

Задачи и решения (7-8 классы)

1. Самолет в 5 часов 15 минут местного времени вылетел из Сургута (географические координаты $61^{\circ}15' \text{с.ш.}$, $73^{\circ}26' \text{в.д.}$) в Санкт-Петербург по кратчайшему пути с постоянной скоростью. Пассажир, летящий в самолете, замечает, что высота Солнца над горизонтом сначала уменьшается, а потом увеличивается. Объясните это явление. Известно, что самолет приземлился в Петербурге в 6 часов 05 минут по местному времени.

Решение: Линия, соединяющая две точки на поверхности сферы по кратчайшему расстоянию - дуга окружности, образованной при сечении сферы плоскостью, проходящей через центр сферы (т.н. "ортодрома"). Если рассмотреть две точки, лежащие в Северном полушарии Земли на одной широте (широта Петербурга $59^{\circ}56' \text{с.ш.}$, она примерно совпадает с широтой Сургута), то ортодрома, соединяющая эти две точки, не будет совпадать с географической параллелью и пройдет севернее ее. Таким образом, самолет, летящий по кратчайшему расстоянию, в течение первой половины пути будет смещаться к северу, а затем, наоборот, к югу. Так как высота подъема Солнца над горизонтом в Северном полушарии в один и тот же момент времени на одном меридиане уменьшается с увеличением широты, то при перемещении самолета к северу высота Солнца должна уменьшаться, а при перемещении к югу - увеличиваться. Однако дело происходит утром, и высота Солнца над горизонтом должна систематически увеличиваться на всех широтах. Почему же в начале пути этого не наблюдалось? Ответ таков: Сургут находится восточнее Петербурга, поэтому самолет, движущийся на запад, может "компенсировать" вращение Земли. Именно это и произошло, поскольку разница между местными временами вылета и посадки достаточно мала, она существенно меньше, чем время, которое самолет провел в пути.

2. В некотором году 1 января пришлось на понедельник. Найдите минимально возможное и максимально возможное количество лет, которое может пройти до следующего 1 января, которое также придется на понедельник.

Решение: Поделим 365 и 366 на 7 с остатком. Получим остатки, равные, соответственно, 1 и 2. Это означает, что если понедельник 1 января был в високосном году, то следующее 1 января будет средой, а если в невисокосном - вторником. Тогда каждые четыре года 1 января будет смещаться на 5 дней недели вперед и очевидно, что сдвиг на 7 дней недели может произойти не менее чем за 5 лет (в течение которых должно быть два високосных года). Первый ответ получен, возможный минимум - 5 лет.

Второй ответ получить сложнее. Ясно, что продолжительность цикла без понедельников увеличится в том случае, если в цикле будет високосный год, начинающийся в воскресенье (назовем его "опорным") - тогда следующий начнется во вторник. Отсчитывая дни недели 1 января от этого опорного года вперед и назад, получим такую последовательность дней 1 января: понедельник, вторник (високосный), четверг, пятница, суббота, воскресенье (високосный, опорный), вторник, среда, четверг, пятница (високосный), воскресенье, понедельник. Получается последовательность длиной в 11 лет. Сделать так, чтобы в ней два високосных года начинались на воскресенье, уже не удастся - числа 4 (цикл високосных годов) и 7 (цикл дней недели) взаимно просты, поэтому такие года отстоят друг от друга на 28 лет.

Тем не менее улучшить этот результат все же можно. Дело в том, что некоторые года, номера которых делятся на 4, в григорианском календаре не являются високосными. Это года, номера которых делятся на 100 и не делятся на 400 (за всю историю григорианского календаря таких было три - 1700, 1800, 1900).

Если номер нашего опорного года заканчивался на ...96 и следующий за ним високосный год появлялся только через 8 лет (годятся такие варианты: 1696, 1796, 1896), то конец предыдущей последовательности "пятница (високосный), воскресенье, понедельник" превратится в такой: "пятница (невисокосный, номер заканчивается на два нуля), суббота, воскресенье, понедельник". Последовательность удлинняется на один год и ее длина достигает 12 лет.

Аналогичной будет и ситуация, когда опорный год заканчивается на ...04 - в этом случае последовательность также удлинняется на один год, только спереди. Но так как удлинить ее с двух сторон сразу невозможно, то максимально возможная продолжительность остается равной 12 годам.

3. Некий любитель астрономии, считавший, что частицы метеорных потоков вылетают из Луны, пытался наблюдать метеорные потоки, радианты которых (направления на небе, с которых к Земле подлетают метеоры) располагались рядом с Луной. При этом он обнаружил интересную закономерность, на первый взгляд подтверждавшую его точку зрения: количество наблюдаемых метеоров в таких потоках существенно зависело от фазы Луны. Найдите, при какой фазе Луны количество наблюдаемых метеоров было максимальным. Объясните обнаруженную любителем астрономии закономерность.

Решение: Как известно, Земля вращается вокруг Солнца против часовой стрелки (если смотреть со стороны северного полюса эклиптики). Отсюда

следует, что в тот момент, когда Луна находится в последней четверти, Земля движется по орбите в ее сторону, а частицы метеорного потока, радиант которого находится рядом с Луной, движутся навстречу Земле. Если же Луна находится в первой четверти, то, наоборот, орбитальная скорость Земли направлена в сторону, противоположную Луне, и частицы соответствующего метеорного потока догоняют Землю. Тогда в случае, когда Луна находится в последней четверти, скорость движения метеорных частиц относительно Земли в среднем больше, количество метеоров, влетающих в атмосферу Земли за единицу времени, также больше, поэтому при этой фазе Луны любитель астрономии наблюдал максимальное количество метеоров. В случае, когда Луна находилась в первой четверти, количество наблюдаемых метеоров, наоборот, было минимальным. В случае, когда Луна в полнолунии, скорость метеорных частиц за счет скорости Земли изменяется мало, и количество наблюдаемых метеоров должно быть некоторым средним. Наконец, в новолунии метеоры практически не видны - такие метеорные потоки пришлось бы наблюдать днем.

4. В свое время для измерения угловых размеров звезд была предложена идея использовать момент начала покрытия звезды Луной - вместо непосредственного измерения углового диаметра диска звезды можно измерить время, в течение которого диск звезды будет пересекать край диска Луны. Для выполнения такого исследования астроном подготовил телескоп с высокоскоростной камерой, делающей 300 снимков в секунду. Сможет ли астроном, используя эту технику, измерять угловые размеры звезд, если известный максимальный угловой размер звезды примерно равен $0''.001$?
- Решение:** Время начала покрытия или "открытия" звезды определяется угловой скоростью Луны. Известно, что период обращения Луны примерно равен месяцу, оценим его как 30 суток. Определив суточное перемещение Луны по небесной сфере (360° за 30 суток), получим 12° /сутки. Тогда за 2 часа Луна перемещается на 1° , перемещение Луны на $1'$ происходит за 2 минуты, на $1''$ - за 2 секунды, а на $0''.001$ - за 0.002 секунды. Для того, чтобы измерить интервал времени между началом и концом пересечения диском звезды границы диска Луны, нужно использовать камеру, делающую как минимум $1/0.002 = 500$ снимков в секунду. Следовательно, с подобным техническим оснащением эту задачу решить нельзя.
5. 2 марта этого года астероид 2009 DD45 пролетел между Землей и Луной. Предположим, что астероид в некоторый момент оказался точно на прямой, соединяющей наблюдателя на Земле и центр Луны, двигался со скоростью 20 км/с под углом 45° к этой прямой и находился на расстоянии 64 тыс.км от

наблюдателя. Найдите время, за которое астероид для наблюдателя пересек диск Луны. Радиус Луны в 4 раза меньше радиуса Земли, расстояние от Земли до Луны равно примерно 60 радиусам Земли.

Решение: Радиус Земли примерно равен 6400 км, поэтому астероид пролетел на расстоянии, равном 10 радиусам Земли. Немного упростим задачу - будем считать, что астероид пересекал прямую, соединяющую наблюдателя и Луну, перпендикулярно. Тогда путь x , пройденный астероидом на фоне диска Луны, относится к расстоянию до него так же, как диаметр Луны к расстоянию до

нее. Отсюда (если выразить все величины в радиусах Земли) $\frac{x}{10} = \frac{1/2}{60}$,

и пройденный путь $x = 1/12$ радиуса Земли. Выразив его в километрах, получим $6400/12 \approx 530$ км. Теперь вспомним, что астероид двигался под углом 45° к прямой. Так как расстояние между Землей и Луной намного больше 530 км, то можно считать, что за счет этого путь астероида на фоне диска Луны увеличился в $\sqrt{2} \approx 1.4$ раза. В итоге получаем путь, равный $530 \cdot 1.4 \approx 740$ км. Так как астероид двигался со скоростью 20 км/с, время пересечения окажется равным $740/20 = 37 \approx 40$ с.