XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

7–8 классы

1. 9 июля в 4 часа утра Луна наблюдается в полнолунии. В тот же день двумя часами позже Луна на небе окажется рядом с Плутоном. Когда наступит ближайшее противостояние Плутона?

Решение:

Луна в фазе полнолуния располагается в точке неба, противоположной Солнцу (противосолнечной). Период обращения Луны вокруг Земли равен 27.3 суток. В своем орбитальном движении она перемещается в противоположную вращению неба сторону, т.е. с запада на восток. Следовательно, Луна 9 июля за 2 часа Луна пройдет примерно 1° на восток. Это значит, что Плутон 9 июля расположен примерно в одном градусе к востоку от противосолнечной точки. Или Солнце в градусе к западу от «противоплутонной». Так как Солнце в годичном движении перемещается с запада на восток, то Солнце еще не дошло до точки противостояния около градуса. Очевидно, что Плутон на таких масштабах времени можно считать неподвижным. Известно, что Солнце проходит в своем годичном движении примерно 1° за 1 сутки. Следовательно, ровно через сутки после полнолуния наступит противостояние Плутона.

М.В.Костина

2. Вспомните «Песню Звездочета» из фильма «Красная Шапочка»:

Там высоко-высоко кто-то пролил молоко
и получилась Млечная дорога.
А вдоль по ней…
…Месяц плывет, как белая пирога.

Для определенности будем считать, что при этом освещена ровно половина диска Луны, а рога месяца направлены вверх. Где примерно на Земле и в какое время года можно наблюдать подобную картину?

Решение:

Известно, что Млечный Путь, о котором поется в песне, довольно сильно наклонен к плоскости эклиптики. Достаточно вспомнить, что Луна и планеты могут очень далеко отходить на небе от Млечного Пути.

Если рога месяца направлены вверх и освещена ровно половина диска, то угол между Луной и Солнцем равен 90°,а линия Луна–Солнце перпендикулярна одновременно горизонту наблюдателя и терминатору на Луне (границе освещенной и неосвещенной частей). Это с хорошей точностью означает, что перпендикулярной горизонту является эклиптика, т.к. наклон лунной орбиты к эклиптике мал. Такое бывает только в тропических широтах Земли.

Месяц находится на Млечном пути и, одновременно на эклиптике. Так как Млечный Путь довольно сильно наклонен к эклиптике, это означает, что Луна в момент наблюдения находится в точке (близ точки) пересечения эклиптики и плоскости Галактики, т.е. средней линии Млечного Пути. Известно, что центр нашей Галактики располагается в созвездии Стрельца. Так как оно одновременно является зодиакальным, следовательно, точка пересечения эклиптики и плоскости Галактики располагается как раз в этом созвездии. Очевидно, что существует еще одна точка пересечения этих плоскостей и располагается она на эклиптике в противоположном Стрельцу созвездии, т.е. в Близнецах (на самом деле на границе созвездий Тельца и Близнецов).

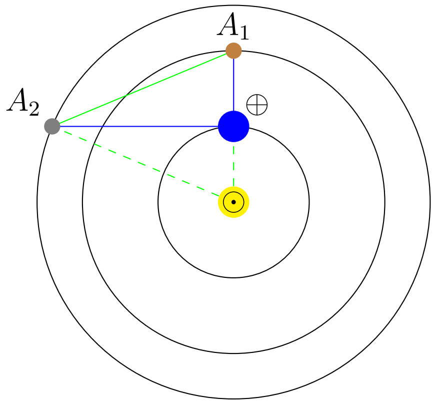
Итак Луна в первой или последней четверти в созвездии Стрельца или Близнецов, при этом Солнце, очевидно, под горизонтом. В Северном полушарии такое может быть, если Луна в первой четверти и Солнце западнее ее, или если Луна в последней четверти, а Солнце восточнее. А Южное в данном случае можно не рассматривать, т.к. взаимное положение Солнца и Луны в любом случае будет таким, как описано выше. То есть Луна либо западнее Солнца на 90°, либо восточнее и при этом либо в Близнецах, либо в Стрельце. Это дает 2 варианта ответа: Солнце либо в Деве, либо в Рыбах, т.е. дело происходит либо в феврале–марте, либо августе–сентябре.

М.В.Костина

3. С Земли производится радиолокация двух астероидов, один из которых находится в противостоянии, а другой — в квадратуре. Радиосигналы были посланы к астероидам одновременно, но от первого астероида сигнал вернулся обратно через 16 минут, а от второго — через 40 минут. Найдите расстояние между астероидами в этот момент. Определите радиусы орбит астероидов, считая, что орбиты круговые и лежат в плоскости эклиптики.

Решение:

Если один из астероидов находится в противостоянии, а другой — в квадратуре, то в треугольнике, вершинами которого являются астероиды и Земля, угол при Земле будет прямым вне зависимости от того, где конкретно располагается каждый из астероидов. Значит можно воспользоваться теоремой Пифагора: квадрат расстояния между астероидами будет равен сумме квадратов расстояний между каждым из астероидов и Землей. Так как при радиолокации сигнал проходит расстояние до астероида дважды: туда и обратно, то расстояние от Земли до первого астероида равно 8 световым минутам, а до второго — 20. Следовательно, расстояние между ними равно $\sqrt{8^2 + 20^2} = \sqrt{464} \approx 21.5$ световым минутам. Тот же результат можно получить, построив рисунок в масштабе и измерив линейкой расстояние между астероидами.



Вспомнив, что расстояние от Земли до Солнца — 1 астрономическая единица — равно 8 световым минутам, можно сразу понять, что расстояние от Солнца до астероида A_2, т.е. радиус его орбиты, равно расстоянию между астероидами в данный момент, т.е. около 21.5 св. мин (это гипотенуза треугольника Земля–Солнце–астероид), или 2.7 а.е.. Также легко понять, что радиус орбиты астероида A_1 равен 2 а.е.

В принципе, не очень вероятно, но условие задачи может быть понято так, что появляется еще один вариант взаимного расположения тел: астероид A_2 находится в противостоянии и до него 20 св. мин., а A_1 — в квадратуре и до него 8 св. мин. В таком случае расстояние между астероидами останется таким же, 2.7 а.е., радиус орбиты астероида A_2 будет равен $8 + 20 = 28$ св. мин. или 3.5 а.е., а радиус орбиты A_1 будет равен $\sqrt{2} \approx 1.4$ а.е.

Б.Б.Эскин, М.В.Костина

4. Угловой размер Юпитера составляет $0'.5$. Оцените, насколько чаще в среднем Луна покрывает звезды, чем Юпитер.

Решение:

Экспериментально выяснилось, что из-за неудачной формулировки условия задачи оно было прочитано разными участниками олимпиады по-разному. Одна группа участников поняла задачу так, как и задумывали авторы: «Оцените, насколько чаще Луны покрывает звезды, чем Юпитер покрывает звезды». Другая: «Оцените, насколько чаще Луна покрывает звезды, чем Луна покрывает Юпитер». Так как это две принципиально разных задачи, то приводим решение обеих и оба варианта решения будут оценены одинаково.

Первый вариант:

Так как задача оценочная, можно считать, что звезды распределены по небу равномерно, а Луна и Юпитер движутся строго по эклиптике. И Юпитер, и Луна, двигаясь по небу, «заметают» собой полосы, длины которых одинаковы и равны $360°$, а ширины равны угловым диаметрам светил. Если бы оба светила двигались по небу с одинаковой скоростью, то частота покрытий Луной звезд была бы во столько раз больше, во сколько площадь, заметаемая Луной больше, чем заметаемая Юпитером. Так как длины заметаемых полос равны, то площади их отличаются во столько раз, во сколько отличаются угловые диаметры Луны и Юпитера. Угловой диаметр Луны равен примерно $30'$, следовательно при одинаковой скорости частоты отличались бы в $30/0.5 = 60$ раз.

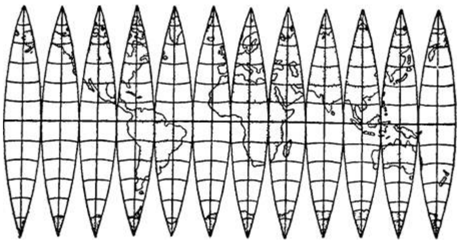
Однако, Луна делает полный оборот вокруг Земли относительно звезд за 27.3 суток, т.е. чуть меньше, чем за 1 месяц, а Юпитер завершает свой полный путь среди звезд за примерно за 12 лет (период полного оборота его вокруг Солнца). Тем самым скорость движения Луны по небу выше, чем у Юпитера примерно в 150 раз. Так что Луна в среднем будет покрывать звезды в $150 \cdot 60 = 9$ тысяч раз чаще, чем Юпитер.

Эту оценку можно уточнить (подобные рассуждения будут оценены дополнительными баллами). Известно, что Юпитер, как все планеты, совершает петлеобразное движение по небу. Таким образом, за 12 лет он проходит среди звезд бо́льший путь, чем если бы двигался просто по окружности. Если вспомнить приблизительные размеры петель, которые Юпитер описывает на небе, то можно оценить, что Юпитер заметает раза в полтора бо́льшую площадь, следовательно, соотношение частоты покрытий будет меньше, примерно 6 тысяч раз.

Второй вариант:

Если пренебречь наклоном лунной орбиты к эклиптике, то Луна в своем движении среди звезд заметает на небе полоску площадью $360° \cdot 0°.5 = 180$ квадратных градусов (см. предыдущий вариант решения). Если считать, что звезды распределены по небу равномерно, то количество звезд, которые Луна может покрыть за один проход по небу, равно (по правилу пропорции) числу всех звезд на небе, умноженному на отношение площади покрываемой Луной полоски к площади всего неба (т.е. доли площади неба, покрываемой Луной). Логично предположить, что речь идет о звездах, видимых невооруженным глазом. Их на всем небе насчитывается около 6 тысяч штук (любая разумная оценка числа звезд, о которых идет речь, будет принята).

Оценим площадь неба. Тот, кто знает, может сразу написать, что площадь неба составляет около 40 тысяч кв. градусов. Кто не знает, может с неплохой точностью оценить площадь неба как площадь карты звездного неба: 180° по ширине (от полюса, до полюса) и 360° по длине вдоль экватора, т.е. $180^\circ \cdot 360^\circ \approx 65$ тысяч кв. градусов. Видно, что эта оценка в полтора раза выше, чем истинное значение. Очевидно, что эта разница берется из-за невозможности без разрывов изобразить поверхность шара на плоскости. Вспомнив, как выглядит изображение развертки глобуса, например Земли (см. рисунок внизу), можно даже попытаться оценить ошибку, которую мы делаем, считая площадь неба как площадь карты.



Итак, в зависимости от оценки площади неба, получаем, что в полоске, заметаемой Луной, содержится примерно 20 (при площади неба 65 тыс. кв. гр.) или 30 (при 40 тыс. кв. гр.) звезд, видимых невооруженным глазом. Следовательно, Юпитер — который один — покрывается Луной в 20 или 30 раз реже, чем такие звезды.

Эту, довольно грубую, оценку можно уточнить (подобные рассуждения будут оценены дополнительными баллами). Лунная орбита все-таки наклонена к эклиптике заметно сильнее, чем орбита Юпитера. Из-за этого Луна не может покрывать Юпитер в каждый свой проход по небу. А звезды, если считать их распределенными равномерно, может, причем с той же частотой. Если считать, что Юпитер всегда располагается строго на эклиптике, что изменение частоты его покрытий Луной из-за наклона ее орбиты можно оценить так. Луна может покрыть Юпитер, находящийся на эклиптике, если в момент встречи с ним располагается недалеко от одной из точек пересечения своей орбиты с эклиптикой. При этом она может быть не более, чем на свой диаметр, т.е. на $0^\circ.5$ выше или ниже Юпитера. Так как требуется среднюю частоту покрытий, то нужно рассматривать очень большие промежутки времени. Тогда можно считать, что в момент встречи с Юпитером, Луна может находиться на любом расстоянии от эклиптики, от максимально возможного «вверх», до максимально возможного «вниз». Так как наклон орбиты Луны к эклиптике составляет примерно 5°, то в целом ширина полосы, в которой «в среднем» может находиться Луна, равна 10°, т.е. в 10 раз больше допустимого для покрытия промежутка в 2 диаметра Луны. таким образом, частота покрытия Юпитера снижается в 10 раз, а частота покрытия звезд остается неизменной. В результате, получаем, что видимые невооруженным глазом звезды Луна покрывает примерно в 300 раз чаще, чем она покрывает Юпитер.

Конечно, результат еще изменится, если участь, что Юпитер движется среди звезд, да еще и делая при этом петли, но учет этих факторов далеко выходит за рамки данной оценочной задачи.

Примечание. Заметим, что в решении данного варианта задачи совершенно не нужно использовать данный в условии угловой размер Юпитера. Это могло бы натолкнуть участников на иное толкование вопроса задачи.

Коллектив

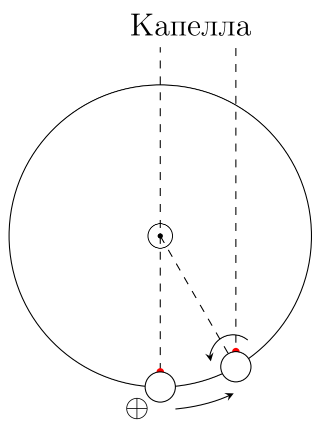
5. Студент-астроном заметил, что его старый механический будильник показывает одно и то же время каждый раз, когда Капелла оказывается на наибольшей высоте над горизонтом. Спешит или отстает будильник? На какое время он уйдет вперед или отстанет за один час?

Решение:

Известно, что часы, которыми мы пользуемся в быту, ходят по времени, связанному с суточным движением Солнца по небу (конечно, усредненным). То есть, если мы будем каждые сутки наблюдать Солнце в момент, когда оно оказывается на наибольшей высоте над горизонтом (в так называемой верхней кульминации), то, в среднем, исправные часы будут показывать одинаковое время (полдень, если мы находимся в середине часового пояса и нет декретного времени)[1].

Если же мы будем наблюдать какие-нибудь звезды, например, Капеллу, в момент верхней кульминации, то показания наших часов в этот будут сдвигаться каждые сутки вследствие того, что Солнце перемещается по небу среди звезд в своем годичном движении.Определим, куда и насколько.

Для удобства рассмотрим некоторый момент времени, когда Земля повернута определенной стороной одновременно к Солнцу и к Капелле. Очевидно, что в этот момент обе эти звезды окажутся в верхней кульминации (неважно, что при этом Капелла не будет видна). Сделав полный оборот вокруг своей оси, Земля окажется направлена той же стороной к Капелле. Но за это время она успеет немного сместиться по орбите вокруг Солнца, и для того, чтобы оказаться в исходном положении относительно Солнца, ей необходимо еще немного повернуться. Именно время, затраченное на этот дополнительный небольшой поворот, и является разницей между периодом вращения Земли вокруг оси относительно звезд (истинными, или звездными, сутками) и периодом вращения Земли вокруг оси относительно Солнца (солнечными сутками) Заметим, что солнечные сутки несколько больше звездных. В целом за год получится, что относительно Капеллы Земля совершит ровно на 1 оборот вокруг своей оси больше, чем относительно Солнца, т.к. один ее оборот вокруг оси будет как бы «скомпенсирован» одним оборотом вокруг Солнца по орбите. Тем самым мы получаем, что, если продолжительность года составляет 365 солнечных и 366 звездных суток, то звездные сутки равны: $24 \cdot (365/366) \approx 23$ часа 56 минут, т.е. короче солнечных примерно на 4 минуты.



Тот, кто знает про т.н. «звездное время», мог написать этот результат сразу.

Следовательно в каждый последующий день будильник, отслеживающий движение Капеллы, т.е. идущий по звездному времени, в момент ее кульминации будет показывать

[1]Из-за неравномерности движения Солнца по небу, связанного с эллиптичностью земной орбиты и наклоном эклиптики к экватору, это время будет немного изменяться в течение года, совершая небольшие колебания относительно среднего значения, величина которых не превышает 16 минут (более подробно об этом можно узнать, прочитав про т.н. «уравнение времени»).

на 4 минуты больше, чем обычный, идущий по солнечному времени. То есть он спешит на 4 минуты в сутки. Следовательно, за час будильник уйдет вперед на $4/24 = 1/6$ минуты или на 10 секунд.

Однако у задачи есть и второй вариант решения: будильник может просто стоять. Тогда за час он, естественно, отстанет на 1 час.

А.В.Веселова, П.А.Тараканов, М.В.Костина