XXIV Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2017

5 февраля

---

10 класс

---

1. Оцените, во сколько раз светимость Земли больше суммарной светимости всех людей на планете.

Решение:

Можно оценить светимость Земли и светимость одного человека, считая их абсолютно черными телами (что, конечно, верно лишь приблизительно). Однако, заметив, что средняя температура Земли и температура человека мало отличаются (вторая больше первой менее чем на 10%), и предположив, что излучательная способность и Земли, и тела человека в целом однотипным образом зависят от температуры (что также правдоподобно), можно сказать, что отношение светимостей в любом случае будет порядка отношения площадей поверхностей Земли и всех людей на Земле.

Предполагая, что человека можно представить как шар радиусом $R = 1$ м, получаем

$$\frac{L_\oplus}{L_\text{людей}} = \frac{4\pi R_\oplus^2}{N \cdot 4\pi R^2} = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^2,$$

где N — число людей на Земле ($N \approx 7 \cdot 10^9$).

Подставляя числа, получаем, что отношение светимостей оказывается около $5 \cdot 10^3$. Естественно, точность оценки невелика, поэтому правильнее будет сказать, что итоговый результат — $10^{(3 \div 4)}$.

А.А.Федотов

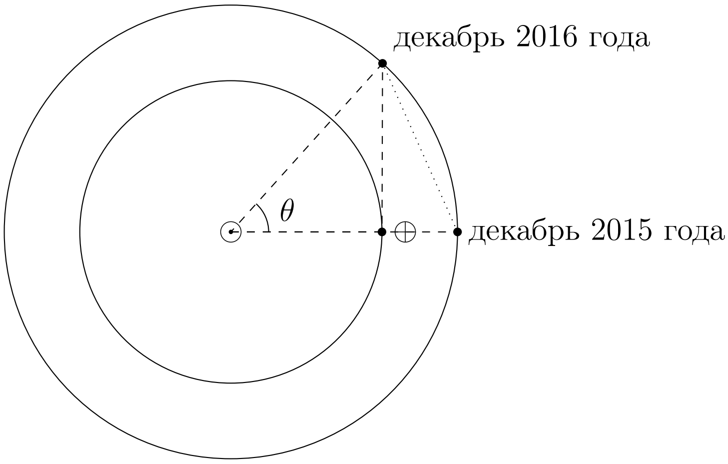
2. Астероид наблюдался в Петербурге 23.12.2015 в истинную солнечную полночь в верхней кульминации на высоте 53°. 23.12.2016 он наблюдался в верхней кульминации уже через 6 часов после полуночи на высоте 30°. Определите параметры орбиты астероида, считая его орбиту круговой.

Решение:

Заметим, что указанные высоты кульминаций для широты Петербурга $\varphi = 60°$ означают, что кульминации происходили к югу от зенита. Поскольку высота в верхней кульминации к югу от зенита равна $h = 90° - \varphi + \delta$ (где δ — склонение), то в декабре 2015 года астероид имел склонение $\delta_{2015} = 23°$, а в декабре 2016 года — $\delta_{2016} = 0°$.

Поскольку 23 декабря — это примерная дата зимнего солнцестояния, Солнце в эти дни имело прямое восхождение $\alpha_\odot = 18^h$. Астероид, кульминировавший в 2015 году в истинную солнечную полночь, соответственно, имел прямое восхождение $\alpha_{2015} = 6^h$, а поскольку в 2016 году его кульминация произошла на 6 часов позже, то там $\alpha_{2016} = 12^h$. Сравнив это с уже известными склонениями, можно заметить, что в декабре 2015 года астероид находился в точке летнего солнцестояния, а в декабре 2016 года — в точке осеннего равноденствия. Следовательно, он движется по эклиптике.

Кроме этого, можно отметить, что в декабре 2015 года астероид наблюдался в противостоянии, а в декабре 2016 года — в квадратуре, причем за один год он прошел по эклиптике либо угол 90°, двигаясь в том же направлении, что и Солнце, либо угол 270°, двигаясь в обратном направлении (обладая т.н. «ретроградной» орбитой). Пройти больше 360° и оказаться в нужном месте он не мог — поскольку он был в противостоянии, то период его обращения вокруг Солнца заведомо больше одного года. Определим, какую долю своей орбиты он при этом прошел, для чего построим чертеж:



Если радиус орбиты астероида a, то угол между направлениями на него с вершиной в Солнце равен $\theta = \arccos(1/a)$, причем за год астероид прошел либо θ, либо $2\pi - \theta$. Соответственно, период его обращения вокруг Солнца в годах составляет либо $P_1 = 2\pi/\theta$, либо $P_2 = 2\pi/(2\pi - \theta)$ (угол θ мы измеряем в радианах, хотя, конечно, можно воспользоваться и градусной мерой, соответствующим образом изменив выражения). Измеряя a в астрономических единицах, мы можем, воспользовавшись III законом Кеплера, выразить $P = a^{3/2}$, откуда в конечном счете имеем два уравнения:

$$a_1^{3/2} \arccos(1/a_1) = 2\pi,$$

$$a_2^{3/2} (2\pi - \arccos(1/a_2)) = 2\pi,$$

определяющих возможные значения большой полуоси орбиты астероида. Конечно, решать их аналитически затруднительно. Однако подобрать ответ с разумной точностью все же можно.

Возведем первое из уравнений в квадрат: $a_1^3 \arccos^2(1/a_1) = 4\pi^2 \approx 40$, и вычислим левую часть для $a_1 = 2, 3, 4$. При этом арккосинус можно оценить, например, просто построив прямоугольный треугольник с нужным соотношением катета и гипотенузы, а затем измерив угол при вершине. Еще один способ оценки арккосинуса: можно, догадавшись, что аргумент $1/a$ будет достаточно малым, записать, что для $x \approx 0$ верно $\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin x \approx \frac{\pi}{2} - x$ (ошибка в интересующем нас случае появится в третьем знаке после запятой, что весьма недурно и более чем достаточно для наших целей).

Наконец, можно вообще обойтись без арккосинусов, если вспомнить II закон Кеплера и считать, что площадь сектора, которую радиус-вектор астероида замел за год, мало отличается от площади треугольника с вершинами в двух наблюдавшихся положениях астероида и в Солнце. Из рисунка видно, что площадь этого треугольника равна $\frac{a_1}{2}\sqrt{a_1^2 - 1}$, и тогда

$$P_1 = a_1^{3/2} \approx \frac{\pi a_1^2}{\frac{a_1}{2}\sqrt{a_1^2 - 1}},$$

что сводится к уравнению $(a_1^2 - 1)\, a_1 = 4\pi^2$.

Все эти варианты в конечном счете дают близкие результаты: $a_1 \approx 3$ а.е.

Один из корней второго уравнения очевиден: $a_2 = 1$ а.е. Можно задаться вопросом, существуют ли другие. Попробуем воспользоваться предложенной выше оценкой арккосинуса.

Если $1/a_2 \ll 1$, то
$$a_2^{3/2}\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\right) = 2\pi.$$

Даже если пренебречь малым слагаемым $1/a$, получаем $3\pi\, a^{3/2} = 4\pi$, откуда $a_2^{3/2} = 4/3$, причем это оценка a_2 сверху. Фактически это означает, что в любом случае $a_2 \approx 1$ а.е. (а использование более серьезных математических методов покажет, что других решений нет).

Эксцентриситет орбиты равен нулю по условию, аргумент перицентра для круговых орбит не определен и, поскольку орбита лежит в плоскости эклиптики, долгота восходящего узла также не определена.

Осталось разобраться с наклоном орбиты к плоскости эклиптики. Он может быть равен $0°$, если астероид вращается в ту же сторону вокруг Солнца, что и Земля (когда большая полуось его орбиты равна 3 а.е.), и $180°$, если направление движения обратное, а большая полуось орбиты равна 1 а.е.

В.В.Григорьев, П.А.Тараканов

3. Сверхновая Тихо Браге появилась на небе 6 ноября 1572 года и имела в максимуме блеск, равный -4^m. Сверхновая Кеплера появилась на небе 9 октября 1604 года и имела в максимуме блеск $-2^m.5$. Считая, что в максимуме блеска обе сверхновые имели абсолютную звездную величину, равную $-19^m.5$, определите, вспышка какой из Сверхновых произошла раньше и насколько.

Решение:

Запишем соотношение между абсолютной звездной величиной M, видимой звездной величиной m, расстоянием до объекта, выраженном в парсеках r, а также (для вящей точности) поглощением излучения в межзвездной среде Галактики A:
$$m = M + 5\,\lg r - 5 + A \cdot r.$$

Отсюда, выражая для каждой из двух сверхновых абсолютную звездную величину и приравнивая полученные выражения, имеем
$$m_{\text{ТБ}} - 5\,\lg r_{\text{ТБ}} + 5 - A \cdot r_{\text{ТБ}} = m_{\text{К}} - 5\,\lg r_{\text{К}} + 5 - A \cdot r_{\text{К}}.$$

Преобразовав выражения (и записав их с учетом того, что $r_{\text{К}} > r_{\text{ТБ}}$), получаем
$$m_{\text{К}} - m_{\text{ТБ}} = 5\,\lg \frac{r_{\text{К}}}{r_{\text{ТБ}}} + A \cdot (r_{\text{К}} - r_{\text{ТБ}}).$$

Подставим числа, учитывая, что поглощение в Галактике составляет $1^m \div 2^m$ на килопарсек, т.е. в используемых единицах $A \sim 10^{-3}$:
$$1.5 = 5\,\lg \frac{r_{\text{К}}}{r_{\text{ТБ}}} + 10^{-3} \cdot (r_{\text{К}} - r_{\text{ТБ}}). \qquad (*)$$

Решить это уравнение сразу несколько затруднительно, но можно подобраться к решению по частям.

Забудем на какое-то время про межзвездное поглощение и сосчитаем оценочное расстояние до Сверхновой Тихо Браге $\tilde{r}_{\text{ТБ}}$:
$$-4 = -19.5 + 5\,\lg \tilde{r}_{\text{ТБ}} - 5,$$

откуда $\tilde{r}_{\text{ТБ}} \sim 10^4$ пк. В таком случае для Сверхновой Кеплера (также без учета поглощения) можно записать
$$1.5 = 5\,\lg \frac{\tilde{r}_{\text{К}}}{\tilde{r}_{\text{ТБ}}}$$

и

$$\frac{\tilde{r}_{\text{К}}}{\tilde{r}_{\text{ТБ}}} = 10^{0.3} \approx 2,$$

т.е. она произошла на расстоянии, в 2 раза большем.

Отсюда сразу же следует, во-первых, что вспышка Сверхновой Кеплера произошла существенно раньше, во-вторых, что для оценок расстояний пренебрегать межзвездным поглощением не стоит.

Вернемся к формуле (*), но будем измерять расстояния в килопарсеках (и переобозначим их как R с нужным индексом). Тогда

$$\frac{1}{3} = \lg\frac{R_{\text{К}}}{R_{\text{ТБ}}} + \frac{1}{5}\cdot(R_{\text{К}} - R_{\text{ТБ}}).$$

Очевидно, что отношение расстояний должно быть меньше 2, причем существенно меньше (наблюдаемую разницу в видимых звездных величинах $1^m.5$ можно накопить только за счет поглощения на расстоянии порядка 1 кпк), а даже ближайшая Сверхновая заведомо дальше $1 \div 2$ кпк, поэтому пренебрежем первым членом в правой части, считая, что он мал. Тогда $R_{\text{К}} - R_{\text{ТБ}} \approx 2$ кпк и, следовательно, вспышка Сверхновой Кеплера произошла на несколько тысяч лет раньше, чем вспышка Сверхновой Тихо Браге (в одном парсеке примерно 3.26 светового года, моменты регистрации вспышек на таких временных масштабах очевидно можно считать фактически совпадающими).

Заметим, что задачу можно было решать и другим путем: любым способом оценив, что расстояние до Сверхновых порядка 10^1 кпк, сказать, что на таких масштабах одинаковые объекты на разных расстояниях имеют разный блеск в основном из-за ослабления межзвездным поглощением (а не из-за собственно уменьшения блеска с расстоянием), после чего сразу же перейти к последнему этапу решения, изложенного выше. Отметим также, что итоговая численная оценка разницы расстояний существенно зависит от принятой оценки межзвездного поглощения, хотя порядок величины, конечно, останется тем же. Дополнительно можно отметить, что полученная оценка сделана в предположении однотипности двух Сверхновых, хотя в реальности тип Сверхновой Кеплера неизвестен.

Б.Б.Эскин, П.А.Тараканов

4. Для изменения орбиты опасного астероида диаметром 300 м предлагается ударить по нему тяжелой твердой болванкой массой 300 кг, двигающейся со скоростью 10 км/с относительно астероида. Известно, что большая полуось орбиты астероида равна 1 а.е., а ее эксцентриситет не превосходит 0.25. Оцените, в каких пределах может измениться большая полуось орбиты этого астероида вследствие такого столкновения.

Решение:

Начнем с оценки массы астероида. Считая, что средняя плотность вещества астероидов около $2 \cdot 10^3$ кг/м^3, и оценивая объем астероида как $300^3 \approx 3 \cdot 10^7$ м^3 (для оценки его вполне можно считать и кубическим), получаем массу порядка $6 \cdot 10^{10}$ кг, причем сразу отметим, что точность этой оценки весьма невелика.

Дальнейшие рассуждения можно вести несколькими путями, мы опишем самый короткий, но не обязательный.

Вспомним одну из форм интеграла энергии:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где v — скорость движения тела по орбите вокруг притягивающего центра, G — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего центра (в нашем случае Солнца), r —

расстояние до притягивающего центра, a — большая полуось орбиты. В момент удара расстояние r не меняется, но меняется скорость v, что может привести к изменению a, которое и требуется найти.

Совершенно очевидно, что изменение скорости за счет удара будет небольшим, и малое изменение v приведет к малому изменению a. В то же время начальное значение скорости v, а также значение r могут быть разными, поскольку орбита астероида в общем случае эллиптическая. Но, поскольку эксцентриситет орбиты астероида ограничен сверху значением $e = 0.25$, то расстояние r меняется в пределах от $a\,(1-e)$ до $a\,(1+e)$ (т.е. менее чем в два раза), как следствие, величина начальной скорости может меняться также максимум примерно в два раза. Отсюда следует важный вывод: с учетом низкой точности оценки массы астероида рассматривать разные случаи (столкновение в перигелии или афелии, удар «в хвост» астероида, увеличивающий его импульс, или, наоборот, «в лоб»), практически бесполезно. Достаточно ограничиться одной оценкой для некоторого «среднего» случая.

Заметим, впрочем, что можно выбрать для оценки и наиболее эффективный вариант изменения орбиты. Для этого надо, чтобы скорость астероида в относительных величинах изменилась сильнее всего, а это получится в ситуации, когда удар будет произведен «в лоб» в тот момент, когда скорость движения астероида будет минимальной (т.е. он будет находиться в афелии самой вытянутой из всех возможных орбит).

Получим все же «среднюю» оценку. При движении по круговой орбите астероид будет двигаться со скоростью, равной орбитальной скорости Земли, т.е. примерно 30 км/с. Считая, что его столкновение с болванкой будет абсолютно неупругим, и воспользовавшись законом сохранения импульса, получим, что скорость астероида изменится на величину, не превосходящую $\Delta v = \frac{m}{M}V$, где m — масса болванки, M — масса астероида, V — относительная скорость движения болванки, данная в условии. Подставляя числовые данные, получаем $\Delta v \approx 5 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Осталось определить, каким будет изменение большой полуоси a при таком крошечном изменении скорости. Сделать это можно, например, так. Выразим из интеграла энергии член $2/r$:

$$\frac{v^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{2}{r}$$

и приравняем левые части для исходных и измененных значений скорости и большой полуоси:

$$\frac{v^2}{GM} + \frac{1}{a} = \frac{(v+\Delta v)^2}{GM} + \frac{1}{a+\Delta a}.$$

После раскрытия скобок, сокращения одинаковых слагаемых справа и слева и пренебрежения членом, содержащим $(\Delta v)^2$, как очевидно малым на фоне остальных, получаем

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\Delta a} = \frac{2v\Delta v}{GM}.$$

Левую часть равенства можно привести к общему знаменателю, после чего избавиться от малого слагаемого Δa в одном из сомножителей знаменателя:

$$\frac{\Delta a}{a^2} = \frac{2v\Delta v}{GM}.$$

Затем, немного преобразовав полученное выражение и вспомнив, что для круговой орбиты (с которой мы и работаем) $v = \sqrt{GM/a}$, получим:

$$\frac{\Delta a}{a} = 2\,\frac{\Delta v}{v}.$$

Относительное изменение скорости $\frac{\Delta v}{v} = 5 \cdot 10^{-5}/(3 \cdot 10^4) \approx 5/3 \cdot 10^{-9}$, следовательно, относительное изменение большой полуоси $\Delta a/a \approx 3 \cdot 10^{-9}$. Так как большая полуось $a = 1.5 \cdot 10^{11}$ м, то изменение $\Delta a \approx 5 \cdot 10^2$ м, т.е. порядка километра.

Те, кто умеет пользоваться дифференциальным исчислением, вычислительную часть решения могут провести проще, просто сосчитав дифференциал обеих частей равенства в интеграле энергии и сразу получив связь между изменением скорости и большой полуоси. Результат, впрочем, будет таким же.

А.В.Веселова

5. Для объяснения аномального отрицательного ускорения АМС «Пионер-10» предполагалось существование вещества, при движении в котором АМС замедляется из-за столкновения с его частицами. Допустим, что вещество сферически-симметрично заполняет пространство вокруг Солнца с постоянной плотностью. Оцените плотность вещества, если известно, что полное аномальное ускорение, обусловленное столкновениями и гравитационным притяжением АМС веществом, на расстоянии 100 а.е. от Солнца равно 10^{-9} м/с^2. АМС удаляется от Солнца с параболической скоростью, масса станции равна 200 кг, площадь поперечного сечения станции равна 1 м^2. Можно считать, что столкновения АМС с частицами абсолютно упругие.

Решение:

По условию на расстоянии r от Солнца АМС движется со скоростью $v = \sqrt{2GM/r}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Солнца (массу вещества внутри для оценки скорости, очевидно, можно не использовать, раз уж она создает настолько малое ускорение).

Тогда аномальное ускорение $w_т$, создаваемое за счет столкновений с частицами вещества, можно оценить следующим образом. За небольшое время t станция сталкивается с веществом, находящимся в цилиндре, площадь основания которого равна поперечному сечению станции ΔS, а высота равна $v\,t$. Если плотность вещества равна ρ, то в результате столкновения АМС получает (или, вернее, теряет) импульс, равный $2 \cdot v\,t\,\Delta S\,\rho \cdot v$ (коэффициент 2 появляется из-за того, что столкновения упругие, и АМС получает удвоенный импульс каждой частицы, с которой сталкивается). Изменение импульса за единицу времени — это сила, действующая на АМС, если мы ее разделим на массу станции m, то получим искомое ускорение. Итого

$$w_т = \frac{2v^2\,\Delta S\,\rho}{m} = \frac{4GM\,\Delta S\,\rho}{m} \cdot \frac{1}{r}.$$

Аномальное гравитационное ускорение $w_г$, вызванное наличием вещества, в соответствии с теоремой Ньютона, создается только тем веществом, которое находится внутри радиуса r вокруг Солнца. Тогда

$$w_г = \frac{4G\pi r^3\rho}{3r^2} = \frac{4G\pi\rho}{3}\,r$$

Таким образом, полное аномальное ускорение

$$w = w_т + w_г = 4G\rho\left(\frac{M\,\Delta S}{m\,r} + \frac{\pi\,r}{3}\right)$$

Осталось вычислить ответ. Начнем с оценки слагаемых в скобках (все величины выражены в системе СИ):

$$\frac{M\,\Delta S}{m\,r} = \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 1}{2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11}} \approx 7 \cdot 10^{14}.$$

$$\frac{\pi\,r}{3} = \frac{3 \cdot 10^2 1.5 \cdot 10^{11}}{3} = 1.5 \cdot 10^{13}$$

Отсюда можно заметить, что на расстоянии 100 а.е. «гравитационная» часть играет существенно меньшую роль, чем «тормозная», и слагаемым, соответствующим $w_{\text{г}}$, можно пренебречь. Тогда

$$10^{-9} = 4G\rho \cdot 7 \cdot 10^{14}$$

и

$$\rho = \frac{10^{-9}}{4 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 7 \cdot 10^{14}} = 5 \cdot 10^{-15}\ \text{кг/м}^3.$$

П.А.Тараканов