

Определение на производна. Нейният механичен и геометричен смисъл.

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в някакъв интервал (a, b) , точката $x_0 \in (a, b)$.

Определение. Производната на функцията $y = f(x)$ в точката x_0 се нарича границата на отношението на нарастването на функцията към нарастването на аргумента, когато нарастването на аргумента клони към нула, тоест:

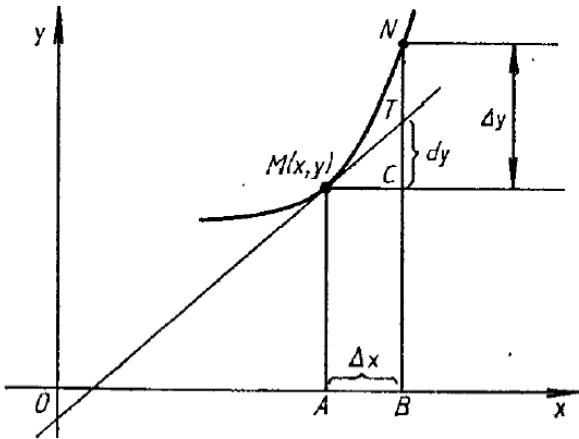
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Функцията $y = f(x)$, която има производна във всяка точка от интервала (a, b) , се нарича *диференцируема* в този интервал, а самата операция на намиране на производната се нарича *диференциране*.

Механичен смисъл на производната: *моментната скорост* в дадена точка е производна на закона на движение от времето.

Физичен смисъл на производната: ако функцията $y = f(x)$ описва какъвто и да е било физичен процес, то производната y' се явява *скоростта на дадения процес*.

Геометричен смисъл на производната: производната $f'(x_0)$ в точка x_0 е равна на *взловия коефициент на допирателната* към графиката на функцията $y = f(x)$ в точката с координати $x_0, y_0 = f(x_0)$.



Нарастване на аргумента: $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$

Нарастване на функцията: $dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x)$

Производна на функцията: $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha = \angle TMC$

Диференцирането е основен метод при намирането на *екстремумите* на дадена функция.

Стойностите на аргумента, при които производната $f'(x)$ на дадена непрекъсната функция се нулира, съответстват на моментите на максимум или минимум на първообразната $f(x)$. За да разберем дали сме намерили максимум или минимум се взима *втората производна* $f''(x)$ на функцията – $f''(x) = (f'(x))'$ или $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$. По аналогия се дефинират трета производна $\frac{d^3 y}{dx^3}$, четвърта производна $\frac{d^4 y}{dx^4}$ и т.н. Ако $f''(x)$ на дадена функция $f(x)$ в екстремум е положителна, $f'(x)$ расте и преминаваме от намаляване в нарастване на $f(x)$, тоест сме в минимум. Обратното важи за отрицателна стойност на $f''(x)$ – $f'(x)$ намалява и сме в максимум.

Правила за диференциране:

$$C' = 0$$

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$C = \text{const}$$

Таблица на производни:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Производна на сложна функция:

Ако $y = f(u)$ и $u = u(x)$, тоест $y = f(u(x))$, то

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Равенствата от математиката и физиката са верни и в диференциалната им форма. Щом като е вярно $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, то ще бъде изпълнено и $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)$, което също може да се запише като $dV = 4\pi r^2 dr$. Последното равенство показва, че ако увеличим радиуса на сфера с много малко dr , обемът на тази сфера ще нарастне с много малък обем $dV = 4\pi r^2 dr$.