

Задачи и решения (11 класс)

1. Каков бы был период обращения Юпитера относительно Солнца, если бы масса Солнца была в 10 раз больше, чем на самом деле? Считать, что радиус орбиты Юпитера не меняется и равен 5.2 а.е.

Решение: Для решения этой задачи следует воспользоваться так называемым "обобщенным" III законом Кеплера:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2},$$

где P - период обращения планеты, a - радиус (а точнее, большая полуось) ее орбиты, M - масса Солнца, G - гравитационная постоянная.

Отсюда получаем

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G}}$$

откуда следует, что при неизменном радиусе орбиты P обратно пропорционален $\sqrt{M}$. Таким образом искомый период был бы в $\sqrt{10}$ раз меньше, чем на самом деле.

Настоящий период обращения Юпитера можно определить из "простого" III закона Кеплера, сравнив орбиту Юпитера с орбитой Земли:

$$\frac{P^2}{P_{\oplus}^2} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3},$$

где $P_{\oplus} = 1$ год - период обращения Земли, $a_{\oplus} = 1$ а.е. - радиус ее орбиты. Отсюда $P = \sqrt{a^3} = \sqrt{5.2^3} \approx 12$ лет. Получаем, что искомый период был бы равен $\frac{12}{\sqrt{10}} \approx 4$ года.

2. Могут ли какие-либо галилеевы спутники Юпитера при наблюдении с Юпитера находиться в "полнолунии"? Радиусы орбит спутников (в радиусах Юпитера) составляют: Ио - 5.9, Европа - 9.4, Ганимед - 15, Каллисто - 26.

Решение: Вспомним, что наклон орбит галилеевых спутников Юпитера к плоскости эклиптики практически нулевой. Тогда вопрос состоит в том, попадут ли спутники при приближении к фазе "полнолуния" в тень Юпитера или нет. Очевидно, что шансы не попасть в тень выше всего у наиболее далекого спутника - Каллисто. Угловой диаметр Юпитера при наблюдении с Каллисто можно легко оценить, он составит $2/26$ радиана, т.е. примерно 4° . Так как угловой размер диска Солнца при наблюдении с орбиты Юпитера намного меньше - около $6'$ (можно вспомнить, что угловой размер диска Солнца при наблюдении с Земли примерно равен $30'$, а Юпитер находится в 5 раз дальше от Солнца, чем

Земля), то это означает, что даже Каллисто (а, следовательно, и все остальные галилеевы спутники тоже) окажутся глубоко в тени Юпитера.

3. Почему в веществе самых старых звезд Галактики очень мало тяжелых элементов, а в веществе самых молодых, наоборот, их содержание относительно велико?

Решение: Самые старые звезды образовались из бедного тяжелыми элементами протогалактического газового облака. Массивные звезды, быстро эволюционируя, взрывались и обогащали межзвездную среду образовавшимися в них тяжелыми элементами. Следующие поколения звезд образовывались из вещества с большим содержанием тяжелых элементов.

4. Может ли искусственный спутник иметь такую орбиту, чтобы его трасса проходила бы только над следующими частями света:

а) над Европой?

б) над Африкой?

с) и над Европой, и над Африкой?

Решение: Проще всего ответить на вопрос б) - так как через Африку проходит экватор, то геостационарный спутник будет искомым.

Подходящими для двух остальных вопросов спутниками могут быть только суточные спутники (с периодом обращения, равным суткам), в противном случае орбита спутника будет перемещаться по долготе из-за вращения Земли, и такой спутник рано или поздно пролетит, например, над Америкой. Орбита суточного спутника с некоторым наклоном, меньшим 90° , будет представлять собой "восьмерку" с центром на экваторе, крайние точки которой будут иметь широту, равную наклону орбиты. Можно подобрать наклон таким образом, чтобы спутник пролетал над Европой (при этом наклон должен быть больше 38° - это широта самой южной точки Европы) и не пролетал над Антарктидой (наклон должен быть меньше 63° - широты самой северной точки Антарктиды). Реально нижняя граница наклона больше - при малом наклоне одна из петель "восьмерки" может зацепить Азию.

Однако при этом не удастся сделать так, чтобы спутник не пролетал над Африкой, поэтому ответ на вопрос с) - может, это должен быть суточный спутник с наклоном около 60° ; ответ на вопрос а) - не может.

Примечание: естественно, в решении не требовалось указывать предельные значения наклонов орбит спутников.

5. Десять солнцеподобных звезд свалили в кучу и сделали одну белую звезду главной последовательности. Как изменилась светимость такой звезды, если ее средняя плотность в три раза меньше солнечной?

Решение: Светимость звезды ($L = 4\pi R^2 \sigma T^4$) определяется температурой и площадью поверхности звезды. Звезда белая, т.е. ее температура около 10^4 K. Она в 1.7 раза больше температуры Солнца ($6 \cdot 10^3$ K), и за счет изменения температуры светимость увеличилась в $(1.7)^4 \approx 8$ раз.

Так как масса звезды стала в 10 раз больше, а плотность в 3 раза меньше, то объем звезды увеличился в 30 раз. Поскольку объем пропорционален кубу радиуса, то радиус новой звезды в $\sqrt[3]{30}$ раз больше старого радиуса, а площадь поверхности, следовательно, в $(30)^{2/3} \approx 10$ раз больше прежней. Таким образом, суммарная светимость новой звезды возросла в ≈ 80 раз.