$$

$$9.158. N = Mg \frac{1 + \frac{Mr^2}{I_0} (1 - \cos \alpha)^2}{\left(1 + \frac{Mr^2}{I_0} \sin^2 \alpha\right)^2} \approx 0,32Mg, \text{ где } I_0 = \frac{Mr^2}{2}.$$

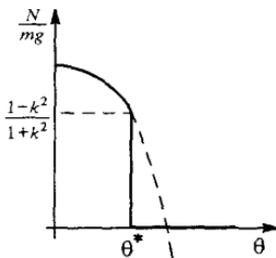


Рис. 399

$$9.159. k_{\min} = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{m(M+m)}{2M^2 + 4Mm + m^2} = \frac{4}{31}.$$

$$9.160. v_0 > \sqrt{(M/m + 4m/M + 3)gR} = 8,1 \text{ м/с}.$$

9.161.  $N = mg \cos \theta$ . После поворота на угол  $\theta^*$  (график на рис. 399) точка  $m$  будет двигаться по параболе.

$$9.162. \omega_0 = \frac{4v_0 \sin \alpha}{R} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

$$9.163. \omega_0 = \frac{3}{2} \frac{v_0 \sin \alpha}{R} = 3,95 \text{ с}^{-1}.$$

9.164. Пусть  $T$  — продолжительность удара, а  $\tau$  — время проскальзывания вплоть до момента начала чистого качения. Различаются два случая:

$$1) \tau \geq T: \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2k}; \quad \omega_2 = \omega_1 - \frac{5kv_0}{R} \quad (\text{это условие реализуется при } k \leq \frac{\omega_1 R_0}{7v_0});$$

$$2) \tau < T: \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2} \frac{v_0}{\omega_1 R}; \quad \omega_2 = \frac{2}{7} \omega_1 \quad (\text{этот случай реализуется при } k > \frac{\omega_1 R_0}{7v_0}).$$

9.165. При  $k < \frac{1}{7}$  шар отразится от борта под углом  $\operatorname{tg} \alpha = 2k$ ;

$$\text{при } k > \frac{1}{7} \text{ — под углом } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{7}.$$

9.166. Пусть  $T$  — продолжительность удара,  $\tau$  — время проскальзывания вплоть до момента начала чистого качения. Различаются два случая:

$$1) \tau \leq T: \text{случай реализуется при } k \geq \frac{1}{4} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{4\sqrt{3}}; \quad \text{тогда}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0 R}{v_0 \cos \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{3}}; \quad \omega_0 = \frac{v_0 \sin \varphi}{2R} = \frac{v_0}{4R};$$

$$2) \tau > T: \text{случай реализуется при } k < \frac{1}{4\sqrt{3}}, \text{ точнее когда}$$

$$k = \frac{\omega_0 R}{2v_0 \cos \varphi} = \frac{\omega_0 R}{v_0 \sqrt{3}}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2\omega_0 R}{v_0 \sqrt{3}}.$$

9.167.  $\omega_\tau = \frac{5}{2} \frac{v_0}{r} k \sin \alpha$ ;  $v_\tau = v_0 (\cos \alpha - k \sin \alpha)$ ;  $v = \frac{5}{7} v_0 \cos \alpha$ . Чистое качение начинается сразу после окончания удара, если  $k > \frac{2}{7} \operatorname{ctg} \alpha$ .

$$9.168. \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$9.169. \omega_{\max} = \frac{v_0}{R} \frac{k \sin \alpha}{k^2 + 2k + \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{7} \frac{v_0}{R};$$

$$\frac{Q}{m+m_0} = \frac{v_0^2 k}{2(k+1)} - \frac{\omega_{\max}^2 R^2 k(2+k)}{2(1+k)^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{(1+k)^2} + \frac{v_0^2}{14^2} \right) = \frac{3}{28} v_0^2.$$

**9.170\*** Главная полуось эллипсоида инерции направлена по диагонали, соединяющей противоположные вершины куба, и равна  $a = 1/\sqrt{I_0}$ ; две другие полуоси равны между собой:  $b = c = a/\sqrt{5,5}$ , где  $I_0 = ml^2/6$  — момент инерции для любой оси, проходящей через центр масс куба.

**Решение.** Эллипсоид инерции для центра куба — шар радиуса  $a = 1/\sqrt{I_0}$ . Для точки  $A$  ось, совпадающая с диагональю куба, остается главной с моментом инерции  $I_0$ . Для любой оси, перпендикулярной к диагонали в точке  $A$ , момент инерции определяется по теореме Штейнера

$$I_A = I_0 + m \left( \frac{d}{2} \right)^2,$$

где  $d = l\sqrt{3}$  — диагональ куба. Отсюда следует приведенный выше ответ.

$$\mathbf{9.171*} \quad I = \frac{M}{6} \frac{l^2 m^2 + l^2 n^2 + m^2 n^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

**Решение.** Главные моменты инерции для центра масс:

$$I_1 = \frac{M}{12} (m^2 + n^2), \quad I_2 = \frac{M}{12} (l^2 + n^2), \quad I_3 = \frac{M}{12} (l^2 + m^2);$$

направляющие косинусы для оси вращения относительно системы координат, связанной с главными направлениями и с началом в центре масс, равны

$$\cos \alpha = l/d, \quad \cos \beta = m/d, \quad \cos \gamma = n/d,$$

где  $d^2 = l^2 + m^2 + n^2$  — квадрат диагонали параллелепипеда. Момент инерции для оси любого направления представляется через главные моменты инерции следующей формулой:

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma.$$

Подстановка в эту формулу значений направляющих косинусов дает ответ.

## § 10. Колебания твердого тела. Волны

$$\mathbf{10.1.} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\mathbf{10.2.} \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{6g}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = 2.$$

$$\mathbf{10.3.} \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{29}{18} \frac{a}{g}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{29}{18}} \approx 1,27.$$

$$\mathbf{10.4.} \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{11}{4\sqrt{6}}} \approx 1,06.$$

$$\mathbf{10.5.} \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2k - mgl}{2k + mgl}}.$$

$$\mathbf{10.6.} \quad l = 15 \text{ см.}$$

$$\mathbf{10.7.} \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}; \quad T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R\sqrt{2}}{g}}.$$

$$\mathbf{10.8.} \quad S_{\max} = \sqrt{\frac{I_0}{m}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}; \quad \omega_{\max}^2 = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{m}{I_0}} = \frac{g}{l} \sqrt{3}, \quad \text{где } S \text{ — расстояние до}$$

точки подвеса от середины стержня.

$$10.9. x = 2(a + b) = 34,8 \text{ см}; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1,42 \text{ с};$$

$$l = a + \frac{(a+b)^2 + \frac{2}{5}r^2}{a} = 49,6 \text{ см}; a = \sqrt{\frac{1}{2} \left( b^2 + \frac{2}{5}r^2 \right)} = 7,42 \text{ см}.$$

$$10.10. T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k} \left( \frac{l}{r^2} + m \right)}.$$

$$10.11. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{mga + ka^2}}.$$

$$10.12. x_0 = \frac{mga}{kl}; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{kl^2}}.$$

$$10.13. T = \frac{4\pi}{\sqrt{3 \left( \frac{k}{m} + \frac{2g}{l} \right)}}.$$

$$10.14. x_0 = \frac{g(m+2M)}{k}; T = 4\pi\sqrt{\frac{m+3M}{3k}}.$$

$$10.15. T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3(k_1+k_2)}}.$$

$$10.16. T = \pi\sqrt{\frac{(3m+4M)(k_1+k_2)}{3k_1k_2}}.$$

$$10.17. T = \pi\sqrt{\frac{2M+3m}{2k}}.$$

$$10.18. T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k} \left( M + \frac{m_1+m_2}{2} \right)}.$$

$$10.19. T = 2\pi\sqrt{\frac{3M+m}{3(k_1+k_2)}}.$$

$$10.20. \text{ а) } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \text{ б) } \omega = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

$$10.21. T = 2\pi\sqrt{\frac{3M/8+m}{k}}.$$

$$10.22. a = mv\sqrt{\frac{3}{k(M+3m)}}.$$

$$10.23. a = \omega_0 L \sqrt{\frac{M}{3k[1+3m/(4M)]}}.$$

$$10.24. \varphi_0 = \frac{v}{l} \sqrt{\frac{3m}{11k}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{11}{3} \frac{m}{k}}.$$

$$10.25. a = \frac{\Delta l}{\sqrt{1 + \frac{4M}{3m}}}.$$

$$10.26. T = \frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{M[2h^2 + \pi^2(D^2 + d^2)]}{2(k_1+k_2)}}.$$

$$10.27. T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega^2 = \frac{6ka^2}{ml^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{l}. \text{ Колебания возможны при } k > \frac{mg}{4} \frac{l}{a^2}.$$

$$10.28. T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{3k(m_1+m_2)}}.$$

$$10.29. \varphi_0 = \sqrt{\frac{3mv_0^2}{2l(kl+mg)}}.$$

$$10.30. T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$10.31. \varphi_0 = \frac{2\sqrt{6}}{11} \frac{v}{l} \sqrt{\frac{m}{k}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{3k}}.$$

$$10.32. T = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi r^4 l \rho + 8\mu a^3}{9\mu g a r}} = 1,65 \text{ с.}$$

$$10.33. I = \frac{T^2}{4\pi^2} mgr - 3mr^2 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$10.34. T = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{I + mr^2}{2k}}. \text{ Для сплошного цилиндра } T = \pi \sqrt{\frac{3m}{k}}.$$

$$10.35. T = \pi \sqrt{\frac{15 m}{11 k}}; A = \frac{2}{15} l \frac{k}{m\omega^2} = \frac{l}{22}.$$

$$10.36. T = 2\pi \sqrt{\frac{15 m}{32 k}}; A = \frac{4}{45} l \frac{k}{m\omega^2} = \frac{l}{24}.$$

$$10.37. T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

$$10.38. T = 2\pi \sqrt{\frac{7R}{5g}}.$$

$$10.39. T = 2\pi \sqrt[4]{R^2 - l^2} \sqrt{\frac{1}{g} \left( R^2 - \frac{2}{3} l^2 \right)}.$$

$$10.40. T = 2\pi \sqrt{10r/g}.$$

$$10.41^*. T = \pi \sqrt{29R/g}.$$

Решение. Задача сводится к нахождению выражений для потенциальной и кинетической энергий системы. С этой целью мысленно заполним полость тем же веществом, из которого сделан цилиндр. Образовавшийся таким образом сплошной однородный цилиндр назовем цилиндром 1, а цилиндр вдвое меньшего радиуса, заполняющий полость, — цилиндром 2. Массы цилиндров обозначим соответственно  $m_1$  и  $m_2$ . Энергия системы, как потенциальная, так и кинетическая, будет равна разности энергий цилиндров 1 и 2. При повороте системы из положения равновесия на угол  $\varphi$  (рис. 400) центр масс цилиндра 1 остается на прежней высоте, его потенциальная энергия  $U_1$  не изменяется. Потенциальная же энергия цилиндра 2 становится равной  $U_2 = m_2 g h_2$ , где  $h_2 = R + \frac{R}{2} \cos \varphi$  — высота центра масс этого цилиндра над горизонтальной плоскостью, на которой находится система. Полная потенциальная энергия всей системы

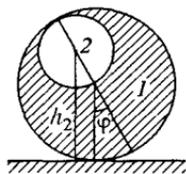


Рис. 400

$$U = U_1 - U_2 = \text{const} - m_2 g R \left( 1 + \frac{\cos \varphi}{2} \right).$$

Единственное переменное слагаемое, которое она содержит, есть  $-(m_2 g R \cos \varphi)/2$ . Поэтому при надлежащем выборе аддитивной постоянной величину  $U$  всегда можно представить в виде

$$U = \text{const} + \frac{m_2 g R (1 - \cos \varphi)}{2} = \text{const} + m_2 g R \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

или для малых углов  $\varphi$   $U \approx \text{const} + m_2 g R \varphi^2 / 4$ . Кинетическая энергия системы  $K = (I_1 - I_2) \dot{\varphi}^2 / 2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — моменты инерции цилиндров относительно мгновенной оси. При изменении угла  $\varphi$  величины  $I_1$  и  $I_2$  изменяются. Но для малых колебаний этими изменениями можно пренебречь и отнести  $I_1$  и  $I_2$  к тому моменту, когда система находится в положении равновесия. В этом положении с помощью теоремы Гюйгенса—Штейнера нетрудно получить  $I_1 = 3m_1 R^2 / 2$ ,  $I_2 = 19m_2 R^2 / 8$ . Приняв еще во внимание, что  $m_1 = 4m_2$ , найдем  $K = 29m_2 R^2 \dot{\varphi}^2 / 16$ . На основании полученных выражений для  $U$  и  $K$  заключаем, что малые колебания системы будут гармоническими с периодом  $T = \pi \sqrt{29R/g}$ .

$$10.42. T = 2\pi \sqrt{\frac{5R}{2g}}.$$

$$10.43. T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g} \frac{3M+m}{2M+m}}.$$

$$10.44. T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{3g}}.$$

$$10.45. T = 2\pi \frac{a}{b} \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

$$10.46. T = 2\pi \sqrt{\frac{r^2 + 6l^2}{4gl \sin \alpha}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{3l}{2g \sin \alpha}}, \text{ где } r \text{ — радиус диска.}$$

$$10.47. T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \frac{9M+2m}{2M+m}}.$$

$$10.48. T = 2\pi \sqrt{\frac{2b}{3g \sin \alpha}}.$$

$$10.49. \frac{\Delta F}{mg} = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{mg} = \frac{8\pi^2 v^2}{g^2 T^2} \approx 0,86.$$

$$10.50. T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

$$10.51. T = 2\pi \sqrt{\frac{r \cos \alpha}{g \sin^2 \alpha} \left( 2 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \right)}.$$

$$10.52. T_1/T_2 = 1.$$

$$10.53. T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}.$$

10.54.  $T = 2\pi \sqrt{l/(3g)}$ . В более общем случае, когда плита не однородна, но центр масс ее совпадает с геометрическим центром плиты,  $T = 2\pi \sqrt{2Il/(Mga^2)}$ , где  $I$  — момент инерции плиты относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр,  $a$  — длина одной из сторон плиты.

10.55.  $\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{1+II/I_0}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{I}{I_0}$ , где  $T$  — период колебаний неподвижных часов, а  $T'$  — часов, лежащих на абсолютно гладком горизонтальном столе. Ход часов ускорится на 0,1%.

$$10.56. \frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{I}{I+I_0}}.$$

$$10.57. T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{f(I_1 + I_2)}}.$$

$$10.58. T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$10.59. A = \frac{4}{3} \frac{F_0}{k}, \text{ где } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

10.60. Если при колебаниях маятника его максимальная угловая скорость  $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$  меньше угловой скорости вала  $\omega$ , или  $\omega - \frac{d\varphi}{dt} > 0$  для любого момента времени, то момент сил трения, действующий со стороны вала на маятник, всегда направлен в одну сторону. Так как этот момент постоянен, а маятник при колебаниях проходит по направлению вращения и против вращения один и тот же путь, то работа момента сил трения за период равна нулю.

10.61\*. Решение. При колебаниях сила трения, действующая на муфту со стороны вращающегося вала за одну половину периода, направлена по движению маятника, когда вал и муфта вращаются в одну сторону, а в другом полупериоде эта сила направлена против движения маятника.

1) Если сила трения увеличивается со скоростью скольжения, то она больше в ту половину периода, когда муфта и вал вращаются в противоположные стороны. Следовательно, работа силы трения маятника о вал за целый период положительна, затухание маятника возрастает из-за трения между муфтой и валом.

2) Если сила трения уменьшается со скоростью скольжения, то по тем же причинам, наоборот, работа силы трения маятника о вал за весь период отрицательна, вал сообщает энергию маятнику, и затухание колебаний уменьшается. В том случае, когда работа силы трения о вал больше, чем потери энергии на трение других частей маятника, энергия колебаний маятника будет увеличиваться, амплитуда будет возрастать, а маятник может совершать автоколебания.

$$10.62. x \approx 9,6 \text{ м.}$$

$$10.63. L = 30 \text{ см.}$$

Указание. Частота колебаний  $\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , где  $T$  — натяжение струны,  $\rho$  — масса струны на единицу длины и  $L$  — длина струны. Пользуясь этим соотношением, находим первоначальную длину.

10.64. Период колебаний тонкой струны меньше в два раза.

10.65. Уменьшить в 9 раз.

10.66. 1) Зажать струну на очень коротком участке в середине; 2) так же зажать на расстоянии  $1/3$  от конца. Понизить тон звучания струны таким способом нельзя.

$$10.67. \frac{L}{L_0} = \frac{4l^2 \nu^2 M}{TL_0} \approx 1,10, \text{ где } L \text{ — длина вытянутой струны. } \frac{\Delta L}{L_0} = 10\%.$$

10.68.  $\nu = k \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , где  $k$  — безразмерный коэффициент, значение которого не может быть найдено из метода размерностей.

10.69\*.  $\nu = k \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ , где  $k$  — безразмерный коэффициент, значение которого не может быть найдено из метода размерностей.

Решение.  $[F] = MLT^{-2}$ ,  $[\rho] = ML^{-1}$ ,  $[\nu] = LT^{-1}$ , где  $M$  — масса,  $L$  — длина и  $T$  — время. Имеем  $\nu = f(F, \rho)$ , или  $[\nu] = [F^m \rho^n]$ ,

$LT^{-1} = (MLT^{-2})^m \cdot (ML^{-1})^n$ , откуда для степеней  $T$ ,  $L$  и  $M$  в выражении для размерности скорости получаем соответственно уравнения:  $m - n = 1$ ,  $2m = 1$ ,  $m + n = 0$ , из которых находим  $m = +1/2$ ,  $n = -1/2$ .

**10.70.** Если

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) = a_1 \sin (\omega t - \varphi_1)$$

— колебание рассматриваемой частицы, вызываемое первой системой волн, а

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) = a_2 \sin (\omega t - \varphi_2)$$

— колебание, вызываемое второй системой волн, то суммарное колебание

$$y = y_1 + y_2 = A \sin (\omega t + \psi),$$

где

$$A = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

**10.71.**  $J = \frac{\Delta P^2}{2} \frac{S}{\rho v_{зв}} \approx 460 \text{ эрг/с} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$

У к а з а н и е. Поток энергии  $J = \frac{\rho u^2}{2} v_{зв} S$ ,  $u/v_{зв} = \Delta P/(\gamma P)$ ; учтя, что скорость звука  $v_{зв} = \sqrt{\gamma P/\rho}$ , получаем ответ.

**10.72.** 1)  $v = \frac{990}{\pi} \approx 315 \text{ с}^{-1}$ ; 2)  $c_{зв} = 330 \text{ м/с}$ ; 3)  $\lambda = \pi/3 \approx 1,05 \text{ м}$ ;  
4)  $u = 99 \text{ см/с}$ ; 5)  $\Delta P = \gamma P u/v_{зв} \approx 3,2 \text{ мм рт. ст.}$

## § 11. Пространственное движение твердого тела. Гироскопы

**11.1.**  $\operatorname{tg} \beta = a^3 m^2 g \sin \alpha / (I_{\parallel}^2 \omega^2)$ , где  $I_{\parallel}$  — момент инерции волчка относительно оси фигуры,  $m$  — масса волчка,  $a$  — расстояние от точки опоры волчка до его центра масс.

**11.2.**  $\alpha \approx \frac{m a l \tau}{I_{\parallel} \omega} \approx 0,43^\circ \approx 25'.$

**11.3.**  $\varphi = \arccos \frac{3g}{2\omega^2 l}.$

**11.4.**  $L \approx 10^8 \text{ Г} \cdot \text{см}^2/\text{с}$ ;  $M \approx 10^9 \text{ Г} \cdot \text{см}^2/\text{с}.$

**11.5.\***  $\frac{c-v}{c} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}$

Решение. Максимальный поворот получится, когда скорость снаряда  $\mathbf{v}$  перпендикулярна к земной оси. Снаряд уносит момент импульса  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , перпендикулярный к скорости  $\mathbf{v}$ . Земля получает такой же момент в обратном направлении. При этом вектор угловой скорости вращения Земли  $\boldsymbol{\omega}$  отклоняется вбок на угол  $\alpha = L/(I\omega)$ . Подставив сюда  $I = 2Mr^2/5$  и учтя, что разность  $c - v$  очень мала, получим

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2 c^2}{8M^2 l^2 \omega^2} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}.$$

Заметим, что приведенная оценка годится для поворота земной оси «в пространстве», т.е. относительно системы «неподвижных звезд». Для исследования поворотов оси вращения «в теле», т.е. относительно самой Земли, надо учесть сплюснутость земного шара. Это связано с тем, что вращение шара вокруг фиксированного в нем диаметра неустойчиво.

$$11.6. \varphi = 1,34 \cdot 10^{-17} \text{ рад.}$$

$$11.7. \alpha \approx \frac{5mv \sin \varphi}{2M_3 R_3 \omega_3} = 1,27 \cdot 10^{-17} \text{ рад.}$$

$$11.8. M = \frac{2\pi I N u}{R} = 612 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

$$11.9. F = \frac{m\rho^2 2\pi N u}{Ra} \approx 2000 \text{ Н.}$$

$$11.10. F_{\max} = \frac{2\pi^2 \varphi n \rho^2 m}{Tl} \approx 6500 \text{ Н.}$$

$$11.11. N_{\min} = \frac{1}{j} h m k r.$$

11.12. Ось наклонится в плоскости  $zOx$  в сторону  $x$  на угол  $\varphi$  относительно оси  $z$ , равный  $\varphi = \frac{2m v z_0}{L_z} \approx 0,04 \text{ рад} \approx 2,3^\circ$ .

$$11.13. \operatorname{tg} \alpha = \frac{4l^2 g}{r^4 \omega^2}.$$

11.14.  $F_{\text{дав}} = P + \frac{I_{\parallel} \Omega^2}{r} = P + \frac{1}{2} m \Omega^2 r$ , где  $P$  — вес бегуна, а  $m$  — его масса. При  $r = 50$  см и рабочей скорости 1 об/с ( $\Omega = 2\pi$  рад/с) получаем  $m \Omega^2 r / 2 \approx mg = P$ . Следовательно  $F_{\text{дав}} \approx 2P$ . Заметим, что полный момент импульса  $L$  не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако последний момент остается неизменным при вращении катка, а поэтому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

$$11.15. T = \frac{3\pi \omega r}{g} \operatorname{tg} \alpha; R = \frac{3}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$11.16. \Omega = \frac{g'h}{\pi v R^2} = 0,33 \text{ с}^{-1}, \text{ где } g' = \sqrt{a^2 + g^2} = 10,25 \text{ м/с}^2; \Omega \uparrow \downarrow g'.$$

$$11.17. \alpha_{\max} = 2\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{g} = 22^\circ 40'; \tau = \frac{\pi}{\Omega} \approx 9,9 \text{ с, где } \Omega \approx 0,318 \text{ с}^{-1}.$$

$$11.18. \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2v^2}{Rg}.$$

$$11.19^*. \mathbf{M} = 2[\Omega \boldsymbol{\omega}] I_z = [\Omega \boldsymbol{\omega}] I_x.$$

Решение. Разделим мысленно кольцо на бесконечно малые элементы — материальные точки с массами  $dm$ . Рассмотрим движение одной из таких материальных точек. Так как  $\mathbf{v}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ , то по теореме Кориолиса действующая на точку сила

$$d\mathbf{f} = -dm \omega^2 \mathbf{r} + dm [\Omega [\Omega \mathbf{r}]] + 2 dm [\Omega [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]].$$

Это выражение меняет знак при изменении знака  $\mathbf{r}$ , а поэтому при интегрировании по всему кольцу дает ноль. Отсюда следует, что результирующая

сила, действующая на кольцо, должна равняться нулю. Для вычисления момента  $d\mathbf{M}$  силы  $d\mathbf{f}$  введем прямоугольную систему координат с осями  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , направив ось  $X$  вдоль  $\boldsymbol{\omega}$ , а ось  $Y$  — вдоль  $\boldsymbol{\Omega}$ . После простых вычислений получим

$$d\mathbf{M} = 2[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]y^2 dm + [\boldsymbol{\Omega}(2\boldsymbol{\omega}\mathbf{j} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{i})]yz.$$

При интегрировании по всему кольцу последнее слагаемое дает нуль, а поэтому

$$\mathbf{M} = 2[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]I_z = [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]I_x,$$

где  $I_z$  и  $I_x$  — моменты инерции кольца относительно осей  $Z$  и  $X$  соответственно. Таким образом, искомый момент  $\mathbf{M}$  должен быть перпендикулярен как к  $\boldsymbol{\omega}$ , так и к  $\boldsymbol{\Omega}$ . Результат верен и в том случае, когда векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  не взаимно перпендикулярны.

$$11.20. \varphi \approx 2 \cdot \frac{5}{11} \frac{v_0}{\omega R} \approx \frac{1}{55} \approx 1^\circ.$$

$$11.21. \frac{v_0}{R\omega} = \frac{11}{5}.$$

$$11.22^* \operatorname{tg} \alpha = \frac{5 \text{ кгг}}{2 r \omega_0}; \operatorname{tg} \alpha_{\text{кач}} = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r \omega_0}.$$

**Решение.** После удара центр ударяемого шара начнет двигаться с начальной скоростью  $v_0$ . По теореме о движении центра масс его скорость в момент времени  $t$  будет  $v = v_0 - \text{кгг}t$ . Пусть  $\boldsymbol{\omega}$  — мгновенное значение вектора угловой скорости. Момент силы трения относительно центра шара будет  $\text{кгг}r\mathbf{i}$ , где  $\mathbf{i}$  — единичный вектор, направленный за плоскость рисунка и перпендикулярный к ней. Из уравнения моментов  $I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \text{кгг}r\mathbf{i}$  получаем  $\frac{2}{5} r \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \text{кгг}\mathbf{i}$ .

Отсюда  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{5 \text{ кгг}t}{2 r} \mathbf{i}$ . Мгновенная ось вращения всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Угол  $\alpha$  определяется уравнением  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5 \text{ кгг}t}{2 r \omega_0}$ .

Определим теперь момент начала чистого качения. Скорость поступательного движения шара зависит только от горизонтальной составляющей вектора  $\boldsymbol{\omega}$ . Момент начала чистого качения найдется из условий  $\frac{5}{2} \text{ кгг}t = v_0 - \text{кгг}t$ . С этого момента угол  $\alpha$  становится постоянным, причем  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{кач}} = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r \omega_0}$ . В частном случае, когда  $v_0 = \omega_0 r$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 5/7$ ,  $\alpha = 35^\circ 32'$ . Заметим, что найденное решение определяет поворот оси вращения относительно внешнего пространства, а не внутри самого шара.

$$11.23. \mathbf{L} = 2m[\omega_0 a^2 - \mathbf{a}(\omega_0 \mathbf{a})]; \text{ не зависит; } |\mathbf{F}| = \frac{m\omega_0^2 a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{l};$$

$$\mathbf{F} = \frac{m(\omega_0 a)}{l \omega_0} [\omega_0(\omega_0 \mathbf{a}) - \mathbf{a}\omega_0^2], \text{ где } \mathbf{F} \text{ относится к верхнему креплению.}$$

$$11.24. F = \frac{m}{3a} (\pi n l)^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 718 \text{ Н.}$$

## § 12. Неинерциальные системы отсчета

$$12.1. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}, \text{ где } g' = \sqrt{g^2 + a^2}.$$

$$12.2. T_1 = T\sqrt{1 + \frac{a}{g}}. \text{ (После выключения двигателя часы остановятся.)}$$

12.3. 1) Муфта будет постепенно (по мере роста ускорения) смещаться в направлении, обратном ускорению; максимальное смещение  $\xi = ma/k \approx 1$  см.

2) Муфта начнет совершать колебания по закону  $x = \frac{ma}{k}(1 - \cos \omega t)$ , где  $x$  — координата муфты относительно тележки, отсчитываемая от начального положения муфты, причем  $x$  считается положительным в направлении, противоположном ускорению тележки;  $\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ с}^{-1}$ . Вследствие наличия трения и сопротивления воздуха эти колебания будут постепенно затухать.

12.4.\* Решение. Если отклонение муфты от общего центра масс  $x_1$ , а отклонение тележки —  $x_2$ , то  $mx_1 = Mx_2$ . Уравнение движения тележки  $M\ddot{x}_2 = -k(x_2 + x_1)$ ; заменяя  $x_1$  из предыдущего равенства, получаем

$$M\ddot{x}_2 + k(1 + M/m)x_2 = 0.$$

Аналогично для муфты

$$m\ddot{x}_1 + k(1 + m/M)x_1 = 0.$$

Следовательно, будут происходить гармонические колебания тележки и муфты с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} \approx 10,8 \text{ с}^{-1}$ . Амплитуды колебаний муфты  $l \frac{M}{M+m} = 5$  см, тележки  $l \frac{m}{M+m} = 1$  см.

$$12.5. \text{ К югу, } y = \frac{4\omega v_0^3 \sin \varphi \cos \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} \approx 71 \text{ м.}$$

$$12.6. \text{ К востоку: } s_{\text{вост}} = \frac{1}{3} \omega t^3 g \cos \varphi = \frac{2}{3} \omega t h \cos \varphi;$$

к экватору:  $s_{\text{эkv}} = \frac{1}{12} \omega^2 t^4 g \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \omega t \sin \varphi s_{\text{вост}}$ , где  $\varphi$  — географическая широта рассматриваемого места,  $t$  — время,  $h$  — высота падения.

12.7. Пуля отклонится к западу на расстояние

$$x_{\text{зап}} = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos \varphi \approx 51 \text{ см.}$$

Результат может показаться неожиданным. При движении вверх кориолисова сила направлена на запад, а при движении вниз на восток. На первый взгляд кажется, что отклонение к западу должно компенсироваться последующим отклонением к востоку. На самом деле это не так. Когда тело движется вверх, его боковая начальная скорость равна нулю. В наивысшую точку тело приходит, однако, с западной составляющей скорости, которую оно приобретает под действием кориолисовой силы. Поэтому обратное падение тела начинается с начальной скоростью, направленной на запад. Следовательно, скорость все время направлена на запад и перед ударом о землю обращается в нуль.

12.8. Ствол ружья надо отклонить к востоку на угол

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos \varphi \approx 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 51''.$$

12.9.  $\Delta S = \frac{\omega_3 L^2 \sin \varphi}{v_0} = 23,6 \text{ м}$ , где  $\omega_3$  — угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси. Отклонение не зависит от направления стрельбы, если пренебречь влиянием центростремительной силы.

12.10.  $\Delta h = 2v\omega_3 t^2 \approx 12,5 \text{ см}$ .

12.11.  $\Delta S_{\text{вост}} \approx 0,7 \text{ м}$ ;  $\Delta S_{\text{юг}} \approx 0,5 \text{ м}$ .

12.12\*  $x = 5,8 \text{ см}$ .

Решение. Пуля вылетает из ружья, имея скорость, направленную на юг. Следовательно, на нее будет действовать направленное на запад кориолисово ускорение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2v\omega \sin \varphi,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли и  $\varphi$  — географическая широта местности, в которой произведен выстрел. Считая в первом приближении вектор скорости пули постоянным, получаем (путем двукратного интегрирования по времени выражения для кориолисова ускорения) величину западного отклонения пули от первоначального направления выстрела  $x = vt^2 \omega \sin \varphi = 5,8 \text{ см}$ .



Рис. 401

12.13.  $S = 2\omega \frac{l^2}{v}$ .

12.14. Паровоз действует на правый (по ходу поезда) рельс железнодорожного пути с силой (ход решения задачи ясен из рис. 401)

$$F = 2m\omega v \sin \varphi = 250 \text{ Н},$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

12.15.  $P = P_0 \left( 1 - \frac{2\omega v \cos \varphi + v^2/R}{g} \right) \approx P_0 \left( 1 - 2 \frac{\omega v}{g} \cos \varphi \right) \approx P_0 (1 - 7,5 \cdot 10^{-5})$ ,

где  $R$  — радиус Земли.

12.16\*  $v_0 = 2ml\omega_0 / (M + m)$ . Скорость пушки направлена на запад.

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, уравнение движения пушки со снарядом во время движения снаряда внутри ее ствола можно записать в виде

$$(M + m) \frac{dv}{dt} = 2m\omega_0 v = 2m\omega_0 a t,$$

где  $v$  — мгновенное значение скорости снаряда,  $\omega_0$  — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси. Следовательно,

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{t_0} \frac{2m\omega_0 a}{M + m} t dt, \text{ где } t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

12.17.  $\omega = \frac{ml^2 \Omega_3 \cos \varphi}{\frac{Ml^2}{3} + ml^2} = \frac{3}{26} \Omega_3 = 0,84 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

12.18\*  $\omega = 3m\omega_0/M = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ рад/с}$ , где  $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$  — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Решение. В системе координат, связанной с Землей, на движущийся внутри ствола снаряд ( $a$ , следовательно, и на систему пушка — снаряд) будет

действовать сила Кориолиса, направленная на запад и равная  $F = 2mv\omega_0$ , где  $v$  — мгновенное значение скорости снаряда.

Уравнение движения пушки со снарядом имеет вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = 2m\omega_0 vr,$$

где  $I$  — момент инерции пушки (моментом инерции снаряда можно пренебречь ввиду условия  $M \gg m$ ),  $r$  — расстояние снаряда от оси вращения в данный момент времени,  $\omega$  — мгновенное значение угловой скорости вращения ствола пушки. Полагая  $v = at$ , получим

$$\frac{1}{3} Ml^2 \int_0^{\omega} d\omega = m\omega_0 a^2 \int_0^{t_0} t^3 dt,$$

где  $t_0 = \sqrt{2l/a}$  — время движения снаряда внутри ствола. Интегрируя это уравнение, находим  $\omega$ .

$$12.19. \alpha = 4\pi R/(vT) = 0,0209 \text{ рад} = 1,2^\circ.$$

$$12.20^* \dot{\omega} = 2/3 \text{ рад/с}^2.$$

Решение. В системе отсчета, связанной с вращающейся каруселью, боковое ускорение пули  $a_{\text{бок}} = 2[v_{\text{отн}}\omega] + [r\dot{\omega}]$ , или в скалярной форме  $a_{\text{бок}} = -2v_0\omega + r\dot{\omega}$ . Отклонения вправо считаются положительными, влево — отрицательными (рис. 402). Радиус  $r$  считается положительным выше центра  $O$  и отрицательным — ниже. Учитывая начальные условия  $r = -D/2$ ,  $\omega = \omega_0$  при  $t = 0$ , получим

$$r = v_0 t - D/2, \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} t,$$

$$a_{\text{бок}} = -2v_0\omega_0 - 3\dot{\omega}v_0 t - D\dot{\omega}/2.$$

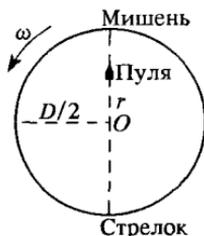


Рис. 402

Интегрируя последнее уравнение, находим боковое отклонение. При  $t = D/v_0$  оно должно обращаться в ноль.

Это дает  $\dot{\omega} = 4v_0\omega_0/D = 2/3 \text{ рад/с}^2$ . Линейное ускорение на периферии карусели будет  $6,67 \text{ м/с}^2$ .

12.21. Пол комнаты представляет собой параболоид вращения  $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$ ; ось  $z$  направлена по оси вращения, начало координат находится в нижней точке, а оси  $x$  и  $y$  лежат в горизонтальной плоскости.

12.22. Нить отвеса установится перпендикулярно к полу салона самолета. Период маятника  $T = 2\pi\sqrt{l \cos \alpha/g}$ .

$$12.23. t' = t \left( 1 + \frac{v^4}{4R^2 g^2} \right) = 1 \text{ ч } 56 \text{ с.}$$

$$12.24. T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g} \cos \varphi}.$$

$$12.25^* \cos \alpha = \frac{3(a^2 - b^2)g}{2\omega^2(a^3 + b^3)}.$$

Решение. В системе координат, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ , условие равновесия стержня можно записать в виде  $M_{\text{ц.с.}} = M_{\text{с.т.}}$ , где  $M_{\text{ц.с.}}$  — момент центробежной силы и  $M_{\text{с.т.}}$  — момент силы тяжести относительно точки закрепления стержня.

Центробежная сила инерции, действующая на элемент стержня длины  $dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  от точки закрепления, будет равна

$$dF_{ц.с.} = \frac{m dx}{a+b} \omega^2 x \sin \alpha.$$

Соответствующий момент силы можно записать в виде

$$dM_{ц.с.} = dF_{ц.с.} x \cos \alpha.$$

Отсюда для полного момента центробежной силы инерции имеем

$$M_{ц.с.} = \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} \int_{-b}^a x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} (a^3 + b^3).$$

Приравнивая эту величину моменту силы тяжести  $M_{с.т.} = mg \frac{a-b}{2} \sin \alpha$ , получим ответ.

$$12.26. \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v(v+2u)}{gR} = 0,107; \quad \beta \approx 6,1^\circ.$$

$$12.27. \quad v_0 \geq 0,29 \text{ м/с.}$$

$$12.28. \quad k = \frac{mg-N}{mg} = \frac{v(v-2v_0)}{Rg} = 0,05.$$

12.29. Чтобы размывался еще и левый берег, река должна иметь поворот направо. При этом необходимый радиус поворота реки  $r \approx 4$  км.

12.30.  $v = 2\Omega R$ . Относительно Земли эта скорость будет равна  $V_{\text{лаб}} = \begin{cases} 4\Omega R \\ 0 \end{cases}$  в зависимости от начального положения камушка слева или справа от оси  $O$ .

12.31\*  $\Delta v \approx 2\omega_0 v_0^2/g$ , где  $\omega_0$  — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Решение (в системе координат, связанной с Землей). С учетом действия центробежной силы инерции и кориолисовой силы условия отрыва самолета от Земли можно записать в виде:

1) при разбеге с запада на восток

$$mg - 2m\omega_0 v_1 - m\omega_0^2 R = kv_1^2;$$

2) при разбеге с востока на запад

$$mg + 2m\omega_0 v_2 - m\omega_0^2 R = kv_2^2;$$

3) при разбеге вдоль меридиана

$$mg - m\omega_0^2 R = kv_0^2,$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — окончательные скорости разбега,  $R$  — радиус Земли.

Решение этой системы дает

$$v_2 - v_1 = \frac{2\omega_0 v_0^2}{g - \omega_0^2 R}.$$

Учитывая, что  $g \gg \omega_0^2 R$ , находим  $\Delta v$ .

$$12.32. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi n v}{15g}.$$

$$12.33. \quad \varphi_{\text{вперед}} = \frac{\omega^2 R}{g} \approx 7,3^\circ; \quad \varphi_{\text{вбок}} = \frac{2v\omega}{g} = 5,8^\circ.$$

12.34.  $M = 2m$ , если человек останется на карусели;  $M = 4m$ , если он прыгнет с нее.

$$12.35. V = \frac{4m\Omega_3 l}{M} \sin \varphi \sin \alpha = \frac{3m\Omega_3 l}{M} = 0,3 \text{ мм/с.}$$

$$12.36. v_0 \geq \omega R.$$

$$12.37. \tau = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\omega}.$$

$$12.38. A = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \approx 750 \text{ Дж.}$$

$$12.39. A = kmL\sqrt{4\omega^2 v^2 + g^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 L^2.$$

$$12.40. L = \frac{\omega^2 l^2}{kg}.$$

$$12.41. v = \omega R\sqrt{2}; \varphi = 45^\circ.$$

12.42\* Движение муфты вдоль стержня будет происходить по закону  $x = a_0 \operatorname{ch} \omega t = 2 \operatorname{ch}(40\pi t)$  см,

$$M = 2m\omega x \dot{x} = 2m\omega^2 a_0^2 \operatorname{sh}(2\omega t) \approx 6,3 \cdot 10^6 \operatorname{sh}(80\pi t) \text{ дин} \cdot \text{см.}$$

Решение. Движение муфты удобно рассматривать во вращающейся системе координат. Тогда уравнение движения вдоль стержня под действием центробежной силы будет иметь вид  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\omega^2 x$ . Общее решение этого уравнения  $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ . Подставляя  $x(0) = a_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , получаем решение. Момент импульса муфты относительно оси вращения стержня  $L = m\omega x^2$ ; он растет со временем. Для его увеличения, чтобы поддержать угловую скорость, необходимо приложить внешний момент сил  $M = \frac{dL}{dt} = 2m\omega x \dot{x}$ .

12.43. При  $\omega_0^2 < \frac{2k}{m}$  гармонические колебания  $x = l \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega_0^2} t\right)$ ;

при  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$  — равновесие;

при  $\omega_0^2 > \frac{2k}{m}$  необратимое движение  $x = l \operatorname{ch}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2k}{m}} t\right)$ .

12.44.  $x_0 = \frac{ka^2}{k - m\omega^2}$  — положение равновесия. Оно устойчиво при  $x_0 < l$ ;

$\omega^2 < \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a}{l}\right)$ ,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$  при тех же условиях.

12.45.  $v_{\text{отн}} = \frac{\omega L}{\sqrt{2}}$ ;  $v_{\text{лаб}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega L$ .

12.46.  $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ;  $l = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ , где  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ . При решении пренеб-

речь величинами, пропорциональными  $\frac{d}{dt} \omega(t)$ .

12.47.  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4k\omega^2}{m x_0} + \omega^4}}$ .

12.48.  $k = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Omega r_0}{v_0} - \frac{v_0}{\Omega r_0} \right]$ , т.е. при  $\Omega r_0 > v_0$ .

$$12.49. \frac{\omega^2 r_0}{\sqrt{g^2 + 4v_0^2 \omega^2}} < k \leq \frac{\omega^2 r_1}{g}; v_{\min}^2 = \frac{\omega^4 r_1^2 - k^2 g^2}{4k^2 \omega^2}.$$

$$12.50. \omega = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}.$$

$$12.51. \Delta A = 2\pi km\Omega\omega a^2 = 5,65 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

$$12.52. A = \frac{m\omega^2 l^2}{2}.$$

$$12.53. A = \frac{m\omega^2 l^2}{8}.$$

$$12.54. T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$12.55^*. \omega^2 = \frac{g}{l} \sqrt{2}. \text{ Равновесие устойчиво, если } kl > mg \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} mg.$$

Решение. Запишем уравнение динамики для системы координат, вращающейся вместе с треугольником:

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{упр}} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_{\text{цб}}.$$

Здесь  $\mathbf{N}$  — сила нормальной реакции,  $\mathbf{F}_K$  — сила Кориолиса,  $\mathbf{F}_{\text{цб}}$  — центробежная сила инерции. В проекции на гипотенузу  $AC$  получим

$$m\ddot{R} = -mg \cos \alpha - k(R - l) + m\omega^2 R \sin^2 \alpha$$

или

$$\ddot{R} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \left( R - \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \right),$$

где  $R$  — расстояние груза (координата) от точки  $A$  на гипотенузе. Полагая  $\ddot{R} = 0$ , определяем положение равновесия муфты:

$$R^* = \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (k - m\omega^2 \sin^2 \alpha \neq 0);$$

приравнявая  $R^* = l$ , находим угловую скорость:

$$\omega^2 = \frac{g \cos \alpha}{l \sin^2 \alpha} = \frac{g}{l} \sqrt{2}.$$

Если ввести смещение из положения равновесия  $\xi = R - R^*$ , то получим

$$\ddot{\xi} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \xi,$$

что для  $k > m\omega^2 \sin^2 \alpha$  соответствует гармоническим колебаниям муфты около положения равновесия с частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha}$$

и означает устойчивость положения равновесия.

$$12.56. \rho l^2 \omega^2 < 8T.$$

$$12.57. A = km\omega^2 \operatorname{ctg} \alpha \left( R_B^2 - RR_B + \frac{R^2}{2} \right) + 2k\omega v R, \quad \text{где} \quad R_B = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$$

(точка  $B$ , где  $mg \sin \alpha = m\omega^2 r \cos \alpha$ ).

$$12.58. M_{\min} = 0; M_{\max} = \frac{ml^2}{6} \Omega \omega \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (\mathbf{r}_i \parallel \boldsymbol{\Omega}).$$

$$12.59. M_{\max} = m\omega \dot{\Omega} R^2.$$

$$12.60. \frac{F_{\max} - F_{\min}}{mg} = 4\varphi_{\max} \frac{T_M}{T_K} \approx 0,01,$$

где  $T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1 \text{ с}$ ;  $T_K = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 20 \text{ с}$ . Сила Кориолиса не будет вращать плоскость качаний маятника (как и у маятника Фуко на экваторе).

$$12.61. F = m\omega^2 \sin 2\alpha.$$

$$12.62. F = 2mg \sin \alpha \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$12.63. \Omega = \sqrt{\frac{2k - m\omega^2}{m}} = 4 \text{ с}^{-1}.$$

$$12.64. T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} + 3\Omega^2}.$$

$$12.65. T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2L}{3R}}.$$

$$12.66. T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

12.67. Если направить ось  $OX$  по радиусу к центру Земли (точка  $O$  — положение корабля), ось  $OZ$  — по касательной к орбите корабля в направлении его движения, то в условиях задачи траектория крышки относительно корабля — эллипс, причем  $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ , а  $z(t) = \frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$ , где  $\omega$  — угловая скорость колебательного движения крышки относительно корабля, совпадающая по величине с угловой скоростью вращения корабля вокруг Земли, т. е.

$$\omega = \sqrt{g \frac{R_0^2}{R_0^3}} \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 5700 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 35 \text{ мин}.$$

Эллипс имеет малую полуось  $b \approx 450 \text{ м}$  и большую полуось  $a \approx 900 \text{ м}$ .

12.68.  $v_{\max} \approx 0,003 \text{ м/с}$ ; траектория близка к окружности.

12.69\*: Спутник будет описывать малый эллипс

$$x(t) = -\frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

вершина которого лежит в точке равновесного положения спутника, а центр смещен на запад на расстояние  $2v_0/\omega$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

Решение. Исходим из уравнения динамики:  $m\mathbf{a}_0 = \mathbf{P} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0$ , где  $\mathbf{P}$  — «вес» тела, который для точки равновесия спутника  $A$  равен нулю:

$$P_A = -\frac{C}{R_0^2} + m\omega^2 R_0 = 0 \quad (C = \gamma m M).$$

Для возмущенного движения

$$P = -\frac{C}{(R_0 + y)^2} + m\omega^2 (R_0 + y) \approx \frac{2C}{R_0^3} y + m\omega^2 y = 3m\omega^2 y.$$

В проекциях на оси координатной системы  $X, Y, Z$  с началом в точке  $A$  уравнения динамики записываются в виде:

$$\ddot{x} = -2\omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = 3\omega^2 y + 2\omega \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Отсюда  $\dot{x} = -2\omega y$ ,  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ , что при начальных условиях  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = v_0$  дает

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Для координаты  $x$  при  $x(0) = 0$  получаем:

$$x(t) = -\frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t).$$

12.70.  $d_{\min} = \omega_3 R_3 \sqrt{\frac{R_3}{g}} (\pi - 2) \approx 420$  км.

12.71.  $F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P \approx 0,12P$ , где  $P$  — вес тела на поверхности Земли,  $T$  — продолжительность звездных суток,  $R$  — радиус Земли.

12.72.  $v = r_0 \sqrt{2 \left( \omega^2 - 3 \frac{g_0}{R_0} \right)}$ .

12.73.  $U \approx 8 \cdot 10^{-18}$  В.

12.74.  $U \approx 5 \cdot 10^{-13}$  В.

12.75.  $R_{\text{эkv}} - R_{\text{пол}} \approx 10$  км.

### § 13. Упругие деформации

13.1.  $D = 27$  мм.

13.2.  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} lP$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.  $\Delta V < 0$  при сжатии,  $\Delta V > 0$  при растяжении.

13.3.  $Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 p \approx 117$  кН.

13.4.  $\Delta l = \rho g l^2 / 2E$ , где  $\rho$  — плотность вещества стержня,  $l$  — его длина,  $E$  — модуль Юнга; объем увеличивается на  $\Delta V = \frac{1-2\mu}{2SE} V_0^2 \rho g$ , где  $V_0$  — первоначальный объем,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $S$  — поперечное сечение.

13.5.  $\frac{\Delta l}{l} \sim 10^{-6}$ .

13.6.  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\tau = \frac{F}{2S}$ .

13.7.  $U = \frac{P^2 h}{6ES}$ ; упругая энергия увеличится в 7 раз.

13.8. 1)  $\frac{U_{\text{ст}}}{U_{\text{пл}}} = \frac{E_{\text{ст}}}{E_{\text{пл}}} = 2 \cdot 10^3$ ; 2)  $\frac{U_{\text{ст}}}{U_{\text{пл}}} = \frac{E_{\text{пл}}}{E_{\text{ст}}} = 5 \cdot 10^{-4}$ .

13.9.  $\Delta l = \frac{\rho g L}{2E} (L - 2h) \approx 10^{-2}$  мм.

13.10.  $T = \frac{2\pi x}{L} E$ , где  $x$  — расстояние от нейтрального сечения,  $T_{\max} = \frac{\pi d}{L} E \approx 2 \cdot 10^5$  Н/см<sup>2</sup>.

13.11\*  $\frac{\Delta V}{V} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ .

Решение. В силу симметрии касательное напряжение  $\tau$ , действующее в оболочке, одинаково во всех направлениях. Возьмем малый элемент оболочки, имеющий форму прямоугольника. При вычислении относительного

изменения площади этого элемента под действием касательных напряжений  $\tau$  можно отвлечься от кривизны элемента, приняв его за плоскую прямоугольную пластинку. Тогда вычисление дает  $\Delta S/S = 2(1 - \mu)\tau/E$  (изменением площади, вызванным нормальным давлением, пренебрегаем). Поскольку площадь  $S$  пропорциональна  $V^{2/3}$ , относительное изменение объема будет  $\Delta V/V = (3/2)\Delta S/S$ . Так как поверхность искривлена, то натяжение  $\tau$  создаст разность нормальных давлений. Для нее нетрудно получить  $2\tau d/R$  (см. формулу Лапласа в учении о поверхностном натяжении). Эта разность должна быть уравновешена разностью давлений газа  $\Delta P$  по разные стороны оболочки. В результате получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{(1 - \mu)R}{Ed} \Delta P \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

$$13.12. U = \frac{2\pi R^3}{3K} p^2.$$

$$13.13. v = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 8 \text{ кГц}.$$

$$13.15. H_M = \frac{(R_M/R_3)^2}{M_M/M_3} H_3 = 24 \text{ км}.$$

$$13.16. \Delta l = \frac{4Fl(1 - \mu - 2\mu^2)}{\pi D^2 E(1 - \mu)}.$$

$$13.17. F = \frac{\pi E}{4\mu} (d_0^2 - dd_0).$$

$$13.18. P = E \frac{\rho_B - \rho}{3\rho_B(1 - 2\mu)} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ атм}.$$

$$13.19. \frac{\Delta V'}{V} = 3 \frac{\Delta V}{V} \frac{P}{eE} \approx 6 \cdot 10^{-4}.$$

$$13.20. P = 24 \text{ 500 Н/см}^2 \approx 2450 \text{ атм}.$$

$$13.21. P = E\alpha(t_1 - t_2);$$

$$P_{\text{зим}} \approx +1000 \text{ атм (растяжение)} \text{ и } P_{\text{лет}} \approx -375 \text{ атм (сжатие)}.$$

$$13.22. \alpha = \frac{\alpha_M + 2\alpha_{\text{ст}}}{3} = 1,37 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}.$$

$$13.23. T_M = \frac{2}{5} E_{\text{ст}}(\alpha_{\text{ст}} - \alpha_M) \Delta t = -200 \text{ атм (медная пластинка сжата);}$$

$$T_{\text{ст}} = \frac{1}{5} E_{\text{ст}}(\alpha_M - \alpha_{\text{ст}}) \Delta t = +100 \text{ атм (стальные — растянуты)}.$$

**13.24\*** Укорочение бруска будет в два раза меньше.

**Решение.** В отсутствие упора брусок будет ускоренно двигаться. Сила сжатия в сечении стержня на расстоянии  $x$  от  $A$  будет  $T = F(1 - x/L)$ , так как предшествующие элементы бруска должны сообщать ускорение последующим. Изменение длины элемента стержня  $dx$ , удаленного на  $x$  от  $A$ , будет

$$d\xi = \frac{T}{ES} dx = \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx.$$

Общее изменение длины, следовательно, будет

$$\Delta L = \int_0^L d\xi = \frac{1}{2} \frac{LF}{ES}.$$

13.25.  $U = ma^2l / (6ES).$

13.26. Никакого напряжения не будет, так как в этом случае сила притяжения Земли действует на все элементы бруска, сообщая им одинаковое ускорение. В задаче 13.24 сила была приложена к одному концу бруска, а последующие элементы бруска получили ускорение только вследствие сжатия предшествующих.

13.27.  $\Delta l = -\frac{Fl}{2a^2E}; \Delta V = -\frac{Fl(1-2\mu)}{2E}$ , где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

13.28.  $\Delta l = \frac{MmLg}{SE(2m+2M+\mu)} \approx 4,3 \text{ см.}$

13.29.  $\omega L < 10^{-2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$

13.30.  $F_{\max} = mg + v_0 \sqrt{\frac{mES}{l}} \approx 2,1 \cdot 10^5 \text{ Н.}$

13.31.  $v \geq \frac{T_p - \frac{mg}{S}}{\sqrt{\frac{ME}{Sl}}} = 3 \text{ м/с.}$

13.32.  $F = \frac{\beta}{2} \frac{r^2}{2\pi R^2} M.$

13.33.  $T = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - x^2); \Delta L = \frac{M\omega^2}{3ES} L^2$ , где  $x$  — расстояние рассматриваемого сечения от оси вращения.

13.34.  $\varepsilon_1 = \frac{\rho\omega^2 L^2}{3E}; \varepsilon_2 = \frac{\rho\omega^2 (L/2)^2}{3E}; \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{4}.$

13.35.  $\varepsilon = \frac{3}{4} \left( \frac{v}{v_{зв}} \right)^2 = 3 \cdot 10^{-6}.$

13.36.  $\Delta x = \frac{\rho g_0 R^2}{3E} \approx 230 \text{ м.}$

13.37.  $\Delta x = \frac{\rho g_0}{E} \left( R^2 \ln 2 - \frac{R^2}{2} \right) \approx 144 \text{ м.}$

13.38.  $R = \left( \frac{3\gamma M r^3 \rho}{2T_{\text{раз}}} \right)^{1/3} \approx 580 \text{ км.}$

13.39.  $\tau = 2 \frac{l}{v_{зв}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ с; } v = \frac{v_{зв} T_y}{E} \approx 5 \text{ м/с.}$

13.40.  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{v}{v_{зв}}$ , где  $v_{зв}$  — скорость звука в тонком стержне.

13.41.  $A = \frac{\pi^2 d^3 b E}{6L} \approx 19,7 \text{ Дж.}$

## § 14. Элементы гидродинамики

$$14.1. T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi m}{g\rho}}.$$

$$14.2. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

$$14.3. T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

$$14.4. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$$14.5^*. F = Q\rho \left[ gt + \sqrt{2g\left(H - \frac{Q}{S}t\right)} \right], H - \text{высота, с которой льется вода.}$$

Решение. Вертикальная скорость струи на уровне воды в стакане  $v = \sqrt{2g(H-h)}$ . За 1 с уровень воды поднимается на величину  $\Delta h = Q/S$ . Сила давления на дно от падающей воды:  $\Delta h\rho Sv$ , где  $\rho$  — плотность воды. Все давление равно  $F = hgS\rho + \Delta hSv\rho$ . Через время  $t$  после начала  $h = \Delta ht = Qt/S$  и  $F = \Delta h\rho S[gt + \sqrt{2g(H-h)}]$ . Окончательно

$$F = Q\rho \left[ gt + \sqrt{2g\left(H - \frac{Q}{S}t\right)} \right].$$

$$14.6. t = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}), T = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

$$14.7. h = \frac{H}{2}; x_{\max} = H.$$

$$14.8. v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho + 2gh}, \text{ где } P_0 - \text{атмосферное давление.}$$

14.9. Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки  $AB$ , скорость истечения постоянна и равна  $v = \sqrt{2gh}$ . После этого скорость истечения начнет уменьшаться.

$$14.10. L = \frac{T}{g(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}})} \ln \frac{S_0 T}{Mg - \rho_{\text{в}} g V} = 15,6 \text{ км;}$$

$$S(h) = S_0 \exp \left[ -\frac{gh}{T} (\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}}) \right];$$

$$H = \left( T - \frac{Mg - \rho_{\text{в}} g V}{S_0} \right) [g(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}})]^{-1} \approx 3 \text{ км.}$$

$$14.11. r(y) = r_0 \sqrt[4]{\frac{H}{H+y}}.$$

$$14.12. t = \frac{S}{\sigma} \frac{h-h_0}{\sqrt{2gh_0}}.$$

$$14.13. P = P_0 - \rho g(h-h_1) + \rho g(h_0-h_1) \frac{h_0^4(h^4-h_1^4)}{h^4(h_0^4-h_1^4)}; \text{ давление максимально при } h_m = \left( \frac{4h_1^4 h_0^4 (h_0-h)}{h_0^4 - h_1^4} \right)^{1/5}.$$

14.14. Нужно приложить силу  $F = 2S\rho g(h_1 - h_2) = 5 \text{ Н}$ , толкающую тележку со стороны отверстия, расположенного выше.

14.15. Сосуд должен иметь ускорение  $a \geq 2g(H-h)/l$ , направленное вправо на рисунке к условию задачи.

**14.16.** Параболоид вращения; образующая парабола  $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2$ , где  $x$  — расстояние от оси вращения,  $z$  — повышение уровня поверхности по сравнению с уровнем ее в центре сосуда.

**14.17.** 1)  $P = P_0 + \frac{\rho\omega^2 R^2}{2}$ , где  $P_0$  — давление в центре дна,  $\rho$  — плотность воды и  $R$  — расстояние от центра дна; 2)  $P \approx 42,3 \cdot 10^3$  дин/см<sup>2</sup>.

**14.18.\*** Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой жидкость покоится. В ней добавятся две силы инерции: центробежная и кориолисова. Кориолисова сила не совершает работы. Она лишь искривляет линии тока, но не сказывается на справедливости и форме общего уравнения Бернулли.

Центробежная сила добавляет новый член к потенциальной энергии. Полная потенциальная энергия единицы массы жидкости будет  $u = gz - \omega^2 r^2/2$ , так что уравнение Бернулли запишется в виде

$$\frac{v^2}{2} + gz - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{const},$$

где  $v$  — относительная скорость жидкости (т.е. скорость относительно вращающейся системы отсчета). Постоянная Бернулли  $B$  одна и та же для всех линий тока, поскольку все они начинаются вблизи поверхности жидкости, где

скорость  $v$  пренебрежимо мала. Применим полученное уравнение к линии тока  $AB$ , начинающейся на поверхности жидкости в точке  $A$  (рис. 403). Если начало координат поместить в точке  $A$ , то  $z_A = r_A = v_A = 0$ ,  $P_A = P_B = P_0$ ,  $v_B = v$ ,  $z_B = -h$ ,  $r_B = R$ , и мы получим  $v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}$  означает высоту наиболее низкой (центральной) точки  $A$  уровня жидкости относительно отверстия. Переход к неподвижной системе отсчета не представляет затруднений.

**14.19.**  $\omega_k = \left( \frac{\omega_0^3}{4} + \frac{3}{\pi} \frac{m_0 \omega_0 g}{\rho R^4} \right)^{1/3}$ , где  $\rho$  — плотность воды.

**14.20.\*** Решение. Рассмотрим кольцевой слой жидкости с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$ . Сила внутреннего трения, действующая на него в направлении течения, равна

$$2\pi l \eta \left[ \left( r \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} - \left( r \frac{dv}{dr} \right)_r \right] = 2\pi l \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) dr.$$

(Индексы  $r$  и  $r + dr$  обозначают, что величины, заключенные в круглые скобки, должны быть вычислены при значениях радиусов  $r$  и  $r + dr$  соответственно.) В том же направлении действует сила разности давлений  $(P_1 - P_2) 2\pi r dr$ . При стационарном течении сумма обеих сил обращается в нуль. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{P_1 - P_2}{l \eta} r.$$

Решение его, обращающееся в нуль при  $r = R_1$  и  $r = R_2$ , есть

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4l \eta} \left[ R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2} \right].$$

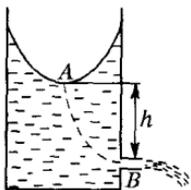


Рис. 403

Расход жидкости:

$$Q = \frac{\pi p(P_1 - P_2)}{8\eta l} \left[ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \right].$$

14.21.  $f = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln(r_2/r_1)} \approx 0,27 \text{ дин/см}$ ;  $v(r) = v_0 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$ .

14.22.  $\tau = \frac{8\eta L}{\rho g R^2}$ , где  $g$  — ускорение свободного падения.

14.23.  $Q = \frac{3\pi\phi R_1^3 R_2^3}{8\eta(R_2^3 - R_1^3)} \Delta P$ .

14.24.  $v_{\max} = \frac{\rho g h \delta^2}{8\eta d} \approx 2,3 \text{ см/с}$ ;  $\dot{M} = \frac{2}{3} \rho l v_{\max} \delta = 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}$ .

14.25.  $Q = \frac{ab^3 \Delta P}{12\eta l} \approx 0,8 \text{ см}^3/\text{с}$ .

14.26. Уменьшится в 4 раза.

14.27.  $h(t) = He^{-t/\tau}$ , где  $\tau = \frac{8S}{\pi r^2} \frac{\eta l}{\rho g r^2} \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 0,7 \text{ ч}$ . Время выте-

кания  $t_{\text{выт}} \approx \tau \ln \frac{H}{r} \approx 100\tau \approx 70 \text{ ч}$ .

14.28.  $r \approx \sqrt[4]{\frac{8Q\eta l}{\pi \rho g h}} \approx 0,1 \text{ см}$ , т. е.  $d \approx 2 \text{ мм}$ .

14.29.  $N = \omega M = \frac{\pi}{2} \omega^2 \frac{a+b}{ab} \eta R^4 \approx 76 \text{ Вт}$ , где  $\omega = 2\pi n$ .

14.30.  $\Delta l = \frac{4\eta V L^2}{\pi r_1^2 E (r_2^2 - r_1^2)}$ .

14.31.  $\omega_1(t) = \frac{1}{4} \omega_{20} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4\eta S}{3mRh} t\right) \right]$ ;

$\omega_2(t) = \frac{1}{4} \omega_{20} \left[ 1 + 3 \exp\left(-\frac{4\eta S}{3mRh} t\right) \right]$ ;

$v(t) = \omega_1 R$ ;  $\frac{K_{\text{нач}} - K_{\text{кон}}}{K_{\text{нач}}} = \frac{3}{4}$ .

14.32. Время установления чистого качения можно оценить  $\tau \sim \frac{R^2 \rho}{\eta}$ .

Деготь обгонит мед на  $l \approx (v_0 - v)\tau \approx 10 \text{ м}$ , где  $v = \frac{2v_0}{3}$  — скорость при равномерном качении.

14.33. Для гравитационных волн скорость  $u$  и длина волны  $\lambda$  связаны соотношением  $u = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ . Поэтому волновые картины будут подобны, если все размеры изменить пропорционально квадрату скорости движения. Следовательно, скорость модели должна быть равной  $3,6 \text{ км/час} = 1 \text{ м/с}$ . Отметим, что в данной задаче безразмерными параметрами подобия являются отношения  $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{g\lambda}}{v}$  и  $\frac{\lambda}{l}$ , где  $v$  — скорость корабля,  $l$  — его линейный размер.

14.34.  $\tau = \frac{m}{kv_0} \left( \frac{v_0 l}{v} - 1 \right)$ ;  $S = \frac{m}{k} \ln \left( \frac{v_0 l}{v} \right)$ . Расчет дает противоречивые и абсурдные результаты: 1)  $\tau_1 \approx 15 \text{ с}$ ,  $S_1 \approx 0,04 \text{ мм}$ ; 2)  $S_2 \approx 5 \text{ м}$ ,  $\tau_2 \approx 49 \text{ ч}$ .

Отсюда видно, что в рамках указанной модели невозможно получить разумные ответы. Истинный закон движения лодки несравненно сложнее. Ее движение зависит от размеров лодки, ее скорости (неквадратичный закон), формы и качества обработки поверхности и других факторов.

## § 1. Идеальный газ. Работа, теплота, внутренняя энергия. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

1.2. У к а з а н и е. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  определяются выражениями

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P_0} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad \beta = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

Кроме этого, коэффициенты  $\alpha$  и  $\lambda$  часто определяются такими выражениями

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \lambda = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V.$$

Для твердых и жидких тел между этими определениями по существу нет разницы. Первое определение обладает тем преимуществом, что для идеальных газов величины  $\alpha$  и  $\lambda$  оказываются постоянными, тогда как при втором определении они меняются обратно пропорционально абсолютной температуре  $T$ . Величина  $\beta$  называется также изотермической сжимаемостью вещества.

1.3.  $\lambda = 46 (\text{°C})^{-1}$ .

1.4. На 460 атм.

1.5.  $\alpha = \frac{1}{T_0}$ ;  $\lambda = \frac{1}{T_0}$ ;  $\beta_T = \frac{1}{P}$ ;  $K_T = P$ .

Здесь  $T_0$  — абсолютная температура, соответствующая нулевой температуре по шкале Цельсия. Если пользоваться вторым определением коэффициентов  $\alpha$  и  $\lambda$ , приведенными в указании к решению задачи 1.2, то мы получили бы  $\alpha = \lambda = 1/T$ , т. е. при таком определении коэффициенты  $\alpha$  и  $\lambda$  для идеальных газов не были бы постоянными.

1.6.\*  $x = 0,131$ .

Р е ш е н и е. Расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника  $a = l(1 - x/2)$ , где  $l$  — длина никелевой трубки.

Будем приближенно рассматривать маятник как математический. Компенсация теплового расширения сводится тогда к требованию, чтобы величина  $a$  не изменялась с изменением температуры, т. е.  $\frac{da}{dl} = 0$ , или

$$2 \left( 1 - \frac{x}{2} \right) - l \frac{dx}{dl} = 0.$$

Найдем  $\frac{dx}{dl}$ . Длина никелевой трубки  $l = l_0(1 + \alpha_{\text{н}}l)$ , ее внутренний объем  $V = V_0(1 + 3\alpha_{\text{н}}l)$ , объем ртути  $v = v_0(1 + \alpha l)$ . Часть объема трубки, занятая ртутью, равна  $x = v/V = x_0[1 + (\alpha - 3\alpha_{\text{н}})l]$ , где  $x_0 = v_0/V_0$  — значение дроби

$x$  при  $t = 0$  °С. Отсюда находим

$$dx = x_0(a - 3\alpha_n) dt \approx x(a - 3\alpha_n) dt, \quad dl = l_0\alpha_n dt \approx l\alpha_n dt,$$

т. е.

$$\frac{dx}{dl} = \frac{x}{l} \left( \frac{\alpha}{\alpha_n} - 3 \right).$$

Условие компенсации принимает вид

$$\left( 1 - \frac{x}{2} \right) - \frac{x}{2} \left( \frac{\alpha}{\alpha_n} - 3 \right) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{2}{\alpha/\alpha_n - 3} = \frac{1}{8}.$$

Учтем теперь несовпадение центра качания с центром масс маятника. Используя известную формулу для приведенной длины  $L$  физического маятника, нетрудно получить

$$L = \frac{2}{3} \frac{3 - 3x + x^2}{2 - x} l.$$

Надо потребовать, чтобы эта величина не изменялась с изменением температуры, т. е.  $\frac{dL}{dx} = 0$ . Рассуждая, как выше, приходим к уравнению

$$(x^3 - 5x^2 + 9x - 6) + (\alpha/\alpha_n - 3)(x^2 - 4x + 3)x = 0,$$

или после подстановки численного значения  $\alpha/\alpha_n = 18$ :

$$16x^3 - 65x^2 + 54x - 6 = 0.$$

Для отыскания нужного корня этого кубического уравнения полагаем  $x = 1/8 + \delta$ , где  $\delta$  — малая поправка. Подставляя это выражение в предыдущее уравнение и отбрасывая кубы и квадраты поправки  $\delta$ , получаем для нее линейное уравнение, из которого находим  $\delta = 0,006$ . Следовательно,

$$x = 0,125 + 0,006 = 0,131.$$

1.7.  $\rho = \rho_0(1 + \beta P) = 1,054$  г/см<sup>3</sup>.

1.8.  $m \approx 105$  г.

1.9.  $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2}.$

1.10.  $h_1 = -\frac{1}{2}(2l + H_1 - h) + \sqrt{\frac{1}{4}(2l + H_1 - h)^2 + \frac{2T_1}{T_0}(H_0 + h)l - H_1(2l - h)}.$

1.11.  $P = 224,4$  мм рт. ст.

1.12.  $V = \frac{M}{\rho_0 \left( \frac{1}{1 + \alpha t_1} - \frac{1}{1 + \alpha t_2} \right)} \approx 1000$  м<sup>3</sup>, где  $\alpha$  — коэффициент объемного

расширения газов.

1.13.  $P = \rho_0 g l \left( \frac{1}{1 + \alpha t_2} - \frac{1}{1 + \alpha t_1} \right) = 14$  мм вод. ст., где  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения газов.

$$1.14. m = \frac{2M\sigma}{3\rho RT} \mu = 488 \text{ г, где } \mu \text{ — молярная масса азота.}$$

$$1.15. n = \frac{\ln(P_2/P_1)}{\ln[V/(V+v)]}.$$

$$1.16. \tau = \frac{V}{K} \ln \frac{P_0}{P} \approx 370 \text{ с, где } K \text{ — скорость откачки масляного насоса,}$$

т. е. объем газа, откачиваемый насосом за 1 с.

$$1.17. P = 1,37 \cdot 10^3 \text{ атм.}$$

$$1.18. 1) P = 0,03 \text{ атм; } 2) P \sim 7,6 \cdot 10^4 \text{ атм.}$$

$$1.19. P_{\text{бомб}} = \frac{N\rho ZkT}{A} \approx 7,5 \cdot 10^{10} \text{ атм, где } N \text{ — число Авогадро, } Z = 92 \text{ —}$$

атомный номер урана,  $A = 238$  — его относительная атомная масса;

$$P_3 = \frac{1}{2} \rho_3 g R \approx 1,7 \cdot 10^6 \text{ атм, где } R \text{ — радиус Земли.}$$

$$1.20. P = \frac{P_0}{T_0} (V_0 + V_1 + V_2) \left( \frac{V_0}{T_0} + \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right)^{-1}.$$

$$1.21. m = \frac{\mu P S l}{R(T_2 - T_1)} \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ где } \mu \text{ — молярная масса воздуха.}$$

$$1.22. V = 200 \text{ см}^3.$$

$$1.23. \frac{1}{\mu} = \frac{M_1}{M} \frac{1}{\mu_1} + \frac{M_2}{M} \frac{1}{\mu_2} + \frac{M_3}{M} \frac{1}{\mu_3} + \dots$$

$$1.24. v = 340 \text{ м/с.}$$

$$1.25. \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\lambda \mu P K}{RT} \approx 5 \text{ кал/с} \approx 21 \text{ Вт, где } K \text{ — производительность насоса,}$$

$\mu$  — молярная масса воды.

$$1.26. 1) Q_{142} = Q_{132} - A_{132} + A_{142} = 60 \text{ Дж;}$$

$$2) Q_{21} = Q_{132} - A_{132} + A_{21} = 70 \text{ Дж;}$$

$$3) Q_{14} = U_4 - U_1 + A_{142} = 50 \text{ Дж; } Q_{42} = Q_{142} - Q_{14} = 10 \text{ Дж.}$$

$$1.27. Q = 2Q_2 + Q_3 - Q_1 = 94 \text{ кДж.}$$

$$1.30. \text{Результат следует из формулы } U = C_V \frac{PV}{R}.$$

$$1.31. Q = 0.$$

$$1.32. Q = 910 \text{ Дж.}$$

$$1.33. Q = \frac{AC_P}{R} = 25 \text{ Дж.}$$

$$1.34. A_{\text{вн. сил}} \approx -100 \text{ Дж; } Q = -350 \text{ Дж.}$$

$$1.35. \Delta U = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \approx -1900 \text{ Дж, где } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4.$$

$$1.36. \Delta P = \frac{CU^2}{3V} = 3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$1.37. P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 0,312 \text{ атм.}$$

$$1.38. TV^{n-1} = \text{const; } PV^n = \text{const; где } n = \frac{C - C_P}{C - C_V}.$$

$$1) V = \text{const; } 2) P = \text{const; } 3) PV^\gamma = \text{const; } 4) PV = \text{const.}$$

Постоянная  $n$  называется показателем политропы.

$$1.39. \text{Нагревается при } n > 1, \text{ охлаждается при } n < 1.$$

1.40.  $C = \nu(3C_V - 2C_P) = -0,163 \text{ кал/К}$ , где  $\nu = 0,163$  — число молей гелия.

$$1.42. A = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} \right] = \frac{P_2 V_2}{n-1} \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{n-1} - 1 \right], \text{ в частности для}$$

изотермического процесса  $A_T = P_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$ , где  $P_2 V_2 = RT$ ; для адиабатического процесса  $A_{\text{ад}} = A$ , если заменить показатель политропы  $n$  на показатель адиабаты  $\gamma$ .

$$1.43. A > 0, A = \frac{m}{\mu} RT_1 \left[ \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) - \ln \frac{V_2}{V_1} \right].$$

$$1.44. T = 500 \text{ К.}$$

1.45. 1) Газ охлаждается при расширении, причем его температура пропорциональна  $\sqrt{P}$ .

2)  $C = C_V - R$ . При расширении к газу должно подводиться тепло.

1.46. 1) Газ при расширении нагревается, причем его температура пропорциональна  $\sqrt{V}$ .

2)  $C = C_P + R$ . При расширении к газу должно подводиться тепло.

$$1.47. C = \frac{1}{2} (C_V + C_P) = C_V + \frac{R}{2} = C_P - \frac{R}{2}.$$

$$1.48. P \sim T^{2/3}.$$

1.49.  $C(V) = R \frac{\gamma V_0 - (1+\gamma)V}{(\gamma-1)(V_0-2V)}$ ;  $T_{\text{max}} = \frac{P_0 V_0}{4R}$ . В точке  $C(V) = 0$  прямая на рис. 317 касается адиабаты, а в точке  $C(V) = \infty$  — изотермы.

$$1.50. VT^{(C_V - C_0)/R} e^{-\alpha T/R} = \text{const.}$$

$$1.51. VT^{C_{V_0}/R} e^{\alpha T^2/2R} = \text{const.}$$

$$1.52. VT^{1/(\gamma-1)} e^{-\alpha T^2/2R} = \text{const.}$$

$$1.53. Q_{132} = \frac{19}{2} RT_1; Q_{142} = \frac{17}{2} RT_1; Q_{12} = 9RT_1; C_{12} = 3R.$$

$$1.54. C = C_V + \frac{R}{2}.$$

$$1.55^*. C_1 = \frac{V_1 + V_2}{V_2 + \gamma V_1} \gamma C_V, C_2 = 0; C_1 = C_V \frac{V_1 + \gamma V_2}{V_1 + V_2}, C_2 = \infty.$$

Решение. Элементарное количество тепла, получаемое первым газом,  $\delta Q_1 = C_V dT_1 + P_1 dV_1 = C_V dT_1 + RT_1 dV_1/V_1$ , а вторым —  $\delta Q_2 = 0$ . Поэтому  $C_2 = 0$  и  $C_V dT_2 + RT_2 dV_2/V_2 = 0$ . Из равенства давлений  $P_1$  и  $P_2$  следует  $V_1/V_2 = T_1/T_2$ , откуда  $dV_1/V_1 + dV_2/V_2 = dT_1/T_1 - dT_2/T_2$ . А так как объем системы  $V_1 + V_2$  во время процесса не изменяется, то  $dV_1 + dV_2 = 0$ . Исключая  $dV_2$  и  $dT_2$ , получим

$$\left( \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{R}{C_V} \frac{1}{V_2} \right) dV_1 = \frac{dT_1}{T_1}.$$

Используя также соотношение  $C_P - C_V = R$ , находим

$$\delta Q_1 = \left( C_V + R \frac{V_2}{V_2 + \gamma V_1} \right) dT_1.$$

Следовательно,

$$C_1 = C_V + \frac{V_2}{V_2 + \gamma V_1} R = \frac{V_1 + V_2}{V_2 + \gamma V_1} \gamma C_V.$$

При  $V_1 = V_2$

$$C_1 = 2\gamma C_V / (\gamma + 1).$$

Если крышку  $CD$  сделать теплопроводящей и поддерживать температуру верхнего газа постоянной, то  $C_2 = \infty$ , а  $C_1 = C_V \frac{V_1 + \gamma V_2}{V_1 + V_2}$ .

$$1.56. C_1(V_2) = \frac{C_V}{1 - V_2/(5V_0)}.$$

$$1.57. V_1 = \frac{RT_0^2}{P_0(T_0 + T)} = 9,47 \text{ л}; V_2 = \frac{RT_0 T}{P_0(T_0 + T)} = 12,9 \text{ л};$$

$$P = P_0 \frac{T_0 + T}{2T_0} = 1,18 \text{ атм}; m = \frac{RT_0}{2q} \ln \frac{P}{P_0} \approx 0,56 \text{ г}.$$

$$1.58. \gamma = \frac{4}{3}.$$

$$1.59. A = 2C_V T_0 (2^{(\gamma-1)/2} - 1); C = -C_V.$$

$$1.60. Q = \frac{2RT_0}{\gamma-1} \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - hS} \right)^\gamma - 1 \right].$$

1.61.  $T_{\max} = \frac{\mu(P_2 V_1 - P_1 V_2)^2}{4mR(P_2 - P_1)(V_1 - V_2)} = 490 \text{ К}$ , где  $\mu$  — молярная масса гелия, а  $m$  — его масса.

1.62.  $V_0 = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^\gamma = 98,7 \text{ м}^3$ , где  $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5}$ ; конечный объем нефтехранилища  $V = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} = 342 \text{ м}^3$ .

$$1.63. \gamma = \frac{V}{hS} \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_2^2}.$$

$$1.64. T - T_0 = \frac{mv^2}{2\gamma C_V} \approx 28 \text{ 000 К}, \text{ где } v - \text{ число молей};$$

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \approx 1000; \frac{P}{P_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^\gamma \approx 10^5.$$

1.65\* Решение. Для упрощения расчета предположим, что через змеевик прошел 1 моль газа. Работа, совершенная газом, равна  $A = P_2 V_2 - P_1 V_1 = R(T_2 - T_1)$ . Приращение его внутренней энергии  $U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$ . Тепло, полученное газом,  $Q = U_2 - U_1 + A$ . Подставляя сюда выражение для  $U_2 - U_1$  и  $A$ , найдем, что тепло  $Q = (C_V + R)(T_2 - T_1)$ , или  $Q = C_P(T_2 - T_1)$ , так как  $C_V + R = C_P$ . Отсюда ясно, что в данном опыте измеряют теплоемкость  $C_P$ .

1.66.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml_0}{Mg + P_0 S}}$ . В предельном случае, когда  $P_0 = 0$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$ , т. е. период колебаний совпадает с периодом колебаний математического маятника длины  $l_0$ .

1.67.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{Ml_0}{Mg + P_0 S}}$ . Формула верна и в том случае, когда  $\gamma$  зависит от температуры, так как для ее получения используется уравнение адиабаты в дифференциальной форме. В предельном случае, когда  $P_0 = 0$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{l_0}{g}}$ .

$$1.68. \tau = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{M}{P_0(\gamma_1/V_1 + \gamma_2/V_2)}}.$$

1.69\* Решение. Рассмотрим четыре состояния газа:

- 1)  $P_0, V_0, T_0$ ;    2)  $P_1, V, T$ ;  
 3)  $P_1, V_1, T_0$ ;    4)  $P_2, V_2, T_2$ .

Из первого состояния во второе, а также из третьего в четвертое газ переходит адиабатическим сжатием, а потому

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V^\gamma, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma.$$

В первом и третьем состояниях температуры газа одинаковы. Следовательно,  $P_0 V_0 = P_1 V_1$ . Работа двухступенчатого компрессора

$$A = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_0}{P_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} + \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{(1-\gamma)/2} - 2 \right].$$

Она имеет минимум при  $P = \sqrt{P_0 P_2}$ . Минимальная работа:

$$A_{\min} = \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - 1 \right].$$

Работа одноступенчатого компрессора при тех же начальном и конечном давлениях:

$$A_1 = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{\gamma-1} - 1 \right].$$

Следовательно,

$$A_{\min} = 2A_1 \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} + 1 \right]^{-1}.$$

Для гелия  $\gamma = 5/3$ ,  $A_{\min} = 0,515A_1$ ; для воздуха  $\gamma = 7/5$ ,  $A_{\min} = 0,64A_1$ .

1.70.  $V_1 = \sqrt{V_0 V_2}$ ;

$$A_1 = \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{(\gamma-1)/2} + 1 \right], \quad A_{\min} = 2A_1 \left[ \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{(\gamma-1)/2} + 1 \right]^{-1}.$$

Для аргона  $A_{\min} = 0,42A_1$ ; для азота  $A_{\min} = 0,62A_1$ .

1.71\* Решение. При переходе из начального состояния (объем  $V_1$ , температура  $T_1$ ) в конечное (объем  $V_2$ , температура  $T_2$ ) внешнее давление совершает над газом работу  $A = P_2(V_1 - V_2)$ , которая идет на приращение внутренней энергии  $U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1)$ . Применяя уравнение Клапейрона  $PV = RT$ , а также соотношение Майера  $C_P - C_V = R$ , после несложных преобразований получим

$$T_2 = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{P_2 - P_1}{P_1} \right) T_1.$$

При квазистатическом адиабатическом процессе

$$T_2^{\text{квст}} = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

В первом случае с изменением  $P_2$  температура  $T_2$  меняется линейно, а во втором экспоненциально, причем в бесконечно малой окрестности точки  $P_1$  оба

изменения идут одинаково быстро. Отсюда следует, что  $T_2^{\text{квст}} > T_2$ , если  $P_2 - P_1 > 0$ , и  $T_2^{\text{квст}} < T_2$ , если  $P_2 - P_1 < 0$ . Значит, повышение температуры при внезапном адиабатическом сжатии и понижение при внезапном адиабатическом расширении меньше соответствующих величин при квазистатическом адиабатическом процессе.

$$1.72. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{S[(P_0 + \rho g l) \frac{y}{x_0} + 2\rho g]}} = 0,11 \text{ с, где } \gamma = \frac{7}{5} \text{ — показатель адиабаты, } \rho = 13,6 \text{ г/см}^3 \text{ — плотность ртути.}$$

$$1.73. |\Delta x| = \frac{\Delta g}{g} H \frac{S_0}{S} \left(1 + \frac{S_0 H}{V}\right)^{-1} \approx 0,01 \text{ см, где } H = 76 \text{ см рт. ст.}$$

$$1.74. \frac{P}{(\gamma-1)} = \sum \frac{P_i}{(\gamma_i-1)}, \text{ где } P = \sum P_i \text{ — давление смеси газов.}$$

$$1.75. T = 300 \text{ К.}$$

$$1.76. \Delta U = (m_1 c_{P1} + m_2 c_{P2}) \Delta t / \gamma = 1,26 \text{ кДж.}$$

1.77.  $P = \frac{2}{3} P_0 \left(1 + \alpha \frac{Q}{C}\right)$ , где  $P_0$  — начальное давление смеси,  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения.

$$1.78. n = \frac{R}{C_V} \frac{\ln(P_1/P_0)}{\ln(T_{\text{max}}/T_0)}, A = \frac{n\nu RT_0}{\gamma-1} \left(\frac{T_{\text{max}}}{T_0} - 1\right);$$

при  $T_{\text{max}} \rightarrow T_0$   $A \rightarrow \nu RT_0 \ln \frac{P_1}{P_0}$ , где  $\nu$  — число молей смеси газов.

$$1.79. c_V = \frac{27}{32} R = 1,68 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К}) \approx 7,0 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К}).$$

$$1.80. c_P = \frac{71}{188} R \approx 0,75 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К}) \approx 3,14 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К}).$$

$$1.81. C_V = (2C_{V1} - C_{V2})\alpha + C_{V2} = 5,15 \text{ кал}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \approx 21,5 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

$$1.82. P \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

$$1.83. \alpha = \frac{4AC_P - 7R}{3R} \approx 0,5.$$

$$1.84. T = \frac{q}{3k} + \frac{5}{6} T_0; P = \frac{2Nq}{3V_0} + \frac{5}{3} P_0.$$

$$1.85. Q = 3,37 \text{ кДж.}$$

$$1.86. \Delta T = -\frac{A}{R} = -5,05 \text{ К.}$$

$$1.87. T = \frac{T_0}{\sqrt[4]{2}} = 246 \text{ К.}$$

$$1.88. A = (C_{V1} + C_{V2}) T_0 \left[ \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{2R}{C_{V1} + C_{V2}}} - 1 \right].$$

$$1.89. \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\ln(I_{01}/I_1)}{\ln(I_{02}/I_2)}.$$

$$1.90. T = \frac{\mathcal{E}(A_D + A_T)}{8\pi R \rho r^3} \approx 10^8 \text{ К}; P = \frac{4\rho RT}{A_D + A_T} \approx 10^9 \text{ атм, где } A_D \text{ и } A_T \text{ — атомные массы дейтрона и тритона соответственно.}$$

$$1.91. \mathcal{E} = \frac{4\pi \rho RT}{A_D} r^3 \approx 0,98 \text{ Дж, где } A_D \text{ — атомная масса дейтерия.}$$

$$1.92. K_{\text{ад}} = \gamma P = \gamma K_T.$$

**1.93.\*** Р е ш е н и е. Из известного выражения для разности молярных теплоемкостей однородного изотропного вещества

$$C_P - C_V = \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

следует, что

$$\delta Q = C_V dT + \frac{C_P - C_V}{(\partial V / \partial T)_P} dV.$$

Для адиабатического процесса  $dQ = 0$ . Поэтому

$$dT_{\text{ад}} + \frac{\gamma - 1}{(\partial V / \partial T)_P} dV_{\text{ад}} = 0.$$

Подставляя сюда

$$dT_{\text{ад}} = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV_{\text{ад}} + \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP_{\text{ад}},$$

получим

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{\text{ад}} = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Сравнивая это с

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P,$$

находим искомый результат.

**1.94.\*** Р е ш е н и е. Рассматривая внутреннюю энергию  $U$  как функцию  $P$  и  $V$ , напишем

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP.$$

Считая же ее функцией  $T$  и  $P$ , получим

$$\left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = C_V \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V.$$

Введем энтальпию  $I = U + PV$ . Тогда

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_P = \left( \frac{\partial (I - PV)}{\partial V} \right)_P = \left( \frac{\partial I}{\partial V} \right)_P - P.$$

Далее,

$$\left( \frac{\partial I}{\partial V} \right)_P = \left( \frac{\partial I}{\partial T} \right)_P \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = C_P \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P.$$

Следовательно,

$$dU = \left[ C_P \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - P \right] dV + C_V \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP.$$

Так как  $dU$  — полный дифференциал, то

$$\frac{\partial}{\partial P} \left[ C_P \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P - P \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[ C_V \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \right].$$

Выполнив дифференцирование, получим требуемое соотношение.

$$\mathbf{1.95.} \quad C_P - C_V = R + V \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_P - P \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_V.$$

$$1.96^* T_2 = \frac{C_V T_1 + P_2 V_1}{C_P}; V_2 = \frac{RT_2}{P_2}.$$

Решение. Тепло, полученное газом при адиабатическом расширении или сжатии, равно нулю. Работа, совершенная газом,  $A = P_2 \Delta V$ , поэтому  $\Delta U + P_2 \Delta V = 0$ . Так как  $U = C_V T$ , то отсюда находим

$$C_V(T_2 - T_1) + P_2(V_2 - V_1) = 0,$$

или

$$C_V(T_2 - T_1) + RT_2 = P_2 V_1,$$

откуда и следует ответ.

1.97\* Решение. Используя решение предыдущей задачи, находим

$$T_3 = \frac{C_V T_2 + P_1 V_2}{C_P}, \quad V_3 = \frac{RT_3}{P_1}.$$

С помощью уравнения Клапейрона  $PV = RT$  и соотношения Майера  $C_P - C_V = R$  выражение для  $T_3$  нетрудно преобразовать к виду

$$T_3 = T_1 + \frac{C_V}{C_P} \frac{V_1(P_2 - P_1)^2}{P_2}.$$

Отсюда видно, что в результате обоих адиабатических процессов температура, а с ней и объем газа всегда возрастают. Если давление меняется мало, то из полученных формул следует, что температура и объем меняются на бесконечно малые величины второго порядка. В первом порядке они остаются неизменными.

1.99.  $T_2 - T_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho c} \approx 2,4$  К, где  $\rho$  и  $c$  — соответственно плотность и удельная теплоемкость воды.

## § 2. Скорость звука. Истечение газов

2.1.  $\Delta v_{зв} \approx \frac{v_{зв}}{2T} \Delta T \approx 0,61$  м/с.

2.2.  $v_{зв} \approx 1260$  м/с.

2.3.  $\gamma = 1,41$ .

2.4.  $v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ , где  $\mu$  — средняя молярная масса, а  $\gamma$  — показатель адиабаты смеси.

$$\mu = \frac{v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2 + \dots}{v_1 + v_2 + \dots}; \quad \gamma = \frac{v_1 C_{P1} + v_2 C_{P2} + \dots}{v_1 C_{V1} + v_2 C_{V2} + \dots}.$$

2.5.  $v_{зв} = \sqrt{\frac{15}{16} RT} \approx 3 \cdot 10^7$  см/с = 300 км/с.

2.6.  $\Delta v_{зв}/v_{зв} = 4,5\%$ .

2.7.  $T = 4 \frac{\gamma_{воз} \mu_{He}}{\gamma_{He} \mu_{воз}} T_0 = 136$  К.

2.8. Увеличится в 2,86 раза.

2.9. Надо рассмотреть массу лавины  $M$ , содержащую 1 моль воздуха:

$$M \approx \rho V_{воз} \frac{\rho_{л}}{\rho_{л} - \rho}, \text{ где } V_{воз} \text{ — молярный объем воздуха.}$$

$$v_{зв} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{ад}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu_{воз}}} \frac{1}{1 - \rho} \sqrt{\frac{\mu_{воз}}{M}} \approx 27 \text{ м/с.}$$

$$2.10. T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 177 \text{ К.}$$

$$2.11. T_2 = T_1 - \frac{\mu v^2}{2C_p} = 194 \text{ К; } P_1 = P_2 \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 3,3 \text{ атм, где } \mu - \text{ молярная масса, } C_p - \text{ молярная теплоемкость, } P_2 - \text{ атмосферное давление.}$$

$$2.12. T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/4} \approx 400 \text{ К; } v = \sqrt{\frac{8RT_1}{\mu} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/4} \right]} \approx 860 \text{ м/с.}$$

$$2.13. \frac{M_0}{M} = e^{v/v_0} \approx 22, \text{ где } v_0 = \sqrt{\frac{2C_p T}{\mu}} \approx 2,58 \text{ км/с.}$$

$$2.14. v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T} \approx 1,4 \text{ км/с, где } \mu - \text{ средняя молярная масса, а } C_p - \text{ средняя молярная теплоемкость смеси.}$$

$$2.15. T_k = T_0 \left( \frac{v_k}{v_0} \right)^{R/C_v} = 278 \text{ К.}$$

$$2.16. n_k = \frac{p_{\text{рт}} g h}{k \gamma T_0} \approx 7,9 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}.$$

$$2.17. v = \sqrt{\frac{2C_p T}{\mu}}. \text{ Указанная максимальная скорость достигается при адиабатическом истечении газа в вакуум (или практически, когда } P/P_0 \gg 1, \text{ где } P - \text{ давление газа в баллоне, а } P_0 - \text{ наружное давление).}$$

$$2.18. v = v_{\text{зв}} \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}.$$

2.19\* Р е ш е н и е. В системе отсчета, в которой тело покоится, течение газа можно считать стационарным. Уравнение Бернулли в этой системе запишем в виде  $c_p T + v^2/2 = \text{const}$ . Температура максимальна в лобовой точке, где  $v = 0$ . Она равна

$$T_{\text{max}} = T \left( 1 + \frac{v^2}{2Tc_p} \right),$$

или

$$T_{\text{max}} = T \left[ 1 + \frac{1}{2} M^2 (\gamma - 1) \right],$$

где  $M \equiv v/v_{\text{зв}}$  — число Маха ( $v_{\text{зв}}$  — скорость звука).

$$2.20. P \approx 160 \text{ атм.}$$

$$2.21. L \approx 22 \text{ км.}$$

### § 3. Циклы. Расчет работы, внутренней энергии, тепловых эффектов и КПД

3.1. Выгоднее понижать температуру холодильника.

$$3.2. Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} A = 15 \text{ кДж.}$$

$$3.3. Q_1 = \frac{RT_1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 3110 \text{ Дж; } Q_2 = \frac{RT_2}{\gamma-1} \ln \frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = 2330 \text{ Дж;}$$

$$A = Q_1 - Q_2 = 780 \text{ Дж.}$$

$$3.4. A = \frac{Q_2(T_1 - T_2)}{T_2} = 418 \text{ Дж.}$$

$$3.5. \eta = (T_1 - T_2) \left( T_1 + \frac{C_p}{R} \frac{T_1 - T_2}{\ln(P_1/P_2)} \right)^{-1}, \text{ где } T_1 > T_2, P_1 > P_2.$$

$$3.6. \eta = \frac{(\gamma - 1)(T_1 - T_2) \ln(V_1/V_2)}{(\gamma - 1)T_1 \ln(V_1/V_2) + (T_1 - T_2)}, \text{ где } \gamma = C_p/C_v.$$

$$3.7. A_{12} = R(T_2 - T_1); Q_{12} = C_p(T_2 - T_1); \\ A_{23} = 0; Q_{23} = C_v(T_1 - T_2) < 0; \\ A_{31} = Q_{31} = RT_1 \ln(V_1/V_2) = RT_1 \ln(T_1/T_2) < 0; \\ \eta = \frac{R(T_2 - T_1) + RT_1 \ln(T_1/T_2)}{C_p(T_2 - T_1)}.$$

$$3.8. Q_{12} = C_v(T_2 - T_1); Q_{23} = 0; Q_{31} = C_v T_1 \ln(T_2/T_1); \\ \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

$$3.9. \eta = 1 - 2 \frac{C_p + C_v(T_1 - T_2)}{C_v(\sqrt{T_1 T_2} - T_2) + C_p(T_1 - \sqrt{T_1 T_2})}; Q_{12} = \frac{C_p + C_v}{2} (T_2 - T_1); \\ Q_{23} = C_v(\sqrt{T_1 T_2} - T_2); Q_{31} = C_v(T_1 - \sqrt{T_1 T_2}).$$

$$3.10. \eta = 1 - T_2/T_1.$$

$$3.11. A_{12} = Q_{12} = RT_1 \ln(V_2/V_1); A_{23} = (C_v - C_0)(T_1 - T_2); \\ Q_{23} = C_0(T_2 - T_1); A_{34} = Q_{34} = -RT_2 \ln(V_3/V_4); \\ A_{41} = (C_v - C_0)(T_2 - T_1); Q_{41} = C_0(T_1 - T_2); \\ \eta = \frac{R(T_1 - T_2) \ln(V_2/V_1)}{RT_1 \ln(V_1/V_2) + C_0(T_2 - T_1)}.$$

$$3.12. \eta \approx 13\%.$$

$$3.13. \eta \approx 25\%.$$

$$3.14. \eta \approx 50\%.$$

$$3.15. \eta = 1 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - 1 \right] \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \approx 0,16.$$

$$3.16. \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1 - \alpha_2^{1-\gamma}}{1 - \alpha_1^{1-\gamma}} \approx 1,29.$$

$$3.17. \eta = \frac{1}{9} (3 - 2 \ln 2) = 0,18.$$

$$3.18. m = 0,2 \text{ кг}/(\text{кВт} \cdot \text{ч}).$$

$$3.19. A = 4P_1 V_1 \left( \ln 2 - \frac{19}{24} \right) \approx -40 \text{ Дж}; \eta = \frac{\ln 2 - 19/24}{\ln 2 + 19/4} \approx 0,018.$$

$$3.20. A = c_v m_v (t_1 - t_2) \left\{ \left[ (\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]^{-1} - 1 \right\} = 21 \text{ кДж.}$$

$$3.21. \eta = \frac{4 - 6 \ln 2}{123} = -0,144\%. \text{ Отрицательный КПД не имеет смысла, но}$$

знак «минус» говорит об отрицательной «полезной работе», т. е. данное устройство не тепловая машина, а скорее «холодильник».

$$3.22. A_{12} = \frac{-A_{231} - RT_1 \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}}{1 - \frac{R(\alpha^2 - 1)}{2\alpha C_v}} = 935 \text{ Дж, где } \alpha = \frac{V_3}{V_2} = 2.$$

$$3.23. \eta = \frac{1 + 2 \ln 2}{61 + 2 \ln 2} \approx 0,04.$$

$$3.24. A \approx 600 \text{ кДж}; m_{\text{льда}} = 4,86 \text{ кг}.$$

$$3.25. A_{\text{max}} = cm_1(T_1 - T) - qm_2 = 61,8 \text{ кДж};$$

$$T = T_1 \exp\left(-\frac{m_2 q}{cm_1 T_2}\right) = 279 \text{ К, где } c \text{ — удельная теплоемкость воды}.$$

$$3.26. A_{\text{max}} = \lambda m_1 - cm_2(T - T_2) = 480 \text{ кДж}; T = T_2 \exp\left(\frac{m_1 \lambda}{cm_2 T_1}\right) = 315 \text{ К,}$$

где  $c$  — удельная теплоемкость воды.

$$3.27. m_{\text{л}} = \frac{McT_0}{q} \ln \frac{T_2}{T_1} \approx 8,2 \text{ кг}.$$

$$3.28. \nu \approx 0,1 \text{ моль}; A \approx 2,1 \text{ кДж}.$$

$$3.29. N_{\text{т.н.}} = N \frac{T_1 - T_2}{T_1} \approx 67 \text{ Вт}.$$

$$3.30. \Delta N = N \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 10,7 \text{ Вт}.$$

$$3.31. \text{На } 20\%.$$

$$3.32. t = \frac{5}{2} \frac{pV\Delta T}{T_B N} \left(1 - \frac{T_K}{T_B}\right) \approx 76 \text{ с}.$$

$$3.33. A = \nu q \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) + \nu C_B \left(T \ln \frac{T}{T_0} - T + T_0\right), \text{ где } q \text{ — молярная тепло-}$$

та плавления льда,  $C_B$  — молярная теплоемкость воды.

$$3.34. A \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ Дж}.$$

$$3.35. N \approx 6 \cdot 10^6 \text{ Вт/км}^2.$$

$$3.36. N = \frac{1}{2} \rho c h L u \frac{(\Delta T)^2}{T} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ кВт, где } \rho \text{ и } c \text{ — плотность и удельная}$$

теплоемкость воды соответственно.

$$3.37. A = \nu q \left(\frac{T}{T_0} - 1\right) + \nu C_B \left(T \ln \frac{T}{T_0} - T + T_0\right), \text{ где } q \text{ — молярная тепло-}$$

та плавления льда,  $C_B$  — молярная теплоемкость воды.

$$3.38. T = \sqrt{T_1 T_2} = 500 \text{ К}; N_{\text{max}} = 225 \text{ кВт}.$$

$$3.39. T = \sqrt{T_1 T_2} = 400 \text{ К}; N_{\text{max}} = \frac{a}{2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 \approx 100 \text{ кВт}.$$

$$3.40. S \approx 0,023R \text{ (руб), где } S \text{ — стоимость изготовления } 1 \text{ кг льда, а } R \text{ —}$$

текущая стоимость 1 кВт·ч электрической энергии.

**3.41.\*** Р е ш е н и е. Возьмем на диаграмме  $P, V$  (рис. 404) две бесконечно близкие изотермы  $1-2$  и  $3-4$  и две бесконечно близкие адиабаты  $2-3$  и  $4-1$  и применим к циклу  $1-2-3-4$  теорему Карно. Тепло  $Q_1$ , полученное системой на изотерме  $1-2$ , равно  $Q_1 = A_1 + \Delta U$ , где  $A_1 = P\Delta V$  — работа, совершенная системой на изотерме  $1-2$ , а  $\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V$  — изменение внутренней энергии

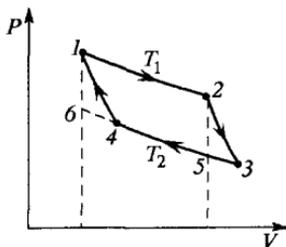


Рис. 404

на той же изотерме. Работа цикла изобразится площадью  $1-2-3-4$ . С точностью до величин высшего порядка малости при вычислении этой площади фигуру  $1-2-3-4$  можно заменить параллелограммом. Его площадь, очевидно, равна площади параллелограмма  $1-2-5-6$ ,

т. е.  $A = \Delta P \Delta V = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T \Delta V$ , где  $\Delta T = T_1 - T_2$ . По теореме Карно

$A/Q_1 = \Delta T/T_1$ . Подставляя сюда выражения для  $A$  и  $Q_1$ , получим первую из формул, которые надо доказать. Вторая формула получается из первой дифференцированием по  $T$  при постоянном  $V$ .

**3.42\* Решение.** Перепишем для удобства первое начало термодинамики  $\delta Q = dU + P dV$  в виде  $\delta Q = dI - V dP$ . Затем возьмем на  $PV$ -диаграмме (рис. 404) две бесконечно близкие изотермы  $1-2$  и  $3-4$  и две бесконечно близкие адиабаты  $2-3$  и  $4-1$  и применим к циклу  $1-2-3-4$  теорему Карно. Тепло  $Q_1$ , полученное системой на изотерме  $1-2$ , равно

$$Q_1 = I_2 - I_1 - V(P_2 - P_1).$$

Так как изменение энтальпии  $I_2 - I_1$  происходит по изотерме, то

$$Q_1 = \left[ \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T - V \right] (P_2 - P_1).$$

Работа цикла  $A$  изобразится площадью  $1-2-3-4$ . С точностью до бесконечно малых высшего порядка фигура  $1-2-3-4$  может считаться параллелограммом. Площадь этого параллелограмма равна площади параллелограмма  $1-2-5-6$ . Последняя в свою очередь равна длине основания  $6-1$ , умноженной на высоту  $(V_2 - V_1)$ . Поскольку точкам  $1$  и  $6$  соответствуют одинаковые объемы, но разные температуры, длина основания  $6-1$  равна  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_1 - T_2)$ . Поэтому для работы цикла получаем

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V (T_1 - T_2) (V_2 - V_1),$$

или, воспользовавшись тождеством  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ :

$$A = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P (T_1 - T_2) (P_2 - P_1).$$

По теореме Карно  $A/Q_1 = (T_1 - T_2)/T_1$ . Подставляя сюда значения для  $A$  и  $Q_1$ , получим первую из доказываемых формул. Вторая получается из первой дифференцированием по  $P$ , так как  $C_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P$ .

## § 4. Энтропия. Обратимые и необратимые процессы

**4.1\*  $Q \approx 20\,000$  ккал/кг.**

**Решение.** Тепло, отдаваемое двигателем при его работе воде отопительной системы (холодильнику), равно

$$Q' = q \frac{T_2}{T_1}.$$

Работа двигателя

$$A = q \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

расходуется на приведение в действие холодильной машины. Последняя берет от холодильника (грунтовая вода) тепло  $Q_3$  и передает нагревателю

(вода отопительной системы) тепло  $Q''$ . При этом

$$Q'' = \frac{T_2}{T_3} Q_3, \quad Q'' - Q_3 = Q'' \frac{T_2 - T_3}{T_2} = A,$$

$$Q'' = A \frac{T_2}{T_2 - T_3} = q \frac{T_1 - T_2}{T_1} \frac{T_2}{T_2 - T_3}.$$

Полное количество тепла, получаемое отапливаемым помещением, равно

$$Q = Q' + Q'' = q \frac{T_2(T_1 - T_3)}{T_1(T_2 - T_3)} \approx 20\,000 \text{ ккал/кг.}$$

График зависимости величины  $Q/q$  от температуры в отопительной системе приведен на рис. 405.

Другой (более общий) метод решения задачи основан на неравенстве Клаузиуса.

4.2. 1) Охладится. 2) Нагреется.

Ответ следует из тождества  $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ , если учесть условия стабильности физически однородного и изотропного вещества.

4.3\* Решение. Запишем неравенство Клаузиуса в виде

$$\int \frac{\delta Q_1}{T_1} - \int \frac{\delta Q_2}{T_2} \leq 0,$$

где  $\delta Q_1$  — элементарное тепло, получаемое машиной в круговом процессе от нагревателей, а  $\delta Q_2$  — элементарное тепло, отдаваемое холодильникам. (Величины  $\delta Q_1$  и  $\delta Q_2$  существенно положительны.) Если вместо  $T_1$  поставить максимальную, а вместо  $T_2$  — минимальную температуру, то неравенство только усилится. Значит

$$\frac{1}{T_{\max}} \int \delta Q_1 - \frac{1}{T_{\min}} \int \delta Q_2 \leq 0,$$

или

$$\frac{Q_1}{T_{\max}} - \frac{Q_2}{T_{\min}} \leq 0,$$

где  $Q_1$  — полное количество тепла, полученное машиной от нагревателей, а  $Q_2$  — полное количество тепла, отданное холодильникам. Из полученного неравенства следует

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

что и требовалось доказать.

4.4. Работа и количество тепла численно равны площади цикла на диаграмме (прямоугольник).

$$4.7. A = C \left[ T_1 \ln \frac{T_1}{T_3} - (T_1 - T_3) \right].$$

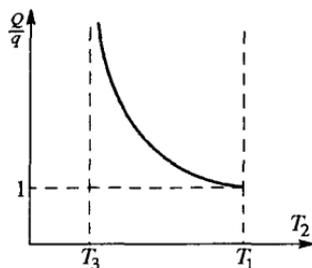


Рис. 405

$$4.8. \eta = \frac{T_1 - T_2}{2T_1}, \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}.$$

$$4.9. A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

$$4.10. \eta = 1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha \ln \alpha}.$$

$$4.11. A = C_p \left( T_3 - T_1 - T_1 \ln \frac{T_3}{T_1} \right).$$

$$4.12. A = C_1 (2\sqrt{T_1 T_2} - T_1 - T_2).$$

4.13\* Решение. Пусть  $1-3-4-2$  схематически изображает первый переход, а  $1-5-2$  — второй (рис. 406). Применяя к ним неравенство Клаузиуса и учитывая, что на адиабатах  $1-3$  и  $4-2$  система тепла не получает, напишем

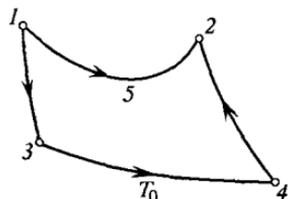


Рис. 406

$$\int_{152} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1342} \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_0}{T_0},$$

где  $Q_0$  — тепло, полученное на изотерме  $3-4$ . По условию  $T > T_0$  и  $\delta Q > 0$ , а поэтому

$$\int_{152} \frac{\delta Q}{T} < \int_{152} \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{Q}{T_0},$$

где  $Q$  — тепло, полученное на пути  $1-5-2$ . Комбинируя последнее неравенство с предыдущим равенством, получаем  $Q > Q_0$ .

$$4.15. \eta = 1 - \gamma \frac{e^{b/\gamma} - 1}{e^b - 1} \approx \frac{b}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \approx 0,025.$$

$$4.16. \eta \approx \frac{(\gamma - 1)(a - 1)}{(\gamma - 1)a + 1} \approx 0,024.$$

$$4.17. \eta = 1 - \frac{\ln a}{a - 1} \approx \frac{a - 1}{2} \approx 0,1.$$

$$4.18. \eta = 1 - \frac{\ln(4/3)}{3/2} \approx 0,29.$$

$$4.19. \frac{Q_{II}}{A} = 181.$$

$$4.20. \frac{Q_I}{A} = 2570.$$

$$4.21. \eta = 1 - \frac{2C_1}{C_1 + C_2} = \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

$$4.22. C = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{\ln(C_{\max}/C_{\min})} = 39,8 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}); \eta = 0,0525.$$

$$4.23. \eta = 1 - \frac{2}{a} \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \approx \frac{a^2}{12} \approx 0,52\%.$$

$$4.24. \Delta T \approx 8 \text{ К}.$$

У к а з а н и е. Рассматривать цепь как идеальную тепловую машину с холодильником — льдом и нагревателем — резервуаром комнатной температуры.

$$4.25. Q_{CA} = -A \frac{T_A + T_C}{T_B - T_C} = -700 \text{ Дж}.$$

$$4.26. \eta = 1 - \ln 2.$$

**4.27\* Решение.** Пусть во всех точках изотермы  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0$ . Тогда  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0$ , и на изотерме

$$dU = \left[ T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \right] dV = -P dV,$$

а поэтому  $\delta Q = dU + P dV = 0$ . Значит изотерма во всех точках должна совпадать с адиабатой.

**4.28.** 1) Если бы коэффициент теплового расширения обращался в нуль на всем протяжении изотермы, то она совпадала бы с адиабатой, и цикл Карно между температурой  $4^\circ\text{C}$  и какой-либо другой температурой осуществить было бы нельзя. 2) На самом деле для воды коэффициент теплового расширения обращается в нуль только в одной точке изотермы, так что условия задачи осуществить нельзя.

**4.29.**  $Q_{\max} = 12 \text{ кДж}$ ;  $\Delta S_{\text{хол}} = \Delta S_{\text{нагр}} = -47,5 \text{ Дж/К}$ .

**4.32\*  $A = (C_1 T_{10} + C_2 T_{20}) - (C_1 + C_2)T$ ;  $T^{C_1+C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}$ .**

**Решение.** Максимальная работа получится тогда, когда машина работает последовательно повторяющимися бесконечно малыми циклами Карно. Пусть в результате одного из таких циклов первое тело отдало тепло  $\delta Q_1 = -C_1 dT_1$ , а второе  $\delta Q_2 = -C_2 dT_2$  ( $T_1$  и  $T_2$  означают переменные температуры тел). Произведенная работа равна  $\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2$ , причем, как известно, сумма приведенных теплот равна нулю

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0,$$

или

$$C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2} = 0.$$

Интегрируя это соотношение с учетом начальных условий, получим

$$T_1^{C_1} T_2^{C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}.$$

Окончательная температура  $T$  найдется из условия  $T_1 = T_2 = T$ . Оно дает

$$T^{C_1+C_2} = T_{10}^{C_1} T_{20}^{C_2}. \quad (*)$$

Максимальная работа, которую может совершить система,

$$A = \int \delta A = -C_1 \int_{T_{10}}^T dT - C_2 \int_{T_{20}}^T dT = (C_1 T_{10} + C_2 T_{20}) - (C_1 + C_2)T.$$

Она равна убыли внутренней энергии системы.

**4.33\* Решение.** Записав (\*) (см. решение предыдущей задачи) в виде

$$T^{1+C_1/C_2} = T_{20} T_{10}^{C_1/C_2},$$

в пределе  $C_2 \rightarrow \infty$  получим  $T = T_{20}$ . Этот результат непосредственно очевиден, поскольку  $C_2 = \infty$ . Элементарная работа

$$\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2 = (1 - T_2/T_1) \delta Q_1 = -C_1 (1 - T_{20}/T_1) dT_1.$$

Отсюда интегрированием находим

$$A = C_1 [T_{10} - T_{20} - T_{20} \ln (T_{10}/T_{20})].$$

Работа  $A$  меньше убыли внутренней энергии нагретого тела  $C_1(T_{10} - T_{20})$ . Часть внутренней энергии тело передает окружающей среде в виде тепла.

4.34.  $T = T_{10}$ ,  $A = C_2[T_{20} - T_{10} + T_{10} \ln(T_{10}/T_{20})]$ . Нетрудно проверить, что  $A > 0$ .

4.35.  $T_1^{\max} = 800 \text{ К}$ ;  $T_2 = T_3 = 300 \text{ К}$ .

4.36.  $A_{\min} = \frac{C_V T_0}{4} \approx 1560 \text{ Дж}$ .

4.37.  $T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 450 \text{ К}$ ;  $A = 0$ ;

$$\Delta S = \nu C_V \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} + \nu R \ln \frac{(V_1 + V_2)^2}{4V_1 V_2} \approx 0,8 \text{ Дж/К}$$

4.38.  $\Delta S = \frac{A}{T} = 0,08 \text{ Дж/К}$ .

4.39.  $T \approx T_0 \left(1 - \frac{\nu \mu}{5M}\right) \approx 0,98 T_0$ ;  $\Delta S \approx 0,65 \nu R$ .

4.40.  $\Delta S = \frac{5}{2} k \ln \frac{7}{5} - k \ln 2 \approx 0,21 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$ .

4.41.  $\Delta U = \frac{5}{2} P_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = -117 \text{ кал}$ ;

$$Q = \frac{3}{2} P_1 V_1 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) = -70 \text{ кал}$$

$$\Delta S = -\frac{3}{2} \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = -0,20 \text{ кал/К}$$

4.42.  $S_2 - S_1 = \frac{R}{2} (5\nu_1 + 3\nu_2) \ln \frac{5\nu_1 T_1 + 3\nu_2 T_2}{5\nu_1 + 3\nu_2} -$

$$- \frac{R}{2} (5\nu_1 \ln T_1 + 3\nu_2 \ln T_2) + R(\nu_1 + \nu_2) \ln 2 = 0,16 \text{ кал/}^\circ\text{С}$$

где  $\nu_1 = 0,0402$  — число молей водорода,  $\nu_2 = 0,0948$  — число молей гелия.

4.43\*  $A \leq 1,8 \text{ кДж}$ .

Решение. Для элементарного процесса  $T dS \geq \delta Q = dU + \delta A$ . При изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа  $U$  не меняется. Следовательно,  $\delta A \leq T dS$ . Отсюда

$$A \leq T(S_2 - S_1) = RT \left( \nu_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + \nu_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) = \\ = \nu RT \ln \frac{(V_1 + V_2)^2}{V_1 V_2} \approx 1,8 \text{ кДж}$$

4.44. Конечная температура  $T_2 = T_1 \left[ \frac{V_1 V_2}{(V_1 + V_2)^2} \right]^{1/5} = 0,754 T_1 = 226 \text{ К}$ ;

максимальная работа  $A_{\max} = (\nu_1 + \nu_2) C_V (T_1 - T_2) = 1,55 \text{ кДж}$ .

4.45.  $\Delta S = R \ln \frac{(n+1)^2}{4n}$ .

4.46.  $\Delta S = C_V \ln \left\{ \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 T_2} \frac{n}{(n+1)^2} \left[ \frac{4n}{(n+1)^2} \right]^{R/C_V} \right\}$ .

4.47.  $S_2 - S_1 = \frac{A}{T} - \nu C_V \frac{T_1 - T}{T} = 13 \text{ Дж/К}$ .

$$4.48. S_2 - S_1 = \nu [C_V \ln (T_2/T_1) + R \ln (V_2/V_1)],$$

где  $\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \approx 1,1$ . После подстановки  $C_V = 5/2 R$ ,  $V_2/V_1 = n$ :

$$S_2 - S_1 = \nu R (5/2 \ln (T_2/T_1) + \ln n) = 1,8 \text{ кал/}^\circ\text{C}.$$

$$4.49. \Delta S \approx \frac{\nu R}{4} \left(\frac{mg}{P\sigma}\right)^2.$$

$$4.50. \Delta S = R \frac{P_1 - P_2}{P_0}.$$

$$4.51. T_2 = 2T_1 = 400 \text{ K}; \Delta S = 0.$$

$$4.52. S_2 - S_1 \approx (C_P^B - C_P^A) \frac{T_0 - T_1}{T_1} - \frac{q}{T_0} = -20,6 \text{ Дж/(K} \cdot \text{моль)}.$$

$$4.53. S_2 - S_1 = M c_P \left[ \frac{T - T_0}{T_0} - \ln \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0}\right) \right] \approx 1,5 \text{ Дж/K}.$$

$$4.56. \Delta U = U - U_0 = \frac{M}{\mu} C_V T_0 (2^{\gamma-1} - 1);$$

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{M}{\mu} C_V (\gamma - 1) \ln 2, \text{ где } \gamma = C_P/C_V.$$

$$4.57. \Delta S = R \frac{M}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}, \text{ где } \mu \text{ — молярная масса газа.}$$

$$4.58. \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{P V^n}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{V_2^{n-1}} - \frac{1}{V_1^{n-1}} \right);$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (n C_V - C_P) \ln (V_1/V_2).$$

В частности,  $\Delta U = -625$  кал/моль,  $\Delta S \approx -4$  кал/(моль·К) — система не поглощает, а отдает тепло,  $Q = -417$  кал/моль.

$$4.59. A = -2PV \ln 2.$$

$$4.60. \Delta S = 63 \text{ кал/K}.$$

$$4.61. \Delta S = 3,2 \text{ кал/K}.$$

4.62.  $s = c_P \ln T + \frac{\lambda(T)}{T} \xi + \text{const}$ , где  $c_P$  — удельная теплоемкость жидкости,  $\lambda(T)$  — удельная теплота парообразования при температуре  $T$ ,  $\xi$  — отношение массы пара ко всей массе системы.

4.63\*. Р е ш е н и е. Тела  $A$  и  $B$  могут обмениваться внутренней энергией путем теплообмена и производить работу друг над другом. Так как они помещены в жесткую адиабатическую оболочку, то изменения их внутренних энергий в элементарном процессе связаны соотношением  $dU_A = -dU_B$ . В силу равенства действия и противодействия  $\delta A_A = -\delta A_B$ , где  $\delta A_A$  — работа тела  $A$  над телом  $B$ , а  $\delta A_B$  — работа тела  $B$  над телом  $A$ . Следовательно,

$$(dU + \delta A)_A = -(dU + \delta A)_B,$$

или

$$\delta Q_A = -\delta Q_B.$$

Количество тепла, полученное телом  $A$ , равно количеству тепла, отданному телом  $B$ . Согласно постулату Клаузиуса, в системе самопроизвольно могут

проходить лишь такие процессы, в которых тепло переходит от тела, более нагретого, к телу, менее нагретому. Отсюда следует

$$\delta Q_A < 0, \quad \delta Q_B > 0,$$

так как  $T_A > T_B$ . Применяя к каждому из тел  $A$  и  $B$  неравенство Клаузиуса, получим

$$\Delta S_A \geq \int \frac{\delta Q_A}{T_A}, \quad \Delta S_B \geq \int \frac{\delta Q_B}{T_B}.$$

Складывая эти неравенства и принимая во внимание, что  $S_A + S_B = S$ , найдем

$$\Delta S \geq \int \left( \frac{\delta Q_A}{T_A} + \frac{\delta Q_B}{T_B} \right) = \int \delta Q_B \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) > 0.$$

4.64.  $\Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$ , где  $m$  — масса вещества.

4.65.  $\Delta S = C_P \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}$ , где  $C_P$  — теплоемкость одного тела.

4.66.  $\Delta S = -\frac{R}{2} \ln 2 \approx -2,95$  Дж/К.

4.67.  $\Delta S = 2R \ln 2 \approx 5,9$  Дж/К.

4.68.  $\Delta S = R \ln 2$ ;  $\Delta T = (2^{\gamma-1} - 1)T_0 \approx 0,32T_0$ .

4.69.  $\Delta S = \frac{5}{2} R \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} + 2R \ln 2$ ; если газы одинаковые, второе слагаемое отсутствует.

4.70.  $\Delta S = R \ln \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1 P_2} + 2R \ln 2$ ; если газы одинаковые, второе слагаемое отсутствует.

## § 5. Термодинамические потенциалы

5.3.  $P = A(V)T + B(V)$ , где  $A(V)$  и  $B(V)$  — произвольные функции объема.

5.4.  $V = A(P)T + B(P)$ , где  $A(P)$  и  $B(P)$  — произвольные функции давления.

5.5.  $A = \left( \frac{1}{2} bP^2 + \frac{2}{3} cP^3 \right) = 332$  Дж;

$$\Delta U = -T \int_0^P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) dP + A = A - \frac{1}{2} \beta T P^2 = 120 \text{ Дж.}$$

5.6. Условие полного дифференциала для  $\delta A$  приводит к соотношению  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = 0$ . Независимость работы  $A$  от пути интегрирования при наличии этого соотношения следует уже из того, что  $P$  не зависит от  $T$ , а является функцией только объема:  $P = P(V)$ .

5.9.  $\left( \frac{\partial I}{\partial P} \right)_T = V - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ ;  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$ ;  $\left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P$ .

$$\begin{aligned}
 5.11. \quad C_P - C_V &= \left[ P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \\
 &= -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P^2 \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T.
 \end{aligned}$$

$$5.12. \quad c_P - c_V = kT\alpha^2/\rho.$$

5.13. Для воды  $c_P - c_V = 2 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ ккал}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ . Столь ничтожная разница удельных теплоемкостей  $c_P$  и  $c_V$  для воды объясняется малостью температурного коэффициента расширения  $\alpha$ , обусловленной тем, что коэффициент  $\alpha$  при  $4^\circ\text{C}$  обращается в минимум  $\alpha = 0$ . Для ртути  $c_P - c_V = 17 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $c_V = 123 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) \approx 0,0292 \text{ ккал}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ,  $c_P/c_V = 1,13$ .

$$5.14^* \quad T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \frac{T}{C_P} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP.$$

Решение. При обратимом адиабатическом расширении остается постоянной энтропия газа  $S$ . Рассматривая ее как функцию температуры и давления, можно написать для элементарного обратимого процесса расширения:

$$\Delta S = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \Delta T + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \Delta P = 0.$$

Очевидно,

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} \left( T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = \frac{C_P}{T}.$$

Кроме того,

$$\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Поэтому

$$\frac{C_P}{T} \Delta T - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \Delta P = 0.$$

Отсюда для бесконечно малого процесса

$$\frac{\Delta T}{\Delta P} = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_S = \frac{T}{C_P} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Для конечного процесса интегрированием получаем ответ.

$$5.15. \quad \Delta T = \frac{\alpha T}{\rho c_P} \Delta P \approx 0,038^\circ\text{C}.$$

$$5.16. \quad \Delta T = \frac{\alpha T}{\rho c_P} \Delta P \approx -0,26^\circ\text{C}.$$

$$5.17. \quad \Delta T = - \frac{F \alpha_{\text{л}}}{c_{\rho \pi r^2}} T \approx -0,095 \text{ К}.$$

$$5.18. \quad \Delta T \approx \frac{F \alpha_{\text{л}} T}{c_{\rho S}} = -0,03 \text{ К}, \text{ где } S \text{ — сечение проволоки.}$$

$$5.19. \quad C_P - C_V = 15 \text{ Дж}/(\text{К}\cdot\text{кмоль}); \Delta S_T = -0,1 \text{ Дж}/\text{К}.$$

$$5.20. \frac{C_P}{C_V} = -\frac{\beta_T \Delta P_S}{(\Delta V/V)_S} = 1,13.$$

5.21. Доказательство сводится к исследованию знака выражения для изменения температуры  $dT_S = -\frac{T\alpha}{\beta_T C_V} dV_S$ , где  $\alpha$  и  $\beta_T$  — соответственно коэффициент объемного расширения и изотермический коэффициент сжатия.

$$5.22. A = \frac{\beta_T m P^2}{2\rho} = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}; Q = \frac{\alpha m T}{\rho} P = -4,33 \text{ Дж}.$$

$$5.23. \frac{C_P}{C_V} = 1,1; \Delta P_S = 11 \text{ атм}.$$

5.24.  $\Delta T \approx -\frac{2T_0 \Delta \rho}{c_P \rho_M^2 \Delta t_M} \Delta P$ , где  $c_P$  — удельная теплоемкость воды,  $\rho_M$  — плотность воды при  $4^\circ\text{C}$ ,  $\Delta t_M = 4^\circ\text{C}$ . Конечная температура воды  $t_K = 0,4^\circ\text{C}$ .

5.25\* Решение. Пусть  $l$ ,  $\tau$ ,  $T$ ,  $S$  — длина, натяжение, температура и энтропия жгута. Из этих четырех величин независимы только две, остальные являются их функциями. Поэтому справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l = -1. \quad (*)$$

Из первого начала, записанного в виде  $d(U - TS) = -S dT + \tau dl$ , следует

$$\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = -\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_l \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T = -\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_l.$$

Далее, так как  $T$ ,  $\tau$ ,  $l$  связаны функциональным соотношением, то тождественно

$$\left(\frac{\partial l}{\partial S}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau.$$

Подставляя это в (\*), получим

$$\frac{C_l}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau = -1,$$

где  $C_l = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_l$  — теплоемкость при постоянной длине. Она положительна для всех тел:  $C_l > 0$ . Величина  $\left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_T$  также положительна для всех тел. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_S \left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_\tau < 0.$$

По условию задачи для резинового жгута  $(\partial l/\partial T)_\tau < 0$ , а поэтому  $(\partial T/\partial l)_S > 0$ . Отсюда следует, что жгут нагреется, если его адиабатически удлинить.

$$5.27. \Delta T_S = -0,04 \text{ К (вода охладилась!)}$$

$$5.28. \alpha = -\frac{Q}{TV(P_2 - P_1)} \approx 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1};$$

$$\beta_T = \gamma \beta_S = \gamma \frac{2A}{V(P_2^2 - P_1^2)} \approx 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1};$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \approx \frac{\alpha}{\beta_T} = 2,14 \cdot 10^6 \text{ Па/К}.$$

$$5.29. U = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( E - T \frac{\partial E}{\partial T} \right).$$

$$5.30. P_0 = T \alpha K \approx 1,6 \cdot 10^9 \text{ Па.}$$

$$5.31. \gamma = 1 + \frac{T \alpha^2 v_{\text{зв}}^2}{C_P} \approx 1,2.$$

$$5.32. C_P = \frac{5}{2} R. \text{ (Идеальный газ.)}$$

$$5.33. C_V = \frac{3}{2} R. \text{ (Идеальный газ.)}$$

$$5.34. \left( \frac{\partial Q}{\partial V} \right)_T = 3P = 3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$5.35. \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \frac{6P}{T} = 2 \cdot 10^3 \text{ Па/К.}$$

$$5.36. U = \Psi_0(V) + 3\alpha T^4 V, \text{ где } \Psi_0(V) \text{ — свободная энергия при } T = 0.$$

$$5.37. \Delta \Psi = -RT \ln 2.$$

$$5.38. Q = \frac{\alpha}{T} B_0^2.$$

$$5.39. \Delta S = \frac{4\sigma}{3c} T^3 (V_2 - V_1), \text{ где } \sigma \text{ — постоянная Стефана—Больцмана,}$$

$c$  — скорость света.

$$5.40. A = \frac{4}{3} \sigma T_1^3 (T_1 - T_2) (V_2 - V_1), \text{ где } V_1 \text{ и } V_2 \text{ — наименьший и наи-}$$

больший объемы на изотерме  $T_1$ .

$$5.41. t_0 \approx t \frac{T}{T_0} \approx 10^7 \text{ лет.}$$

$$5.42. C_V = 12A^{1/4} V P^{3/4} = 8,4 \cdot 10^4 \text{ эрг/К; } C_V = 8C_V^{\text{ид.}}$$

$$5.43. C_P = \infty; VT^3 = \text{const.}$$

$$5.44. \Delta \Psi \approx 10 \text{ Дж; } \Delta S \approx -0,67 \text{ Дж/К.}$$

$$5.45. A \approx 33,3 \text{ Дж; } \Delta P \approx -14 \text{ мм рт. ст.; } \Delta V \approx 0,33 \text{ л;}$$

$$\Delta S \approx 0,03 \text{ Дж/К; } \Delta I \approx -33,3 \text{ Дж.}$$

5.46\* Решение.

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \right)_V = 12A(V)T^3,$$

$$P = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial V} \right)_T = - \frac{dU_0}{dV} + T^4 \frac{dA}{dV},$$

$$\frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{V_0} \frac{4T^3 \frac{dA}{dV}}{\frac{d^2 U_0}{dV^2} - T^4 \frac{d^2 A}{dV^2}}.$$

Отсюда и следует требуемый результат.

$$5.47. T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \frac{dP}{C_P} dP.$$

5.50\* Решение. Для вычисления изменения энтропии газа заменим реальный процесс Джоуля—Томсона квазистатическим изоэнтальпическим

процессом, переводящим систему в то же конечное состояние. Для такого процесса  $dI = T dS + V dP = 0$ , а поэтому

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_I = -\frac{V}{T} < 0.$$

Так как давление в процессе Джоуля—Томсона понижается, то из полученного неравенства следует, что энтропия возрастает.

5.51.  $x \approx \frac{Pv - c\Delta T}{\lambda} \approx 2,6\%$ , где  $v$  — объем единицы массы воды (удельный объем).

## § 6. Реальные газы. Газ Ван-дер-Ваальса

$$6.1. P_{кр} = \frac{a}{27b^2}; T_{кр} = \frac{8a}{27Rb}; V_{кр} = 3b; \frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}} = \frac{8}{3}.$$

Последнее отношение называется критическим коэффициентом. В действительности критические коэффициенты для различных газов имеют несколько разные значения и все они немного больше  $8/3$ .

$$6.2. \left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)\left(\varphi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \tau.$$

$$6.3. V_{кр} = \frac{3RT_{кр}}{8P_{кр}} = 128 \text{ см}^3, \text{ опыт дает } 94 \text{ см}^3.$$

$$6.4. b = 38,6 \text{ см}^3/\text{моль}; a = 1,35 \cdot 10^6 \text{ атм} \cdot \text{см}^6/\text{моль}^2.$$

$$6.5. \rho_{кр} = \frac{\mu}{V_{кр}} = \frac{8\mu P_{кр}}{3RT_{кр}} = 0,189 \text{ г/см}^3. \text{ Опыт дает } \rho_{кр} = 0,32 \text{ г/см}^3.$$

$$6.6. P = \frac{a}{V^2} = 16\,800 \text{ атм.}$$

$$6.7. T_B = (27/8)T_{кр} = 3,375T_{кр}.$$

При решении задачи произведение  $PV$  удобнее рассматривать как функцию плотности газа  $\rho$  и искать условие, при котором производная  $d(PV)/d\rho$  обращается в нуль при  $\rho = 0$ .

$$6.8. \mu = 2,48 \text{ г/моль.}$$

$$6.9. P \approx 98 \text{ атм}; P_{ид} \approx 198 \text{ атм.}$$

$$6.10. \beta_T = \frac{V^2(V-b)^2}{RTV^3 + 2a(V-b)^2}.$$

$$6.11. \alpha = \frac{V-b}{TV_0 \left[ 1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3} \right]}.$$

6.12\* Решение. Для простоты примем, что масса вещества равна единице. Тогда удельные объемы жидкости и газа изобразятся длинами отрезков  $NL$  и  $NG$ , а удельный объем вещества в двухфазном состоянии — длиной отрезка  $NM$ . Если массы жидкости и газа равны соответственно  $m_{ж}$  и  $m_{г}$ , то  $V_M = |NM| = m_{ж}|NL| + m_{г}|NG|$ . Искомое соотношение получится отсюда, если принять во внимание, что  $m_{ж} + m_{г} = 1$ .

6.13.  $C_P = \infty$ . Достаточно заметить, что в указанной области изобары совпадают с изотермами.

**6.14\*** Решение. В критической точке  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$ . Поэтому первый член разложения Тейлора в окрестности этой точки имеет вид

$$P - P_{\text{кр}} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial V^3}\right)_{\text{кр}} (V - V_{\text{кр}})^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\text{кр}} (T - T_{\text{кр}}).$$

Вычислив производные из уравнения Ван-дер-Ваальса и воспользовавшись известными выражениями критических параметров через  $a$  и  $b$ , получим

$$P - P_{\text{кр}} = -\frac{9}{16} \frac{RT_{\text{кр}}}{V_{\text{кр}}^4} (V - V_{\text{кр}})^3 + \frac{3}{2} \frac{R}{V_{\text{кр}}} (T - T_{\text{кр}}).$$

Вместо объема  $V$  введем плотность  $\rho = \mu/V$ , где  $\mu$  — молярная масса. Используя еще уравнение гидростатики  $P - P_{\text{кр}} = -\rho_{\text{кр}} g h$ , получим в рассматриваемом приближении

$$\frac{\rho - \rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{кр}}} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{6 \frac{\mu g h + (3/2) R(T - T_{\text{кр}})}{RT_{\text{кр}}}}.$$

Высота  $h$  отсчитывается от того уровня, где плотность вещества равна критической, причем положительным считается направление вверх. В частности, при  $T = T_{\text{кр}}$

$$\frac{\rho - \rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{кр}}} = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{6\mu g h}{RT_{\text{кр}}}}.$$

Вдали от критической точки газ можно считать идеальным. В этом случае для относительного изменения плотности с высотой мы имели бы

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\mu g h}{RT}.$$

При одинаковых температурах и относительных молекулярных массах эта величина меньше предыдущей в  $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3} \left(\frac{RT}{\mu g h}\right)^{2/3}$  раз. Для воздуха ( $\mu = 28,8$ ,  $T_{\text{кр}} = 132,5$  К) при высоте  $h = 1$  см  $\alpha \approx 8700$ ,  $(\rho - \rho_{\text{кр}})/\rho_{\text{кр}} \approx -1/100$ .

**6.15.**  $V = \frac{8P_{\text{кр}}V_1\mu}{3RT_{\text{кр}}\rho} = 2,96 \text{ см}^3.$

**6.16.** Плотность  $\rho$  допустима, если

$$\left| \frac{\rho}{\rho_{\text{кр}}} - 1 \right| < \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{\rho g h_0}{P_0}} \text{ см}^3.$$

**У к а з а н и е.** Воспользоваться тем, что вблизи критической точки изотерма  $T \approx T_{\text{кр}}$  имеет вид  $P_{\text{кр}} - P = P_0 \left(\frac{V - V_{\text{кр}}}{V_{\text{кр}}}\right)^3$ .

**6.17.**  $T = 0,8T_{\text{кр}} \approx 373 \text{ К} = 100 \text{ }^\circ\text{C}.$

**6.18.**  $x = \frac{V_{\text{ж}}}{V_{\text{кр}}} \approx 0,25.$

**6.19.**  $\lambda = \int_{v_{\text{ж}}}^{v_{\text{п}}} \frac{a}{v^2} dv = a \left(\frac{1}{v_{\text{ж}}} - \frac{1}{v_{\text{п}}}\right) \approx \frac{a}{v_{\text{ж}}} = v_{\text{ж}} P_i = \frac{P_i}{\rho}.$

6.20.  $U = \nu \left( C_V T - \frac{a\nu}{V} \right)$ , где  $\nu$  — число молей, а постоянные  $C_V$  и  $a$  отнесены к одному молю.

$$6.21. A = 2RT \ln \frac{2V-2b}{V-2b} - \frac{2a}{V}.$$

$$6.22. \Delta T = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \approx 0,25 \text{ К}.$$

6.23. Газ охладится. Его температура и давление будут:

$$T' = T - \frac{a}{2C_V} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2 (V_1 + V_2)}, \quad P' = \frac{2RT'}{V_1 + V_2 - 2b} - \frac{4a}{(V_1 + V_2)^2}.$$

$$6.24. T' - T = -\frac{a\nu}{2V C_V} \approx -0,0053 \text{ К}, \text{ где } \nu \approx 0,041 \text{ — число молей}.$$

$$6.25. T' - T = \frac{a\mu}{C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = \frac{9RT_{\text{кр}} V_{\text{кр}} \mu}{8C_V} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \approx -0,01 \text{ К}.$$

$$6.26. Q = a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

$$6.27. Q = \frac{C_V}{R} \left\{ \left( P + \frac{a}{V_2^2} \right) (V_2 - b) - \left( P + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) \right\} + a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

$$6.28. C_P - C_V = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.$$

6.29.  $S = \nu \left[ R \ln \left( \frac{V - \nu b}{\nu} \right) + \int \frac{C_V(T)}{T} dT + \text{const} \right]$ , где аддитивная постоянная в квадратных скобках от числа частиц не зависит. Если теплоемкость  $C_V$  не зависит от температуры, то

$$S = \nu \left[ R \ln \left( \frac{V - \nu b}{\nu} \right) + C_V \ln T + \text{const} \right].$$

$$6.30. T(V - b)^{n-1} = \text{const}, \text{ где } n = 1 + \frac{R}{C_V - C}.$$

$$6.32. A = 2C_V T_1 \left[ 1 - \left( \frac{V_1 - 2b}{V_2 - 2b} \right)^{R/C_V} \right] + 4a \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right).$$

$$6.33. T^{C_V/R} (V - b) \exp [-kT^2/(2R)] = \text{const}.$$

$$6.34. S - 2a\sqrt{T} = \text{const}; T^{C_V/R} (V - b) \exp (-2a\sqrt{T}/R) = \text{const}.$$

$$6.35. C_V T - \frac{a}{V} = \text{const}; C = C_V \left( 1 - \frac{RT}{a(V-b)} \right) V^2.$$

$$6.36. Q = 2RT \ln \left[ (V - 2b) \left( \frac{V}{10} - 2b \right)^{-1} \right].$$

$$6.37. \Delta S = (C_V - R) \ln (T_2/T_1).$$

$$6.38. \Delta S = R \ln \frac{aV_0 - ab + bV_0\Delta U}{(V_0 - b)(a - V_0\Delta U)}.$$

$$6.39. \Delta S = 2R \ln \frac{T_2}{T_1} \approx -16,6 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

$$6.40. \Delta S \approx -R \ln 2 - \frac{a}{2V_0 T_0} - \frac{Rb}{V_0}.$$

$$6.41. \Delta S = C_V \ln \left( 1 - \frac{3a}{2C_V V_0 T_0} \right) + R \ln \frac{2V_0 - b}{V_0 - b} \approx R \ln 2 - \frac{3a}{4V_0 T_0} + \frac{Rb}{2V_0}.$$

$$6.42. T = \frac{8A + \frac{a}{9b}}{R}.$$

$$6.43. P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2).$$

$$6.44. P_2 = \frac{R}{2V_2 C_V} \left[ \frac{C_V}{R} \left( P_{10} + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) - \frac{3a}{4V_1} \right].$$

$$6.45. \Delta S = R \ln \left\{ \frac{RT_1}{P_2 V_1 [1 - V_{\text{кр}}/(3V_1)]} \right\} \approx 26 \text{ Дж/К}.$$

$$6.46. \Delta S = C_V \ln \left( 1 - \frac{a}{V_0 C_V T_0} \right) + R \ln 2;$$

$$\Delta U = C_V T_0 (2^{R/C_V} - 1) - 2^{R/C_V} \frac{a}{V_0}.$$

$$6.47. \Delta S \approx \frac{Rb}{V_0} + R \ln 2; \Delta U = C_V T_0 (2^{R/C_V} - 1) + 2^{R/C_V} \frac{RbT_0}{V_0}.$$

6.48.  $\frac{T_{\text{BB}}}{T_{\text{ид}}} = \left( \frac{V_0 V - bV}{V_0 V - bV_0} \right)^{R/C_V} < 1$ , т.е. газ Ван-дер-Ваальса охлаждается сильнее.

$$6.49. T = T_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{R}{R+C_V}}; T_{\text{ид}} = T.$$

$$6.50. C = - \frac{C_V}{1 + \frac{2a}{PV^2}}.$$

6.51\* Решение. Согласно первому началу термодинамики, теплота испарения одного моля жидкости равна  $\Lambda = U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} + A$ , где  $U_{\text{п}}$  и  $U_{\text{ж}}$  — внутренние энергии пара и жидкости, а  $A = P(V_{\text{п}} - V_{\text{ж}})$  — работа против постоянного внешнего давления. Величина  $U_{\text{п}} - U_{\text{ж}}$  найдется из уравнения

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P = \frac{a}{V^2},$$

которое дает

$$U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} = a \left( \frac{1}{V_{\text{ж}}} - \frac{1}{V_{\text{п}}} \right).$$

Таким образом,

$$\Lambda = V_{\text{п}} \left( P - \frac{a}{V_{\text{п}}^2} \right) - V_{\text{ж}} \left( P - \frac{a}{V_{\text{ж}}^2} \right) = V_{\text{п}} \left( \frac{RT}{V_{\text{п}} - b} - \frac{2a}{V_{\text{п}}^2} \right) - V_{\text{ж}} \left( \frac{RT}{V_{\text{ж}} - b} - \frac{2a}{V_{\text{ж}}^2} \right).$$

$$6.52. \Delta S = R \ln \left[ 25 \left( \frac{11}{17} \right)^3 \right] \approx 1,9R.$$

$$6.53. \frac{V_2}{V_1} \approx 1,2.$$

$$6.54. C = \frac{C_V}{1 - \ln 2} \approx 5R.$$

$$6.55. \Delta \Psi = -a \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0} \right) - RT_0 \ln \frac{V_1 - b}{V_0 - b} \approx -2,88 \text{ МДж}.$$

$$6.56. \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta v_{3B}}{v_{3B}} \approx \frac{V}{V-b} - 1 \approx \frac{b}{V} = \frac{2N_{\Lambda} d^3}{V} \approx 4 \cdot 10^{-4}; v_{3B}^{BB} \approx \frac{V}{V-b} v_{3B}^{ид}.$$

$$6.57. v_{3B} = \sqrt{\frac{2aR}{3\mu b C_V}}.$$

$$6.58. \frac{\beta_T}{\beta_S} = \frac{C_P}{C_V} \approx \left(\frac{C_P}{C_V}\right)_{ид} + \frac{2aP}{C_V RT^2} = \frac{5}{3} + 0,054 \approx 1,72.$$

$$6.59. \tau = \frac{6\pi b}{\sigma} \sqrt{\frac{3Mb}{2a}}.$$

$$6.60. a = \frac{0,03RTV}{2} \approx 0,036 \text{ л}^2 \cdot \text{атм/моль}^2.$$

$$6.61. A = R(T_2 - T_1) \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} \approx 21 \text{ Дж}.$$

$$6.62. \eta = 1 - \frac{RT_1}{C_V(T_2 - T_1)} \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}.$$

$$6.63. \eta = PV \left[ \frac{C_V}{R} P(V-b) + 2PV \left( \frac{C_V}{R} + 1 \right) - \left( \frac{C_V}{R} - 1 \right) \frac{a}{2V} + \frac{C_V}{R} \frac{3ab}{4V^2} \right]^{-1}.$$

$$6.64. \eta = 1 - \left( \frac{V_1 - b}{V_2 - b} \right)^{R/C_V}.$$

$$6.65. Q = 10^3 \text{ Дж}.$$

$$6.66. \frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{\frac{bRT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}{C_P \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}.$$

$$6.67. \frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_P}; T_{инв} = \frac{2a}{Rb} = \frac{27}{4} T_{кр}.$$

$$6.68. \Delta T = \frac{b\Delta P}{C_P} > 0, \text{ где } \Delta P \text{ мало, причем } \Delta P < 0.$$

$$6.69. \Delta T = \frac{2a\Delta P}{RTC_P}, \text{ где } \Delta P \text{ мало и отрицательно.}$$

6.70.  $T < T_{инв} = 35,1 \text{ К}$ . При дросселировании гелия под давлением 30 атм, когда формула  $\Delta T = \frac{2a\Delta P}{RTC_P}$  (см. предыдущую задачу) неприменима, инверсия наблюдается при 14 К.

$$6.71. \frac{bRT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2} = 0.$$

6.72. Гипербола:  $T = \frac{2a}{Rb} \frac{V-b}{V}$  (рис. 407 и 408). Асимптоты, изображенные пунктирными прямыми, пересекают ось ординат в точках инверсии дифференциального эффекта Джоуля—Томсона.

$$6.73. \frac{\Delta T_{др}}{\Delta T_S} \approx \frac{b}{V} \left( 1 + \frac{2a}{RTb} \right) \left( 1 - \frac{b}{V} \right) = \frac{V_{кр}}{3V} \left( \frac{27}{4} \frac{T_{кр}}{T} + 1 \right) \left( 1 - \frac{V_{кр}}{3V} \right) \approx 0,11.$$

$$6.74^* P_0 \approx 100 \text{ атм}.$$

Решение. При медленном вытекании состояние вещества в сосуде можно считать равновесным. А так как сосуд теплоизолирован, то удельная

(а, следовательно, и молярная) энтропия газа в сосуде должна оставаться неизменной. При обратимом адиабатическом расширении с совершением внешней работы газ охлаждается. По достижении некоторой температуры

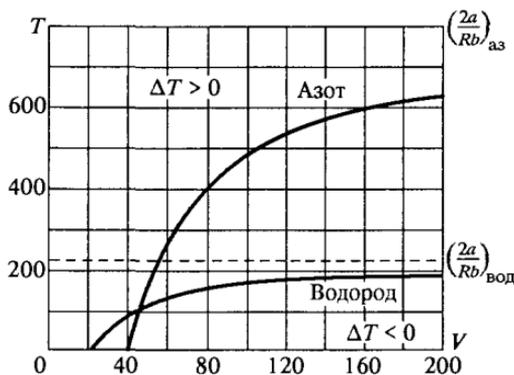


Рис. 407

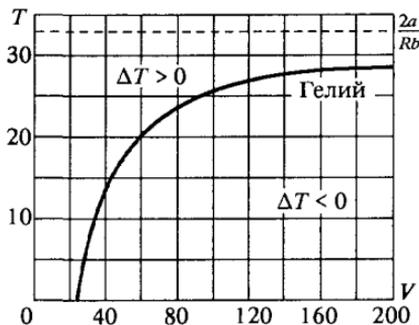


Рис. 408

дальнейшее понижение давления газа сопровождается не только понижением температуры, но и конденсацией его в жидкость. Этот процесс также является равновесным и идет без изменения энтропии. Для изменения энтропии моля вещества при переходе из начального (газообразного) состояния в конечное (жидкое) состояние можно написать

$$\Delta S = \int \left( C_V \frac{dT}{T} + P \frac{dV}{T} \right) - \frac{\Lambda}{T_1}.$$

Подставив сюда

$$p dV = R dT - V dP = R dT - RT \frac{dP}{P}$$

и учтя соотношение  $C_P = C_V + R$ , получим

$$\Delta S = C_P \ln \frac{T_1}{T_0} - R \ln \frac{P_1}{P_0} - \frac{\Lambda}{T_1} = R \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} - \ln \frac{P_1}{P_0} - \frac{\Lambda}{RT_1} \right).$$

Приравнявая  $\Delta S$  нулю, находим

$$P_0 = P_1 \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} e^{\Lambda/(RT_1)} \approx 100 \text{ атм.}$$

6.75.  $V_{кр} = 113 \text{ см}^3/\text{моль}$ ;  $P_{кр} = 34,4 \text{ атм.}$

6.76.  $Q = b \left( \frac{T}{T_{кр}} - 1 \right) (P_1 - P_2) \approx 320 \text{ Дж/моль.}$

6.77.  $\Delta U = P_2 V_2 - P_1 V_1 + \frac{RTb}{a} \left( \frac{P_2 V_2^2}{V_2 + b} - \frac{P_1 V_1^2}{V_1 + b} \right)$ , где  $P_1$  и  $P_2$  — давления газа при объемах  $V_1$  и  $V_2$  соответственно.

6.78.  $dS = \left( R + \frac{a}{T_0 V_0} \right) \exp \left( - \frac{a}{RT V_0} \right) \frac{dV}{V-b}.$

6.79.  $\Delta C_V = \frac{2a}{T^2} \left( \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -3,8 \cdot 10^{-2} R = -0,316 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль).}$

## § 7. Распределение Максвелла<sup>1</sup>

$$7.1. \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} \exp \left[ \frac{\mu(v_2^2 - v_1^2)}{2RT} \right] \approx 0,98, \text{ где } \mu \text{ — молярная масса газа.}$$

$$7.2. \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}, \quad \overline{mv_x^2} = \frac{kT}{2}.$$

$$7.3. v_m = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 342 \text{ м/с}; \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1,13v_m = 386 \text{ м/с};$$

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,23v_m = 420 \text{ м/с.}$$

$$7.4. t = 153 \text{ }^\circ\text{C.}$$

$$7.6. \bar{v} \propto p^{1/5}.$$

$$7.7. dN = 2\pi N (\pi kT)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp \left[ -\varepsilon/(kT) \right] d\varepsilon.$$

$$7.8. \varepsilon_m = kT/2.$$

$$7.9. T = mv^2/(3k).$$

$$7.10^*: v_{1/2} = 1,088\sqrt{2kT/m}.$$

Решение. Искомая скорость определяется из уравнения

$$\Phi(x) = x \frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{2},$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности ошибок:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi,$$

а  $x^2 = mv_{1/2}^2/(2kT)$ . Уравнение нетрудно решить, пользуясь таблицами функции  $\Phi(x)$  и ее производной  $\Phi'(x)$ .<sup>2</sup> Таким путем находим  $x = 1,088$  и получаем ответ.

$$7.11. \left( \frac{1}{v} \right) = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} = \frac{4}{\pi \bar{v}}.$$

7.12\* Решение. Искомое число молекул  $dN$  равно среднему числу скоростных точек в элементе объема пространства скоростей, заключенном между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами  $v_{\perp}$  и  $v_{\perp} + dv_{\perp}$  и высотой  $dv_{\parallel}$ . Объем этого элемента равен  $d\omega = 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}$ , а среднее число скоростных точек в нем

$$dN = f d\omega = 2\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\varepsilon}{kT} \right) v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}.$$

$$7.13. \frac{dN''}{dN'} = \left( \frac{V''}{V'} \right)^{(\gamma-1)/2} \approx 1,15.$$

<sup>1</sup> Напомним, что в данном сборнике приняты два равноценных обозначения среднего. Например,  $\overline{v^2} = \langle v^2 \rangle$

<sup>2</sup> См. любую книгу по специальным функциям. Например, Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. Гл. 21.

7.14.  $\alpha = \exp[-eV/(kT)]$ , где  $e$  — заряд электрона (по абсолютной величине). 1)  $\alpha = 13,5\%$ ; 2)  $\alpha = 1,8\%$ .

7.15.  $v = 2\pi R^2 n / \delta \approx 660$  м/с.

7.16.  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

7.17.  $n(r) = \frac{v}{4\pi r^2} \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$ .

7.18.  $j = \frac{NR}{t^4} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mR^2}{2kTt^2}\right)$ ;  $t_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{m}{kT}}$ ;  $v_0 = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}$ .

7.19\*  $z = n\bar{v}/4$ .

Решение. Рассмотрим сначала частный случай, когда абсолютные значения скоростей всех молекул одинаковы, но их распределение по скоростям изотропно. В этом случае число молекул в  $1 \text{ см}^3$ , направления скоростей которых лежат внутри телесного угла  $d\Omega$ , будет  $dn = n d\Omega / (4\pi)$ , где  $n$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ . Рассмотрим молекулы, ударяющиеся об  $1 \text{ см}^2$  стенки и подлетающие к ней с углами падения между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ . Для них

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad dn = n \sin \theta d\theta / 2.$$

Число ударов молекул рассматриваемого типа об  $1 \text{ см}^2$  стенки в 1 с будет

$$dz = nv \sin \theta \cos \theta d\theta / 2.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до  $\pi/2$ , найдем  $z = n\bar{v}/4$ .

Если абсолютные скорости молекул различны, то молекулы следует разбить на группы с практически одинаковыми значениями скоростей. Таким путем легко получить

$$z = n\bar{v}/4, \quad (*)$$

где  $\bar{v}$  — средняя скорость молекул. Для максвелловского распределения

$$z = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

7.20.  $z = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$ .

7.21.  $dP = \frac{4\pi}{3} mn \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$ ;  $v_0 = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}$ .

7.22.  $dN = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$ ;  $v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ .

7.23. Для изотропного распределения  $E = mn\langle v^3 \rangle / 8$ ;

для максвелловского распределения  $E = n \sqrt{\frac{2k^3 T^3}{m\pi}} = \frac{\pi n m}{16} \langle v^3 \rangle$ ,

где  $m$  — масса молекулы,  $n$  — число молекул в  $1 \text{ см}^3$ .

7.24.  $\bar{\epsilon} = 2kT$ .

7.25\*  $t_{1/2} = \tau \ln 2$ .

Решение. Если отверстие  $S$  очень мало, то распределение скоростей исказится очень мало, т. е. останется изотропным и максвелловским. По формуле (\*) (см. решение задачи 7.19)

$$d(Vn) = -Sn\bar{v} dt/4.$$

Интегрируя это уравнение, получаем  $n = n_0 e^{-t/\tau}$ , где  $\tau = 4V/(S\bar{v})$ . Отсюда следует ответ.

**7.26.**  $n = n_0(1 - e^{-t/\tau})$ . Обозначения такие же, как и в предыдущей задаче.

$$7.27. t = \frac{4V}{S\bar{v}} \ln \frac{P_0 - P_1}{P_0 - P_2} \approx \frac{4V}{S\bar{v}} \frac{P_2 - P_1}{P_0} \approx 1,17 \text{ с;}$$

$$t_{1/2} = \frac{4V}{S\bar{v}} \ln 2 \approx 6,2 \cdot 10^4 \text{ с} = 17 \text{ ч.}$$

**7.28\*** Р е ш е н и е. Уравнения баланса для молекул азота:

$$\frac{dN_a^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{S\bar{v}_a}{V} (N_a^{(1)} - N_a^{(2)}), \quad \frac{dN_a^{(2)}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{S\bar{v}_a}{V} (N_a^{(2)} - N_a^{(1)}),$$

где  $N_a^{(1)}$  и  $N_a^{(2)}$  — числа молекул азота в первой и во второй половинах сосуда.

Так как  $N_a^{(1)} + N_a^{(2)} = N_a = \text{const}$ , то первое уравнение приводится к виду

$$\frac{dN_a^{(1)}}{dt} = -\frac{S\bar{v}_a}{2V} \left( N_a^{(1)} - \frac{N_a}{2} \right).$$

Интегрируя его с использованием начального условия  $N_a^{(1)} = N_a$  при  $t = 0$ , а затем определяя  $N_a^{(2)}$  из соотношения  $N_a^{(2)} = N_a - N_a^{(1)}$ , получим

$$N_a^{(1)} = \frac{N_a}{2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) \right], \quad N_a^{(2)} = \frac{N_a}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) \right].$$

Аналогично, для молекул кислорода:

$$N_k^{(1)} = \frac{N_k}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) \right], \quad N_k^{(2)} = \frac{N_k}{2} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) \right].$$

Так как начальные значения давления в обоих сосудах одинаковы, то  $N_a = N_k = N$ . Давление в первой половине сосуда:

$$P_1 = \frac{1}{V} (N_a^{(1)} + N_k^{(1)}) kT = P \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) \right] \right\}.$$

Давление во второй половине сосуда:

$$P_2 = P \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \exp\left(-\frac{S\bar{v}_k t}{2V}\right) - \exp\left(-\frac{S\bar{v}_a t}{2V}\right) \right] \right\}.$$

При  $t = 0$  и  $t = \infty$  из последних двух уравнений следует  $P_1 = P_2 = P$ , как и должно быть.

**7.29\*** Р е ш е н и е. Поступая, как в задаче 7.26, для отношений концентраций легкой и тяжелой компонент внутри сосуда, найдем

$$\beta = \alpha \frac{1 - e^{-t/\tau_1}}{1 - e^{-t/\tau_2}},$$

где индекс 1 относится к легкой, а индекс 2 — к тяжелой компонентам. Времена  $\tau_1$  и  $\tau_2$  связаны соотношением  $\tau_2/\tau_1 = 2$ . Учитывая это, найдем, что производная  $d\beta/dt$  обращается в нуль, когда

$$e^{-t/\tau_2} = \sqrt{2} - 1,$$

и следовательно, когда  $\beta = \alpha\sqrt{2}$ . Однако этому случаю соответствует не максимум и не минимум на кривой  $\beta = \beta(t)$ , а точка перегиба. Максимальное и

минимальное значения величина  $\beta$  принимает на концах временного интервала  $(0, \infty)$ . При  $t = 0$  получается максимум:  $\beta_{\max} = \alpha\tau_2/\tau_1 = 2\alpha$ , при  $t = \infty$  — минимум:  $\beta_{\min} = \alpha$ .

7.30.  $15P/16$ .

$$7.31^*: Q = \frac{kT}{8} S\bar{v}n_0 e^{-t/\tau}.$$

Решение. Уравнение баланса энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{8} nmS\bar{v}^3 + Q.$$

Уравнение баланса числа частиц:

$$V \frac{dn}{dt} = -\frac{1}{4} nS\bar{v}.$$

По условию средняя энергия, приходящаяся на одну частицу, постоянна:  $E/(Vn) = \text{const}$ . Отсюда  $dE = E dn/n$ . Исключая  $dE$  и  $dn$ , получаем

$$\frac{E}{Vn} = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{m\bar{v}^3}{\bar{v}} - \frac{4Q}{nS\bar{v}},$$

откуда

$$Q = \frac{m}{8} \left( \frac{\bar{v}^3}{\bar{v}} - \bar{v}^2 \right) nS\bar{v}.$$

Для максвелловского распределения

$$Q = \frac{kT}{8} S\bar{v}n = \frac{kT}{8} S\bar{v}n_0 e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = 4V/(S\bar{v})$ .

$$7.32^*: \bar{v} = v_0\sqrt{2/\pi}; \quad n = n_0\sqrt{8\pi}; \quad T = mv_0^2/(4k).$$

Решение. Из-за столкновений молекул со стенками сосуда и между собой внутри сосуда устанавливается максвелловское распределение скоростей. Условия сохранения числа частиц и кинетической энергии газа в сосуде имеют вид

$$n_0v_0 = n\bar{v}/4, \quad n_0mv_0^3/2 = nm\bar{v}^3/16.$$

Отсюда находим ответ.

$$7.33. \quad v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \bar{v}_{\text{кв}}.$$

$$7.34. \quad v_0 = \sqrt{\frac{5kT}{m}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \bar{v}_{\text{кв}}.$$

$$7.35. \quad F = \frac{\pi r^2 P}{2} (1 - \cos^3 \theta_0), \quad \text{где } \cos \theta_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}.$$

$$7.36. \quad \frac{\Delta n}{n} = (1 + x_0)e^{-x_0} \approx 10^{-38}, \quad \text{где } x_0 = \frac{mv_{2\text{к}}^2}{2kT} \approx 100.$$

$$7.37. \quad \omega = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \quad v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

7.38. Сила тяги ракет пропорциональна скорости истечения газа, поэтому, если  $F_1$  — сила тяги ракеты обычного типа, а  $F_2$  — второго типа, то

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\pi}{16}} \approx 0,44.$$

$$7.39. T_{\text{см}} = 1,284T_0.$$

$$7.40. T = \frac{T_0}{2^{1/3}} = 217 \text{ К.}$$

$$7.41. \frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/6}.$$

$$7.42. T_0 = \sqrt{T_1 T_2} \approx 400 \text{ К}; P_0 = \frac{P}{2} \left[ \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/4} + \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/4} \right] \approx 1,06 \text{ атм.}$$

7.43. Поршень сместится вверх на 6,75 см.

$$7.44. T(t) = T_0 \left( 1 + \frac{S}{6V} \sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}} t \right)^{-2}, \text{ где } m \text{ — масса молекулы.}$$

$$7.45. F = P\sigma/2.$$

$$7.46. v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (v_{\text{кв}}) = 2,45 \text{ км/с.}$$

$$7.47. \frac{a(T_2)}{a(T_1)} = \exp \left[ \frac{(A_1 - A_2)(T_1 - T_2)v^2}{2T_1 T_2 R} \right] \approx 0,93, \text{ где } a \text{ — отношение кон-}$$

центраций изотопов урана,  $A$  — атомная масса.

$$7.49. \frac{n_D}{n_H} = \sqrt{2}.$$

$$7.50. \alpha = \left( 1 + \frac{\epsilon}{kT} \right) \exp \left( -\frac{\epsilon}{kT} \right).$$

$$7.51. P \approx 6,4 \cdot 10^{-12} \text{ мм рт. ст.}$$

Решение. Скорость испарения определяется выражением

$$q = nm\bar{v}/4,$$

где  $n$  — концентрация атомов насыщенного пара вольфрама. Его давление

$$P = \frac{1}{3} nm\bar{v}^2 = \frac{4}{3} q \frac{v^2}{v}$$

При максвелловском распределении

$$\frac{\bar{v}^2}{v} = 3\sqrt{\frac{\pi kT}{8m}} = 3\sqrt{\frac{\pi RT}{8A}},$$

где  $A$  — относительная атомная масса, равная для вольфрама 184. Окончательно получаем

$$P = q\sqrt{\frac{2\pi RT}{A}}.$$

Подставив сюда численные значения, найдем для давления насыщенных паров вольфрама при  $T = 2000 \text{ К}$ :  $P \approx 8,6 \cdot 10^{-9} \text{ дин/см}^2 \approx 6,4 \cdot 10^{-12} \text{ мм рт. ст.}$

$$7.52. \frac{dM}{dt} = P\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \approx 0,38 \text{ г/(с} \cdot \text{см}^2), \text{ где } \mu \text{ — молярная масса.}$$

$$7.53. \frac{dM}{dt} = \omega SP_0 \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \left( 1 + \frac{E_n}{kT} \right) e^{-E_n/(kT)} \approx 5,1 \text{ г/с.}$$

$$7.54. \Delta S = 8R \ln 2.$$

$$7.55. \frac{v_2}{v_1} = 0,435.$$

7.56. Уменьшится примерно в 17,8 раз.

$$7.57. C = 3R.$$

7.58. Уменьшится в 3 раза.

$$7.59. \Delta S = 4R \ln 2.$$

$$7.60. \Delta S = -R \ln 2.$$

$$7.61. n = \frac{1}{4} \beta S \frac{N}{V} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{E_0}{kT} \right) \exp \left( -\frac{E_0}{kT} \right) \right].$$

$$7.62. d\omega_1(v_x) = \frac{dv_x}{2v_0}; \quad d\omega_2(E) = \frac{dE}{v_0 \sqrt{2mE}}; \quad \langle v_x \rangle = 0; \quad \langle |v_x| \rangle = \frac{v_0}{2}; \quad \langle v_x^2 \rangle = \frac{v_0^2}{3}.$$

$$7.63. dN_{v_0} = \frac{1}{4} \pi n R^2 \frac{dv}{v_{\max} - v_{\min}} \left( v_0 + \frac{v_{2k}}{v_0} \right).$$

$$7.64. \Phi \sim \varepsilon_{\text{гран}}^2 - (mgh)^2; \quad H = \frac{\varepsilon_{\text{гран}}}{mg} \approx \frac{v_{\text{гран}}^2}{2g} \approx 5 \text{ м}.$$

$$7.65. \alpha = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sin^3 \varphi \approx 2 \cdot 10^{-8}.$$

$$7.66. S = \frac{4V}{v\tau} \approx 0,8 \text{ мм}^2.$$

## § 8. Распределение Больцмана

$$8.1. M \approx 5,3 \cdot 10^{18} \text{ кг}.$$

$$8.2. \frac{m}{M} = \frac{4\pi\gamma P_0}{g^2} \approx 0,87 \cdot 10^{-6}.$$

$$8.3. m_{\text{атм}} \approx \frac{\pi P_0 R^4}{\gamma M} \approx 0,5 \cdot 10^{37} \text{ г}.$$

8.4\* Температура газа не изменится.

Решение. При свободном падении газ находится в состоянии невесомости. Начальное состояние его неравновесное — плотность сверху меньше, чем внизу. Однако средняя кинетическая энергия молекул всюду одинакова. При переходе в равновесное состояние плотности выравниваются. Но полная кинетическая энергия молекул газа, определяющая его температуру, останется неизменной. Опыт аналогичен известному опыту Гей-Люссака с расширением газа в пустоту.

$$8.5. \bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = kT; \quad C = C_p.$$

$$8.6. \bar{\varepsilon}_{\text{пот}} = \frac{1 - \left( 1 + \frac{mgH}{kT} \right) \exp \left( -\frac{mgH}{kT} \right)}{1 - \exp \left( -\frac{mgH}{kT} \right)} kT.$$

$$8.7. C = C_V + \frac{R}{12} \left( \frac{\mu g H}{RT} \right)^2.$$

$$8.8. z_C = \frac{(N_1 + N_2)kT - N_1 m_1 \left[ \exp \left( \frac{m_1 g h}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} g h}{g(N_1 m_1 + N_2 m_2)} + \frac{N_2 m_2 \left[ \exp \left( \frac{m_2 g h}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} g h}{g(N_1 m_1 + N_2 m_2)}.$$

$$8.9. \frac{N_0}{N_1} \approx 9,5 \text{ (у поверхности Земли больше).}$$

$$8.10. 0,374\%$$

$$8.11. v_{3B} = 400 \text{ м/с.}$$

$$8.12. N \approx 6 \cdot 10^{23}.$$

$$8.13. N = \frac{RT \ln \alpha}{(4/3)\pi r^3(\rho - \rho_0)gl} \approx 6,5 \cdot 10^{23}.$$

$$8.14. T = \frac{3}{4} \frac{mgR}{k}.$$

$$8.15. T = \frac{mgH}{4k}.$$

$$8.16. T \approx T_0 \left[ 1 - \frac{\mu g H}{4C_V T_0} + \frac{(\mu g H)^2}{16C_V R T_0^2} \right].$$

$$8.17. T = \frac{5T_1 + 7T_2}{12}.$$

$$8.18. \Delta x_C = \frac{maL^2}{12kT}.$$

$$8.19. 1) \Delta S = \frac{MR}{24\mu} \left( \frac{\mu ah}{RT} \right)^2; \quad 2) \Delta S = 0.$$

$$8.20. v_x \approx \sqrt{\frac{204kT}{m}} \approx 4,6 \text{ км/с.}$$

$$8.21. T = \frac{6}{5} T_0; \quad M = S \Delta t P_0 \sqrt{\frac{N_A}{2\pi\mu k T_0}}.$$

$$8.22. t = \frac{2k^2 T^2 S \rho}{\bar{v} \sigma P_0 m^2 g} \ln 2, \text{ где } m \text{ — масса молекулы, } \rho \text{ — плотность воды, } \bar{v} \text{ —}$$

средняя скорость теплового движения молекул пара.

8.23. Число молекул  $dN$  с координатами между  $r$  и  $r + dr$ ,  $z$  и  $z + dz$  равно

$$ddN = \frac{Ng \left( \frac{m\omega}{kT} \right)^2 \exp \left( \frac{m\omega^2 r^2}{2kT} \right) r dr \exp \left( -\frac{mgz}{kT} \right) dz}{\left[ 1 - \exp \left( -\frac{mgH}{kT} \right) \right] \left[ \exp \left( \frac{m\omega^2 R^2}{2kT} \right) - 1 \right]},$$

где  $N$  — общее число молекул в сосуде. Ось  $Z$  направлена вертикально вверх.

$$8.24. \mu = \frac{2RT\rho \ln \alpha}{\omega^2(\rho - \rho_0)(r_2^2 - r_1^2)}.$$

$$8.25. \Delta C_V = \frac{\mu^2 \omega^4 a^4}{48RT^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/(К·моль).}$$

$$8.26. \rho_1 = \rho_0 \left( 1 + \frac{m\omega^2 r_0^2}{4kT_0} \right).$$

$$8.27. \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 4 \cdot 10^{-6}.$$

$$8.28. \mu = \frac{\alpha RT \rho}{G(\rho - \rho_0)} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ г/моль.}$$

$$8.29. \omega = 463 \text{ с}^{-1}.$$

$$8.30. P(r) = \frac{M\omega^2 l}{2S} \exp \left[ \frac{\mu\omega^2}{2RT} \left( r^2 - \frac{l^2}{4} \right) \right].$$

$$8.31. P(r) = \frac{3}{2} P_0 \left( 1 + \frac{M\omega^2 l}{2P_0 S} \right) \exp \left[ -\frac{\mu\omega^2}{2RT} \left( \frac{9}{16} l^2 - r^2 \right) \right].$$

$$8.32. \Delta S = \frac{\mu\omega^2 a^2}{4T_0}; \Delta T = \frac{\mu\omega^2 a^2}{4C_V}.$$

$$8.33. \Omega = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2RT}{\mu} \frac{\Delta P}{P_0}} \approx 16,4 \text{ с}^{-1}.$$

$$8.34. \Delta S = -\frac{R}{24} \left( \frac{\mu\omega^2 a^2}{2RT} \right)^2.$$

$$8.35. I = N_A m R^2 \left[ \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right)} - \frac{2kT}{m\omega^2 R^2} \right]; \text{ при } T \rightarrow \infty I = N_A \frac{mR^2}{2}.$$

$$8.36. q = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_0 S \left[ v_2 - v_1 + gh \left( \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \right] \text{ (поток из сосуда 2 в сосуд 1);}$$

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{RT}{\mu_{1,2}}}.$$

8.37.  $P = P_0 \exp \left[ -\frac{mg\bar{v}\sigma}{4kTS} \exp \left( -\frac{mgh}{kT} \right) t \right]$ ,  $P_0 = n_0 kT = \frac{N_0}{S} mg$ , где  $m$  — масса молекулы,  $N_0$  — полное число молекул в сосуде,  $n_0$  — начальная концентрация газа у дна сосуда.

$$8.38. \bar{U} = \frac{kT}{2}.$$

$$8.39. \bar{\mathcal{E}} = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/(kT)} + 1} + \frac{3}{2} RT. \text{ Если } \varepsilon \gg kT, \text{ то } \bar{\mathcal{E}} \approx \frac{3}{2} RT.$$

$$8.40. \mathcal{E} = -\varepsilon N_A \frac{e^2 - 1}{e^2 + e + 1} = -0,575 RT.$$

8.41.  $R \lesssim \frac{2}{3} \gamma \frac{Mm}{kT} \approx 4 \cdot 10^{22}$  см, где  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $m$  — масса молекул водорода.

$$8.42. \Delta T = -\frac{2}{9} T_1; \Delta S \approx R \ln \frac{kT_1}{\hbar\omega}.$$

$$8.43. \Delta T = -\frac{2}{7} T_1; \Delta S \approx \frac{M}{\mu} R \ln \frac{kT_1}{\hbar\omega}.$$

$$8.44. \Delta T = \frac{\varepsilon}{3k} \left( e^{-\varepsilon/(kT_1)} - e^{-\varepsilon/(kT_0)} \right) \approx 0,8 \text{ К}.$$

$$8.45. \sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \frac{4kT}{Mr^2} = 7,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

$$8.46. \bar{\varepsilon} = kT/2 = 2,1 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}; \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 7,2 \cdot 10^{11} \text{ Гц}.$$

$$8.47. K = 5PV/2 = 2,75 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

$$8.48. \mathcal{E}_{\text{вр}} = PV = 100 \text{ Дж}.$$

$$8.49. \mathcal{E}_{\text{вр}} = \frac{3}{2} PV = 150 \text{ Дж}.$$

$$8.50. \bar{\varepsilon} = kT(V_1/V_2)^{\gamma-1} = 1,65 \cdot 10^{-13} \text{ эрг}.$$

$$8.51. U \approx \frac{\Delta EN}{2} \left( 1 - \frac{\Delta E}{2kT} \right); S = \text{const} - \frac{N(\Delta E)^2}{8kT^2}.$$

$$8.52. \bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1};$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}; \bar{\varepsilon}_2 = 6 \cdot 10^{-20} \text{ эрг}; \bar{\varepsilon}_{\text{кл}} = kT = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ эрг};$$

$$C_V = R \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2} \approx R \left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 e^{-h\nu/(kT)} \approx 0,03R \approx 0,25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

## § 9. Флуктуации. Статистический смысл энтропии

9.1.\* Решение.  $fg = \bar{f}\bar{g} + \bar{g}\Delta f + \bar{f}\Delta g + \Delta f\Delta g$ . Усредняя и принимая во внимание, что  $\overline{\Delta f} = \overline{\Delta g} = 0$ , находим

$$\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\Delta f\Delta g}.$$

$$9.2. \overline{\Delta f^2} = \bar{f}^2 + \overline{f^2}. \quad (*)$$

$$9.4.* \overline{\Delta n^2} = \bar{n}.$$

Решение. Если объем  $V$  разбить на  $z = V/v$  равных объемов  $v_i = v$ , то  $N = \sum n_i$ , где  $n_i$  — число молекул в  $i$ -м объеме, а суммирование ведется по всем таким объемам. Так как величины всех объемов  $v_i$  одинаковы, то средние числа молекул в них  $\bar{n}_i$  также одинаковы. Поэтому  $N = z\bar{n}$ , т. е.  $\bar{n} = N\rho$ , где  $\rho = v/V$  — вероятность нахождения молекулы в объеме  $v$ .

Определим далее величины  $f_i$  следующим образом:  $f_i = 1$ , если  $i$ -я молекула находится в оставшемся объеме  $V - v$ . Тогда число молекул  $n$  в объеме  $v$  можно представить в виде  $n = \sum f_i$ , предполагая, что суммирование ведется по всем  $N$  молекулам объема  $V$ . Ясно, что функции  $f_i$  удовлетворяют условию  $f_i = f_i^2 = f_i^3 = \dots$ . Далее, очевидно  $\bar{f}_i = \overline{f_i^2} = \overline{f_i^3} = \dots = \rho$ . Поэтому по формуле (\*) (см. ответ к задаче 9.2)

$$\overline{\Delta f_i^2} = \overline{f_i^2} - \bar{f}_i^2 = \rho - \rho^2 = \rho(1 - \rho).$$

А так как в случае идеального газа величины  $f_1, f_2, f_3, \dots$  статистически независимы, то

$$\overline{\Delta n^2} = N\rho(1 - \rho) = (1 - \rho)\bar{n}.$$

Если  $v \ll V$ , то  $\rho \ll 1$ . Пренебрегая вероятностью  $\rho$  по сравнению с единицей, получим ответ.

9.5.  $P = (1/2)^N$ ;  $N = \log_2(T/\tau) \sim 70$ , где  $\tau \sim 10^{-4}$  с — время разлета, т. е. среднее время, которое требуется молекуле газа, чтобы пролететь расстояние порядка размеров сосуда.

9.6.  $V = 1/(N\alpha^2) = 3,7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3$ ;  $\bar{n} = 1/\alpha^2 = 10^{12}$ , где  $N$  — число молекул в единице объема ( $N = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ).

$$9.7. \sqrt{\frac{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}{\rho^2}} = \sqrt{\left(\frac{kT}{V}\right)^2 \frac{N}{\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

$$9.8. \frac{\Delta T}{T} \approx 4 \cdot 10^{-11}.$$

9.9.  $\frac{w_1}{w_0} = e^{\Delta S/k} \approx 10^{-162}$ , где  $\frac{\Delta S}{k} = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{V} \frac{C_V}{k} \left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2$ , где  $V$  — объем сосуда,  $v_0 = 10^{-6} \text{ см}^3$ .

$$9.10. v = \frac{kVT^2}{C_V(\Delta T)^2} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}, \text{ где } V \text{ — молярный объем гелия в условиях задачи.}$$

$$9.11. \frac{\omega_1}{\omega_2} = \exp \left[ -\frac{3}{4} N_0 \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \right] = e^{-2} \approx 0,14, \text{ где } N_0 \text{ — число молекул в фиксированном объеме } v \text{ при } T = T_0.$$

$$9.12. \frac{\langle (\Delta T)_2^2 \rangle}{\langle (\Delta T)_1^2 \rangle} = \frac{1}{2}.$$

$$9.13. V \approx 3,7 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3.$$

$$9.14. \frac{\langle (\Delta V)^2 \rangle}{V_0^2} = \frac{3}{5N}.$$

$$9.15^*. P = \frac{N!}{N_1!N_2!} p^{N_1} q^{N_2}.$$

Решение. Возьмем какое-либо распределение, в котором объем  $V_1$  содержит  $N_1$ , а объем  $V_2$  —  $N_2$  молекул. Зафиксировав положения всех молекул, произведем затем всевозможные перестановки их. Так как при таких перестановках числа молекул  $N_1$  и  $N_2$  в объемах  $V_1$  и  $V_2$  не меняются, то в результате получатся всевозможные комбинации молекул с требуемыми числами  $N_1$  и  $N_2$ . Число таких комбинаций равно  $N!$ . Среди них будут и такие комбинации, которые получаются одна из другой в результате перестановки молекул либо в пределах только объема  $V_1$ , либо в пределах только объема  $V_2$ . Такие перестановки не приводят к новым распределениям молекул по объемам  $V_1$  и  $V_2$ . Число перестановок в пределах первого объема равно  $N_1!$ , а в пределах второго  $N_2!$ . Разделив полное число перестановок  $N!$  на  $N_1!N_2!$ , мы получим число  $z$  всех распределений молекул  $N$  по объемам  $V_1$  и  $V_2$  с требуемыми числами заполнения  $N_1$  и  $N_2$ :  $z = N! / (N_1!N_2!)$ . В случае идеального газа все эти  $z$  распределений равновероятны. Найдем вероятность одного распределения. Вероятность того, что определенная молекула попадает в объем  $V_1$ , равна  $p = V_1 / (V_1 + V_2)$ , а в объем  $V_2$  —  $q = V_2 / (V_1 + V_2)$ . Вероятность того, что  $N_1$  фиксированных молекул попадут в объем  $V_1$ , а остальные  $N_2$  молекул — в объем  $V_2$ , будет  $p^{N_1} q^{N_2}$ . Умножив ее на число распределений  $z$ , найдем

$$P = \frac{N!}{N_1!N_2!} p^{N_1} q^{N_2}. \quad (*)$$

Это и есть математическая вероятность того, что числа молекул (безразлично каких) в объемах  $V_1$  и  $V_2$  будут равны соответственно  $N_1$  и  $N_2$ .

$$9.16. \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sim 10^{-6}; \quad \bar{N} = \frac{1}{4} S n \bar{v} t = 1,2 \cdot 10^{12}.$$

$$9.17. j \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}; \quad \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N} \approx 5 \cdot 10^{-6}.$$

$$9.18. j \approx 10^9 \text{ с}^{-1}; \quad \frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N} \approx 10^{-3}.$$

**9.19\***  $n = 7,8 \cdot 10^{11}$ .

Решение. Воспользовавшись формулой (\*) (см. решение задачи 9.15), получим

$$\frac{(N-n)!}{N!} \frac{(N+n)!}{N!} = \alpha,$$

где  $N$  — число Авогадро. После сокращения:

$$\frac{(1+1/N)\dots(1+n/N)}{(1-1/N)\dots(1-(n-1)/N)} = \alpha.$$

Логарифмируя и принимая во внимание, что  $n/N \ll 1$ , находим

$$2\left(\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \dots + \frac{n-1}{N}\right) + \frac{n}{N} = \ln \alpha,$$

или  $n^2/N = \ln \alpha$ , откуда

$$n = \sqrt{N \ln \alpha} = \sqrt{N} = 7,8 \cdot 10^{11}.$$

**9.20\*** Решение. В термодинамике энтропия  $N$  молекул идеального газа выражается формулой

$$S = N\left(c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N} + s_0\right),$$

где  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, приходящаяся на одну молекулу, а  $s_0$  — постоянная, не зависящая от числа частиц. В начальном состоянии энтропия системы

$$S_0 = 2N\left(c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N} + s_0\right);$$

в конечном состоянии

$$S = (N-n)\left(c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N-n} + s_0\right) + (N+n)\left(c_V \ln T + k \ln \frac{V}{N+n} + s_0\right).$$

Отсюда

$$S_0 - S = k(N-n) \ln(N-n) + k(N+n) \ln(N+n) - 2kN \ln N,$$

или с учетом соотношения  $n/N \ll 1$ :

$$S_0 - S = kn^2/N.$$

По формуле Больцмана

$$S_0 - S = k \ln(P_0/P) = k \ln \alpha.$$

Это дает  $n^2/N = \ln \alpha$ , откуда  $n = \sqrt{N \ln \alpha}$ .

**9.21\*** Решение. До флуктуации, когда состояние всего газа было равновесным, его энтропия определялась выражением

$$S_0 = Nc_V \ln T + Nk \ln(V/N),$$

где  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, приходящаяся на одну молекулу газа. После флуктуации, когда в объеме  $v$  стало  $n$  частиц, энтропия газа будет

$$S = Nc_V \ln T + k(N-n) \ln \frac{V-v}{N-n} + kn \ln \frac{V}{n}.$$

Вычтем отсюда предыдущее выражение, пренебрегая при этом членами второй степени по  $v/V$  и  $n/N$ . Получим приращение энтропии газа в результате

флуктуации

$$\Delta S = k \ln \left[ \left( \frac{\bar{n}}{n} \right)^n e^{n-\bar{n}} \right].$$

По формуле Больцмана

$$\Delta S = k \ln \frac{P}{P_0},$$

и для искомой вероятности находим

$$P_n = P_0 \left( \frac{\bar{n}}{n} \right)^n e^{n-\bar{n}}.$$

Выполнив переход к распределению Гаусса, затем можно определить постоянную  $P_0$  из условия нормировки  $\sum P_n = 1$ .

**9.22.\*** Решение. Поршень можно рассматривать как гармонический осциллятор. Среднее значение его потенциальной энергии при смещении от положения равновесия на  $x$  равно  $\kappa(x^2)/2 = kT/2$ , где  $\kappa$  — модуль упругости, соответствующий такому смещению. Очевидно,  $\Delta V = Sx$ , где  $\Delta V$  — изменение объема системы, а  $S$  — площадь поршня. Таким образом,  $\langle \Delta V^2 \rangle = S^2 kT/\kappa$ . Сила, возвращающая поршень в положение равновесия,  $F = S \frac{\partial P}{\partial x} x$ , а потому

$$\kappa = -S \frac{\partial P}{\partial x} = -S^2 \frac{\partial P}{\partial V}.$$

В результате получим

$$\langle (\Delta V^2)_T \rangle = -kT \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T^{-1} = -kT \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

Значок  $T$  поставлен потому, что в выводе предполагалось постоянство температуры окружающей среды (термостата). Если бы вещество внутри объема  $V$  было адиабатически изолировано, то, как следует из вывода, значок  $T$  следовало бы заменить на  $S$  (постоянство энтропии) и написать

$$\langle (\Delta V^2)_S \rangle = -kT \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S.$$

**9.23.**  $L = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{mgl}{kT}} \approx 80 \text{ м.}$

**9.24.** Величина  $\langle \varphi^2 \rangle$  уменьшится в  $\alpha$  раз,  $\langle \varphi^2 \rangle$  увеличится в  $\beta/\gamma^4$  раз. Существенно отметить, что  $\langle \varphi^2 \rangle$  не зависит от момента инерции зеркала;  $N = RT/(D\langle \varphi^2 \rangle) \approx 6,04 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

**9.25.** Имея в виду, что  $\langle \lambda \rangle = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-x/l} dx}{\int_0^{\infty} e^{-x/l} dx} = l$ , то  $\frac{\sqrt{\langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2}}{\langle \lambda \rangle} = 1$ . (При  $x = l$

число частиц в потоке молекул уменьшается в  $e$  раз.)

**9.26.**  $\alpha \approx 0,01$ .

**9.27.**  $m \approx \frac{\sqrt{\alpha kT}}{g}$ .

$$9.28. \frac{\sqrt{\langle \Delta V^2 \rangle}}{V} = \sqrt{\frac{kT\beta_T}{V}} \approx 3,6 \cdot 10^{-9}.$$

$$9.29. \frac{\sqrt{\langle \Delta n_{\Delta V}^2 \rangle}}{\langle \Delta n_{\Delta V} \rangle} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 N_A \Delta V}} \exp\left(\frac{\mu g h}{2RT}\right).$$

$$9.30. \frac{\sqrt{\langle \Delta n_{\Delta V}^2 \rangle}}{\langle \Delta n_{\Delta V} \rangle} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0 N_A \Delta V}} \exp\left(-\frac{\mu \omega^2 r^2}{4RT}\right).$$

$$9.31. \sqrt{\frac{\Delta h^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{\rho g k T}{4\pi \sigma^2}}.$$

$$9.32. \sqrt{\frac{\langle \Delta V^2 \rangle}{V^2}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{kT}{P_0 r^3 + \frac{8}{3} \sigma r^2}}.$$

$$9.33. \frac{\sqrt{\langle \Delta V^2 \rangle}}{V} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{T}{T - T_{\text{кр}}} \frac{1}{\sqrt{N}}}, \text{ где } N \text{ — число молекул в объеме } V.$$

9.34.  $t \approx \frac{6\pi a \eta}{kT} h^2$ ; при  $mgh \sim kT$ , где  $h$  — линейный размер сосуда,  $m$  — масса частицы ртути,  $a$  — ее радиус,  $\eta$  — коэффициент вязкости воды.

9.35.  $\frac{\sqrt{\langle \Delta \Pi^2 \rangle}}{\langle \Pi \rangle} = \sqrt{2}$  для одной молекулы;  $\frac{\sqrt{\langle \Delta \Pi^2 \rangle}}{\langle \Pi \rangle} = \sqrt{\frac{2}{N_A}} \approx 2 \cdot 10^{-12}$  для одного моля.

$$9.36. \sqrt{\langle \Delta \rho^2 \rangle} / \rho = \sqrt{kT \gamma_T / V}.$$

$$9.37^*: \langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = 3k^2 T^2 / 2.$$

Решение. Согласно выражению для среднего числа  $dN$  молекул газа, кинетические энергии которых заключены между  $\varepsilon$  и  $\varepsilon + d\varepsilon$  (см. ответ задачи 7.7)

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon T^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha \varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} T^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha \varepsilon} d\varepsilon},$$

где введено обозначение  $\alpha = 1/(kT)$ . Обозначая знаменатель через  $Z$  и дифференцируя его по параметру  $\alpha$ , получим

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\alpha}, \quad \langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\alpha^2}.$$

Вычислив интеграл  $Z$ , по этим формулам найдем  $\langle \varepsilon \rangle = 3kT/2$ ,  $\langle \varepsilon^2 \rangle = 15k^2 T^2/4$  и далее

$$\langle \Delta \varepsilon^2 \rangle = \langle \varepsilon^2 \rangle - (\langle \varepsilon \rangle)^2 = 3k^2 T^2/2.$$

9.38\* Решение. Рассматривая температуру подсистемы  $T$  как функцию  $U$  и  $V$ , пишем

$$(\Delta T)_V = \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_V \Delta U = \frac{\Delta U}{C_V},$$

откуда

$$\langle (\Delta T^2)_V \rangle = \frac{\langle (\Delta U^2)_V \rangle}{C_V^2} = \frac{kT^2}{C_V}.$$

Аналогично поступаем и в остальных случаях и получаем:

$$\langle (\Delta S^2)_V \rangle = \frac{\langle (\Delta U^2)_V \rangle}{T^2} = kC_V,$$

$$\langle (\Delta S^2)_P \rangle = \frac{\langle (\Delta I^2)_P \rangle}{T^2} = kC_P,$$

$$\langle (\Delta P^2)_T \rangle = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T^2 \langle (\Delta V^2)_T \rangle = -kT \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T,$$

$$\langle (\Delta P^2)_S \rangle = \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_S^2 \langle (\Delta V^2)_S \rangle = -kT \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_S.$$

9.39.  $S = 2R \ln 2 \approx 11,5 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$

## § 10. Явления переноса. Теплопроводность. Броуновское движение

10.1.  $z = 4 \sqrt{\frac{\pi}{mkT}} Pd^2 \sim 4 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$

10.2.  $v = \frac{\pi d^2 \bar{v} n^2}{\sqrt{2}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{P^2 d^2}{(kT)^{3/2}} \sim 6 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-3}.$

10.3.  $z \propto T^{-1/2}; \lambda \propto T.$

10.4.  $z \propto P; \lambda \propto P^{-1}.$

10.5.  $z \propto P^{(\gamma+1)/(2\gamma)}; \lambda \propto P^{-1/\gamma},$  где  $\gamma = C_P/C_V.$

10.6.  $C = C_V + R/4$  (процесс политропический).

10.7.  $C = C_V + R/2$  (процесс политропический).

10.8.  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{8}; \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2.$

10.9.  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 0,75.$

10.10.  $l \approx 0,3 \text{ м}.$

10.11.  $P < 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ мм рт. ст}.$

10.12.  $m = \frac{\tau S q}{ql} (t_1 - t_2) = 54 \text{ г},$  где  $q = 80 \text{ кал/г}$  — удельная теплота

плавления льда.

10.13.  $t_R = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln(R_2/R_1)} \ln(R/R_1).$

10.14.  $t_R = \frac{t_2 - t_1}{R_1 - R_2} \frac{R_1 R_2}{R} + \frac{t_1 R_1 - t_2 R_2}{R_1 - R_2}.$

10.15\*.  $T = T_0 + \frac{q}{6\kappa} (R^2 - r^2); T_{\text{ц}} = 790 \text{ К}.$

Решение. Уравнение теплопроводности при наличии источников тепла с плотностью мощности  $q$  для сферически симметричных задач имеет вид

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \kappa r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q.$$

В стационарном случае  $\partial T/\partial t = 0$ , и после однократного интегрирования по радиусу записанного уравнения ( $q = \text{const}$ ) получим

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{3\chi} r + \frac{C}{r^2}.$$

Постоянная интегрирования  $C$  должна равняться нулю, так как в противном случае в центре шара мы получили бы бесконечное значение для производной  $dT/dr$ . Интегрируя вторично с учетом граничного условия  $T = T_0$  при  $r = R$ , найдем

$$T = T_0 + \frac{q}{6\chi} (R^2 - r^2).$$

Температура в центре шара

$$T_{\text{ц}} = T_0 + \frac{qR^2}{6\chi} = 790 \text{ К}.$$

**10.16.**  $T = T_0 + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 R^4 \chi} (R^2 - r^2)$ , где  $I$  — сила тока,  $\rho$  — удельное сопротивление провода,  $R$  — радиус провода,  $r$  — расстояние до его оси. Все величины выражаются в единицах системы СГС.

$$\mathbf{10.17.} \quad W = \frac{8\pi a r_0}{7} T^{7/2} \approx 3,6 \cdot 10^{12} \text{ кВт}.$$

$$\mathbf{10.18.} \quad \mathcal{E} = \frac{AW}{4\pi\chi} = 5,3 \text{ мкВ}.$$

$$\mathbf{10.19.} \quad T = \left[ T_0^2 + \frac{U_0^2}{a l^2} (a^2 - x^2) \right]^{1/2}.$$

$$\mathbf{10.21.} \quad t = \frac{\rho_M c \Delta}{\chi} \left( x - a \ln \frac{a-x}{a} \right); \quad a = \frac{T_0 - T_M}{2\rho_{\text{л}} q} c\rho_M \Delta.$$

$$\mathbf{10.22.} \quad l = L \frac{\sqrt{T_1 T_2} - T_1}{T_2 - T_1}.$$

**10.23.**  $\tau = \frac{Mcl}{2S\chi} \ln \frac{t_{10} - t_{20}}{t_1 - t_2} \approx 3 \text{ ч } 20 \text{ мин}$ , где  $c$  — удельная теплоемкость воды.

**10.24.**  $\tau = \frac{Mch}{S\chi} \ln \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} \approx 33 \text{ мин } 20 \text{ с}$ , где  $c$  — удельная теплоемкость воды.

$$\mathbf{10.25.} \quad \tau = \frac{q\rho a^2}{6\chi(t_1 - t_2)} \approx 10 \text{ с}, \text{ где } \rho \text{ — плотность льда}.$$

$$\mathbf{10.26.} \quad T_1 = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\tau};$$

$$T_2 = \frac{C_1 T_{10} + C_2 T_{20}}{C_1 + C_2} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\tau};$$

$$T_1 - T_2 = (T_{10} - T_{20}) e^{-t/\tau}; \quad t_{1/2} = \tau \ln 2,$$

где  $\frac{1}{\tau} = \frac{\chi S}{l} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$ .

**10.27\***  $x = 11,3 \text{ см}$ .

Решение. Обозначим буквой  $x$  толщину образовавшегося слоя льда к моменту времени  $t$ . Если замерзание идет не очень быстро, как это в

действительности имеет место в естественных условиях, то в слое льда установится линейное падение температуры от  $T_{\text{пл}}$  до  $T$ . В этом случае тепло, уходящее наружу с единицы поверхности льда за время  $dt$ , представится выражением  $\kappa \frac{T_{\text{пл}} - T}{x} dt$ . Но ту же величину можно представить в виде  $q\rho dx$ , где  $dx$  — толщина льда, образовавшегося за время  $dt$ ,  $\rho$  — плотность льда,  $q$  — удельная теплота плавления льда. Это приводит к уравнению

$$\kappa \frac{T_{\text{пл}} - T}{x} dt = q\rho dx.$$

Интегрируя уравнение, получим

$$\kappa(T_{\text{пл}} - T)t = \frac{1}{2} q\rho x^2 + A.$$

Примем за начало отсчета времени момент, когда образование льда на поверхности воды только что началось. Тогда  $x = 0$  при  $t = 0$ , а потому  $A = 0$ . В результате получим

$$x = \sqrt{\frac{2\kappa(T_{\text{пл}} - T)t}{q\rho}} = 11,3 \text{ см.}$$

**10.28.\***  $\tau \approx 41$  мин.

**Решение.** Если таяние льда идет не очень быстро, то мгновенное распределение температуры в окружающей воде будет таким же, что и в стационарном случае при тех же граничных значениях температуры. Согласно ответу к задаче 10.14, оно в рассматриваемом случае имеет вид

$$T = T_{\infty} + \frac{R}{r} (T_0 - T_{\infty}),$$

где  $R$  — мгновенное значение радиуса куска льда,  $T_0$  и  $T_{\infty}$  — постоянные температуры воды на поверхности шара и в бесконечности (по условию задачи  $T_{\infty} - T_0 = 10^\circ\text{C}$ ). Количество тепла, поступающее к шару от окружающей воды за время  $dt$ , равно

$$4\pi r^2 \kappa \frac{dT}{dr} dt = 4\pi \kappa R (T_{\infty} - T_0) dt.$$

Это тепло идет на то, чтобы расплавить лед, и потому может быть также представлено выражением

$$-q dm = -4\pi \kappa R^2 \rho_{\text{л}} q dR.$$

Приравнявая оба выражения, получим

$$\kappa(T_{\infty} - T_0) dt = -\rho_{\text{л}} q R dR.$$

Отсюда интегрированием находим искомое время таяния льда:

$$\tau = \frac{\rho_{\text{л}} q R_0^2}{2\kappa(T_{\infty} - T_0)} = 2480 \text{ с} \approx 41 \text{ мин.}$$

**10.29.**  $L = \frac{2q\lambda \ln(R_2/R_1)}{\pi\alpha(T_2^4 - T_1^4)}.$

**10.30.**  $L \approx \sqrt{\frac{\kappa T}{c}} \sim 3 \text{ м.}$

$$10.31. T(x) = \left[ \frac{x}{L} (T_2^{3/2} - T_1^{3/2}) + T_1^{3/2} \right]^{2/3}.$$

$$10.32. \Delta T = \left( \frac{3q\sqrt{T_0}}{4\pi\kappa_0} \ln \frac{R}{r} + T_0^{3/2} \right)^{2/3} - T_0.$$

$$10.33. q = \frac{8\pi}{3} \kappa_0 T_0 R.$$

$$10.34. t = 158^\circ \text{C}.$$

$$10.35. d = \left( \frac{c_V m v \sqrt{2} (t_1 - t_2)}{0,72 i^2 R \ln (r_2/r_1)} \right)^{1/2} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ см}.$$

$$10.36. P = \frac{7}{3} P_0.$$

$$10.37. \frac{V}{V_0} = \frac{13}{3}.$$

$$10.38. P \gg \frac{1}{4\pi} \frac{v}{r^2} \sqrt{\frac{mkT}{2\gamma}} \approx 10^{-5} \text{ атм, где } m \text{ — масса молекулы воздуха, } r \text{ —}$$

$$\text{ее радиус; } \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$

$$10.39. l \sim \frac{v_{\text{зв}}^5 \rho}{v^2 \kappa T} \sim 50 \text{ км, где } v_{\text{зв}} \text{ — скорость звука, } \rho \text{ — плотность, } \kappa \text{ —}$$

коэффициент теплопроводности воздуха,  $T$  — температура воздуха.

$$10.40. \lambda \approx \frac{3D}{v} = 3D \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \approx 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

$$10.41. n = 3.$$

$$10.42. \Delta S = 8R \ln 2 \approx 46 \text{ Дж/К}.$$

$$10.43. \frac{D_2}{D_1} = 4.$$

$$10.44. C = C_V - \frac{R}{2}.$$

$$10.45. \text{Уменьшится в } \sqrt{1,5} \approx 1,22 \text{ раза}.$$

$$10.46. x = l \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \approx 5,7 \text{ см; } z_1 = z_2.$$

$$10.47. \tau \approx \sqrt{\frac{\mu}{RT}} \left( R_0^2 n \sigma + \frac{l^2}{r} \right).$$

$$10.48. \langle r^2 \rangle = 2\pi \lambda^2.$$

$$10.49. \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 3,3 \text{ см; 1) результат уменьшится в 2 раза;}$$

2) увеличится в  $\sqrt{8}$  раз; 3) увеличится в  $\sqrt{2}$  раз.

$$10.50. \tau \approx 3 \text{ мин}.$$

$$10.51. \tau \approx 80 \text{ с}.$$

$$10.52. \text{Примерно в } 10^{12} \text{ раз}.$$

$$10.53. \Delta S \approx 110 \text{ Дж/К; } A = 33 \text{ кДж}.$$

$$10.54. v = \sqrt{\frac{\lambda e E}{2m}} \approx 15 \text{ м/с, где } m \text{ — масса иона Ag, } e \text{ — заряд электрона}.$$

$$10.55. E \sim \frac{\pi \sigma}{e} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ В/см, где } e \text{ — заряд электрона}.$$

$$10.56. T = \frac{\langle \epsilon \rangle}{k} = \frac{eE}{2k\sigma n} \sqrt{\frac{M}{m}} \sim 4500 \text{ К.}$$

$$10.57. \langle r^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{kT\tau}{P\sigma} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2; \sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2 \text{ мм,}$$

где  $\mu = 12,4 \text{ г/моль}$  — приведенная молярная масса Ag и  $\text{H}_2\text{O}$ .

$$10.58. v = \frac{Eq(\Delta r)^2 N_{AP}}{6\tau\mu P} \approx 7 \cdot 10^{-2} \text{ см/с, где } \mu \text{ — молярная масса водорода.}$$

10.59.  $l \approx \sqrt{2\lambda\bar{v}t} \approx 3 \text{ см}$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега,  $\bar{v}$  — средняя скорость молекул воздуха.

$$10.60. x = \sqrt{\frac{DT}{\ln 2}} \ln 10^5 = 20,4 \text{ см.}$$

10.61.  $\tau \approx \frac{R^2}{6D} \approx \frac{R^2}{2\lambda v} \approx \frac{R^2}{2\lambda c} \approx 1,4 \cdot 10^{14} \text{ с} \approx 4,4 \cdot 10^6 \text{ лет}$ , где  $v$  — скорость космической частицы, близкая к скорости света  $c$  в вакууме.

$$10.62. N \geq \frac{2}{\lg(\mu_2/\mu_1)}.$$

$$10.63. \lambda = 3\eta/(\rho v) = 0,89 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

$$10.64. 1) \bar{v} = \sqrt{8RT/(\pi A)} = 3,8 \cdot 10^{10} \text{ см/с;}$$

$$2) \lambda = 3\eta/(nm\bar{v}) = 0,92 \cdot 10^{-5} \text{ см;}$$

$$3) v = n\bar{v}/(2\lambda) = 5,6 \cdot 10^{28} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-3};$$

$$4) \sigma = 1/(\sqrt{2}n\lambda) = 0,283 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2;$$

$$5) r = \sqrt{\sigma/\pi} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

$$10.65. \frac{x_N}{x_H} \approx 0,13.$$

$$10.66^* Q = \frac{\pi\mu r^4}{8\eta RT} \frac{P_1^2 - P_2^2}{l}.$$

Решение. При течении на бесконечно малом участке трубы  $dx$  жидкость можно считать несжимаемой и применить к такому течению формулу Пуазейля

$$Q = - \frac{\pi\rho r^4}{8\eta} \frac{dP}{dx}.$$

Исключая плотность  $\rho$  с помощью уравнения Клапейрона, получим

$$Q = - \frac{\pi\mu r^4}{8\eta RT} P \frac{dP}{dx}.$$

Так как при стационарном течении величина  $Q$  постоянна вдоль всей трубы, а величина  $\eta$  зависит только от температуры и при изотермическом течении остается постоянной, то после интегрирования получим ответ.

$$10.67. \eta = \frac{\pi P_2 D^4 \tau}{128 l V} \left[ \ln \frac{(P_1 - P_2)(P_2 + P_3)}{(P_3 - P_2)(P_1 + P_2)} \right]^{-1} \approx 14 \cdot 10^{-5} \text{ дин} \cdot \text{с/см}^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{m\bar{v}}{3\sqrt{2}\pi\eta}} = 3,8 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

$$10.68. t = \frac{16\eta LV}{\pi r^4} \left( \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1} \right) \approx 4,3 \text{ с.}$$

$$10.69. t = \frac{3}{4} \frac{LV}{r^3} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \ln \frac{P_1}{P_2} \approx 88 \text{ с.}$$

$$10.70. \dot{V}_2 = \frac{\dot{V}_1 A}{\dot{V}_1 + A} \approx 330 \text{ л/с, где } A = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi RT}{\mu}} \frac{r^3}{L}, \mu - \text{ молярная масса воздуха.}$$

10.71. Увеличится в 8 раз.

$$10.72. m = \frac{\pi \gamma \mu d^4 P_1^2}{128(3\gamma - 1)R\eta l T_1} \left[ 1 - \left( \frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} \right], \text{ где } \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \mu - \text{ молярная масса газа.}$$

$$10.73. N = \frac{\pi(\rho gh)^2}{8\eta l} R^4 \approx 10^{-3} \text{ Дж/с, где } \eta - \text{ коэффициент вязкости воды.}$$

$$10.74^* M = \frac{5}{8\lambda} SP \sqrt{\frac{3RT}{\mu T_0}} (\sqrt{T_0} - \sqrt{T}) \tau \approx 110 \text{ г.}$$

Решение. Так как расстояние между стенками мало по сравнению с их размерами, то при расчете стенки можно считать плоскими. Температуру одной из стенок можно принять равной температуре окружающего воздуха  $T_0$ , а другой — температуре жидкого воздуха  $T$ . Молекулы, отражающиеся от наружной стенки, назовем «горячими», а молекулы, отражающиеся от внутренней стенки, — «холодными». Обозначим концентрации таких молекул через  $n_0$  и  $n$ , а их скорости — через  $v_0$  и  $v$  соответственно. Число молекул, отражающихся от  $1 \text{ см}^2$  горячей стенки в одну секунду, равно  $n_0 v_0 / 4 = n v / 4$ . Эти молекулы передают холодной стенке тепло  $(1/4)n_0 v_0 \cdot (5/2)kT_0$ ; обратно уносится тепло  $(1/4)n v \cdot (5/2)kT$ . Следовательно,

$$M = \frac{5}{8\lambda} n_0 v_0 k S (T_0 - T) \tau.$$

Давление оставшегося газа, если бы он имел температуру  $T_0$ , равно  $P = (n + n_0)kT_0$ . Окончательно нетрудно получить ответ.

$$10.75^* N = \frac{2}{3} \frac{n}{l} \pi \bar{v} r^3.$$

Решение. Направим ось  $X$  вдоль трубы. Тогда  $N = -SD \frac{dn}{dx}$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения трубы. Так как поток  $N$  один и тот же на протяжении всей трубы, то  $|dn/dx| = n/l$ . Заменяя в формуле  $D = (1/3)\bar{v}\lambda$  величину  $\lambda$  на  $2r$ , получим  $D = (2/3)\bar{v}r$  и далее ответ.

10.76^\* Решение. Так как столкновений между молекулами нет, то потоки частиц  $N_1$  и  $N_2$  в прямом и обратном направлениях совершенно независимы, и полный поток  $N$  представится их разностью:

$$N = N_1 - N_2 = \frac{2}{3} \pi \bar{v} r^3 \frac{n_1 - n_2}{l}$$

(формула Кнудсена).

10.77. Газ будет перетекать в сосуд с более высокой температурой;

$$m = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2} \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} M = \frac{2}{15} M.$$

$$10.78. n = n_0 e^{-t/\tau}, \tau = \frac{3Vl}{2\pi a^3 \bar{v}} = 5 \cdot 10^3 \text{ с} = 83,4 \text{ мин.}$$

$$10.79. n = n_0(1 - e^{-t/\tau}); \tau = \frac{12Vl}{\pi D^3 \bar{v}} = 3 \cdot 10^4 \text{ с} = 8,33 \text{ ч.}$$

$$10.80. n_1 = \frac{n_{10}\tau_1 + n_{20}\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} (n_{10} - n_{20})e^{-t/\tau};$$

$$n_2 = \frac{n_{20}\tau_2 + n_{10}\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} (n_{20} - n_{10})e^{-t/\tau},$$

$$\text{где } \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}, \tau_1 = \frac{3V_1 l}{2\pi a^3 \bar{v}}, \tau_2 = \frac{3V_2 l}{2\pi a^3 \bar{v}}.$$

$$10.81^*: u \approx 1,4 \text{ м/с.}$$

Решение. При оценке эффекта можно предположить, что одна шестая молекул воздуха движется направо, а одна шестая — налево. Молекулы, движущиеся параллельно плоскости диска, можно не принимать во внимание. Скорости молекул  $v$  будем считать одинаковыми. Пусть диск движется равномерно со скоростью  $u$  менее нагретой поверхностью вперед. Число ударов, испытываемое квадратным сантиметром этой поверхности в одну секунду:  $n(v+u)/6$ . Для оценки эффекта можно предположить, что в системе отсчета, движущейся вместе с диском, молекула отражается со скоростью  $v_2$ , соответствующей температуре  $T_2$  поверхности. В неподвижной системе скорость отразившейся молекулы будет  $v_2 + u$ , а изменение скорости  $v_2 + u + v$ . Следовательно, давление газа на менее нагретую поверхность

$$P_2 = \frac{nm}{6} (v+u)(v_2+u+v).$$

Аналогично, давление на более нагретую поверхность

$$P_1 = \frac{nm}{6} (v-u)(v_1+v-u).$$

При установившемся движении  $P_2 = P_1$ . Из этого условия нетрудно получить

$$u = \frac{v_1 - v_2}{4v + v_1 + v_2} v \approx \frac{v_1 - v_2}{6} \approx \frac{v}{12} \frac{v_1^2 - v_2^2}{v^2} \approx \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \frac{T_1 - T_2}{T} \approx 1,4 \text{ м/с.}$$

$$10.82. \varphi = \frac{\pi \eta \omega}{2fh} = 81^\circ.$$

10.83^\* Решение. Рассмотрим кольцо на вращающемся диске с внутренним радиусом  $r$  и наружным радиусом  $r + dr$ . С площади этого кольца каждую секунду отражаются  $nv \cdot 2\pi r dr/4$  молекул. Каждая из них уносит момент количества движения  $mr^2\omega$ , который передается неподвижному диску. Полный момент импульса, передаваемый в одну секунду неподвижному диску, легко найти интегрированием. Приравняв его моменту силы  $f\varphi'$ , действующему со стороны закрученной нити, получим для угла закручивания

$$\varphi' = \frac{3\pi P}{8vf} \omega R^4 = \frac{3}{4} \frac{Ph}{\eta v} \varphi \approx 1^\circ,$$

где  $\varphi$  — значение угла закручивания, соответствующее тому случаю, когда расстояние между дисками мало по сравнению с длиной свободного пробега молекулы. (См. предыдущую задачу.)

$$10.84. N \approx 3 \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}).$$

$$10.85. l \approx \left(\frac{\eta}{\rho c}\right)^{3/4}.$$

**10.86\*** Решение. Пусть в одной жидкости в отсутствие внешних силовых полей распределены тождественные броуновские частицы с концентрацией  $n(x)$ , меняющейся только в направлении оси  $X$ . Вычислим диффузионный поток  $\Gamma$  таких частиц через произвольное сечение, перпендикулярное к оси  $X$ . Возьмем в этом сечении бесконечно малую площадку  $dS$  (рис. 409). Выделим

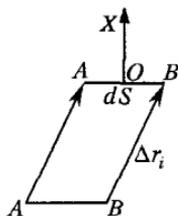


Рис. 409

группу броуновских частиц, которые за время  $\tau$  смещаются на один и тот же вектор  $\Delta r_i$ . Пусть будет велика не только полная концентрация броуновских частиц  $n$ , но и концентрация их  $n_i(x)$  в каждой группе. Число частиц  $i$ -й группы  $dN_i$ , проходящих через площадку  $dS$  за время  $\tau$ , будет равно числу их в косом цилиндре  $ABB'A'$  с основанием  $AB$  и образующей  $\Delta r_i$ , т. е.

$$dN_i = \int n_i(x) dV.$$

Линейные размеры площадки  $dS$  можно выбрать малыми по сравнению с  $\Delta r_i$ . Тогда элемент объема  $dV$  можно представить в виде  $dV = dS dx$  и написать

$$dN_i = dS \int_{-\Delta x_i}^0 n_i(x) dx = dS \int_{-\Delta x_i}^0 n_i(x_0 + \xi) d\xi,$$

где  $x_0$  — координата центра  $O$  площадки  $dS$ . Выбрав  $\tau$ , а следовательно, и  $\Delta x_i$  достаточно малыми, разложим функцию  $n_i(x_0 + \xi)$  по степеням  $\xi$  и оборвем это разложение на линейном члене. Тогда

$$dN_i = n_i(0) dS \int_{-\Delta x_i}^0 d\xi + \left(\frac{dn_i}{dx}\right)_{x=x_0} dS \int_{-\Delta x_i}^0 \xi d\xi,$$

или после интегрирования

$$dN_i = dS \left[ n_i \Delta x_i - \frac{1}{2} \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2 \right].$$

Аргумент  $x_0$  мы опустили, предполагая, что концентрация  $n_i$  и ее производная  $dn_i/dx$  берутся в центре площадки  $dS$ .

Избыток  $dN$  броуновских частиц, проходящих через площадку  $dS$  в положительном направлении оси  $X$ , над числом частиц, проходящих в противоположном направлении, найдется суммированием предыдущего выражения по всем группам частиц:

$$dN = dS \int_i n_i \Delta x_i - \frac{dS}{2} \sum_i \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2.$$

Среднее значение первой суммы равно нулю. Действительно, концентрации  $n_i$  относятся к центру площадки  $dS$ , а смещения броуновских частиц в положительном и отрицательном направлениях равновероятны. Для вычисления второй суммы заметим, что по определению среднего

$$\overline{n \Delta x^2} = \sum n_i (\Delta x_i)^2.$$

Величины  $\overline{\Delta x_i}$  как независимые параметры не зависят от  $x$ . Средний квадрат смещения  $(\overline{\Delta x})^2 \equiv \overline{\Delta x^2}$  также не может зависеть от  $x$  ввиду однородности жидкости и отсутствия силовых полей. Поэтому дифференцирование предыдущего соотношения по  $x$  дает

$$\overline{\Delta x^2} \frac{dn}{dx} = \sum \frac{dn_i}{dx} (\Delta x_i)^2.$$

В результате для среднего значения  $d\bar{N}$  получаем

$$d\bar{N} = -dS \frac{\overline{\Delta x^2}}{2} \frac{dn}{dx}.$$

Чтобы найти средний диффузионный поток броуновских частиц  $\Gamma$ , надо эту величину разделить на  $dS$  и  $\tau$ . Таким путем получаем

$$\Gamma = - \frac{\overline{\Delta x^2}}{2\tau} \frac{dn}{dx}.$$

Отсюда видно, что выравнивание концентраций броуновских частиц можно рассматривать как процесс диффузии с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2} \frac{\overline{\Delta x^2}}{\tau}.$$

По смыслу вывода под  $\overline{(\Delta x)^2}$  следует понимать «среднее по совокупности частиц». Однако в силу одинаковости последних и отсутствия взаимодействия между ними это среднее может быть заменено «средним по времени» для одной частицы.

**10.87.** Решение. Плотность суммарного потока частиц в положительном направлении оси  $X$ :  $nBf - D \frac{\partial n}{\partial x}$ , где  $f$  — результирующая силы тяжести и выталкивающей силы гидростатического давления, действующая на броуновскую частицу (ось  $X$  направлена вертикально вниз). Приравнявая это выражение нулю и принимая во внимание, что  $n = n_0 \exp [fx/(kT)]$ , получим окончательно

$$D = kTB$$

(формула Эйнштейна).

$$10.88. \overline{\Delta x^2} = 2kTB\tau = \frac{kT}{3\pi\eta a} \tau.$$

$$10.89. \sqrt{\overline{\Delta^2}} = \sqrt{\overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2}} = \sqrt{\frac{2kT\tau}{3\pi\eta a}} \approx 10 \text{ мкм}.$$

$$10.90. N = \frac{RT\tau}{3\pi a \eta \overline{\Delta x^2}} \approx 6,02 \cdot 10^{23}.$$

$$10.91. \langle |\Delta x| \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle \Delta x^2 \rangle = 2\sqrt{\frac{kTB\tau}{\pi}}.$$

10.92.  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle} = 2\sqrt{\frac{hkT}{mg}} = 1,3 \cdot 10^{-2}$  см. Радиус капельки  $a = [3m/(4\pi\rho)]^{1/3} \approx 1,36 \cdot 10^{-3}$  см, т. е. велик по сравнению с длиной свободного пробега молекул, составляющих воздух ( $\sim 10^{-5}$  см). Число Рейнольдса  $Re = mgr/(\pi\eta^2) \approx 0,15$ , т. е. мало по сравнению с единицей. Условия применимости формулы Стокса выполняются.

$$10.93. Ne = \frac{2RT(v_1 + v_2)}{E(\Delta x)^2} \tau.$$

$$10.94. Ne = 5,88 \cdot 10^{23}.$$

$$10.95. R_{\min} = \left( \frac{729}{16\pi} \frac{kT\eta^2}{\rho^3 g^2} \right)^{1/7} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ см (при } R < R_{\min} \text{ капли участвуют в броуновском движении, при } R > R_{\min} \text{ капли падают в вязкой среде в соответствии с формулой Стокса).}$$

$$10.96. r = \left( \frac{3kT}{\pi R \rho g} \right)^{1/3} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

$$10.97. \sqrt{\langle L^2 \rangle} = 1,4 \cdot 10^{-19} \text{ г см}^2/\text{с.}$$

$$10.98. \tau = \frac{l^2}{4D} \approx 15 \text{ с, где } D \text{ — коэффициент диффузии.}$$

10.99. Используя формулу Стокса для силы сопротивления при вязком движении, найдем, что  $r \sim 10^{-3}$  см. В осадок выпадают те частицы, для которых средняя высота столба, оцененная по барометрической формуле  $h \sim \frac{kT}{mg} \leq r$  ( $m$  — эффективная масса частиц). Откуда следует  $r \geq 0,5 \cdot 10^{-4}$  см.

Таким образом, такие частицы в алюминиевой краске выпадут в осадок.

$$10.100. t = 0,03\rho\lambda \frac{a^2\sqrt{T_0}}{16\kappa_0} \left( T_2^{3/2} - T_1^{3/2} \right)^{-1} \ln \frac{D}{d} \approx 500 \text{ с.}$$

10.101. Время образования жирового слоя  $\tau_{\text{обр}} \approx \frac{l}{FB} \approx 1$  сут (по условию). Время восстановления однородного распределения  $\tau_{\text{вос}} \approx \frac{l^2}{2kTB}$ . Подсчет показывает, что  $\tau_{\text{вос}} \approx 10^{11} - 10^{12}$  с  $\sim 1000$  лет.

$$10.102. Re \sim 10^5.$$

10.103\* Решение. Стационарный поток пара через любую сферическую поверхность радиуса  $r$ , концентрическую относительно поверхности капли, равен

$$j = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{d\rho}{dr} = \text{const.}$$

Откуда

$$\rho = \frac{j}{4\pi D r} + \rho_{\infty}.$$

Величину  $j$  можно найти из условия, что на поверхности капли ( $r = a$ ) пар должен быть насыщенным, т. е.

$$j = 4\pi D a (\rho_H - \rho_{\infty})$$

и, следовательно,

$$\rho = \frac{a}{r} (\rho_H - \rho_{\infty}) + \rho_{\infty}.$$

$$10.104. \tau_{\text{исп}} = \frac{a^2}{2D} \frac{\rho_{\text{ж}}}{(1-\varphi)\rho_H} = \frac{a^2}{2D} \frac{RT}{(1-\varphi)\mu\rho_H} \rho_{\text{ж}}.$$

$$1) \tau_{\text{исп}} \approx 37 \text{ мин; } 2) \tau_{\text{исп}} \approx 0,13 \text{ с.}$$

$$10.105. P_0 = \frac{3H\Delta m N_{\Lambda}}{\lambda \bar{v} S t \mu} kT = 20,5 \text{ мм рт. ст.}$$

10.106.  $t = \frac{9Rt\rho l^2}{4\lambda\bar{v}P_{н\mu}} \approx 220$  дней, где  $\mu$  и  $\rho$  — молярная масса и плотность воды.

10.107.  $\Delta n \approx 0,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

10.108.  $\frac{N_1 - N_2}{N_1} \approx 4 \cdot 10^{-5}$ ;  $\tau \approx 1$  месяц.

10.109.  $J = \frac{\bar{v}KP_{нас}}{4kT}$ , где  $\bar{v}$  — средняя тепловая скорость.

10.110.  $\frac{n_{нас} - n}{n} \approx \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L} \approx 4 \cdot 10^{-7}$ ;  $\frac{P_{нас} - P}{P_{нас}} \sim 10^{-7}$ .

10.111.  $t = \frac{\rho_{ж} h_0^2}{2D\rho_{н}} \approx 257$  сут, где  $\rho_{ж}$  — плотность воды.

10.112.  $\tau = \frac{3\pi}{8} \frac{\rho_{ж} L \sigma}{mg} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 100$  лет (перенос жидкости будет происходить лишь вниз путем диффузии молекул через пузырек, поскольку  $P_0 \gg \rho g L$ ).

10.113.  $\Delta S = 40,6 \text{ Дж/К}$ .

10.114.  $\Delta S = -15R \ln 2 = -86,4 \text{ Дж/К}$ .

10.115. Скорость увеличится на 15%.

10.116.  $\langle \Delta R^2 \rangle = \frac{3kTH}{\pi r^3(\rho - \rho_{ж})g}$ .

10.117.  $\frac{a_N}{a_0} = \frac{(n_{л}/n_{т})_N}{(n_{л}/n_{т})_0} = \left( \sqrt{\frac{\mu_{т}}{\mu_{л}}} \right)^N \approx 10^3$ , где  $\mu_{т}$  и  $\mu_{л}$  — относительные молекулярные массы тяжелого и легкого изотопов соответственно.

10.118.  $\Delta S = \left( C_V + \frac{R}{2} \right) \ln \frac{T_1}{T_2} \approx 4,2 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

10.119.  $\bar{E}_{кин} = \frac{3}{2} kn\sqrt{T_1 T_2}$ .

10.120.  $q = n \sqrt{\frac{8k^3}{\pi m}} \sqrt{T_1 T_2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$ .

10.121.  $J = \frac{1}{32} SP\bar{v}$ .

10.122.  $\frac{t_{\parallel}}{t_{\perp}} = \frac{4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$ .

10.123.  $\frac{dT}{dt} \approx 4 \text{ К/с}$ .

10.124.  $t \approx \frac{3L^2\rho R}{x\mu} \approx 100 \text{ с}$ .

10.125.  $\rho_{ж} \sim \frac{\mu^{1/4} N_A^{1/2} \eta^{3/2}}{(RT)^{3/4}}$ .

10.126.  $D \sim \sqrt{\frac{\epsilon_0}{m}} r_0 \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$ .

10.127.  $\eta \propto T^{2/3}$ .

10.128.  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{H^3}{NR}$ .

## § 11. Фазовые превращения

**11.1.\***  $Q = 10\,770$  кал/моль.

**Решение.** Так как при нагревании объем системы не меняется, то работа не совершается. Поэтому искомое количество тепла будет равно приращению внутренней энергии системы и, следовательно, не будет зависеть от способа перехода системы из начального состояния в конечное. Осуществим этот переход в два этапа.

1. Нагреем воду от  $0$  до  $100^\circ\text{C}$  так, чтобы испарения не было. Для этого потребуется подвести тепло  $Q_1 = 18 \cdot 100 = 1800$  кал/моль.

2. Испарим воду при постоянной температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ . Для этого требуется подвести тепло  $Q_2 = U_{\text{п}} - U_{\text{ж}}$ , где  $U_{\text{п}}$  и  $U_{\text{ж}}$  — внутренние энергии моля водяного пара и воды при температуре  $100^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении. Для определения  $U_{\text{п}} - U_{\text{ж}}$  воспользуемся первым началом термодинамики  $\Lambda = U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} + A$ , где  $\Lambda$  — теплота испарения, отнесенная к одному молю ( $\Lambda = 539 \cdot 18 = 9710$  кал/моль), а  $A$  — работа против постоянного внешнего давления ( $A = PV_{\text{п}} = RT = 1,98 \cdot 373 = 739$  кал/моль). Таким образом,

$$Q_2 = U_{\text{п}} - U_{\text{ж}} = \Lambda - A = 8970 \text{ кал/моль,}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1800 + 8970 = 10\,770 \text{ кал/моль.}$$

**11.2.**  $A = \mu\lambda(T_1 - T_2)/T_2 = 13,85$  кДж/моль, где  $\mu$  — молярная масса воды.

**11.3.**  $t_0 = t_1 + \frac{P\lambda}{\kappa} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT_1}} = -5,5^\circ\text{C}$ , где  $\mu$  — молярная масса воды.

**11.4.\*** **Решение.** Пусть точка  $A$  на диаграмме  $P, v$  (рис. 410) изображает состояние одного грамма жидкости при температуре  $T$  и давлении  $P$ , равном давлению ее насыщенного пара при этой температуре. Будем сообщать системе тепло таким образом, чтобы давление и температура оставались постоянными. Тогда жидкость будет испаряться и притом так, что в любой момент времени над ней будет находиться насыщенный пар. Пусть  $B$  изображает состояние, в котором вся жидкость перешла в пар. Тогда теплота, полученная системой на изотерме  $AB$ , будет равна теплоте испарения  $\lambda$ . Адиабатически понизим температуру пара на бесконечно малую величину  $dT$  (точка  $C$ ), а затем по изотерме  $CD$  и адиабате  $DA$  вернем систему в начальное состояние. Работа, совершенная системой, равна площади параллелограмма  $ABCD$ . Выразив ее через  $v_{\text{п}}$ ,  $v_{\text{ж}}$  и  $dT$  и применив теорему Карно, нетрудно получить:

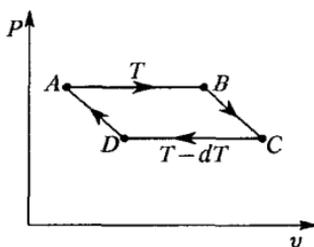


Рис. 410

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_{\text{п}} - v_{\text{ж}})}$$

(формула Клапейрона — Клаузиуса).

**11.5.**  $\Delta T = \frac{T}{q} \Delta v \Delta P \approx 0,056$  К.

$$11.6. q \approx T \frac{\Delta P}{\Delta T} \Delta V \approx 44 \text{ кал/г (опыт дает 46,4 кал/г)}.$$

11.7.  $P \approx \left(1 + \frac{\lambda \Delta T}{\nu RT}\right) P_0 = 1,035 \text{ атм}$ , где  $\lambda$  — удельная теплота парообразования,  $\nu = 1/18$  — число молей в 1 г воды,  $P_0$  — атмосферное давление.

$$11.8. T - T_0 \approx \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{\lambda \mu}} - T_0 \approx 26 \text{ К}.$$

$$11.9. \frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{\lambda \mu}{RT} - 1\right) = 0,55.$$

$$11.10. t = 109 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$11.11. \frac{\Delta V}{V} \approx -3,2\%.$$

$$11.12. v_{\text{п}} = v_{\text{ж}} + \frac{\lambda}{T} \frac{dT}{dP} \approx 1700 \text{ см}^3/\text{г}.$$

11.13.  $\frac{\Delta m}{m} \approx \frac{c(T_{10} - T_1)}{\lambda} \approx 14\%$ , где  $c$  — удельная теплоемкость воды,  $T_1$  и  $T_{10}$  — температуры кипения при 1 и 10 атм соответственно.

$$11.14. \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T} \left(1 - \frac{\lambda}{RT}\right) \approx -3,2\%.$$

$$11.15. P_{\text{п}} = 1 \text{ атм}; m_{\text{в03}} = 42,3 \text{ г}; m_{\text{п}} = 26,3 \text{ г}.$$

11.16.  $\Delta m \approx \frac{\mu VP}{RT^2} \left(\frac{\lambda \mu}{RT} - 1\right) \Delta T = 0,075 \text{ г}$ , где  $V \approx 4 \text{ л}$  — объем пара,  $P$  — его давление.

$$11.17. \frac{\Delta m}{m} = \frac{cghT_0}{\lambda^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

$$11.18. \lambda_1 = \lambda_2 + (c_{\text{ж}}^* - c_{\text{п}}^*) (T_2 - T_1) \approx 567 \text{ кал/г}.$$

$$11.19. \lambda_{323} = \lambda_{373} + \left(c_{\text{в}} - \frac{C_{\text{в}} + R}{\mu}\right) (T_2 - T_1) \approx 2370 \text{ Дж/г}.$$

11.20.  $\rho = \frac{\mu P_0}{RT} \exp\left[\frac{\lambda \mu}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right] \approx 7,9 \text{ г/см}^3$ , где  $T_0$  — температура кипения воды при  $P_0$ .

$$11.21. \frac{\Delta h}{h} = -\frac{\Delta T}{T} \left(\frac{\lambda \mu}{RT} - 1\right) \approx 2 \cdot 10^{-2}.$$

11.22.  $T = \left[\frac{1}{T_0} - \frac{R}{\mu \lambda} \ln\left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 r}\right)\right]^{-1} = 404 \text{ К}$ , где  $T_0$  — температура кипения при нормальном атмосферном давлении  $P_0$ .

$$11.23. \frac{h}{\Delta T} \approx 10 \frac{T_{\text{к}} P}{T^2} \approx 76 \text{ см эфирного ст./К},$$

где  $P \sim 1 \text{ атм} \approx 1460 \text{ см эфирного ст.}$

$$11.24. P = AT^{-\mu a/R} \exp\left(-\frac{\lambda_0 \mu}{RT}\right), \mu — молярная масса.$$

Значение постоянной  $A$  можно найти, зная температуру кипения жидкости при каком-либо давлении.

11.25.  $T = \frac{\lambda \mu_1 T_0 T_a}{\lambda \mu_1 T_a + \mu g H T_0}$ , где  $\mu$  — молярная масса воздуха,  $\mu_1$  — молярная масса воды,  $T_0$  — температура кипения воды у поверхности Земли.

11.26.  $\Delta T = T_{100} \frac{B}{1+B} \approx 24$  К, где принято  $B = \frac{\mu_{\text{воз}} g h}{\mu_{\text{вод}} \lambda} \frac{T_{100}}{T_0} \approx 6,8 \cdot 10^{-2}$ , где  $T_{100} \approx 373$  К — температура кипения воды на поверхности Земли,  $T_0 \approx 273$  К — температура воздуха,  $\lambda = 2260$  Дж/г — удельная теплота парообразования.

$$11.27. \Delta T = \frac{Tgh}{\lambda} \approx 0,023 \text{ К.}$$

$$11.28. F = \frac{\pi d^2}{4} P_0 \left\{ \exp \left[ \frac{\lambda \mu}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] - 1 \right\} = 16,7 \text{ Н.}$$

11.29.  $\frac{\Delta m}{m} = \left( \frac{c_p T}{\lambda} - 1 \right) \frac{\Delta T}{T} \approx 0,17\%$ , где  $c_p$  — удельная теплоемкость пара при постоянном давлении,  $\lambda$  — удельная теплота парообразования.

11.30. При адиабатическом сжатии водяной пар становится ненасыщенным, при адиабатическом расширении — пересыщенным. (Получение пересыщенного водяного пара путем адиабатического расширения используется в камере Вильсона.)

$$11.31. \frac{\Delta V_2}{V_2} = -3 \frac{\Delta T}{T_0}, \quad \text{где} \quad \frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{1-\varphi}{\lambda - \varphi R T_0} R T_0 = -0,0083, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{\Delta V_2}{V_2} \approx 2,5\%.$$

$$11.32. \dot{Q} = \frac{\lambda^2 \pi d^4 \mu^2 P_{\text{п}}^2 \Delta T}{128 \eta l R^2 T^3} \approx 1,4 \text{ кДж/с, где } P_{\text{п}} = 10^5 \text{ Па.}$$

$$11.33^* P_{-1} \cdot \text{С} = 4,20 \text{ мм рт. ст.}$$

Решение. Удельная теплота возгонки  $q_{\text{в}} = q + \lambda = 676$  кал/г. Подставляя ее в уравнение Клапейрона—Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q_{\text{в}}}{T(v_{\text{п}} - v_{\text{т}})} \approx \frac{q_{\text{в}}}{T v_{\text{п}}}$$

и определив удельный объем водяного пара из уравнения  $P v_{\text{п}} = \frac{1}{\mu} RT$ , легко найти, что при  $\Delta T = -1$  К  $\Delta P = -0,38$  мм рт. ст., а давление насыщенного пара над льдом при  $t = -1$  °С и получить ответ.

11.34.  $\Delta T \approx \frac{PT}{q} (v_{\text{в}} - v_{\text{л}}) = -0,72$  К,  $\Delta m/m = c_{\text{л}} \Delta T/q = 0,0054$ , где  $q = 80$  кал/г — удельная теплота плавления льда.

$$11.35. \Delta T = \frac{Tgh}{q} \left( \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} - 1 \right) \approx -2 \text{ К, т. е. } t_{\text{озера}} = -2 \text{ °С.}$$

$$11.36. \Delta H = 1,25 \text{ м.}$$

$$11.37^* \Delta P = \frac{RT}{\mu v_{\text{л}}} \frac{\Delta P_{\text{п}}}{P_{\text{п}}} = 10,5 \text{ атм.}$$

Решение. Изотермическое увеличение внешнего давления на  $\Delta P$  увеличивает удельный термодинамический потенциал льда на  $\Delta \phi_{\text{л}} = v_{\text{л}} \Delta P$ , причем сжимаемостью льда можно пренебречь. Чтобы равновесие не нарушилось, на

столько же должен возрасти удельный термодинамический потенциал пара. Но для пара

$$\Delta\varphi_{\text{п}} = v_{\text{п}}\Delta P_{\text{п}} = \frac{RT}{\mu} \frac{\Delta P_{\text{п}}}{P_{\text{п}}}.$$

Приравнявая оба выражения, получим ответ.

**11.38.**  $t = 0,0074 \text{ }^{\circ}\text{C}.$

**11.39.**  $t > -13 \text{ }^{\circ}\text{C}.$

**11.40.**  $P = 128 \text{ Н}.$

**11.41.**  $\frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{T(v_{\text{ж}} - v_{\text{л}})}{q} = -0,0075 \text{ К/атм}.$

Дьюар опытным путем нашел  $-0,0072 \text{ К/атм}$ . Температуру тройной точки можно приближенно определить, приняв давление равновесного пара в тройной точке равным нулю. Таким путем получаем, что тройная точка воды лежит выше точки плавления на  $0,0075 \text{ К}$ .

**11.42\* Решение.** Квасистатически и изотермически испарим жидкость при температуре  $T_1$ . Изменение энтропии в этом процессе

$$\Delta_1 S = \frac{\lambda}{T_1} (m_2 - m_1).$$

Затем будем квазистатически менять температуру пара и притом так, чтобы он все время оставался насыщенным. Элементарное количество тепла, которое требуется подводить к пару в этом процессе,

$$\delta Q = m_2 c dT = m_2 \left( c_P^{\text{п}} - \frac{\lambda}{T} \right) dT.$$

Так как  $dS = \delta Q/T$ , то интегрируя и пренебрегая при этом зависимостью  $\lambda$  от  $T$ , найдем для соответствующего изменения энтропии

$$\Delta_2 S = m_2 \left[ c_P^{\text{п}} \ln \frac{T_2}{T_1} + \lambda \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right].$$

**11.44.**  $t = \frac{P_0 - P_1}{\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} + \frac{q}{T(v_1 - v_2)}} = 0,0075 \text{ }^{\circ}\text{C},$

$P = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} t + P_1 = 4,582 \text{ мм рт. ст}.$

**11.45\* Решение.** Для наклона кривых равновесия в тройной точке (рис. 411) имеем

$$\frac{dP_{23}}{dT} = \frac{q_{23}}{T(v_3 - v_2)} \approx \frac{q_{23}}{Tv_3},$$

$$\frac{dP_{13}}{dT} = \frac{q_{13}}{T(v_3 - v_1)} \approx \frac{q_{13}}{Tv_3}.$$

Так как  $q_{13} = q_{12} + q_{23}$ , то  $q_{13} > q_{23}$ . Следовательно, кривая возгонки идет круче кривой испарения. В окрестности тройной точки кривые равновесия можно заменить касательными к ним. В этом приближении

$$P_1 - P_2 = AB = AC - BC = t \left( \frac{dP_{13}}{dT} - \frac{dP_{23}}{dT} \right),$$

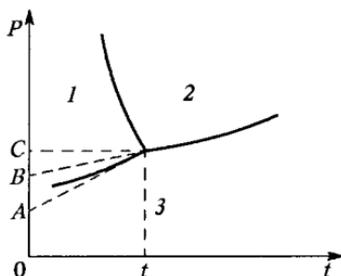


Рис. 411

откуда

$$P_1 - P_2 = \frac{q_{12}}{T v_3} t = 0,00033 \text{ мм рт. ст.}$$

$$11.46. \frac{\Delta P_n}{P_n} = \frac{\mu v_{ж}}{RT} \Delta P = 0,08\%.$$

11.47\* Решение. Для приближенной оценки в уравнении

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{\lambda}{T v} \approx \frac{\mu \lambda P}{RT^2}$$

заменяем производную  $dP/dT$  отношением конечных приращений. Получим

$$\frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} = \frac{RT_1^2}{\mu \lambda P_1},$$

где  $P_1$  и  $P_2$  — давления насыщенного пара при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Давление пара в воздухе при температуре  $T_1$  и относительной влажности  $\varphi$  будет  $\varphi P_1$ , а потому  $P_2 = \frac{T_2}{T_1} \varphi P_1$ . Подставляя эти значения в предыдущее соотношение, найдем

$$T_2 - T_1 = \frac{\varphi - 1}{\mu \lambda - \varphi RT_1} RT_1^2 = -3,3 \text{ К.}$$

Для нахождения более точного решения получаем

$$\ln \left( \frac{\varphi T_2}{T_1} \right) = \frac{\mu \lambda}{RT_1 T_2} (T_2 - T_1).$$

Подставляя численные значения и переходя к десятичным логарифмам, преобразуем это уравнение к виду

$$T_2 - T_1 = 0,124 T_2 \lg \left( \frac{\varphi T_2}{T_1} \right). \quad (*)$$

Для решения уравнения (\*) применяем метод последовательных приближений. В нулевом приближении полагаем  $T_2 = T_1$ . Пользуясь этим, находим первое приближение:

$$T_2 - T_1 = 0,124 T_1 \lg \varphi = -3,52 \text{ К.}$$

Вычислив отсюда  $T_2$  и подставив в правую часть уравнения (\*), найдем второе приближение:

$$T_2 - T_1 = -3,66705 \text{ К.}$$

Поступая так дальше, получим третье приближение:

$$T_2 - T_1 = -3,67313 \text{ К,}$$

четвертое приближение:

$$T_2 - T_1 = -3,67360 \text{ К.}$$

С точностью до трех значащих цифр

$$T_2 - T_1 = -3,67 \text{ К.}$$

Таким образом, замена производной  $dP/dT$  отношением конечных приращений приводит к ошибке  $\sim 10\%$ .

$$11.48. v = \sqrt{\frac{2C_p T_0 \lambda}{\lambda \mu - RT_0 \ln(P/P_0)}}, \text{ где } P_0 = 1 \text{ атм, } T_0 = 373 \text{ К.}$$

11.49.  $\Delta T = \frac{\Delta P R T^2}{P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2} \approx 3 \text{ К}$ , т.е. температура кипения системы  $t = 69^\circ \text{С}$ . Здесь  $P_1 \approx 0,27 P_0$ ,  $P_2 \approx 0,73 P_0$ , где  $P_0$  — нормальное атмосферное давление.

11.50.  $t \approx \frac{2\eta l \rho d^2 H R^2 T^3}{\lambda \mu^2 P_0^2 r^4 \Delta T} \approx 40 \text{ мин}$ , где  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  — плотность, молярная масса и удельная теплота испарения воды,  $P_0$  — нормальное атмосферное давление.

$$11.51. t = \frac{2l\eta}{\rho g r^4} D^2 \ln \frac{a + \rho g H_2}{a + \rho g H_1}, \text{ где } a = \frac{\lambda \mu P_0 \Delta T}{R T_0^2}.$$

11.52.  $T = T_0 + \frac{3R\rho g h}{\lambda \mu P_0} T_0^2 = 374,7 \text{ К}$ , где  $P_0 = 1 \text{ атм}$ ,  $\lambda$  — удельная теплота парообразования,  $\rho$  — плотность, а  $\mu$  — молярная масса воды.

$$11.53. t \approx 33^\circ \text{С}.$$

$$11.54. \Delta U \approx \lambda_0 + 3RT - 4RT_0.$$

$$11.55. t = \int_0^H \frac{q^2 \rho_{\text{л}} \rho_{\text{в}} S}{\kappa_{\text{м}} T_0 F \Delta p} z dz \approx 12 \text{ с}.$$

$$11.56. v = \frac{\Delta p}{P} \frac{P T \kappa}{(\rho q)^2 d} \approx 0,38 \text{ мм/с} \approx 1,37 \text{ м/ч}.$$

$$11.57. \lambda = \frac{R T^2}{\mu P} \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{возг}} - q_{\text{пл}} \approx 103 \text{ кал/К}.$$

$$11.58. \alpha = \beta_T = \infty; C_P = \pm \infty.$$

11.59.  $\beta_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{P} \left( 1 - \frac{2RT}{\lambda \mu} + \frac{C_P R T^2}{\lambda^2 \mu^2} \right)$ , где  $\lambda$  — удельная теплота испарения, а  $C_P$  — молярная теплоемкость пара при постоянном давлении.

$$11.60. \frac{\Delta P}{P} = -\frac{\Delta V/V}{1 - \frac{2RT}{\lambda \mu} + \frac{C_P R T^2}{\lambda^2 \mu^2}} = -0,033.$$

$$11.61^*. c = -1 \text{ кал/(г·К)}.$$

Решение. Первое начало термодинамики для единицы массы пара можно записать в виде  $\delta Q = di^\pi - v^\pi dP$ , где  $i^\pi$  — удельная энтальпия, а  $v^\pi$  — удельный объем пара. Мы применяем это уравнение к процессу, в котором  $P$  не остается постоянным. Однако, если пар считать идеальным газом, то его энтальпия будет зависеть только от температуры. Тогда для любого квазистатического процесса  $\frac{di^\pi}{dT} = c_P^\pi$ . Поэтому для искомой удельной теплоемкости насыщенного пара получаем  $c = c_P^\pi - v^\pi \frac{dP}{dT}$ . Поскольку нагревание производится так, что пар все время остается насыщенным, производная  $\frac{dP}{dT}$  определяется уравнением Клапейрона—Клаузиуса, которое дает

$$c = c_P^\pi - \frac{\lambda}{T}.$$

Согласно классической теории молярная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении равна  $C_P^\Pi = 8 \text{ кал}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ , а удельная теплоемкость  $c_P^\Pi = 8/18 = 0,444 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К})$ . Используя это значение, а также значение для  $\lambda$ , получаем ответ.

$$11.62^* \quad c = -1,07 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К}).$$

Решение. Рассуждая как при решении предыдущей задачи, находим

$$c = \frac{di^\Pi}{dT} - \frac{\lambda}{T}.$$

Для вычисления производной  $\frac{di^\Pi}{dT}$  пользуемся формулой

$$\lambda = u^\Pi - u^* + P(v^\Pi - v^*) = i^\Pi - i^*.$$

Поскольку это соотношение написано для процесса, в котором пар все время остается насыщенным, величины, входящие в него, могут зависеть только от температуры. Дифференцируя его по температуре, находим

$$\frac{di^\Pi}{dT} = \frac{d\lambda}{dT} + \frac{di^*}{dT}.$$

Для жидкости  $di^* = c_P^* dT + v^* dP$ , причем последним слагаемым можно пренебречь. В этом приближении  $\frac{di^*}{dT} = c_P^*$ , а потому

$$\frac{di^\Pi}{dT} = c_P^* + \frac{d\lambda}{dT}.$$

Подставляя эту величину в выражение для  $c$ , получим

$$c = c_P^* - \frac{\lambda}{T} + \frac{d\lambda}{dT}.$$

Для воды при  $T = 373 \text{ К}$  эта формула дает  $c = -1,07 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К})$ , что отличается от ранее полученного значения на 7%.

11.63.  $C = \mu c_0 + C_V + R \left( \frac{\lambda \mu}{RT} - 1 \right)^2 \approx 1,3 \text{ кДж}/\text{К}$ , где  $\mu$  и  $c_0$  — молярная масса и удельная теплоемкость воды,  $C_V$  — молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме.

$$11.64. \quad C = \mu c_0 + \frac{1}{R} \left( \frac{\lambda \mu}{T} \right)^2 \approx 1,5 \text{ кДж}/\text{К}.$$

$$11.65. \quad c = \frac{1}{1+\beta} \left\{ c_0 + \beta \frac{R}{\mu} \left[ 3 + \left( \frac{\lambda \mu}{RT} - 1 \right)^2 \right] \right\} \approx 10 \text{ Дж}/\text{г} \cdot \text{К}.$$

$$11.66. \quad c_V = \frac{3R}{\mu} + \frac{R}{\mu} \left( \frac{\lambda \mu}{RT} - 1 \right)^2 \approx 70 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К}).$$

Заметим, что данный ответ может быть получен и простым предельным переходом из ответа предыдущей задачи при  $\beta \rightarrow \infty$ .

11.67.  $\frac{d\lambda}{dT} = c_p^{\text{п}} - c - \frac{v^{\text{ж}}}{v^{\text{п}} - v^{\text{ж}}} \frac{\lambda}{T} (1 - \alpha T)$ , где  $c_p^{\text{п}}$  — удельная теплоемкость пара при постоянном давлении;  $v^{\text{ж}}$  и  $v^{\text{п}}$  — удельные объемы жидкости и пара;  $\left(\frac{d\lambda}{dT}\right)_{\text{воды}} = -2,3 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$ .

$$11.68. \frac{m_1}{m_2} = \eta^{\gamma-2} \exp \left[ \frac{\lambda}{RT} (\eta^{\gamma-1} - 1) \right].$$

11.69.  $t \sim 1$  мин; присутствие гелия увеличивает время «вымораживания» водорода.

$$11.70. t = 32,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$11.71. q = \frac{RT_1 T_2}{\mu(T_2 - T_1)} \ln \left( a \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) = 638 \text{ Дж/г}.$$

$$11.72. \Delta P = \frac{R}{\Delta V} [2,3(T_2^2 - T_1^2) - \ln 2 (T_2 - T_1)] \approx 2,9 \text{ атм, где } T_2 = 0,01 \text{ К}.$$

$$11.73. P = P_1 + \frac{R}{2\theta} \frac{(T^2 - T_1^2) - 2 \ln 2 \theta (T - T_1)}{V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}}} \text{ (парабола); } P_2 = 29 \text{ атм;}$$

$$q = RT \left( \frac{T}{\theta} - \ln 2 \right); q_1 = -0,43 \text{ Дж/моль; } q_2 = 0,18 \text{ Дж/моль}.$$

$$11.74. P = P_1 + \frac{R(T - T_1)}{\theta \Delta V} \left( \frac{T + T_1}{2} - 0,7\theta \right) = 33 \text{ атм}.$$

$$11.75. \Delta R = \frac{3qu}{4\pi\gamma RT \Delta\rho} \approx 35 \text{ км, где } \gamma \text{ — гравитационная постоянная}.$$

$$11.76. \lambda(0) = \frac{a}{b} = \frac{27}{8} RT_{\text{кр}} = 150 \text{ Дж/моль}.$$

$$11.77. \Delta T = \frac{\lambda D}{\kappa} \frac{\rho_{\text{нас}}^0 - \rho_0}{1 + \frac{\lambda D}{\kappa} \frac{\rho_{\text{нас}}^0}{RT^2}} = 6,4 \text{ К}.$$

$$11.78. v_{\text{зв}} \approx \frac{\rho_{\text{п}} \lambda}{\rho_{\text{в}} \sqrt{c_{\text{в}} T}} \approx 3,4 \text{ см/с}.$$

11.79.  $P = \pi P_{\text{кр}} = 112,2 \text{ атм}$ , где  $\pi = 24\sqrt{3\tau} - 12\tau - 27$ ,  $\tau = T/T_{\text{кр}}$  (см. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 2, § 104, формула (104.10)).

## § 12. Поверхностные явления

$$12.1. \sigma = \frac{mg}{\pi d} \approx 70 \text{ дин/см, где } m \text{ — масса капли}.$$

$$12.2. \sigma = \frac{(2\pi R - l)ES}{2\pi R^2}.$$

$$12.3. T \propto \sqrt{\frac{\pi r^3}{\sigma}}. \text{ Применить метод размерностей}.$$

$$12.4. \sigma = \sigma_0 \frac{M}{m} \left( \frac{\tau}{T} \right)^2 = 3,5 \cdot 10^{31} \text{ дин/см}.$$

$$12.5^*. \frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}.$$

Решение. Рассмотрим пленку жидкости и проведем с ней бесконечно малый цикл Карно. Будем откладывать по горизонтальной оси площадь пленки  $F$ , а по вертикальной оси — поверхностное натяжение  $\sigma$  (рис. 411).

При постоянной температуре поверхностное натяжение также постоянно. Поэтому на нашей диаграмме изотермы изобразятся горизонтальными прямыми. Начальное состояние пленки характеризуется точкой 1. Приведем пленку в тепловой контакт с нагревателем, температура которого равна температуре пленки в состоянии 1. Затем внешними усилиями квазистатически растянем пленку до состояния 2. На это надо затратить работу. Эта работа отрицательна:  $A_1 = -\sigma(T_1) \Delta F$ , где  $\Delta F$  — приращение площади пленки при растяжении по изотерме 1–2. При изотермическом растяжении к пленке надо подводить тепло. Величина подведенного тепла  $Q_1 = q \Delta F$ . В состоянии 2 изолируем пленку от нагревателя и адиабатически бесконечно мало растянем ее до состояния 3, в котором пленка примет температуру холодильника  $T_2$ . Предполагается, что температуры  $T_1$  и  $T_2$  отличаются друг от друга бесконечно мало. В состоянии 3 приведем пленку в тепловой контакт с холодильником и изотермически переведем ее в состояние 4. Поверхность пленки уменьшится на  $\Delta F$ , и она совершит положительную работу  $A_2 = \sigma(T_2) \Delta F$ . Из состояния 4 вернем пленку в исходное состояние 1. Работой пленки на адиабатах 2–3 и 4–1 можно пренебречь, как величиной более высокого порядка малости. Полная работа, совершенная пленкой во время кругового процесса,

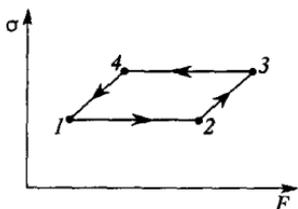


Рис. 411

$A = A_1 + A_2 = [\sigma(T_2) - \sigma(T_1)] \Delta F = \frac{d\sigma}{dT} (T_2 - T_1) \Delta F$ .

По теореме Карно

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для  $A$  и  $Q_1$ , после сокращения получим

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{q}{T}. \quad (*)$$

**12.6.\*** Решение. По первому началу термодинамики  $\delta Q = dU - \sigma dF$ , где  $F$  — площадь поверхности пленки. Если процесс — изотермический, то согласно (\*) (см. решение предыдущей задачи)

$$\delta Q = q dF = -T \left( \frac{d\sigma}{dT} \right) dF.$$

Таким образом, при изотермическом увеличении поверхности пленки

$$dU = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) dF.$$

За параметры, определяющие состояние пленки, можно принять площадь  $F$  и температуру  $T$ . Энергия, приходящаяся на единицу поверхности пленки, от величины  $F$  не зависит. Поэтому

$$U = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) F.$$

12.7.  $dT = -\frac{q}{c_F} dF$ , где  $c_F$  — теплоемкость единицы поверхности пленки при постоянном значении  $F$ , а  $q$  определяется формулой (\*) (см. решение задачи 12.5). При адиабатическом расширении пленка охлаждается.

12.8. Считая  $c_F = c_V h$  ( $c_V$  — удельная теплоемкость воды), получим

$$\Delta T = \frac{2T}{c_V h} \frac{d\sigma}{dT} \approx -0,02 \text{ К.}$$

Коэффициент «2» учитывает то обстоятельство, что пленка — двухсторонняя.

$$12.9. \Delta T = \frac{16\pi r^2}{5\nu R} \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ К.}$$

12.10\* Р е ш е н и е. Подставим в формулу (\*) (задача 12.5)  $q = T \Delta S$ , где  $\Delta S$  — приращение энтропии пленки при увеличении ее поверхности на единицу. Получим

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\Delta S.$$

Согласно теореме Нернста, при абсолютном нуле температуры все процессы идут без изменения энтропии, т. е.  $\Delta S = 0$ . Отсюда следует, что при абсолютном нуле температур производная  $d\sigma/dT$  обращается в нуль.

$$12.11. P = 4\sigma/d \approx 196 \text{ Н/см}^2.$$

$$12.12. P = \frac{8\sigma}{d} \approx 400 \text{ дин/см}^2 \approx 0,29 \text{ мм рт. ст.}$$

12.13.  $M \approx \frac{\pi\sigma D^2}{gd} \approx 900 \text{ г.}$  Масса наливаемой жидкости от ее плотности не зависит.

$$12.14. h \approx \frac{2\sigma}{\rho g a} \approx 35 \text{ см.}$$

$$12.15. \Delta(h_1 - h_2) = \frac{4\Delta\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} \approx 24,2 \text{ мм.}$$

$$12.16. r = \frac{2\sigma}{\rho r \eta} \approx \frac{\sigma}{5\rho g h} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

$$12.17. F = \frac{2\sigma^2 l \cos^2 \theta}{\rho g d^2} \approx 10 \text{ Н.}$$

$$12.18. h_1 - h_2 = \frac{4\sigma(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2}.$$

$$12.19. h = \frac{P + \rho g l + \frac{2\sigma}{r} - \sqrt{\left(P + \rho g l + \frac{2\sigma}{r}\right)^2 - \frac{8\sigma\rho g l}{r}}}{2\rho g} \approx \frac{2\sigma l}{r\left(P + \rho g l + \frac{2\sigma}{r}\right)}, \text{ где } P -$$

атмосферное давление.

$$12.20. h = \frac{2\sigma \cos \theta}{d\rho g} = 3 \text{ см.}$$

$$12.21. h = \frac{\sigma \cos \theta}{\rho g \sin(\alpha/2)} \frac{1}{x} \approx \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g \alpha} \frac{1}{x}.$$

$$12.22* F = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

Р е ш е н и е. Капля примет форму диска с вогнутой периферийной поверхностью. Кривизной сечения этой поверхности плоскостью, параллельной

пластинкам, можно пренебречь. Радиус кривизны нормального к нему сечения  $r = d/2$ . Средняя кривизна боковой поверхности диска

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{d}.$$

Давление жидкости между дисками меньше атмосферного на  $\Delta P = 2\sigma/d$ . Площадь диска  $S = m/(\rho d)$ , где  $\rho$  — плотность жидкости. Пластинки будут прижиматься друг к другу с силой

$$F = S \Delta P = \frac{2m\sigma}{\rho d^2} = 1,46 \cdot 10^9 \text{ дин} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

**12.23.**  $F = \frac{2\sigma\rho \cos \theta}{m} \pi^2 R^4 = 630 \text{ Н}$ , где  $m$  — масса ртути.

**12.24\*.**  $d_2 = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ .

**Решение.** Величина  $d_2$  находится из уравнения

$$\left(P_0 + \rho gh + \frac{4\sigma}{d_1}\right) d_1^3 = \left(P_0 + \frac{4\sigma}{d_2}\right) d_2^3,$$

где  $P_0$  — атмосферное давление. Так как  $4\sigma/d_1 \ll P$  и тем более  $4\sigma/d_2 \ll P_0$ , то в нулевом приближении эти члены можно отбросить (т. е. пренебречь поверхностным натяжением). Это дает  $d_2 = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ . Найденное значение можно уточнить по методу последовательных приближений. В первом приближении  $d_2 = 5,23 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ .

**12.25.**  $\Delta T > 4\sigma T / (Pr)$ .

**12.26.**  $P = 8P_0 + 24\sigma/r$ .

**12.27.**  $C - C_P = \frac{4\sigma R}{3P_0 r} = \frac{2}{3} R \cdot 10^{-4} \approx 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ кал}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

**12.28.**  $r = 1,04 \text{ см}$ .

**12.29.**  $C = 3R$ .

**12.30.**  $C = C_P + \frac{4\sigma R}{3P_0 r + 8\sigma}$ .

**12.31.**  $Q = 8\pi\sigma_0 r_0^2 \ln a \approx 3,4 \cdot 10^3 \text{ эрг}$ .

**12.32.**  $\Delta S = \frac{12\pi r^2}{T} \left(q + \frac{1}{3} r P_0 \ln 2\right)$ , где  $T$  — температура атмосферы.

**12.33.** Время  $t$  связано с радиусом пузыря соотношением

$$t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} (R_0^4 - R^4).$$

Пузырь исчезнет через  $t = \frac{2\eta l}{\sigma r^4} R_0^4 = 7,2 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 2 \text{ ч}$ .

**12.34.**  $t = \frac{2}{7a^2} \sqrt{\frac{2P\mu}{\sigma RT}} r_0^{7/2} \approx 630 \text{ с} = 10,5 \text{ мин}$ . (Ср. с ответом предыдущей задачи.)

**12.35.**  $R_2 - R_1 = \frac{\rho g d^3}{4\sigma} \approx 0,28 \text{ мм}$ .

$$12.36^* \left( \frac{dr}{dT} \right)_{T=T_0} = \frac{r_0}{T_0} \frac{4q_0 + r_0 P_0}{3r_0 P_0 - 4\sigma_0}.$$

Решение. Давление внутри пузыря  $P = P_{\text{нар}} + 4\sigma/r$ . Дифференцируя при постоянном наружном давлении  $P_{\text{нар}}$  и полагая  $r = r_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$ , получим

$$dP = \frac{4 d\sigma}{r_0} - \frac{4\sigma_0 dr}{r_0^2}.$$

По известной формуле  $d\sigma = -\frac{q_0}{T_0} dT$ . Исключая  $d\sigma$ , получим

$$dP = -\frac{4q_0}{r_0 T_0} dT - \frac{4\sigma_0}{r_0^2} dr.$$

Так как масса газа внутри пузыря постоянна, то  $\frac{Pr^3}{T} = \frac{P_0 r_0^3}{T_0}$ ; отсюда

$$\frac{dP}{P_0} + \frac{3 dr}{r_0} - \frac{dT}{T_0} = 0.$$

Исключая отсюда и из предыдущего соотношения величину  $dP$ , получим окончательный ответ.

$$12.37. \sigma = \frac{gDh\rho}{4} \approx 80 \text{ дин/см.}$$

$$12.38. \Delta S = \frac{16\pi\sigma r_0^2}{3T} \ln 2 \approx 28 \text{ эрг/К.}$$

$$12.39. T = T_0; P = \frac{P_0}{\sqrt{2}}; \Delta S > 0.$$

$$12.40. A = \frac{3M\sigma}{r\rho}; \Delta S = \frac{3Mq}{Tr\rho}.$$

$$12.41. \tau = 2\sqrt{\frac{5\pi m}{\sigma}} \approx 0,2 \text{ с.}$$

$$12.42. h = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \sin \frac{\theta}{2} \approx 3,6 \text{ мм.}$$

12.43. В соответствии с формулой  $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$  вода в капилляре может подняться до 14 м, поскольку максимальный размер пузырька пара ограничен диаметром капилляра.

12.44. Пленка установится на высоте, соответствующей минимуму полной энергии  $mgh + 2\sigma S$ , где  $S$  — поверхность пленки.

$$h = \ln \sqrt{\frac{4\pi\sigma r_0}{mg}}.$$

$$12.45. R > \frac{9\sigma\rho_{\text{воз}}}{2\rho^2 g d} = 0,086 \text{ см} \approx 1 \text{ мм, где } \rho \text{ — плотность воды.}$$

$$12.46^* \frac{K}{E_{\text{пл}}} = \frac{1}{2}.$$

Решение. На движущийся, нарастающий валик мыльного раствора (радиуса  $x$ ) действует сила поверхностного натяжения  $f = 2 \cdot 2\pi x = 4\pi x$ . Уравнение движения этого валика

$$\frac{d(mV)}{dt} = f,$$

где  $m$  — «текущая» масса валика, которая определяется через предельный радиус  $R$  валика и его предельную массу  $M$

$$m = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} M = \frac{x^2}{R^2} M.$$

Подставив это в уравнение движения, получим

$$V^2 + \frac{x}{2} \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi R^2 \sigma}{M}.$$

Правая часть уравнения, очевидно, известная константа. Таким образом, решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{x\ddot{x}}{2} + \dot{x}^2 = \text{const}.$$

Это уравнение легко решается, но и так ясно, что  $x > 0$ , а  $\frac{dV}{dt} \geq 0$ . Отсюда, чтобы выполнить условие  $V^2 + \frac{x}{2} \frac{dV}{dt} = \text{const}$ , необходимо положить  $\frac{dV}{dt} = 0$ , а значит,  $V = \text{const}$ .

Скорость постоянна и равна:  $V = \sqrt{\frac{2\pi R^2 \sigma}{M}}$ . Легко видеть, что начальная энергия пленки  $E_{\text{пл}} = 2\pi R^2 \sigma$ , а кинетическая энергия в конце  $K = \frac{MV^2}{2} = \pi R^2 \sigma$ . Если пренебречь энергией пленки в конце, получаем иско- мое отношение.

Заметим, что решение дифференциального уравнения таково:

$$x(t) = V_0 t + \text{const}; \quad \dot{x} = V_0; \quad \ddot{x} = 0.$$

$$12.47. \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = \frac{1}{P_0} \left( \rho g h + \frac{2\sigma}{r} \right); \quad \frac{T_1}{T_0} \approx 1,12.$$

$$12.48. \frac{T_1}{T_0} = \left( 1 + \frac{4\sigma}{r P_0} \right)^2 \approx 1,19.$$

$$12.49. 1) P - P_0 \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{v_{\text{ж}}}{v_{\text{п}}} \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{\mu v_{\text{ж}} P_0}{RT} = 252 \text{ дин/см}^2 = 0,19 \text{ мм рт. ст.}$$

2)  $P/P_0 = 2,9$ . При столь малых размерах формула  $\frac{P}{P_0} = \exp\left(\frac{\mu v_{\text{ж}}}{RT} \frac{2\sigma}{r}\right)$ , по которой и был получен этот результат, может рассматриваться как оценочная.

$$12.50. \Delta T = \frac{2\sigma}{r} \frac{RT_0^2}{\Lambda P_0} = \frac{2\sigma R}{r} \frac{TV}{\Lambda} \approx 3,3 \text{ К, где } V \text{ — молярный объем пара.}$$

$$12.51. r = \frac{2\sigma v_{\text{п}} T}{\lambda(t-t_0)} \approx 0,03 \text{ мм. При этом было учтено, что } \frac{P_{\text{п}}}{P_{\text{ж}}} \ll 1.$$

$$12.52. t = t_1 + \frac{2\sigma T_1}{r \lambda \rho} \approx 10,2 \text{ }^\circ\text{C}.$$

$$12.53. \Delta P_{\text{п}} = \frac{2\sigma C_p V_{\text{ж}} P_1}{Rr(\lambda - C_p T_1)} \approx 1,3 \text{ мм рт. ст.}$$

$$12.54. r \gg \frac{2\sigma \mu}{RT\rho} \approx 5,5 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

**12.55.** У к а з а н и е. Для очень грубой оценки следует принять, что «минимальная» капля — это образование, состоящее из 13 молекул — шаров (по модели плотной упаковки шаров). Диаметр такой капли равен  $3d$ , где  $d$  — диаметр молекулы. На самом деле, много больше (см. следующую задачу). Оценка для минимального радиуса капли  $r = 3\sqrt[3]{\frac{\mu}{N_{\text{Ав}}}} \approx 9 \cdot 10^{-8}$  см.

$$P_r = P_\infty \left( 1 + \frac{2\sigma\mu}{RT\rho_{\text{ж}}r} \right) \approx 1,9 \text{ атм.}$$

**12.56.**  $r = \frac{2\sigma T}{\rho_{\text{ж}}\lambda\Delta T} \approx 225 \text{ \AA}$  (см. ответ предыдущей задачи, сравнивайте!)

**12.57.**  $\Delta T = \frac{\Delta F}{Mc} \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) = 1,7 \text{ К}$ , где  $\Delta F$  — изменение поверхности,  $c$  — удельная теплоемкость воды, равная  $4,2 \cdot 10^7$  эрг/г·К.

$$\Delta S = \Delta F \frac{d\sigma}{dT} = 10^5 \text{ эрг/К.}$$

**12.58.**  $\Delta P = 0,02 \text{ Тор.}$

**12.59.**  $V = 2\pi r^4 \frac{RT\rho_{\text{ж}}^2}{\mu\sigma\rho_{\text{н}}} = 2\pi r^4 \frac{\rho_{\text{ж}}^2}{\sigma\rho_{\text{н}}} \left( \frac{RT}{\mu} \right)^2 = 4,7 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ ,

$$R \approx \sqrt[3]{V} \approx 1,7 \text{ мм, где } \sigma = 71 \text{ дин/см.}$$

У к а з а н и е. Имеется в виду устойчивость по отношению к испарению капли с усилением пересыщения.

**12.60.**  $\lambda = \frac{4\sigma}{\rho^{2/3}} \left( \frac{\pi N_{\text{А}}}{6\mu} \right)^{1/3} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ эрг/г.}$

В действительности  $\lambda = 2,3 \cdot 10^8$  эрг/г. При решении следует иметь в виду, что каждая молекула поверхностного слоя имеет порядка 9 «соседей», в отличие от молекулы внутри жидкости (12 «соседей»).

**12.61.**  $\tau = \frac{7\rho_0^2 a^3}{32\sigma\lambda\rho} \sqrt{\frac{\pi RT}{2\mu}}$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега молекул пара.

**12.62.**  $\tau = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{RT}{\mu} \right)^2 \frac{\rho_{\text{ж}}\Delta m}{D\sigma P_\infty} \frac{a-b_0}{a+b_0} \approx 15^7 \text{ с} \approx 120 \text{ сут.}$

**12.63.**  $\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \approx 0,08.$

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Т а б л и ц а I. Соотношения между некоторыми единицами систем СИ и СГС

Физическая величина	СИ	СГС	Соотношение
Длина	м	см	$1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$
Масса	кг	г	$1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$
Время	с	с	
Сила электрического тока	А	ед. тока СГС	$1 \text{ А} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}$
Количество электричества	Кл	ед. заряда СГС	$1 \text{ Кл} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}$
Сила	Н	дин (дина)	$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$
Работа, энергия, количество тепла	Дж	эрг	$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$
Мощность $N$ , $W$ , тепловой поток $J$ , $\Phi$	Вт	эрг/с	$1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг/с}$
Давление, напряжение (механическое) $T$ , $\sigma$	Па	дин/см <sup>2</sup>	$1 \text{ Па} = 10 \text{ дин/см}^2$
Динамическая вязкость $\eta$	Па · с	П (пуаз) дин · с/см <sup>2</sup>	$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ П}$
Кинематическая вязкость $\nu$ ( $\nu = \eta/\rho$ )	м <sup>2</sup> /с	Ст (стокс) см <sup>2</sup> /с	$1 \text{ м}^2/\text{с} = 10^4 \text{ Ст}$
Коэффициент теплообмена (теплопередачи)	Вт/м <sup>2</sup>	эрг/(с · см <sup>2</sup> )	$1 \text{ Вт}/\text{м}^2 = 10^3 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$
Теплопроводность $\kappa$	Вт/(м · К)	эрг/(с · см · К)	$1 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}) = 10^5 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см} \cdot \text{К})$
Температуропроводность $\chi$	м <sup>2</sup> /с	см <sup>2</sup> /с	$1 \text{ м}^2/\text{с} = 10^4 \text{ см}^2/\text{с}$
Электрический потенциал, электрическое напряжение	В	ед. напряже- ния СГС	$1 \text{ В} \approx \frac{1}{300} \text{ ед. СГС}$
Электрическое сопротивление	Ом	ед. сопротивле- ния СГС (с/см)	$1 \text{ Ом} \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ с/см}$

Т а б л и ц а II. Некоторые внесистемные единицы

Килограмм-сила	(кгс)	9,80665 Н (точно)
Атмосфера техническая (килограмм-сила на кв. сантиметр, $1 \text{ кгс/см}^2 = 1 \text{ ат}$ )	(ат)	98066,5 Па (точно)
Атмосфера физическая	(атм)	101324,72 Па = 760 мм рт. ст.
Миллиметр водяного столба	(мм вод. ст.)	9,80665 Па
Миллиметр ртутного столба	(мм рт. ст.)	133,322 Па
Бар	(бар)	$10^5$ Па
Лошадиная сила	(л. с.)	735,499 Вт
Ангстрем	(Å)	$10^{-8}$ см
Калория международная	(кал)	4,1868 Дж (точно)
Астрономическая единица длины	(а. е.)	$1,49600 \cdot 10^{11}$ м
Световой год	(св. год)	$9,4605 \cdot 10^{15}$ м
Парсек	(пк)	$3,0857 \cdot 10^{16}$ м
Электрон-вольт	(эВ)	$1,60219 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг
Год	(год)	$3,16 \cdot 10^7$ с
Градус Цельсия	(°C)	$t = T - T_0$ , где $T$ — температура в кельвинах, $T_0 = 273,15 \text{ К}$ . $1^\circ \text{C} = 1 \text{ К}$

Т а б л и ц а III. Некоторые мировые константы

Скорость света в вакууме  $c = 2,998 \cdot 10^{10}$  см/с

Гравитационная постоянная

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2 = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2 / \text{г}^2$$

Постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К} = 8,62 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ/К}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,314 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} = 8,314 \cdot 10^7 \text{ эрг/(моль} \cdot \text{К)}$$

Объем моля идеального газа при нормальных условиях

$$(P_0 = 101325 \text{ Па} = 760 \text{ мм рт. ст.}; T_0 = 273,15 \text{ К})$$

$$V_0 = 22,4 \text{ л/моль} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3 / \text{моль}$$

Постоянная Авогадро  $N_A = 6,025 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>

Постоянная Ломшмидта

$$n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3} = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$$

Масса электрона  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г}$

Масса протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$

Энергия покоя электрона  $m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$

Энергия покоя протона  $m_p c^2 = 938 \text{ МэВ}$

Температура, соответствующая 1 эВ,

$$T_1 = 11\,606 \text{ К}$$

Масса Солнца  $M_C = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 1,99 \cdot 10^{33} \text{ г}$

Масса Земли  $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 5,98 \cdot 10^{27} \text{ г}$

Радиус Солнца  $R_C = 6,96 \cdot 10^5 \text{ км} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$

Радиус Земли  $R_3 = 6,38 \cdot 10^3 \text{ км} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$

Среднее расстояние от Земли до Солнца

$$L_3 = 1 \text{ а. е.} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$$

Среднее расстояние от Земли до Луны

$$L_D \approx 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$$

Средняя скорость движения Земли по орбите

$$v_3 \approx 30 \text{ км/с} = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

Т а б л и ц а IV. Множители и приставки СИ для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Множитель	Приставка	Сокращение
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	тера	Т
$1\,000\,000\,000 = 10^9$	гига	Г
$1\,000\,000 = 10^6$	мега	М
$1\,000 = 10^3$	кило	к
$100 = 10^2$	гекто	г
$10 = 10^1$	дека	да
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д
$0,01 = 10^{-2}$	санти	с
$0,001 = 10^{-3}$	милли	м
$0,000\,001 = 10^{-6}$	микро	мк
$0,000\,000\,001 = 10^{-9}$	нано	н
$0,000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	пико	п
$0,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-15}$	фемто	ф
$0,000\,000\,000\,000\,000\,001 = 10^{-18}$	атто	а

П р и м е ч а н и е. Приставки рекомендуется выбирать таким образом, чтобы числовые значения величин находились в пределах 0,1 + 1000