Задачи и решения (9 класс)

1. Оцените, во сколько раз отличаются скорости низколетящих спутников Земли и Юпитера, если известно, что радиус Юпитера примерно в 10 раз меньше радиуса Солнца.
   Решение: Так как спутники низколетящие, то это означает, что орбиты у спутников круговые и радиус орбиты примерно совпадает с радиусом соответствующей планеты. Если обозначить массу планеты M, а радиус R, то ускорение свободного падения для спутника можно вычислить как $g = \frac{GM}{R^2}$, где G - гравитационная постоянная. Известно, что для кругового движения со скоростью v $g = \frac{v^2}{R}$, отсюда получаем, что $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Преобразуем это выражение. $v = \sqrt{\frac{GM \cdot \frac{4}{3}\pi R^2}{R \cdot \frac{4}{3}\pi R^2}}. = \sqrt{\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho}$, где ρ - средняя плотность планеты. Плотности Земли и Юпитера известны - это 5.5 г/см3 и 1.3 г/см3 соответственно (для оценки можно взять 5 и 1), радиус Юпитера можно оценить, зная радиус Солнца (если он неизвестен, то легко "восстанавливается" либо из данных о плотности и массе Солнца (последнюю можно получить, зная радиус орбиты Земли и продолжительность года), либо из данных об угловом размере диска Солнца и расстоянии до него). В итоге оказывается, что радиус Юпитера примерно в 10 раз больше радиуса Земли, и, следовательно, скорость низколетящего спутника Юпитера будет в $\sqrt{10^2 \cdot 1.3/5.5} \approx 5$раз больше, чем скорость такого же спутника Земли.
2. 2 марта этого года астероид 2009 DD45 пролетел между Землей и Луной. Предположим, что астероид в некоторый момент оказался точно на прямой, соединяющей наблюдателя на Земле и центр Луны, двигался со скоростью 20 км/с под углом $45°$ к этой прямой и находился на расстоянии 64 тыс.км от наблюдателя. Найдите время, за которое астероид для наблюдателя пересек диск Луны. Радиус Луны в 4 раза меньше радиуса Земли, расстояние от Земли до Луны равно примерно 60 радиусам Земли.
   Решение: Радиус Земли примерно равен $6\,400$ км, поэтому астероид пролетел на расстоянии, равном 10 радиусам Земли. Немного упростим задачу - будем считать, что астероид пересекал прямую, соединяющую наблюдателя и Луну, перпендикулярно. Тогда путь x, пройденный астероидом на фоне диска Луны, относится к расстоянию до него так же, как диаметр Луны к расстоянию до нее. Отсюда (если выразить все величины в радиусах Земли) $\frac{x}{10} = \frac{1/2}{60}$, и

пройденный путь $x = 1/12$ радиуса Земли. Выразив его в километрах, получим, $6400/12 \approx 530$ км. Теперь вспомним, что астероид двигался под углом $45°$ к прямой. Так как расстояние между Землей и Луной намного больше 530 км, то можно считать, что за счет этого путь астероида на фоне диска Луны увеличился в $\sqrt{2} \approx 1.4$ раза. В итоге получаем путь, равный $530 \cdot 1.4 \approx 740$ км. Так как астероид двигался со скоростью 20 км/с, время пересечения окажется равным $740/20 = 37 \approx 40$ с.

3. 11 февраля 2009 года на высоте 800~км над поверхностью Земли столкнулись два спутника: "Космос-2251" и "Iridium 33". В момент столкновения угол между траекториями спутников составлял $60°$. Найдите диапазон возможных значений относительной скорости спутников при столкновении.
   Решение: Спутники столкнулись на сравнительно небольшой высоте. С достаточной точностью можно считать, что в момент столкновения оба спутника находились в перигее (минимально возможная высота полета спутников составляет примерно 300 км, и относительная разница между расстоянием до центра Земли 7200 км и 6700 км невелика). Первая и вторая космические скорости на такой высоте также мало отличаются от <<наземных>> (они пропорциональны $R^{-1/2}$, поэтому отличие не превосходит 6%). Следовательно, минимально возможная скорость каждого спутника около 8 км/с, а максимально возможная - около 11 км/с. Если бы скорости спутников были одинаковыми и равнялись v, то, так как угол между траекториями составлял $60°$, относительная скорость сближения спутников также равнялась v. Отсюда очевидно, что возможная относительная скорость спутников заключена в пределах от 8 км/с до 11 км/с.
4. С помощью антенны дальней космической связи, состоящей из нескольких одинаковых рефлекторов (радиотелескопов-"тарелок") выполнялась радиолокация некоторого астероида, движущегося по круговой орбите. Во время противостояния ответный сигнал был принят на пределе чувствительности с использованием двух рефлекторов, а в квадратуре для приема сигнала (также на пределе чувствительности) пришлось задействовать восемь рефлекторов. Мощность излучения локатора в обоих случаях была одинаковой. Найдите радиус орбиты астероида. Какое время прошло между посылкой сигнала и приемом ответного во время сеанса локации в противостоянии?
   Решение: Посланный локатором сигнал распространяется в некотором телесном угле, поэтому его интенсивность падает обратно пропорционально квадрату расстояния. Интенсивность излучения, отраженного от астероида, при распространении назад к локатору также уменьшается обратно

пропорционально квадрату расстояния, поэтому интенсивность принятого локатором сигнала I зависит от расстояния до объекта r как $I \propto r^{-4}$. Из условия ясно, что интенсивность вернувшегося сигнала в противостоянии была в 4 раза больше, чем в квадратуре, следовательно, расстояния до астероида в противостоянии r и в квадратуре r связаны как $r = \sqrt[4]{4}r = \sqrt{2}r$ Вспомнив определения противостояния (Солнце, Земля и астероид находятся на одной прямой) и квадратуры (направления Солнце-Земля и Земля-астероид образуют прямой угол), можно заметить, что расстояние в противостоянии, выраженное в астрономических единицах, равно $r = R - 1$, где R - радиус орбиты астероида (также в а.е.), а расстояние в квадратуре $r = \sqrt{R^2 - 1}$ (по теореме Пифагора). Отсюда получаем уравнение $\sqrt{2} \cdot (R - 1) = \sqrt{R^2 - 1}$. Оно приводится к квадратному $R^2 - 4R + 3 = 0$, корни которого равны 3 и 1. Корень, равный единице, нас не устраивает по смыслу задачи, поэтому ответ один - радиус орбиты астероида равен 3 а.е.

5. Во сколько раз нужно изменить большие полуоси орбит Земли и Луны, чтобы в нашем календаре было 12 месяцев ровно по 30 дней? Настоящий период обращения Луны вокруг Земли - 27.3 суток.

   Решение: Поскольку продолжительность суток изменять нельзя, то из условия следует, что продолжительность года должна равняться ровно $30 \cdot 12 = 360$ суткам (сейчас она составляет 365.3суток). Воспользовавшись III законом Кеплера ($a \propto P^{2/3}$, где a - большая полуось, P - период), получаем, что большую полуось орбиты Земли надо уменьшить в $(365.3/360)^{2/3} = (1 + 5.3/360)^{2/3} \approx 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5.3}{360} \approx 1.01$ раза. Для решения второй части задачи следует вспомнить, что продолжительность периода повторения фаз Луны - синодический лунный месяц - это не совсем то же самое, что период обращения Луны вокруг Земли. Синодический месяц S связан с периодом обращения P как $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{P} - \dfrac{1}{360}$, (тут 360 - новая продолжительность года в сутках), отюда желаемый нами период обращения $P = \dfrac{1}{1/S + 1/360} = \dfrac{1}{1/30 + 1/360} = \dfrac{360}{13} \approx 27.7.$ Далее действуем так же, как при решении первой части задачи. В итоге получаем, что большую полуось орбиты Луны надо увеличить в $(27.7/27.3)^{2/3} = (1 + 0.4/27.3)^{2/3} \approx 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.4}{27.3} \approx 1.01$ раза.