

Пищов на младия експериментатор

Целта на този наръчник е да обясни накратко и ясно как трябва да се прави експеримент и как не.

Ако откриете неточност, пишете на Маргулан.

Късмет!

Преди олимпиадата

1. Яжте.
2. Проверете калкулатора си.
3. Вземете резервни батерии за калкулатора.
4. Вземете инструменти за писане и линейка.

При започване на експеримента

1. Докато не ви бъде дадено условие, *не пипайте оборудването*, за да не счупите нещо.
2. Прочетете условието.
3. Веднага след това прочетете *отново* условието!
4. Проверете оборудването. Това, което ви е дадено, с това, което е указано в условието.

Относно оформлението

Забележка. Ако имате лош почерк, пишете с печатни букви.

1. Работата ви трябва да бъде структурирана. Разбийте всичко на точки, в началото на които дайте кратко обяснение какво се случва. Например:

- Намираме зависимостта $x(t)$. За тази цел...
- Записваме резултатите в таблица и строим графика...
- По ъгъла на наклона намираме...
- Правим заключение за...

Във ваш интерес е да пишете по такъв начин, че проверяващия да разбере какво правите. Всяка неточност или липса на обосновка ще бъде използвана срещу вас. Контестациите винаги се провеждат по това, което сте писали, така че не разчитайте на „*е, това си е ясно*“ или „*аз това имах предвид*“. Не забравяйте за това.

2. Правете големи обяснителни чертежи. Един добър чертеж на постановката ви ще спести време както на вас, така и на проверяващия. Много по-бързо е да нарисуваш системата и да я обозначааш, отколкото словесно да опишеш всичко.
3. Изведете цялата необходима теория подробно.
4. Добре е да оградите в рамка важни междинни и крайни резултати.
5. И за финал – правете изводи. Например:

„Чрез начертаване на графиката $\ln x$ спрямо $\ln t$, ние определихме, че $\operatorname{tg} \alpha = 2$, следователно можем да заключим, че $x \propto t^2$ “.

Относно измерванията

1. Колкото са повече, толкова по-добре.
2. Таблицата ви трябва да е подредена и равна.
3. Добър брой измервания е 8, 11, 16, 21, ... (хубаво число+1)
4. Най-малко по 7 точки на всеки участък от права линия.
5. Трябва да имате таблица с изходни данни. Не забравяйте да посочите размерностите на измерените величини. Т.е. *всичко* трябва да се вижда в таблицата.
 - Всяка измервана величина трябва да заема една колона, не ред.
 - Ако се търси ъгъл, то таблицата трябва да съдържа колони със стойностите, които са необходими, за да се изчисли този ъгъл.
 - Ако провеждате серия от измервания, всички те трябва да бъдат въведени в таблицата, а не само усреднените величини.
6. Не забравяйте да правите по няколко измервания за някои величини. Например, когато трябва да се измери скоростта на падане на балон в зависимост от диаметъра му, времето ще е от порядъка на няколко секунди. Следователно, за да се увеличи точността на вашите измервания, трябва да се извърши серия от 3-5 измервания.
7. Последен, но вероятно най-важен съвет: бъдете честни със себе си – нагласяването на резултати понякога може да ви донесе няколко допълнителни точки, но най-често се вижда с невъоръжено око (особено ако авторите на задачата са сложили някакъв капан).

Относно графиките

1. Графиката трябва да заема не по-малко от 70% от общата площ на листа милиметрова хартия (с изключение на отстъпите).
2. Осите трябва да бъдат обозначени.
3. Отстъпите от края на листа трябва да са 1 см.
4. Стойността на едно деление трябва да бъде една от следните или умножена по степен на десетката (0.1, 100 и т.н.)

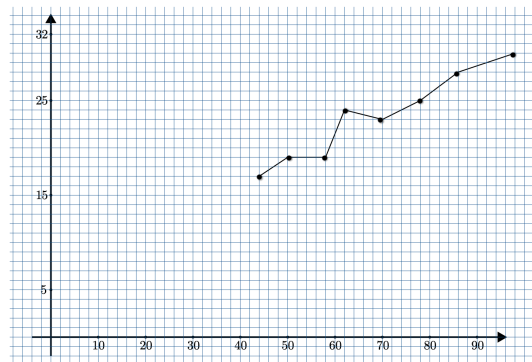
-1, 0, 1, 2, 3...

-5, 0, 5, 10, 15...

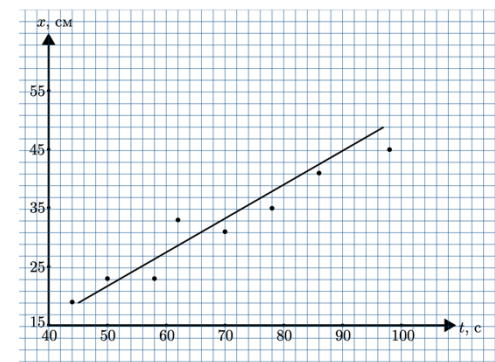
-2, 0, 2, 4, 6...

-10, 0, 10, 20, 30...

5. Най-често графиката ви ще изглежда като права линия. Затова са дадени примери как трябва да изглежда, и как не:



Пример за лоша графика

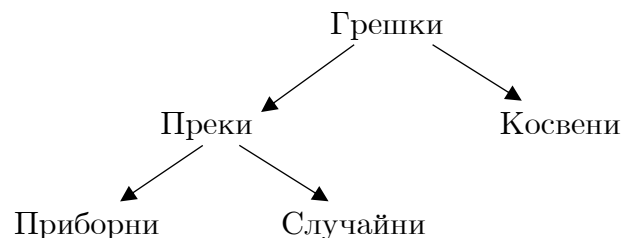


Пример за добра графика

6. Не е задължително осите да започват от (0,0). Старайте се да подберете началото на координатната система, така че експерименталните точки да заемат по-голямата част от листа.

Относно грешките

Грешките биват два вида: грешки на преки измервания и грешки на косвени измервания.



Преки измервания – това са директно извършените измервания с помощта на всяко измервателно устройство (измерване на диаметър на топка с линейка, измерване на съпротивление с омметър и т.н.).

Косвени измервания – това е изчисляването на някои величини, които не можете непосредствено да измерите с прибор, а вместо това използвате формули (определяне на обем чрез дължина, ширина и височина, определяне на маса чрез плътност и обем и т.н.).

Грешки на преки измервания

Нека имаме някаква величина x . Да въведем следните обозначения:

Δx – абсолютна грешка

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$ – относителна грешка

Нека извършим серия от измервания на величината x . Поставяме резултатите в таблица

x , cm	12,1	13,5	12,7	12,9	13,2	12,4	12,0	12,8	12,5
----------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Таблица 1: Серия от измервания на величината x

Необходимо е да се намери истинската стойност на величината x и грешката при определяне на тази величина. За да се извърши трябва да знаете какво всъщност представлява грешката.

Основната идея на грешките е, че е невъзможно да се измери нещо с абсолютна точност. Ако се измерили ширината на маса и сте видели 40 cm на линейката, тогава всъщност тя не е строго равна на 40 cm (погледаното математически, вероятността за такова събитие е нула).

Би било по-правилно да се каже, че ширината на масата е *около* 40 cm. Тоест близо до 40 cm се определя интервал, който най-вероятно включва истинската стойност на ширината. Този интервал се записва като $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$, където $\langle x \rangle$ е нашата оценка за истинската стойност на величината, а Δx е ширината на нашия интервал.

Колкото по-малко е Δx , толкова по-точно е измерването. Затова величината Δx характеризира грешката. За да се намери стойността на *абсолютната* грешка, трябва да се сметне *случайната* грешка и *приборната*.

Да започнем с приборната грешка. Тя показва грешката на измервателния уред и най-често е равна на половината на делението му или на третата значеща цифра при мултиметрите. Бележи се с $\Delta x_{\text{приб}}$ и в нашия случай $\Delta x_{\text{приб}} = 0,05 \text{ cm}$.

Нещата са по-сложни при случайната грешка. Ако приборната грешка характеризираше неточността на уреда, който ползваме, то случайната грешка характеризира неточността причинена от голям набор от случайни фактори, влияещи върху измерената величина. Затова, за нейното определяне е нужна поредица от измервания. Намира се чрез следната формула

$$\Delta x_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{n-1}}$$

Не се плашете, в нея няма нищо страшно. Остана да въведем само

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ – средна стойност}$$

Сега сме готови. Хващаме калкулатора и смятаме. Абсолютната грешка намираме по формулата

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{случ}}^2 + \Delta x_{\text{приб}}^2} = 0,26 \text{ cm}$$

Получаваме $x = (12,68 \pm 0,26) \text{ cm}$. Остава малко да форматираме отговора ни.

Забележка. Грешката се закръгля до първата значеща цифра, освен ако е равна на 1. Тогава се оставят две значещи цифри. Тоест

$$0,102 \rightarrow 0,10$$

$$0,234 \rightarrow 0,2$$

Окончателно получаваме $x = (12,7 \pm 0,3) \text{ cm}$.

Грешки на косвени измервания

z	Δz	$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z}$
Cx	$C\Delta x$	$\frac{\Delta x}{x}$
$x \pm y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{x \pm y}$
$x \cdot y$	$xy \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right)$	$\varepsilon_x + \varepsilon_y$
$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y} \left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right)$	$\varepsilon_x + \varepsilon_y$
x^n	$ x x^{n-1}\Delta x = x^n n \varepsilon_x$	$ n \varepsilon_x$
$\sin x$	$\cos x \Delta x$	$\cot x \Delta x$
e^x	$e^x \Delta x$	Δx
$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon_x$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$
a^x	$\ln a \cdot a^x \Delta x$	$\ln a \cdot \Delta x$

Таблица 2: Формули за намиране на грешки

Да предположим, че имате много сложна формула и искате да намерите грешката.

Пример. Нека x, y – измерими величини и f се намира по формулата

$$f = \frac{x^3 y}{\frac{1}{x} + 5x \sin y} = \frac{f_1}{f_2}$$

Да въведем обозначенията $f_1 = x^3 y$, $f_2 = \frac{1}{x} + 5x \sin y$. Тогава $f = \frac{f_1}{f_2}$ и съгласно таблицата $\varepsilon_f = \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2}$. Остава да намерим грешките ε_{f_1} и ε_{f_2} .

$$f_1 = x^3 y \Rightarrow \varepsilon_{f_1} = \varepsilon_{x^3} + \varepsilon_y = 3\varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$f_2 = \frac{1}{x} + 5x \sin y \Rightarrow \Delta f_2 = \Delta \left(\frac{1}{x} \right) + \Delta(5x \sin y)$$

Да намерим грешките в дясната част на равенството:

$$\varepsilon_{1/x} = |-1|\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}; \quad \Delta \left(\frac{1}{x} \right) = \varepsilon_{1/x} \frac{1}{x} = \frac{\Delta x}{x^2};$$

$$\begin{aligned} \Delta(5x \sin y) &= 5\Delta(x \sin y) = 5\varepsilon_{x \sin y} \cdot x \sin y = 5x \sin y (\varepsilon_x + \varepsilon_{\sin y}) = \\ &= 5x \sin y (\varepsilon_x + \operatorname{ctg} y \Delta y) \end{aligned}$$

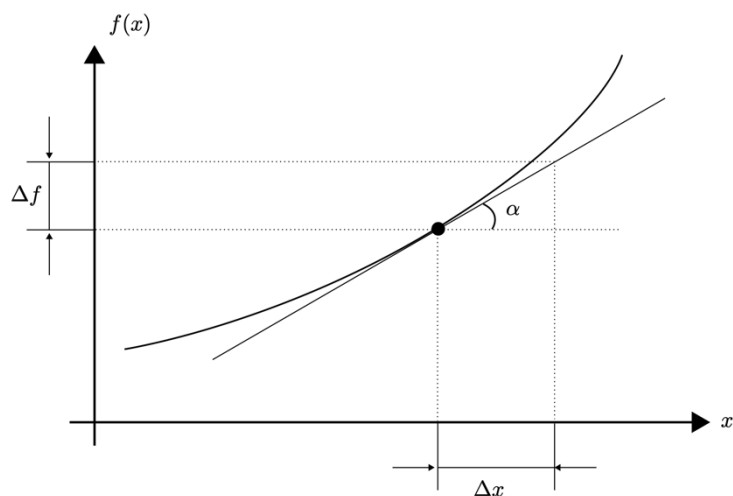
Окончателно получаваме

$$\varepsilon_f = 3\varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{\frac{\Delta x}{x^2} + 5x \sin y (\varepsilon_x + \operatorname{ctg} y \Delta y)}{\frac{1}{x} + 5x \sin y}$$

Можете да не използвате горните правила, а веднага да използвате общата формула за намиране на грешката на величината $f(x, y, \dots)$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2 + \dots}$$

За да разберем смисъла на тази формула, нека да разгледаме частния случай на една променлива, когато $f = f(x)$.



От графиката се вижда, че промяната на x с Δx води до промяна на функцията f с Δf . Следователно $\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'_x$. От тук намираме, че $\Delta f = f'_x \Delta x$, където $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ – производна на функцията f по x . Това директно съответства на формулата в случай на една променлива.

Събиране на грешки

В реални експерименти присъстват както систематични грешки (постоянни във всички измервания), така и случайни грешки. Нека те се характеризират с грешки $\sigma_{\text{сист}}$ и $\sigma_{\text{случ}}$. Общата грешка се определя по формулата

$$\sigma_{\text{пълна}}^2 = \sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2$$

Тя показва, че при наличието на систематична и случайна грешка, пълната грешка е по-голяма от всяка от тях по отделно, но по-малка от сумата им.

Да обърнем внимание на важна особеност на формулата. Нека една от грешките, например $\sigma_{\text{случ}}$ да е 2 пъти по-малка от другата – в нашия случай $\sigma_{\text{сист}}$.

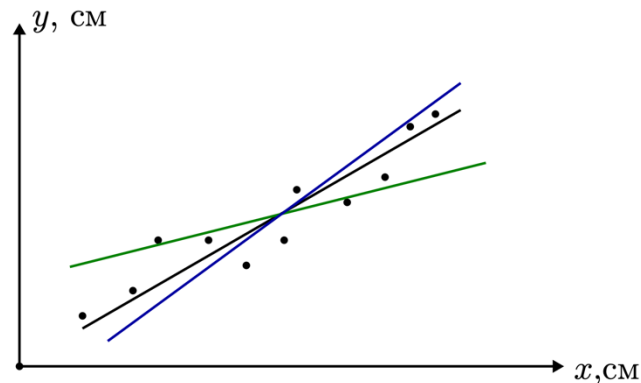
Тогава

$$\sigma_{\text{пълна}} = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \sigma_{\text{сист}} \approx 1,12 \sigma_{\text{сист}}$$

В нашия пример $\sigma_{\text{пълна}} = \sigma_{\text{сист}}$ с точност 12%. Така по-малката грешка не добавя почти нищо към по-голямата, дори и да е половината от нея. Това заключение е много важно. В случай, че случайната грешка на опитите е под половината от систематичната, няма смисъл да се правят многократни измервания, тъй като пълната грешка при това практически не намалява. Достатъчно е да направим 2-3 измервания, за да сме сигурни, че случайната грешка е действително малка.

Графична обработка на резултати

Нека да построим графиката на някаква зависимост $y = ax + b$. Ще се възползваме от тази графика, за да демонстрираме реда на обработка на резултатите, чиято цел е оценката на параметрите на зависимостта и техните грешки.



Нека да определим параметрите на зависимостта „на око“. За да направим това, нека начертаяме права линия, която лежи „най-близко“ до експерименталните точки (черната линия на фигурата). За да я начертаяме, можем да се възползваме от следното правило: броят на точките над правата трябва да бъде равен на броя на точките под правата. За да се оценят грешките на параметрите, трябва да се начертаят две „гранични“ прави: и двете минават през „центъра“, а

областта между правите трябва да обхваща повечето експериментални точки (синята и зелената линия на фигурата). Както и за основната, така и за „граничните“ прави могат да бъдат определени параметрите (имайте предвид, че правата с максимален наклон a_{max} , има параметъра b_{min} и обратно), които ще бъдат долната и горната граница на величините a и b . Грешките са съответно:

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}; \quad \Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

Метод на най-малките квадрати

Методът на най-малките квадрати се базира върху минимизирането на сумата от квадратите на отклоненията на експерименталните точки от правата. Това означава, че коефициентите a и b в линейната зависимост $y = ax + b$ се намират от условието за минимум на функцията

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

Където x_i и y_i са координати на експерименталните точки. Представяме крайните формули за a и b и грешките им чрез средните стойности на x_i и y_i :

$$a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2};$$

$$b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle$$

Грешките на тези коефициенти за съответно равни на:

$$\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - a^2};$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

където n е броят на измерванията. Ако е известно, че точките трябва да бъдат описани от пропорционална зависимост $y = kx$, то за коефициента k и неговата грешка получаваме

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle};$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle \cdot \langle y^2 \rangle - \langle xy \rangle^2}{n \langle x^2 \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2}$$

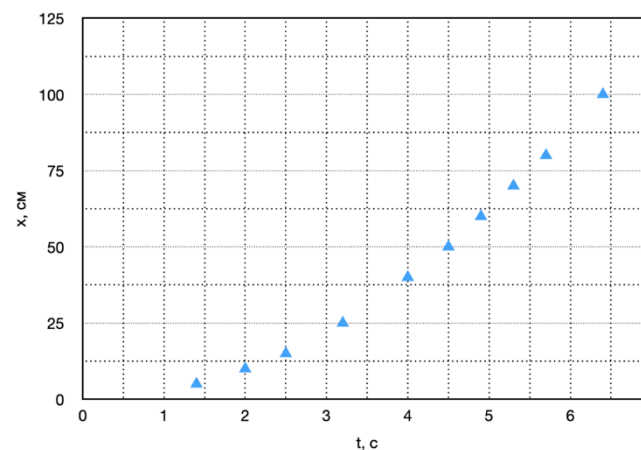
Този метод е доста трудоемък, но ако имате калкулатор, той е предпочитаният (повечето инженерни калкулатори могат да изчислят коефициентите и техните грешки вместо вас).

Линеаризация

Доста често при експериментални задачи от вас се иска да изследвате нелинейни зависимости. В тези случаи е доста полезно да се опита да намерим такива координати, така че изследваната зависимост да стане линейна.

Да разгледаме един пример. Искаме да изследваме търкалянето на топка по наклонена равнина. Ще мерим координатата на тялото x в зависимост от времето t . Резултатите нанасяме в таблица. Строим графика $x(t)$.

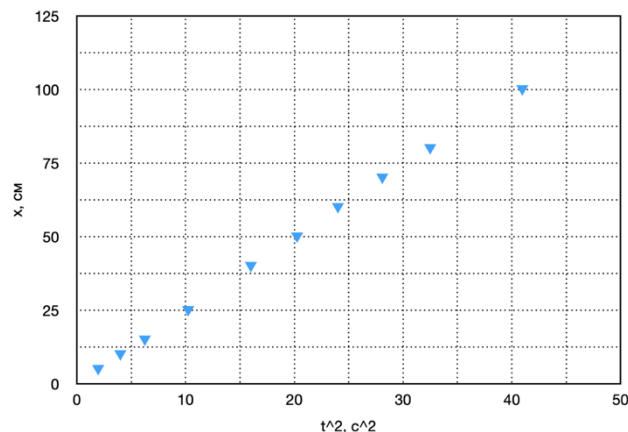
t, s	1,4	2	2,5	3,2	4	4,5	4,9	5,3	5,7	6,4
x, cm	5	10	15	25	40	50	60	70	80	100



Как да определим връзката между величините x и t ? Разбира се, ние знаем, че от теорията следва $x \propto t^2$, но от графиката това не може да бъде определено. Това може да е графиката на полином от 3 или 4 степен – никой не знае.

Но ако има подозрения, че нашата зависимост е все пак квадратична, тогава ще построим графиката $x(t^2)$. Затова добавяме още една колона в нашата таблица – t^2 .

t^2, s^2	2	4	6,3	10,2	16	20,3	24	28,1	32,5	41
x, cm	5	10	15	25	40	50	60	70	80	100



Ура! В координати $x(t^2)$ ние получихме права. Следователно може да се направи извода, че $x \propto t^2$.

Самият процес за намиране на координати, в които изследваната зависимост ще бъде линейна, се казва *линеаризация*. Забележете, че в координати $x(t^2)$ ние можехме и да не получим права. Тогава трябва да се мисли за причини за такова отклонение – възможно това са големи неточности при взимането на данни, възможно това е влиянието на съпротивлението на въздуха.

Логаритмични координати

В експериментите често възникват зависимости от вида $y = ax^b$, в които е необходимо да се намерят коефициентите a и b . Какво трябва да се прави в общия случай, когато не можем да „отгатнем“ степента?

За решаването на тази задача е необходимо да се въведе функцията логаритъм, която се определя по следния начин:

$$a = b^c \Leftrightarrow c = \log_b a$$

Горното равенство се чете така: „ c е равно на логаритъм от числото a при основа b “. Всички числа трябва да са положителни, $b \neq 1$. Най-широко приложение имат следните логаритми:

- натурален логаритъм: $\log_e a \equiv \ln a$, където числото $e \approx 2,7183$
- десетичен логаритъм: $\log_{10} a \equiv \lg a$

Логаритмите имат множество интересни свойства, но нас ще ни потрябват само 3.

- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a x^p = p \log_a x$

Как сега да намерим коефициентите на нашата зависимост? В практиката, най-удобен се оказва $\log_{10} a \equiv \lg a$ (защото ползваме десетична бройна система), затова нека да вземем десетичния логаритъм от лявата и дясната страна на зависимостта.

$$\lg y = \lg(ax^b)$$

$$\lg y = \lg a + \lg(x^b)$$

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$

Сега можем да построим графика $\lg y(\lg x)$, която ще бъде *линейна*. От там вече намираме коефициента a (като точката на пресичане на правата с ординатата) и степента b (като ъгловия коефициент на правата).

Заклучение. Ако вашата зависимост е нелинейна, и се иска да намерите връзката между изследваните величини, почти винаги ще трябва да рисувате графика в логаритмични координати. Ако в такива координати не получавате права, съществуват две възможни обяснения: мерили сте криво или зависимостта не може да бъде представена във вида $y = ax^b$.