



XXI Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
районный тур, решения

2013
2
декабря

10 класс

1. Укажите даты, когда продолжительность светового дня на восточном и западном концах Петербурга отличается на максимально возможную величину, и объясните свой ответ.

Решение:

Продолжительность светового дня определяется склонением Солнца и широтой места наблюдения. Западный и восточный концы Петербурга находятся на одной широте, поэтому в данном случае различие в длине светового дня будет обусловлено только изменением склонения Солнца в течение дня. Таким образом, нужно найти даты, в которые склонение Солнца меняется быстрее всего, а ими являются дни весеннего и осеннего равноденствий.

2. Антарес, одна из ярчайших звезд неба, имеет радиус примерно в 10^3 раз больший радиуса Солнца. Предположим, что в какой-то момент радиус Антареса уменьшился до солнечного (а все прочие параметры остались неизменными). Какую видимую звездную величину имел бы такой «новый Антарес»? Был бы он виден невооруженным глазом? Можно было бы наблюдать его с помощью существующих сейчас телескопов?

Решение:

Так как настоящий Антарес — одна из ярчайших звезд неба, можно считать, что он имеет нулевую видимую звездную величину (0^m). Из известной формулы для светимости звезды:

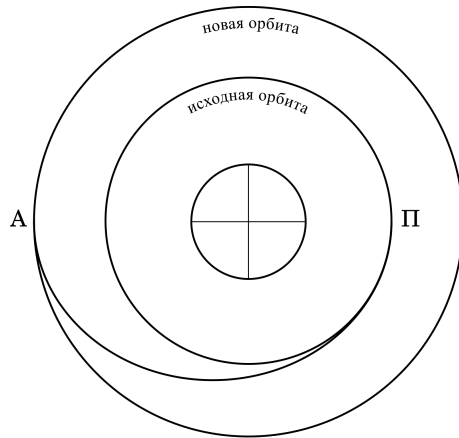
$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

где L — светимость звезды, R — ее радиус, T — эффективная температура, σ — постоянная Стефана-Больцмана, следует, что уменьшение радиуса в 10^3 раз приведет к уменьшению светимости в 10^6 раз. Так как изменение светимости в 10^2 раз приводит к изменению звездной величины на 5^m , то уменьшение светимости в 10^6 раз приведет к увеличению звездной величины на $3 \cdot 5^m = 15^m$. Так как, по условию, расстояние до Антареса не изменится, то видимая звездная величина также увеличится на 15^m и станет равна $+15^m$. Невооруженным глазом можно видеть звезды не слабее $+6^m$, а существующие сейчас телескопы позволяют изучать звезды около $+30^m$. Таким образом, «новый Антарес» не будет виден невооруженным глазом, но его вполне можно будет наблюдать в телескоп умеренного размера.

3. Международная космическая станция (МКС) летает по круговой орбите на высоте 400 км над поверхностью Земли. В центре управления полетами решили перевести ее на более высокую, но также круговую орбиту. Двигатели МКС умеют включаться на непродолжительное время, придавая станции дополнительный импульс. Какое минимальное количество включений двигателей необходимо, чтобы перевести станцию на более высокую круговую орбиту? Когда эти включения необходимо делать?

Решение:

Исходно МКС движется по круговой орбите. Если придать станции дополнительный импульс, она перейдет на эллиптическую орбиту, причем точка, в которой был придан импульс, станет перигеем (П) этой эллиптической орбиты (см. рисунок (не в масштабе)).



При осуществлении такого маневра требуется подобрать значение импульса таким образом, чтобы в апогее (А) «переходной» орбиты МКС оказалась на нужном расстоянии от центра Земли. В апогее скорость МКС будет меньше скорости движения по круговой орбите на данном расстоянии, так что необходим еще один импульс, позволяющий увеличить скорость до скорости движения по круговой орбите.

Таким образом, минимально необходимое количество импульсов равно двум.

4. Пешеход, находящийся на широте северного тропика, движется строго на запад со скоростью 5 км/час. Другой пешеход, находящийся на северном полярном круге, также движется строго на запад со скоростью 5 км/час. Во сколько раз отличаются их скорости относительно центра Земли?

Решение:

Пешеходы двигаются с равными скоростями относительно поверхности Земли, но при этом точки самой поверхности на тропике и полярном круге движутся с разными скоростями относительно центра Земли. За счет вращения Земли точка ее поверхности на широте φ движется относительно ее центра со скоростью $v_\varphi = v_0 \cdot \cos \varphi$, где v_0 — скорость движения точки на экваторе. Как легко посчитать, $v_0 = 0.5$ км/с. Формально, чтобы найти полную скорость пешехода относительно центра Земли, необходимо из скорости вращения точки поверхности на соответствующей широте вычесть собственную скорость пешехода (т.к. пешеход идет на запад, а Земля вращается с запада на восток, т.е. в обратную сторону). Но, видно, что по сравнению со скоростью движения точки поверхности собственная скорость пешехода настолько мала, что ею можно пренебречь. Тогда можно считать, что скорости пешехода на разных широтах отличаются в такое же количество раз, в какое отличаются скорости вращения поверхности Земли на разных широтах. Широта северного тропика равна углу наклона эклиптики к экватору $\varphi_{\text{троп.}} = \varepsilon = 23^\circ.5$, широта северного полярного круга $\varphi_{\text{пол. кр.}} = 90^\circ - \varepsilon = 66^\circ.5$:

$$\frac{v_{\text{троп.}}}{v_{\text{пол. кр.}}} = \frac{\cos \varphi_{\text{троп.}}}{\cos \varphi_{\text{пол. кр.}}} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos 90^\circ - \varepsilon} = \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{\text{tg } \varepsilon} \approx 2.4$$

Примечание. Оценить последнюю дробь можно следующим образом. Известно, что для малых углов их тангенс приближенно равен самому углу, выраженному в радианах. Можно проверить, что с точностью для 1% это верно для угла в 30° . Так что можно считать, что $\text{tg } \varepsilon$ примерно равен ε , выраженному в радианах. Тогда, зная, что $1 \text{ рад} = 57^\circ$, получаем:

$$\frac{1}{\text{tg } \varepsilon} \approx \frac{1}{23.5/57} = \frac{57}{23.5} \approx 2.4.$$

5. Астроном фотографирует планету с угловым диаметром $20''$, используя телескоп с фокусным расстоянием 7 метров и стоящую в фокальной плоскости телескопа ПЗС-камеру с квадратными пикселями, причем длина стороны одного пикселя равна 6 микрометрам. Оцените количество пикселей, на которые попадет изображение планеты.

Решение:

Линейный размер l изображения протяженного объекта углового размера α (измеренный в радианах) в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием F равен $l = \alpha F$. Следовательно, планета в фокальной плоскости будет выглядеть кружком с радиусом

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{20''}{2 \cdot 10^5 ''/\text{рад}} \cdot 7 = 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3.5 \cdot 10^2 \text{ мкм.}$$

Площадь, которую займет изображение планеты на матрице, равна πR^2 . Тогда количество пикселей N , занятое изображением, определяется отношением площади изображения к площади пикселя:

$$N = \frac{\pi 3.5^2 \cdot 10^4}{6^2} \approx 10^4 \text{ пикселей.}$$