Задачи и решения (11 класс)

1. Параметры орбиты Венеры: большая полуось $a = 0.7$ а.е., эксцентриситет $e = 0$, наклон к плоскости эклиптики $i = 3^\circ.5$. Найдите максимально возможную высоту Венеры над горизонтом при наблюдении из Петербурга.
   Решение: Так как широта Петербурга составляет $\varphi = 60^\circ$, а угол между экватором и эклиптикой $\varepsilon = 23^\circ.5$, то максимальная высота подъема Солнца над горизонтом в Петербурге равна $h_\odot = 90^\circ - \varphi + \varepsilon = 53^\circ.5$. Осталось вычислить, на какое максимальное расстояние от эклиптики Венера может отойти для земного наблюдателя. Рассмотрим треугольник $\mathcal{ABC}$ "Солнце-Земля-Венера" (соответственно). Очевидно, что угол при вершине, в которой находится Земля, будет максимальным в тот момент, когда Венера находится в нижнем соединении (т.е. расположена практически между Солнцем и Землей). Тогда сторона треугольника $\mathcal{AB} = 1$ а.е., $\mathcal{AC} = 0.7$ а.е., $\angle\mathcal{A} = 3^\circ.5$, а нам надо найти $\angle\mathcal{B}$. Ввиду малости углов $\angle\mathcal{A}$ и $\angle\mathcal{B}$ достаточно очевидно, что сторона треугольника $\mathcal{BC} \approx \mathcal{AB} - \mathcal{AC} = 0.3$а.е. В принципе, для ее вычисления можно воспользоваться теоремой косинусов, но результат окажется таким же. Тогда мы можем записать теорему синусов для треугольника в виде: $\frac{\sin\angle\mathcal{B}}{\mathcal{AC}} = \frac{\sin\angle\mathcal{A}}{\mathcal{BC}}$. Синусы малых углов примерно равны самим углам, выраженным в радианах, но так как при переводе из градусов в радианы в равенстве слева и справа появятся одинаковые множители $\pi/180$, то угол $\angle\mathcal{B}$ вычисляется как $\angle\mathcal{B} \approx \frac{0.7}{0.3} \cdot 3^\circ.5 \approx 8^\circ$. Таким образом, Венера для земного наблюдателя может подняться на 8° над эклиптикой и, следовательно, максимальная высота ее подъема над горизонтом в Петербурге составит $h = h_\odot + 8^\circ = 61^\circ.5$.
2. В далеком будущем для освещения участка поверхности Марса на ареоцентрическую (с центром в центре Марса) стационарную орбиту был выведен спутник с массой, равной 1 тонне, на котором был установлен постоянно работающий прожектор мощностью 10 МВт, узкий луч которого был направлен вниз, на поверхность Марса. Однако оказалось, что для того, чтобы спутник с прожектором совершал один оборот ровно за одни марсианские сутки (24 часа 37 минут), радиус его орбиты необходимо уменьшить по сравнению с обычным радиусом стационарной орбиты. Насколько потребовалось уменьшить радиус орбиты?
   Решение: Начнем с выяснения, почему радиус орбиты спутника с прожектором вообще должен быть меньше при том же периоде. Так как на спутнике

установлен направленный прожектор, то спутник представляет собой <<фотонную ракету>> (хотя и очень малой мощности), двигатель которой постоянно включен и придает спутнику дополнительное ускорение вверх, вследствие чего эффективное ускорение силы тяжести для спутника оказывается меньше, чем обычное. Ускорение при движении по круговой орбите может быть вычислено как $g = \frac{GM}{R^2}$, где G - гравитационная постоянная, M - масса Марса, R - радиус орбиты. Так как изменения ускорения и радиуса орбиты малы, можно вычислить дифференциалы обеих частей равенства. При малом изменении радиуса орбиты dR изменение ускорения составит $dg = -2\frac{GM}{R^3}\,dR$, или $dR = -\frac{R^3}{2GM}\,dg$. Отметим, что аналогичный результат можно получить и без использования дифференциалов, однако запись промежуточных выкладок станет более громоздкой. Изменение ускорения dg можно получить следующим образом. Каждый фотон с энергией $h\nu$ (ν - частота фотона, h - постоянная Планка), покинувший прожектор, придает прожектору импульс $h\nu/c$, направленный в сторону, противоположную направлению вылета фотонов (c - скорость света). Если мощность излучения прожектора L, то за единицу времени прожектор получит импульс L/c, а импульс, переданный телу за единицу времени - это сила, которая на него действует. Т.о. соответствующее ускорение $dg = \frac{L}{c \cdot m}$, где m - масса спутника с прожектором. Осталось вычислить выражение $\frac{R^3}{2GM}$ для ареостационарной орбиты. Записывая для нее III закон Кеплера $\frac{P^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, получаем, что $\frac{R^3}{2GM} = \frac{P^2}{8\pi^2}$. Итоговое выражение имеет вид: $dR = -\frac{P^2}{8\pi^2} \cdot \frac{L}{c \cdot m}$, при подстановке данных получаем численный ответ: разность радиусов орбит составляет примерно 3 км.

3. Анализ спектра звезды позволил определить ее эффективную температуру T и ускорение силы тяжести на поверхности g. Из наблюдений известны также видимая звездная величина звезды m и годичный параллакс p (в угловых секундах). Как, имея эти данные, определить массу звезды?

   Решение: Ускорение силы тяжести на поверхности звезды $g = \frac{G}{R^2}$, где - масса звезды, R - ее радиус, G - гравитационная постоянная. Отсюда $= \frac{g}{G} \cdot R^2$, и для решения задачи надо найти радиус звезды. Известно, что светимость звезды L можно записать как $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, где σ - постоянная Стефана-

Больцмана, и задача сводится к нахождению светимости. По формуле Погсона отношение светимостей звезды L и Солнца $L_\odot$ (светимость Солнца равна $4 \cdot 10^{26}$ Вт) равно $\frac{L}{L_\odot} = 10^{0.4\,(M_\odot - M)}$, где M - абсолютная звездная величина звезды, $M_\odot$ - абсолютная звездная величина Солнца (примерно равная $+5^m$). Далее пользуемся соотношением между видимой и абсолютной звездными величинами $M = m - 5\lg r + 5$, где r - расстояние до звезды в парсеках. Последнее находим из равенства $r = 1/p$. Собирая все вместе, получаем окончательный результат: $= \frac{g}{4\pi\sigma G T^4} \cdot L_\odot \cdot 10^{0.4\,(M_\odot - (m + 5\lg p + 5))}$.

4. Облако в межзвездной среде, состоящее из атомарного водорода, имеет максимальную лучевую концентрацию атомов $3 \cdot 10^{26}\ ^{-2}$ (количество атомов, находящихся в <<столбе>> с основанием $1\ ^{2}$). Облако имеет форму шара, плотность газа в облаке везде одинакова. При наблюдении облака на длине волны 21 см обнаружилось, что ширина спектральной линии составляет 0.1 мм. Оцените массу облака.

   Решение: Ширина спектральной линии позволяет найти характерную скорость v движения атомов в облаке. Линия расширяется из-за допплеровского смещения, поэтому $\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, где c - скорость света ($3 \cdot 10^{10}$ см/с), $\lambda = 21$ см, $\Delta\lambda = 0.05$ мм (половина ширины линии). Отсюда получаем $v \approx 6 \cdot 10^{6}$ см/с. Найти связь между характерной скоростью и массой облака можно двумя способами. Наиболее корректный - воспользоваться теоремой вириала. Известно, что для устойчивой самогравитирующей системы сумма удвоенной средней кинетической энергии и средней потенциальной энергии равна нулю. Предполагая, что все атомы облака имеют скорость v, и зная, что потенциальная энергия однородного гравитирующего шара массы M и радиуса R равна $-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$ (G - гравитационная постоянная), получаем равенство: $2\,\frac{Mv^2}{2} - \frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R} = 0$, откуда $v^2 = \frac{3}{5}\,\frac{GM}{R}$. Можно воспользоваться и более простыми соображениями. Все частицы облака движутся по некоторым орбитам вокруг центра облака. Очевидно, что максимальную скорость будут иметь частицы, находящиеся на границе облака, причем их скорость можно приближенно оценить как круговую скорость движения вокруг массы M на орбите радиуса R. Тогда $v^2 = \frac{GM}{R}$. Видно, что результат отличается от предыдущего близким к единице множителем, что для итоговой оценки не слишком существенно. Максимальной лучевая концентрация N будет в центре облака, причем ее можно выразить как $N = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot 2R \cdot \frac{1}{m}$, где m - масса атома водорода (лучевая концентрация - это количество атомов в <<столбе>>, а не масса в нем же). Выразив из этого соотношения и формулы для скорости частиц (для определенности воспользуемся первым вариантом) массу облака, получим $M = \dfrac{25v^4}{6\pi G^2 Nm}$. Подставляя числовые данные (масса атома водорода $m \approx 2 \cdot 10^{-24}$ г), получаем ответ: $M = 6 \cdot 10^{38}$ г, что примерно равно $2 \cdot 10^5$ масс Солнца.

5. В результате выполненных в 1979 году измерений скорости расширения известного объекта остатка вспышки сверхновой Кассиопея А (Cas A) было получено, что остаток расширялся со скоростью $5.5 \cdot 10^3$ км/с. Измерения 2009 года показали, что тот же остаток расширяется со скоростью $5.2 \cdot 10^3$ км/с. В каком году вспыхнула эта сверхновая?

   Решение: Для решения задачи необходимо получить зависимость скорости расширения остатка от времени. Очевидно, что скорость расширения остатка очень велика. Размеры остатков вспышек сверхновых также велики, поэтому можно считать, что на расширение остатка практически не влияет гравитация. Расширение остатка - это разлет продуктов сильного взрыва во внешней среде, и мы можем полагать, что динамика этого разлета определяется энергией E, выделившейся при взрыве, а также плотностью внешней среды ρ. Попробуем найти формулу, связывающую скорость разлета остатка v, время t, прошедшее с момента взрыва, а также энергию E и плотность ρ. Для этого воспользуемся методом размерностей: если формула, связывающая эти величины, существует, то ее можно представить в виде $v^\alpha \cdot E^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot t^\delta = \mathrm{const}$, где α, β, γ и δ - некоторые числа, а константа в правой части безразмерна. Обозначим размерность длины L, размерность массы M, а размерность времени T. Тогда все четыре величины имеют следующие размерности: $[v] = L/T$, $[E] = ML^2/T^2$, $[\rho] = M/L^3$, $[t] = T$, а искомая формула, в которой размерности слева и справа должны совпадать, превращается в $L^{\alpha+2\beta-3\gamma} \cdot M^{\beta+\gamma} \cdot T^{-\alpha-2\beta+\delta} = L^0 \cdot M^0 \cdot T^0$. Отсюда получаем систему уравнений: $\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - 2\beta + \delta = 0 \end{cases}$ От возведения искомой формулы в произвольную степень ничего не изменится, поэтому одно из четырех неизвестных в системе мы можем выбрать произвольным образом. Пусть, например, $\beta = 1$. Тогда $\gamma = -1$, $\alpha = -5$, $\delta = -3$, а искомая зависимость имеет вид $v^{-5} \cdot \dfrac{E}{\rho} \cdot t^{-3} = \mathrm{const}.$ Нас интересует в основном зависимость между скоростью и временем, поэтому мы можем заключить, что $t \propto v^{-5/3}$, причем время t отсчитывается от момента вспышки сверхновой. Тогда, если вспышка произошла t_0 лет назад (считая от 2009 года), можно записать, что $\frac{t_0-30}{t_0}=\left(\frac{5.5\cdot10^3}{5.2\cdot10^3}\right)^{-5/3}$. Вычисляем правую часть равенства: $\left(\frac{5.5\cdot10^3}{5.2\cdot10^3}\right)^{-5/3}=\left(\frac{52}{55}\right)^{5/3}=\left(1-\frac{3}{55}\right)^{5/3}\approx1-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{55}=1-\frac{1}{11}$. Тогда $1-\frac{30}{t_0}=1-\frac{1}{11}$ и $t_0=30\cdot11=330$ лет. Следовательно, вспышка произошла примерно 330 лет назад, т.е. ориентировочно в 1679 году. Сейчас эта сверхновая известна как <<Сверхновая Флемстида>> - по-видимому, ее в 1680 г. наблюдал первый директор Гринвичской обсерватории Джон Флемстид, однако даже в максимуме блеска объект был слабым (примерно $+6^m$) и никакого интереса у астрономов не вызвал.