Задачи и решения (10 класс)

1. Сириус, Солнце, Алголь, альфа Центавра, Альбиро. Найдите в этом списке лишний объект и объясните свое решение.

Решение: Лишний объект – Солнце. Все остальные звезды являются двойными или кратными. Можно также отметить, что Солнце – единственная в списке звезда, около которой обнаружены планеты.

2. Оцените величину атмосферного давления у поверхности Марса, если известно, что масса его атмосферы в 300 раз меньше, чем масса атмосферы Земли, а радиус Марса примерно в 2 раза меньше радиуса Земли.

Решение: Простую, но достаточно точную оценку можно получить, если считать, что вся атмосфера Марса собрана в приповерхностном слое постоянной плотности, равной плотности у поверхности. Тогда давление можно вычислить по известной формуле $p = \rho gh$, где ρ – плотность атмосферы у поверхности Марса, g – ускорение свободного падения на поверхности, h – высота такой однородной атмосферы.

Такая атмосфера получится достаточно тонкой, поэтому изменением g с высотой можно пренебречь. По той же причине массу атмосферы m можно представить как

$$m = \rho \cdot 4\pi R^2 \cdot h,$$

где R – радиус планеты. Так как

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

где M – масса планеты, R – ее радиус, G – гравитационная постоянная, выражение для давления можно записать в виде

$$p = \frac{m}{4\pi R^2} \cdot \frac{GM}{R^2} = \frac{G}{4\pi} \cdot \frac{m \cdot M}{R^4}.$$

Отношение M/R^3 пропорционально плотности планеты ρ , поэтому давление на поверхности получается пропорциональным $m\rho/R$.

Очевидно, что те же самые рассуждения можно применить и к Земле. Так как средние плотности Земли и Марса – двух планет земной группы – близки, зависимостью от средней плотности планеты можно пренебречь. Радиус Марса примерно в 2 раза меньше радиуса Земли, поэтому атмосферное давление на поверхности Марса можно оценить как $1/150$ земного, т.е. около 0.7 кПа (на самом деле оно составляет около 0.6 кПа).

3. Известно, что угловая скорость вращения Земли вокруг оси уменьшается со временем. Почему?

Решение: Из-за существования лунных и солнечных приливов (в океане, атмосфере и литосфере). Приливные горбы перемещаются по поверхности Земли в направлении, противоположном направлению ее вращения вокруг оси. Так как перемещение приливных горбов по поверхности Земли не может происходить без трения, то приливные горбы тормозят вращение Земли.

4. Где длиннее день 21 марта: в Петербурге или Магадане? Почему? Широта Магадана равна 60° .

Решение: Продолжительность дня определяется средним склонением Солнца в течение дня. В окрестности 21 марта склонение Солнца увеличивается со временем, поэтому день будет длиннее там, где 21 марта наступит позже. Магадан находится восточнее Петербурга, поэтому продолжительность дня 21 марта в Петербурге будет больше.

5. В ядре галактики M87 находится черная дыра с массой $5 \cdot 10^9$ масс Солнца. Найдите гравитационный радиус черной дыры (расстояние от центра, на котором вторая космическая скорость равна скорости света), а также среднюю плотность вещества в пределах гравитационного радиуса.

Решение: Вторую космическую скорость (она же скорость убегания или параболическая скорость) для любого космического тела можно рассчитать по формуле:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

где M – масса и R – радиус этого тела.

Масса черной дыры равна $M = 5 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 10^{40}$ кг (масса Солнца равна $2 \cdot 10^{30}$ кг). Если Вы не помните массу Солнца, ее легко можно оценить, воспользовавшись данными о радиусе земной орбиты вокруг Солнца и продолжительности года.

Полагая для черной дыры $v_{II} = c$ (c – скорость света в вакууме), найдем ее гравитационный радиус:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{40}}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 2 \cdot 10^{13}.$$

Средняя плотность вещества в пределах гравитационного радиуса

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_g^3} = \frac{10^{40}}{\frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (2 \cdot 10^{13})^3} \approx 0.3 / \text{м}^3.$$

Такая малая плотность – это нормально. Так как радиус черной дыры растет пропорционально ее массе, то средняя плотность оказывается обратно

пропорциональной квадрату массы черной дыры и для массивных черных дыр оказывается малой.