

Неопределен интеграл

Нека функцията $f(x)$ е определена в интервала (a, b) , а $F(x)$ е диференцируема в (a, b) .

Определение 1. Функцията $F(x)$ се нарича *първообразна (примитивна)* на функцията $f(x)$ в интервала (a, b) , ако $F'(x) = f(x), x \in (a, b)$.

Пример: Функциите $F(x) = \frac{1}{3}x^3, F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2, F_2 = \frac{1}{3}x^3 - 5$ са първообразни на функцията $f(x) = x^2$.

Извод: Ако $F(x)$ е първообразна на $f(x)$ в интервала (a, b) , то всички първообразни на $f(x)$ в този интервал са функциите от вида $\Phi = F(x) + C$, където C е произволна константа.

Определение 2. Множеството от всички първообразни $\Phi = F(x) + C$ на функцията $f(x)$ в интервала (a, b) се нарича *неопределен интеграл* от функцията $f(x)$ в интервала (a, b) и се означава

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Грубо казано, действието *интегриране* е обратно на диференцирането.

Примери:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C, \int \cos x dx = \sin x + C$$

Основни свойства на неопределените интеграли и методи за решаване

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

От диференцирането знаем, че $df = f'(x)dx$, можем да го приложим в метода за интегриране чрез полагане:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

Ако $x = \varphi(t)$, то

$$\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\int A \cdot f(x)dx = A \int f(x)dx$$

Интегриране по части:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Ако $\int f(x)dx = F(x) + C$ и функцията $u(x)$ е диференцируема, то

$$\int f[u(x)]du(x) = F[u(x)] + C$$

Таблица на основните неопределени интегралы

$$1. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$a. \int du = u + C$$

$$b. \int u du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$c. \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$d. \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$e. \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$f. \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, u \neq 0$$

$$3. \int e^u du = e^u + C$$

$$4. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$7. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$8. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$9. \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$10. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$11. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$12. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$$

$$13. \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \equiv -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C, a \neq 0$$

$$14. \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, a \neq 0$$

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = \ln|u + \sqrt{u^2+b}| + C$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C \equiv -\arccos \frac{u}{a} + C, a \neq 0$$

$$17. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$$

$$18. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$$

$$19. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$$

$$20. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$$

$$21. \int \sqrt{u^2+a^2} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2+a^2} + a^2 \ln|u + \sqrt{u^2+a^2}|) + C$$

$$22. \int \sqrt{u^2-a^2} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 \ln|u + \sqrt{u^2-a^2}|) + C$$

$$23. \int \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{1}{2} \left(u\sqrt{a^2-u^2} + a^2 \arcsin \frac{u}{a} \right) + C$$

Хиперболични функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{arcsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)$$

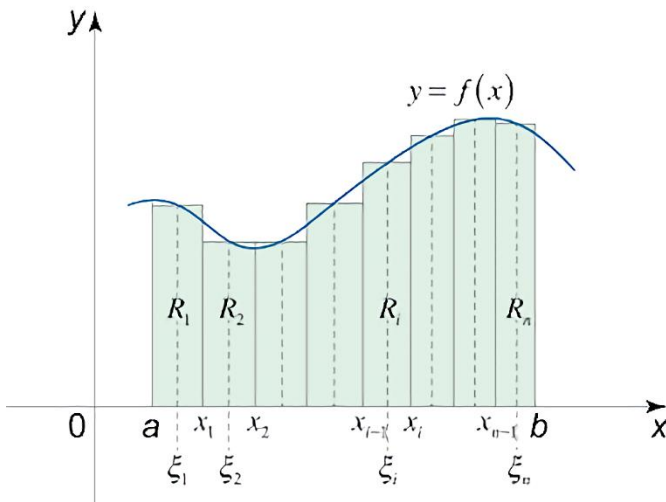
$$\operatorname{arcch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$$

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$\operatorname{arccth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

Определен интеграл

Нека функцията $f(x)$ е определена в интервала $[a, b]$, $f(x) \geq 0$. Да разбием участъка $[a, b]$ на n части по произволен начин $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$



Можем да приближим лицето под графиката на функцията $f(x)$ като сума от лицата на правоъгълници R_i с ширина Δx_i и височина $f(\xi_i)$, където $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$R_i = f(\xi_i) \Delta x_i$$

Интегрална сума – сумата на лицата на съответните правоъгълници:

$$S_n = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Границата на сумата S_n при брой разделения $n \rightarrow \infty$ и максимална разлика $\Delta x_i \rightarrow 0$, се нарича **определен интеграл** на функцията $f(x)$ в граници от $x = a$ до $x = b$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то важи **теоремата на Нютон-Лайбниц**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

където $F(x)$ е първообразна на функцията $f(x)$.

Пример: Определеният интеграл на $x^2 - 2$ от 1 до 3 е

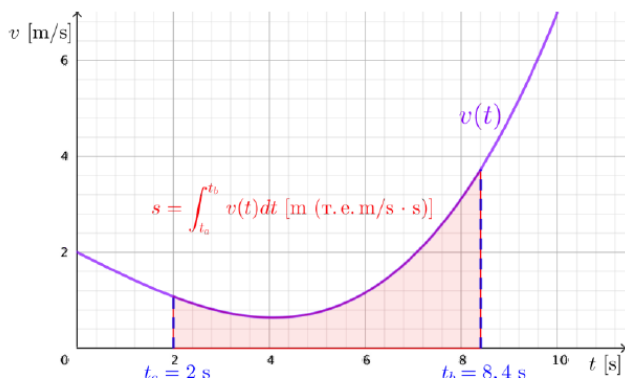
$$\int_1^3 (x^2 - 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x + C \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3 + C \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 + C \right) = \frac{14}{3}$$

Извод: В определените интегралы интеграционната константа се съкращава.

Приложения на определените интеграли

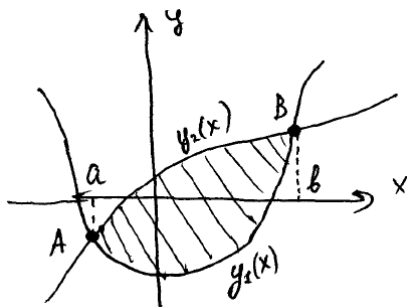
Както и диференцирането, интегрирането намира широко приложение в математиката и физиката.

Ако имаме равенство, то ще остане вярно и след диференциране от двете страни. Аналогично, ако разполагаме с равенство в диференциална форма, то ще остане вярно и след подходящо интегриране от двете страни. Повечето задачи по физика с висша математика са свързани с намирането на подходяща зависимост в диференциална форма и нейното интегриране – предимството на първата е че разглеждаме промяна на стойностите в много малък интервал (моментна зависимост, която най-често е постоянна), а интегрирането ни дава поглед към промяната на величините по продължението на целия процес (напр. $v = \frac{ds}{dt}$ и $ds = vdt$ е вярно за всякакъв вид движение, докато $s = vt$ важи само за равномерно движение, а общия случай се дава като $s = \int vdt$).



Ако имаме дадена графика е добре да се провери дали лицето под нея има физически смисъл (напр. графика на скоростта като функция от времето $v(t)$, лицето под тази графика в граници от 0 до t ще има смисъл на изминат път s като функция от времето t . Обръщаме внимание, че интегрирането на функция дава положителна стойност за площта под графиката, когато графиката е над Ox и отрицателна стойност за площта, когато е под Ox .

Изчисляване на лице ограничено от 2 функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

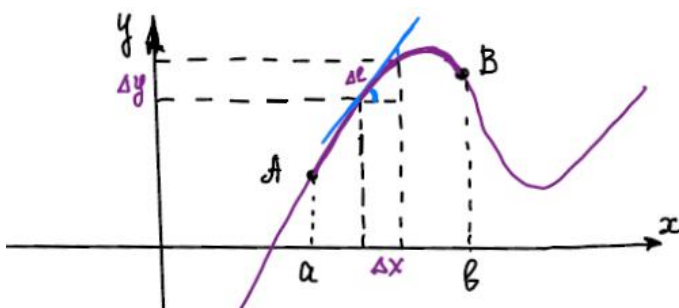


Намираме точките на пресичане A и B ;

$$y_1(a) = y_2(a); y_1(b) = y_2(b)$$

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$$

Изчисляване на дължина на крива $y(x)$:



$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta l = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$