XV Санкт-Петербургская городская олимпиада по астрономии

первый тур, решения

2008

8 февраля

---

11 класс

---

1. К черной дыре массой $5\mathfrak{M}_\odot$ послали зонд массой 100 кг и длиной 5 м, имеющий форму узкого цилиндра, повернутого одним из оснований к черной дыре. Зонд выдерживает силу натяжения 10^7 Н. На каком расстоянии от черной дыры зонд прекратит свое существование?

Решение:

Единственная сила, действующая на зонд — сила тяготения от черной дыры $F = G\frac{m\mathfrak{M}}{r^2}$, где m — масса зонда, $\mathfrak{M}$ — масса черной дыры, r — расстояние от зонда до черной дыры. Так как зонд имеет ненулевые размеры и обращен к черной дыре одним концом, то силы, действующие на разные концы зонда, различаются. Если разность этих сил превысит допустимую силу натяжения для зонда, он разорвется. Вычислим разность сил, деcтвующих на разные концы зонда:

$$\Delta F = \frac{Gm\mathfrak{M}}{r^2} - \frac{Gm\mathfrak{M}}{(r+\Delta r)^2} = Gm\mathfrak{M}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+\Delta r)^2}\right),$$

где Δr — длина зонда.

Упростим выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+\Delta r)^2} = \frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{r^2(r+\Delta r)^2} = \frac{r^2 + 2r\Delta r + \underline{\Delta r^2} - r^2}{r^2(r+\underline{\Delta r})^2} \approx \frac{2r\Delta r}{r^4} = \frac{2\Delta r}{r^3}.$$

(Заметим, что Δr, а тем более Δr^2, по сравнению с r можно пренебречь.)

Подставим числа:

$$\Delta F = Gm\mathfrak{M}\frac{2\Delta r}{r^3} \approx 7\cdot 10^{-11}\cdot 100\cdot 5\cdot 2\cdot 10^{30}\cdot\frac{2\cdot 5}{r^3} = \frac{7\cdot 10^{23}}{r^3}$$

Отсюда, подставляя $\Delta F = 10^7$, получаем

$$r = \sqrt[3]{\frac{7\cdot 10^{23}}{10^7}} = \sqrt[3]{70\cdot 10^{15}} \approx 4\cdot 10^5\,\text{м}.$$

2. Зависимость «период – абсолютная звездная величина» для цефеид имеет вид

$$\langle M_V\rangle = -1^m.4 - 2^m.8\lg P,$$

где P — период пульсаций цефеиды, выраженный в сутках, $\langle M_V\rangle$ — средняя абсолютная звездная величина цефеиды в полосе V. Оцените расстояние до δ Cep, если известно, что ее период составляет $P = 5.4$ суток.

Решение:

δ Сер — четвертая по яркости звезда в созвездии Цефея, в котором ярких звезд нет, так что блеск звезды явно слабее $2^m \div 3^m$. В то же время контуры созвездия на небе прослеживаются достаточно четко, следовательно, δ Сер ярче $5^m \div 6^m$. В качестве оценки среднего блеска можно принять 4^m (что очень близко к истине), после чего решение становится тривиальным.

$$\langle M_V \rangle = \langle m_V \rangle + 5 - 5 \cdot \lg r,$$

где r — расстояние до звезды в парсеках. Отсюда $r \approx 300$ пк.

3. Одним из методов обнаружения внесолнечных планет является транзит (прохождение планеты по диску) и падение наблюдаемого блеска звезды вследствие этого. Предположим, что на звезде есть пятна. Какого размера должно быть пятно на Солнце, чтобы его можно было перепутать с Юпитером? Считать, что максимум в спектре излучения пятна находится на длине волны 730 нм.

Решение:

Так как эффективная температура собственного излучения Юпитера мала, можно считать, что Юпитер для наблюдателя из другой планетной системы просто закрывает некоторую часть диска Солнца. Если вспомнить радиус Юпитера, равный 70 тыс. км (или оценить его, вспомнив, что масса Юпитера примерно в 10^3 раз меньше массы Солнца, их средние плотности близки, а радиус Солнца около 700 тыс. км), то получим, что Юпитер закрывает $(1/10)^2 = 1/100$ солнечного диска и, соответственно, ослабляет поток от Солнца на 1%.

Температура пятна сравнима с эффективной температурой Солнца. Ее можно вычислить, воспользовавшись законом смещения Вина, например, в виде пропорции — считая, что эффективная температура Солнца составляет $T_\odot = 6 \cdot 10^3$ K и ей соответствует максимум на длине волны 550 нм, получаем, что эффективная температура пятна $T_\text{п} = T_\odot \cdot \frac{550}{730} = 4.5 \cdot 10^3$ K.

Поток излучения абсолютно черного тела (а в оптическом диапазоне и Солнце, и пятно можно считать таковыми) пропорционален четвертой степени температуры. Поэтому, если площадь диска Солнца считать единичной, а площадь диска пятна обозначить S, то для площади интересующего нас пятна мы получаем условие

$$(1 - S) \cdot T_\odot^4 + S \cdot T_\text{п}^4 = \frac{99}{100} \cdot T_\odot^4.$$

Преобразуя его, получим

$$\frac{1}{100} = S \cdot \left(1 - \frac{T_\text{п}^4}{T_\odot^4}\right).$$

Отсюда получаем

$$S = \frac{1}{100} \cdot \left(1 - \frac{T_\text{п}^4}{T_\odot^4}\right)^{-1} = \frac{1}{100 \cdot (1 - (3/4)^4)} \approx \frac{1}{70}.$$

В площадях диска Юпитера это $100/70 = 10/7$, следовательно, линейный размер пятна должен быть в $\sqrt{10/7} = \sqrt{1 + 3/7} \approx 1 + 3/14 \approx 1.2$ раза больше размера Юпитера. Отсюда оцениваем диаметр пятна: 170 тыс. км.

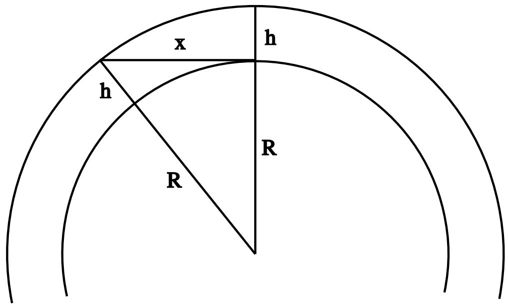
4. Известно, что земная атмосфера поглощает излучение в оптической области таким образом, что видимая звездная величина объектов, наблюдаемых в зените, увеличивается на $0^m.2$ по сравнению с истинной (которая наблюдалась бы при отсутствии атмосферы). Оцените, насколько из-за поглощения атмосферой увеличивается видимая звездная величина объектов, наблюдаемых у горизонта.

Решение:

Очевидно, что поглощение излучения в атмосфере определяется лучевой концентрацией вещества (т.е. количеством воздуха, находящимся в цилиндре с единичной площадью основания и осью, направленной на наблюдаемый объект).

Так как плотности атосферы достаточно быстро убывает с высотой, очевидно, что главный вклад в поглощение вносят слои атмосферы, близкие к Земле, поэтому детальным распределением плотности с высотой можно пренебречь (вообще говоря, задача может быть решена и без этого приближения, но в таком случае она становится математически нетривиальной, а полученный ответ будет очень близок к тому, что мы сможем получить более простым способом).

Воспользуемся приближением однородной атмосферы — будем считать, что вся земная атмосфера собрана в слой вокруг Земли с постоянной плотностью, равной плотности воздуха у поверхности Земли. Высота такой однородной атмосферы составляет 8 км (эту величину можно оценить, зная плотность воздуха ρ и нормальное атмосферное давление p — воспользовавшись известным соотношением $p = \rho g h$).



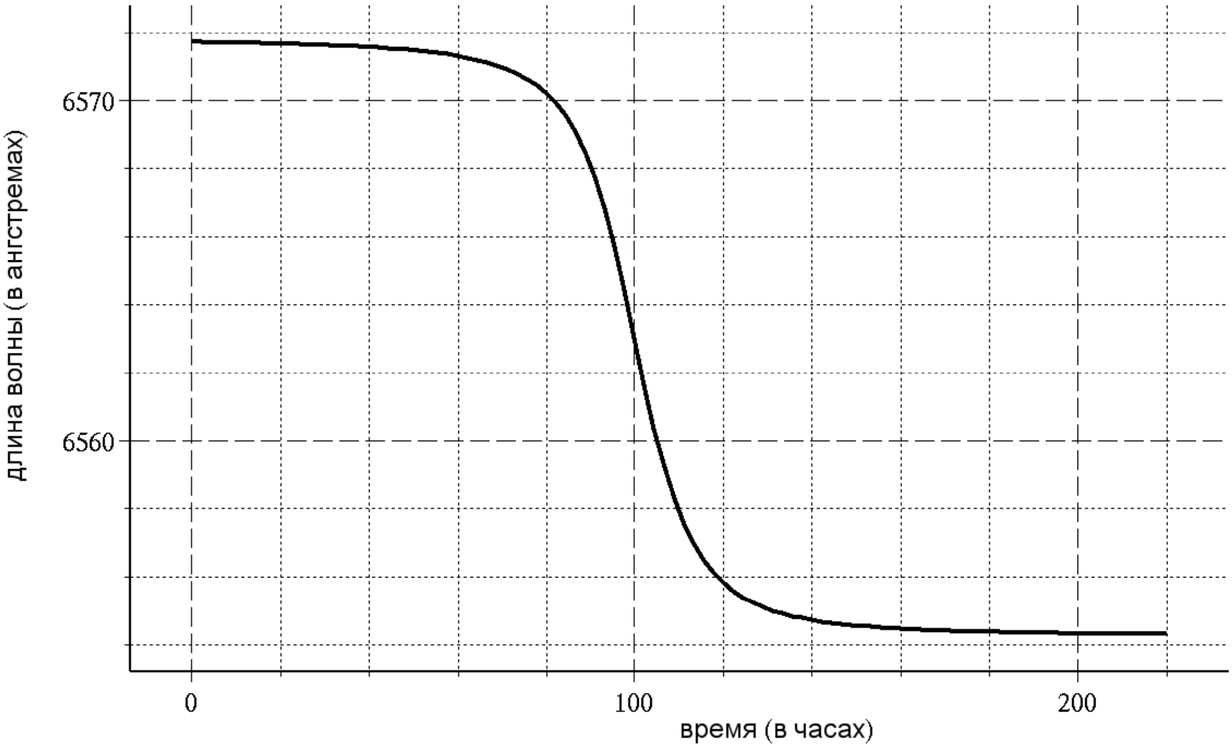
Обозначим через R радиус Земли. Исходя из рисунка, получаем, что расстояние x, которое излучение должно пройти через атмосферу при наблюдении объектов у горизонта, выражается как

$$x = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} \approx \sqrt{2Rh} = h \cdot \sqrt{\frac{2R}{h}}.$$

Сделанное приближение обусловлено тем, что $h \ll R$, поэтому $h^2 \ll 2Rh$ и вторым слагаемым под корнем можно пренебречь.

Получаем, что при наблюдении объектов на горизонте лучевая концентрация воздуха будет в $\sqrt{2R/h} \approx 40$ раз больше, чем при наблюдении объектов в зените. Так как звездная величина — логарифмическая характеристика освещенности, то ослабление освещенности **в некоторое число раз** соответствует увеличению звездной величины **на некоторое число величин**. Поэтому если освещенность от объектов в зените уменьшается в некоторое число k раз и этому соответствует ослабление на $0^m.2$, то при наблюдении объектов на горизонте освещенность уменьшится в k^{40} раз, а звездная величина объектов увеличится на $40 \cdot 0^m.2 = 8^m$.

5. Давным-давно, в далекой-далекой галактике звездолет, двигавшийся прямолинейно и равномерно, пролетал мимо астероида-маяка (на астероиде был установлен монохроматический источник света, излучавший в линии H_α). Штурман звездолета с помощью бортового спектрографа записал зависимость видимой длины волны излучения от времени и получил следующий результат:



Доделайте работу штурмана: определите по этим данным скорость звездолета и минимальное расстояние между звездолетом и маяком.

Решение:

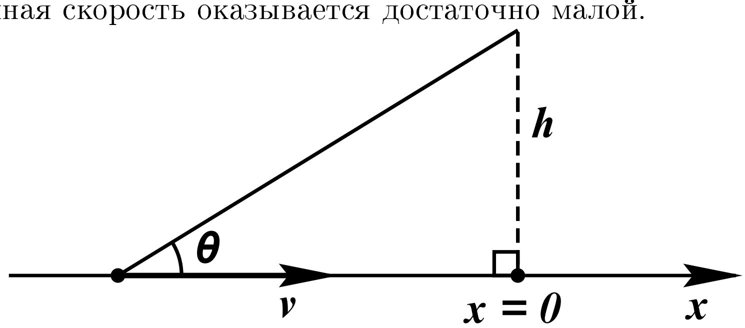
Для начала попробуем понять, как должен был выглядеть график, полученный штурманом, в общем случае. Сначала, когда звездолет находится далеко от маяка, можно считать, что он движется строго в направлении на маяк, и его лучевая скорость (по отношению к маяку) практически не меняется, совпадая при этом со скоростью звездолета. По мере приближения к маяку лучевая скорость должна уменьшаться, и в тот момент, когда звездолет проходит на минимальном расстоянии от маяка, лучевая скорость оказывается нулевой. Затем, при удалении звездолета от маяка, лучевая скорость уменьшается (становится отрицательной и растет по абсолютному значению). Когда расстояние между звездолетом и маяком становится большим, лучевая скорость (по абсолютному значению) опять оказывается примерно постоянной и равной скорости звездолета. Так как изменение наблюдаемой длины волны излучения маяка прямо пропорционально лучевой скорости, то среднее между максимальной и минимальной длиной волны значение равно лабораторному значению длины волны излучения маяка, а момент времени, когда зарегистрированная длина волны совпадает с лабораторной — это момент, когда звездолет был на минимальном расстоянии от маяка.

Очевидно, что размеры участка кривой, на которой меняется лучевая скорость, зависит от минимального расстояния между астероидом и звездолетом. Если бы звездолет пролетел непосредственно рядом с маяком, то зависимость лучевой скорости от времени состояла бы из двух участков с постоянной лучевой скоростью, с разрывом в момент пролета маяка. Чем дальше звездолет пролетает от маяка, тем более пологим является изменение лучевой скорости. Отсюда можно предположить, что минимальное расстояние от звездолета до маяка как-то связано со значением производной регистрируемой длины волны по времени в момент пролета маяка на минимальном расстоянии.

Реализуем все это. Из графика видно, что среднее значение длины волны $\lambda_0 = 6563$ Å (вообще говоря, можно было получить то же самое, зная, что линия H_α возникает при переходе электрона в атоме водорода с 3-го на 2-й уровень). Тогда скорость движения звездолета v можно получить, воспользовавшись формулой эффекта Допплера

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c},$$

где c — скорость света в вакууме, а $\Delta\lambda$ определяется как разность между λ_0 и асимптотическим значением длины волны либо в начале, либо в конце графика. Видно, что $\Delta\lambda \approx 9$ Å , отсюда $v \approx 4 \cdot 10^2$ км/с. Заметим, что этот результат оправдывает использование здесь и в дальнейшем формулы нерелятивистского эффекта Допплера — полученная скорость оказывается достаточно малой.



Обозначим минимальное расстояние между звездолетом и маяком h, лучевую скорость звездолета v_r, угол между направлением движения звездолета и направлением на маяк θ (см. рисунок). Введем также координату, описывающую положение звездолета x и шкалу времени t, причем $x = 0$ и $t = 0$ соответствуют моменту, когда звездолет находился на минимальном расстоянии от маяка. Тогда $x = vt$, $v_r = v\,\cos\theta$.

Угол θ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{-x} = \frac{h}{-vt},$$

изменение длины волны определяется из соотношения

$$\Delta\lambda = \frac{v_r}{c} \cdot \lambda_0 = \frac{v\,\cos\theta}{c} \cdot \lambda_0.$$

Так как

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta + 1} = \frac{1}{\frac{h^2}{v^2t^2} + 1} = \frac{v^2c^2}{h^2 + v^2t^2},$$

то

$$\cos\theta = -\frac{vt}{\sqrt{h^2 + v^2t^2}},$$

причем знак «$-$» при извлечении корня выбирается, исходя из выбора обозначений (см.рисунок). Тогда

$$\Delta\lambda = -\frac{v^2t}{\sqrt{h^2 + v^2t^2}} \cdot \frac{\lambda_0}{c}.$$

Так как наблюдаемая длина волны $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, то производная $\lambda' = (\Delta\lambda)'$. Поэтому

$$\lambda' = - - \frac{v^2h^2}{(h^2 + v^2t^2)^{3/2}} \cdot \frac{\lambda_0}{c}.$$

В момент $t = 0$ производная оказывается равной

$$\lambda'(0) = -\frac{v^2 \lambda_0}{h \cdot c}.$$

Находим производную из графика, получаем -0.5 Å /час. Подставив это данное в последнюю формулу и выражая h, получаем результат: $h \approx 2.5 \cdot 10^7$ км.