XVIII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2011

12 марта

10 класс

1. Видимая звездная величина Седны в перигелии орбиты (когда она находится на расстоянии 76 а.е.) составляет 20^m. Какой будет ее видимая звездная величина в афелии, если эксцентриситет ее орбиты равен 0.86?

Решение:

Известно, что перицентрическое расстояние r_π, большая полуось орбиты a и эксцентриситет e связаны соотношением $r_\pi = a(1-e)$. Аналогично, апоцентрическое расстояние r_α выражается как $r_\alpha = a(1+e)$. Отсюда получаем отношение афелийного и перигелийного расстояний

$$\frac{r_\alpha}{r_\pi} = \frac{1+e}{1-e} = \frac{1.86}{0.14} \approx 13$$

(заметим, что непосредственно вычислять афелийное расстояние не требуется).

Освещенность, создаваемая объектом, обратно пропорциональна квадрату расстояния до него. Однако Седна — не самосветящийся объект, она светит отраженным светом Солнца, поэтому и освещенность на поверхности Седны обратно пропорциональна квадрату расстояния от нее до Солнца. В итоге, так как Земля (по сравнению с Седной) находится на пренебрежимо малом расстоянии от Солнца, получаем, что освещенность, создаваемая Седной на Земле, обратно пропорциональна четвертой степени расстояния до нее.

Следовательно, блеск Седны в перигелии и в афелии различается в $13^4 \approx 3 \cdot 10^4$ раз. Так как изменение освещенности на два порядка соответствует разнице в 5^m, получаем, что изменение звездной величины составляет $\Delta m \approx 11^m$, т.е. в афелии Седна будет иметь $+\mathbf{31^m}$ видимую звездную величину.

2. На двух радиотелескопах одновременно наблюдают одну и ту же активную область на Солнце. Один из радиотелескопов находится недалеко от Москвы, а другой — рядом с городом Турку (запад Финляндии), оба телескопа имеют диаметр 20 м. Координатор перед началом наблюдений отправляет в Москву и в Турку экваториальные координаты активной области. Должны ли отличаться значения координат, отправленные на телескопы, и если должны, то насколько?

Решение:

Оценим разность направлений на активную область. Очевидно, что угол между направлениями на нее из Москвы и из Турку будет совпадать с углом, под которым в то же самое время виден отрезок Москва–Турку с Солнца. Каким он может быть?

Получим очень грубую оценку сверху. Известно, что угловой размер диска Солнца на земном небе составляет около $30'$. Так как радиус Земли более чем в сто раз меньше радиуса Солнца (если это неизвестно, радиус Солнца можно получить по угловому размеру и расстоянию до него), то это означает, что угловой размер диска Земли при наблюдении с Солнца не превосходит $30'/100 = 20''$. Очевидно, что искомый нами угол будет как минимум в несколько раз меньше (поскольку Москва и Турку явно находятся не в диаметрально противоположных точках Земли).

Теперь оценим угловое разрешение радиотелескопов. Самые короткие волны радиодиапазона имеют длину $\lambda \approx 1$ мм. Так как диаметр телескопа составляет $D = 20$ м, то это означает, что угловое разрешение заведомо не лучше $\beta \approx 0.001/20 = 5 \cdot 10^{-5}$ радиан. Переводя радианы в секунды, получаем $5 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{5} = 10''$. Сравнивая две полученные нами оценки, делаем вывод, что внесение в координаты поправки, связанной с расстоянием между телескопами, **не требуется**.

3. Во сколько раз будет отличаться продолжительность центрального покрытия некоторой звезды Луной в перигее и апогее? Эксцентриситет орбиты Луны составляет 0.055.

Решение:

Продолжительность покрытия t, очевидно, определяется соотношением $t = d/\omega$, где d — угловой диаметр Луны, а ω — угловая скорость. Отсюда

$$\frac{t_\pi}{t_\alpha} = \frac{\frac{d_\pi}{\omega_\pi}}{\frac{d_\alpha}{\omega_\alpha}} = \frac{d_\pi}{d_\alpha}\frac{\omega_\alpha}{\omega_\pi}$$

Обозначим расстояние между Землей и Луной в перигее r_π, а в апогее — r_α. Очевидно, что угловой диаметр Луны в перигее больше, чем в апогее, в $\frac{r_\alpha}{r_\pi}$ раз. Линейная скорость v движения Луны по орбите в перигее больше, чем в апогее, также в $\frac{r_\alpha}{r_\pi}$ раз (что является следствием либо II закона Кеплера, либо закона сохранения момента импульса).

Угловая скорость $\omega = \frac{v}{r}$. Тогда отношение угловых скоростей движения Луны в перигее и апогее равно

$$\frac{\omega_\pi}{\omega_\alpha} = \frac{v_\pi}{v_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_\pi} = \left(\frac{r_\alpha}{r_\pi}\right)^2$$

Тогда получаем, что

$$\frac{t_\pi}{t_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r_\pi}\left(\frac{r_\pi}{r_\alpha}\right)^2 = \frac{r_\pi}{r_\alpha}$$

Зная, что $r_\pi = a(1-e)$, $r_\alpha = a(1+e)$, получаем

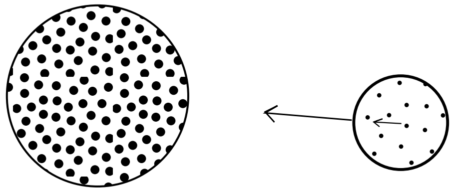
$$\frac{t_\pi}{t_\alpha} = \frac{1-e}{1+e} \approx 0.9,$$

т.е. отношение продолжительностей покрытий в перигее и апогее примерно **0.9**.

4. Мимо гигантской эллиптической галактики, масса которой составляет $4 \cdot 10^{12}$ масс Солнца, пролетает карликовая галактика с диаметром 3 кпк и массой 10^9 масс Солнца. Оцените минимальное расстояние, на которое карликовая галактика может приблизиться к гигантской, чтобы не потерять значительную часть массы.

Решение:

В первом приближении все тела в гравитационном поле ускоряются одинаково и, следовательно, карликовая галактика должна двигаться как целое в поле тяготения гигантской. Однако в действительности это не совсем так — сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния, и, поскольку карликовая галактика имеет конечные размеры, ее части, находящиеся при пролете ближе к гиганстской галактике, будут притягиваться сильнее. Если при этом *разность* ускорений, действующих на центральную и периферийную области карликовой галактики со стороны гигантской (см.рисунок), превысит гравитационное ускорение, с которым периферийная область притягивается к центру карликовой галактики, то карликовая галактика будет разорвана.



Обозначим радиус карликовой галактики r, расстояние между центрами галактик R, массу гигантской галактики M, массу карликовой — m. Тогда изложенное выше условие разрыва будет иметь следующий вид:

$$\frac{GM}{(R-r)^2} - \frac{GM}{R^2} > \frac{Gm}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная. Разделив на нее обе части неравенства и приведя к общему знаменателю левую часть, получаем

$$M \cdot \frac{R^2 - (R-r)^2}{(R-r)^2\, R^2} > \frac{m}{r^2}.$$

Так как явно выполнено условие $R \gg r$, то левую часть неравенства можно преобразовать как

$$M \cdot \frac{R^2 - (R-r)^2}{(R-r)^2\, R^2} = M \cdot \frac{r\,(2R-r)}{(R-r)^2\, R^2} \approx \frac{2MRr}{R^4} = \frac{2Mr}{R^3},$$

поэтому

$$\frac{2Mr}{R^3} > \frac{m}{r^2}.$$

Разрешая это неравенство относительно R, получаем

$$R < r\sqrt[3]{\frac{2M}{m}}$$

и, подставляя числовые данные (их, очевидно, можно использовать прямо в тех единицах, в которых они даны в условии), получаем

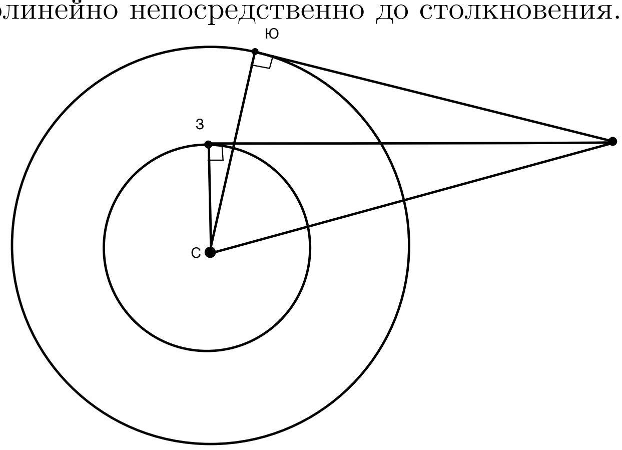
$$R < 1.5\ \text{кпк} \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{12}}{10^9}} = \mathbf{30\ кпк}.$$

Это и есть оценка минимального «безопасного» расстояния пролета для карликовой галактики.

5. Предположим, что случилось страшное: в один «прекрасный» момент Солнце внезапно пропало, а еще через некоторое время Земля столкнулась с Юпитером. Какое время прошло между исчезновением Солнца и столкновением? Орбиты Земли и Юпитера считать круговыми, радиус орбиты Юпитера равен 5 а.е.

Решение:

После исчезновения Солнца обе планеты продолжили двигаться равномерно и прямолинейно со скоростями, совпадающими со скоростями их орбитального движения; отклонения, связанные с гравитационным взаимодействием планет, должны быть достаточно малыми (поскольку при наличии Солнца влиянием на орбиту планеты других планет в первом приближении можно пренебречь), поэтому можно считать, что планеты движутся равномерно и прямолинейно непосредственно до столкновения.



Пусть Солнце пропало в момент времени $t = 0$, радиусы орбит Земли и Юпитера равны $R_\oplus$ и $R_{\jupiter}$, орбитальные скорости — $v_\oplus$ и $v_{\jupiter}$. Тогда, если столкновение произошло в момент времени t, из рисунка видно, что выполнено соотношение:

$$v_\oplus^2 t^2 + R_\oplus^2 = v_{\jupiter}^2 t^2 + R_{\jupiter}^2$$

(у двух прямоугольных треугольников общая гипотенуза, и, следовательно, равны суммы квадратов катетов каждого из треугольников). Отсюда получаем

$$t = \sqrt{\frac{R_{\jupiter}^2 - R_\oplus^2}{v_\oplus^2 t^2 - v_{\jupiter}^2}}$$

Для упрощения вычислений заметим, что если радиусы орбит выражать в астрономических единицах, а скорости — в а.е./год, то скорость v движения по некоторой круговой орбите радиуса R окажется равной $v = 2\pi/\sqrt{R}$. Поэтому время, выраженное в годах, равно

$$t = \frac{R_\oplus}{v_\oplus} \cdot \sqrt{\frac{(R_{\jupiter}/R_\oplus)^2 - 1}{1 - (v_{\jupiter}/v_\oplus)^2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{(R_{\jupiter}/R_\oplus)^2 - 1}{1 - R_\oplus/R_{\jupiter}}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{5^2 - 1}{1 - 1/5}} = \frac{\sqrt{30}}{2\pi} \approx 5.5/6.3 \approx 0.9.$$

Итоговый ответ: примерно **0.9 года**.