

МОСКОВСКАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016–2017 уч. г.

ОЧНЫЙ ЭТАП

8–9 классы

Критерии оценивания

Задание 1

Условие

1 января 2001 года был понедельник. Какое (ближайшее) столетие начнётся с воскресенья? Считайте, что в будущем мы будем продолжать пользоваться современным календарём.

Решение

В григорианском календаре високосным является каждый четвёртый год, за исключением тех лет, номер которых кратен 100, но не кратен 400. Таким образом, период григорианского календаря составляет 400 лет, из которых 97 являются високосными и 303 – простыми. Общее число дней за 400 лет составляет

$$400 \times 365 + 97 = 146\,097,$$

что равно 20 871 неделе ровно. Поэтому 1 января первого в столетии года может быть одним из четырёх дней недели. До 1 января 2101 года пройдёт

$$100 \times 365 + 24 = 36\,524 \text{ дня.}$$

или 5217 недель и 5 дней, поэтому 1 января 2101 года будет субботой. Аналогично 1 января 2201 года будет четвергом, 1 января 2301 года будет вторником, а 1 января 2401 года (после високосного 2400 года) – снова понедельником. Первый день нового века по григорианскому календарю никогда не будет ни воскресеньем, ни пятницей, ни средой.

Рекомендации для жюри

Правильное решение задачи оценивается в **8 баллов**. В случае неправильного решения следующие элементы решения можно оценить таким образом: знание о чередовании високосных лет $1/4$, т. е. использование юлианского календаря вместо григорианского – **2 балла**; знание структуры григорианского календаря – **4 балла**. За вычислительную ошибку снимается **2 балла** за первую и по **1 баллу** за остальные. Идеино верное правильное вычисление без учёта високосных годов вообще – **1 балл**. За ответ без обоснования (правильный или неправильный) выставляется **0 баллов**.

(Н.Е. Шатовская)

Задание 2

Условие

На какой максимальной и на какой минимальной высоте может на земном шаре происходить верхняя кульминация Веги? Склонение Веги $\delta = +38^\circ$. На каких широтах происходят эти кульминации?

Решение

Максимальная высота, на которой может кульминировать Вега, – это 90° , т. е. кульминация в зените. Звезда кульминирует в зените в том случае, если её склонение равно широте места наблюдения. Для Веги эта широта равна $\varphi_{\max} = 38^\circ$ с. ш. Отправившись на север мы будем наблюдать верхнюю кульминацию Веги всё ниже, а нижнюю всё выше. На Северном полюсе они сравниваются: Вега будет всё время двигаться на высоте 38° , и, строго говоря, понятие верхней и нижней кульминации там не определено. Если же мы отправились на юг, то наблюдали бы верхнюю кульминацию Веги к северу от зенита всё ниже, пока на 52° ю. ш. Вега не перестала бы восходить. Но, двигаясь под горизонтом, звезда продолжает кульминировать. На Южном полюсе Вега будет двигаться на одинаковой высоте -38° . Таким образом, самая низкая высота верхней кульминации Веги бесконечно мало отличается от -38° , а происходит это бесконечно близко к широте $\varphi_{\min} = 90^\circ$ ю. ш.

Рекомендации для жюри

В данной задаче требуются две пары ответов: для максимальной и для минимальной верхней кульминации. Решение для максимальной высоты в кульминации достаточно тривиально, и снижать оценку за отсутствие обоснования не следует. Оценка за эту часть задачи – **2 балла: 1 балл** за высоту и **1 балл** за широту.

За правильный и обоснованный (с помощью чертежа и/или словесного описания) ответ на вопрос о минимальной высоте верхней кульминации выставляется **6 баллов: 3 балла** за высоту и **3 балла** за широту. При отсутствии обоснования оценка за эту часть не может составлять более **2 баллов**. Если в ответе нет указания на то, что непосредственно Южный полюс не удовлетворяет условию задачи, оценка уменьшается на **2 балла**. За указание широты как просто «полюс» оценивается в **1 балл** из трёх.

Если участник олимпиады понимает вопрос задачи как минимальная высота, на которой можно увидеть верхнюю кульминацию Веги (0° , 52° ю.ш.), то при наличии обоснования может быть выставлена оценка в **2 балла**.

Если участник олимпиады вместо минимальной высоты верхней кульминации нашёл минимальную высоту нижней кульминации (-90° , 38° ю. ш.) или подобный ответ на в общем-то другую задачу, оценка за эту часть не выставляется.

Максимальная оценка за задачу – **8 баллов**.

(А.М. Татарников)

Задание 3

Условие

Сферическая туманность на месте вспышки сверхновой 1006 года находится на расстоянии 2,2 кпк от Земли и имеет угловой диаметр 30'. Считая, что сверхновая неподвижна относительно наблюдателя, а туманность расширяется с постоянной скоростью, определите её угловой размер для наблюдателя, находящегося в настоящий момент

- а) вдвое ближе к сверхновой;
- б) вдвое дальше от сверхновой.

Решение

Расстояние 2,2 кпк равно 7200 световых лет. Значит свет от сверхновой, а затем и от туманности шёл к нам 7200 лет. Поскольку для нас вспышка сверхновой произошла всего около 1000 лет назад, то наблюдатель, находящийся вдвое дальше нас от сверхновой, узнает о ней через 6200 лет. Значит, наблюдать туманность он не может.

Определим скорость расширения туманности. Линейный радиус туманности равен

$$r = 2200 \operatorname{tg} 15' \approx 2200 \cdot \frac{15}{60 \cdot 57,3} \approx 10 \text{ пк}.$$

На такое расстояние вещество сверхновой разлетелось 1000 лет. Поэтому скорость разлёта равна

$$v = \frac{10 \text{ пк}}{1000 \text{ лет}} = \frac{3,1 \cdot 10^{14} \text{ км}}{3,2 \cdot 10^{10} \text{ с}} \approx 10000 \text{ км/с}.$$

Наблюдатель, находящийся на расстоянии вдвое ближе к остатку сверхновой, видит его таким, каким мы увидим его через 3600 лет. Если считать скорость расширения туманности неизменной, то за следующие 3600 лет радиус оболочки вырастет на 36 пк и станет равен 46 пк. С расстояния 1,1 кпк диаметр туманности будет виден под углом

$$2 \cdot \frac{46 \text{ пк}}{1100 \text{ пк}} \cdot 57,3^\circ / \text{рад} \approx 4,8^\circ \approx 5^\circ.$$

Альтернативный вариант решения второй части. За 3600 лет угловой размер туманности вырастет на $3,6 \cdot 30' = 108'$ и составит $138'$. Находясь вдвое ближе, можно увидеть туманность под вдвое большим углом: $276' = 4,6^\circ \approx 5^\circ$.

Рекомендации для жюри

Для правильного решения задачи участник олимпиады должен понять, что из-за конечности скорости света каждый из наблюдателей будет видеть туманность в разные моменты её «жизни». Ответ, что наблюдатель, находящийся вдвое дальше, не увидит туманность, оценивается в **3 балла**. Правильное определение размеров туманности для наблюдателя вдвое ближе оценивается в **5 баллов**.

Из них **2 балла** выставляется за определение, что наблюдаемая туманность на 3600 лет старше; **2 балла** за вычисление его углового размера, видимого с Земли через 3600 лет, или линейного размера в этот момент; наконец, **1 балл** за вычисление итогового ответа.

Если при решении не учитывается эволюция туманности, то за ответы 15' (для дальнего) и 60' (для ближнего) выставляется по одному баллу.

Максимальная оценка за задачу – **8 баллов**.

(Е.Н. Фадеев)

Задание 4

Условие

Вокруг затменной двойной звезды с орбитальным периодом 2 дня, компоненты которой имеют массы $M_1 = M_2 = 1 M_0$, обращается третья звезда с массой $M_3 = 0,5 M_0$. Орбитальный период обращения третьего компонента относительно центра масс тройной системы составляет 100 дней. Центр масс двойной системы под гравитационным воздействием этого тела смещается в сторону к наблюдателю или от наблюдателя, вызывая вариацию (запаздывание или опережение) моментов наступления затмений относительно средней величины, предсказываемой эфемеридами. Найдите амплитуду этой вариации (т. е. амплитуду так называемого светового уравнения).

Решение

Орбитальный период системы в данной задаче – избыточная информация и может пригодиться только для проверки того факта, что орбита центральной звезды лежит внутри орбиты третьего тела. Большая полуось орбиты третьего тела вокруг центра масс тройной системы может быть найдена по третьему закону Кеплера

$$P_{orb}^2 = \frac{a^3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

здесь $a = a_3 + a_{12}$ – большая полуось системы, a_3 – большая полуось орбиты третьей звезды вокруг центра масс тройной системы, a_{12} – большая полуось орбиты центра масс центральной двойной системы вокруг центра масс тройной системы, $P_{orb} = 100$ дней – период светового уравнения (он же орбитальный период третьего тела). В формуле период выражен в годах, большая полуось – в астрономических единицах, а массы – в массах Солнца. Решая уравнение для периода относительно a , получаем

$$a = \sqrt[3]{P_{orb}^2 (M_1 + M_2 + M_3)} \approx 0.57 \text{ а.е.}$$

Величина a_{12} может быть найдена из соотношения для центра масс центральной двойной и третьего тела

$$a_{12} = a_3 \cdot \frac{M_3}{M_1 + M_2} = (a - a_{12}) \cdot \frac{M_3}{M_1 + M_2}$$

$$a_{12} = a \cdot \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{a}{5} \approx 0,11 \text{ а.е.}$$

При этом a_{12} – это то дополнительное расстояние, которое должен пройти свет от двойной в самой дальней от наблюдателя точке орбиты центральной двойной вокруг центра масс тройной системы (либо расстояние, на которое сокращается путь света к наблюдателю, когда центральная двойная оказывается в ближней точке орбиты по отношению к наблюдателю). То есть $a_{12} = c \times A$, здесь c – скорость света, A – амплитуда светового уравнения (величина, которую требуется найти в задаче):

$$A = \frac{a_{12}}{c} = \frac{1}{c} \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3} \sqrt[3]{P_{orb}^2 (M_1 + M_2 + M_3)}.$$

Подставляя количественные данные в это уравнение, получаем $A = 57$ секунд. Особенно важно в последней операции не запутаться с единицами измерений (см. выше) и правильно разделить на скорость света.

Рекомендации для жюри

Для решения задачи надо понимать, что возникающая вариация моментов наступления затмений происходит из-за движения центра масс двойной вокруг центра масс тройной системы (**2 балла**). Для получения окончательного ответа нужно получить амплитуду этого движения a_{12} (**4 балла**) и разделить её на скорость света (**2 балла**). Само вычисление величины a_{12} происходит в два этапа: сначала с помощью третьего закона Кеплера вычисляется большая полуось орбиты тройной a (**2 балла**), а затем уже из соотношения для центра массы величина a_{12} (вторые **2 балла**).

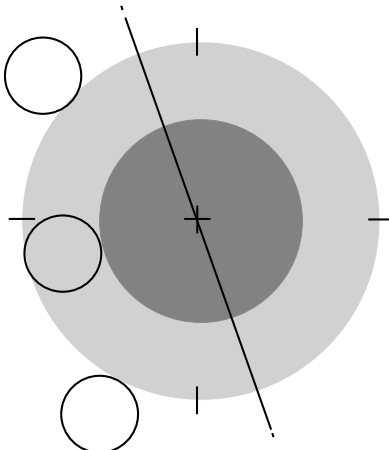
Максимальная оценка за задачу – **8 баллов**.

(А.И. Богомазов)

Задание 5

Условие

11 февраля 2017 года отмечено не только проведением 71-й Московской астрономической олимпиады, но и полутеневым лунным затмением.

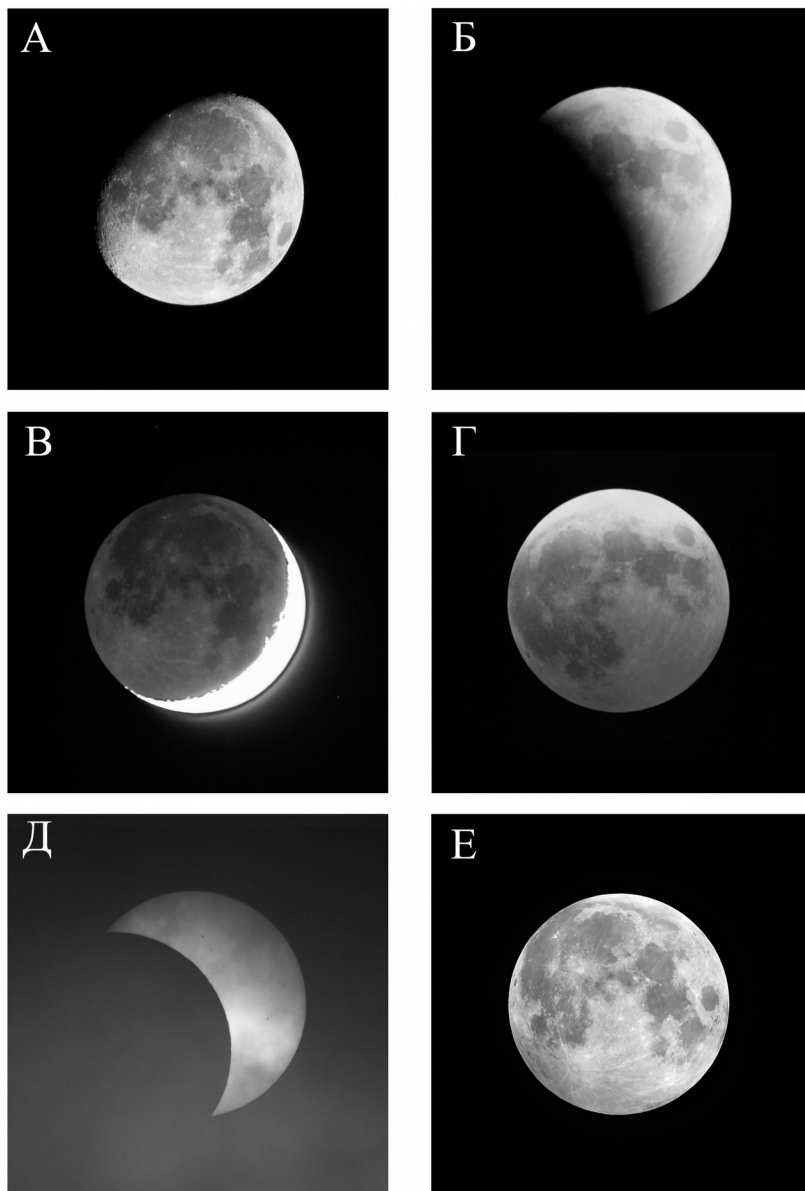
Схема затмения	
	Две тёмные концентрические окружности показывают тень и полутень Земли. Три малые окружности соответствуют положению Луны в начале, середине и конце затмения. Длинной горизонтальной линией обозначена линия эклиптики, стороны света отмечены короткими штрихами на краях полутени.
	Максимальная фаза полутеневого затмения: 0,9884. Максимальная фаза теневого затмения: –0,0354. (Фазой затмения называют долю диаметра Луны, закрытую затмевающим «объектом»: тенью или полутенью.)
Событие	Всемирное время (UTC), часы:минуты (10/11 февраля)
Начало полутеневого затмения	22:34
Максимальное затмение	00:44
Конец полутеневого затмения	02:53

Во время полутеневого затмения Луна не попадает в тень Земли.
 Луна пройдёт восходящий узел орбиты 11 февраля в 19:50 по UTC.

- Вам представлено 6 фотографий, на одной (или нескольких) из которых изображена Луна в фазе полутеневого затмения (конечно, среди них нет фотографии **сегодняшнего** затмения). Укажите эту(и) фотографию(и) и объясните, почему Вы так решили. Также объясните, почему на остальных фотографиях Луна не находится в фазе полутеневого затмения.
- С какой стороны (сверху/снизу/справа/слева) на схеме затмения находится направление на север?
- В каких созвездиях находятся Земля и Солнце для наблюдателя, находящегося вблизи Северного полюса Луны (считайте, что небесные тела находятся выше линии местного лунного горизонта)?
- Пользуясь данными из условия, определите, где на Земле можно было наблюдать данное затмение. Считайте, что метеорологические условия не препятствовали наблюдениям.

- а) Северный полюс (90° с. ш.)
- б) Сан-Томе (0° с. ш., 7° в. д.)
- в) Науру (1° ю. ш., 167° в. д.)
- г) Южный полюс (90° ю. ш.)

5. Определите минимальную высоту спутника на окололунной орбите, который мог бы попасть в зону видимости полного солнечного затмения.



Решение

1. Во время полутеневого затмения Луна оказывается в полутени Земли, но не заходит в саму тень. Полутень – это область пространства, где Земля загораживает часть солнечного излучения. То есть Луна остаётся освещённой Солнцем, просто её блеск становится немного слабее. Причём чем ближе некоторая часть Луны к тени, тем менее она яркая. Значит, подходящей будет та фотография, где изображена обычная полная Луна, т. е. изображение Е. Если

сравнить фотографии Е и А, то можно заметить, что левая нижняя часть Луны на фотографии Е выглядит более тусклой, чем противоположная её сторона.

На А и В показаны два варианта растущей Луны, когда затмения не может быть. На В хорошо заметен пепельный свет. На Б – частная фаза теневого лунного затмения. На Г – теневое лунное затмение, о чём свидетельствует красный цвет Луны (т. е. Луна освещена не прямым солнечным светом, а светом, прошедшим через атмосферу Земли). На Д – частная фаза солнечного затмения, видимого через облака.

2. Орбита Луны имеет небольшой наклон (около 5°) к плоскости земной орбиты, поэтому траектория движения Луны не совпадает с траекторией движения Солнца, т. е. эклипкой. Ось вращения Земли не перпендикулярна плоскости орбиты, поэтому линия эклиптики наклонена к небесному экватору. Угол наклона максимален вблизи точки равноденствия и составляет 23° . На схеме затмения мы видим, что обозначенная пунктиром линия эклиптики наклонена к коротким штрихам, обозначающим стороны света. Угол с экватором не превышает 23° , поэтому направление восток-запад на схеме отложено по вертикали, а север-юг – по горизонтали.

Известно, что Луна (как и Солнце) относительно звёзд всегда движется навстречу суточному движению, то есть с запада на восток. Лунное затмение происходит всегда в полнолуние, когда Луна находится в противоположном от Солнца направлении на небе. В феврале Солнце движется на небесной сфере на север, приближаясь к точке весеннего равноденствия (для нас это проявляется в увеличении продолжительности светлого времени суток). Полная Луна, напротив, движется на юг.

Мы пришли к выводу, что Луна 11 февраля движется в юго-восточном направлении (ближе к направлению на восток). Поскольку Луна во время затмения ещё не прошла восходящий узел орбиты, то на схеме затмения она должна находиться южнее эклиптики. Это означает, что восток на схеме находится сверху, а север справа. Луна движется на схеме затмения снизу вверх.

3. В день олимпиады для наблюдателя на Земле Солнце находится в созвездии Козерога. Для наблюдателя на Луне положение Солнца изменится незначительно. Земля в это время закрывает часть Солнца, т. е. также находится в созвездии Козерога.

4. 11 февраля на Южном полюсе Земли полярный день, Солнце над горизонтом, а полная Луна находится под горизонтом. Затмение наблюдать там нельзя. Напротив, на Северном полюсе, где в это время полярная ночь, Луна будет находиться над горизонтом и затмение будет видно.

Две оставшиеся точки находятся рядом с экватором, в противоположных частях планеты. В таблице указано время затмения, оно происходит в ночь с 10 на 11 февраля по всемирному времени. Всемильное время совпадает с местным на нулевой долготе, для наблюдателя в Сан-Томе затмение будет наблюдаться ночью. В Науру, находящемся в противоположной части планеты, в это время будет день, и Луна во время затмения находится под горизонтом.

5. Максимальная фаза теневого лунного затмения, как указано в условии, составляет – 0,0354. То есть Луну отделяло лишь 3,54 % своего диаметра от попадания в земную тень, в которой можно было бы наблюдать солнечное затмение. Таким образом, минимально возможная высота спутника равна $3474 \times 0,0354 = 123$ км.

Рекомендации для жюри

1. Правильное объяснение каждого изображения оценивается в **1 балл**. Если ответ дан без обоснования, оценка не выставляется.
2. За аргументированное верное указание направления на север ставится **2 балла**. Рассуждение может быть лаконичным, ключевым является указание того, что полная Луна движется на восток (всегда) и на юг (в феврале), а до восходящего узла ещё не дошла. За ответ с неверной или отсутствующей аргументацией ставится **0 баллов**.
3. Указание созвездия, в котором находится Солнце оценивается в **1 балл**. Ещё один балл выставляется за определение того, что Земля находится в том же созвездии. За правильный ответ можно также принять созвездие Водолея (Солнце находится близко к нему и окажется в нём 16 февраля). За ответ с неверной или отсутствующей аргументацией ставится **0 баллов**.
4. За аргументированный верный выбор видимости в каждом из четырёх случаев ставится **1 балл**. За ответ с неверной или отсутствующей аргументацией ставится **0 баллов**.
5. **1 балл** ставится за вывод о том, что для наблюдения полного солнечного затмения необходимо попадание в земную тень, ещё **1 балл** ставится за верный расчёт высоты.

Максимальная оценка за задачу – **16 баллов**.

(Д.А. Чулков)

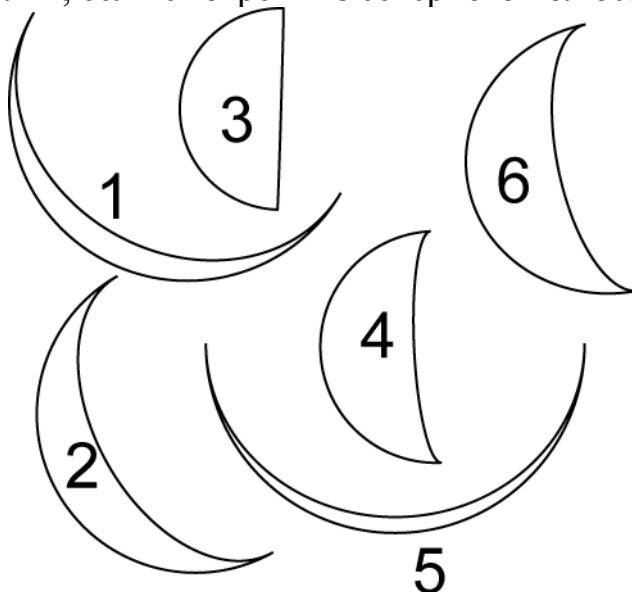
Задание 6

Условие

На одной из планет, вращающихся вокруг далёкой звезды, местный астроном, находящийся в северном полушарии своей планеты, фотографировал одну из соседних планет в течение многих дней через равные промежутки времени. По ошибке все изображения планеты оказались на одном кадре. Исходя из этого изображения:

- а) Определите, внешнюю или внутреннюю планету фотографировал астроном.
- б) Запишите номера снимков в том порядке, в котором они были сделаны.
- в) Определите радиус орбиты планеты в местных астрономических единицах (т. е. в радиусах орбиты планеты наблюдателя).
- г) Определите угловое расстояние между местным солнцем и планетой на первом (хронологически) снимке.

е) Если бы астроном продолжил и дальше фотографировать планету, то он дождался бы её (почти) полной фазы. Какой был бы номер этой фотографии? Орбиты планет круговые. Для всех изображений северный полюс эклиптики находится вверху. Атмосферными эффектами обеих планет пренебречь. Планетная система подобна Солнечной: все планеты движутся в одну сторону, против часовой стрелки, если смотреть из северного полюса эклиптики.

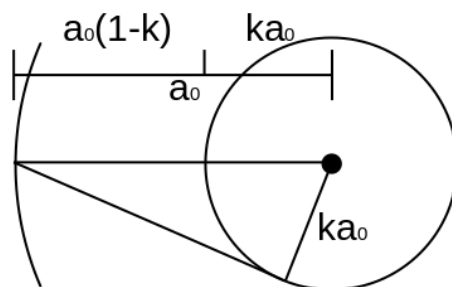


Решение

Мы видим, что минимальная фаза планеты существенно меньше 0,5. Это возможно, когда угол солнце–планета–наблюдатель тупой. Для внешних планет такое невозможно, значит планета внутренняя.

Самый большой размер изображения планеты соответствует и минимальной фазе. Значит планета в это время находилась в нижнем соединении. Поскольку рога планеты направлены вверх, Солнце находилось внизу. После соединения планета начала удаляться от Солнца на небе и удаляться от планеты астронома в пространстве. Её размер постепенно уменьшался, а фаза росла. Поэтому правильная последовательность фотографий: 5, 1, 2, 6, 4, 3.

Пусть a_0 – радиус орбиты планеты астронома, а ka_0 – радиус орбиты внутренней планеты ($k < 1$). Поскольку фаза на изображении 5 невелика, не будет большой ошибкой считать, что расстояние до планеты в этот момент равно $a_0(1 - k)$. На изображении 3 планета находится в элонгации. Поэтому расстояние до неё по теореме Пифагора равно $a_0(1 - k^2)^{0,5}$. Отсюда делаем вывод, что отношение видимых угловых размеров планеты в нижнем соединении и элонгации равно



$$X = \frac{a_0 \sqrt{1 - k^2}}{a_0(1 - k)} = \frac{\sqrt{(1 - k)(1 + k)}}{(1 - k)} = \sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}}.$$

Измерив размеры изображений планет на рисунке линейкой, определяем величину X : $X \approx 1,87$. Отсюда

$$k = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \approx 0,55 \quad .$$

Фаза планеты равна отношению освещённого диаметра планеты к полному. Для изображения 4 она соответствует величине 0,04. Фаза зависит от фазового угла как

$$F = \frac{1 + \cos \varphi}{2} \quad ,$$

откуда

$$\varphi = \arccos(2F - 1) \approx 157^\circ \quad .$$

Отсюда по теореме синусов получаем искомое угловое расстояние

$$\frac{a}{\sin \varphi} = \frac{ka}{\sin \gamma} \quad ,$$

$$\beta = \arcsin(k \sin \varphi) \approx 13^\circ \quad .$$

Ответим на последний вопрос. Для того чтобы попасть в элонгацию, планете пришлось повернуться в системе отсчёта, связанной с Солнцем и наблюдателем, на угол, равный $\arccos k \approx 56^\circ$. Каждый снимок делали через чуть более чем 11° . Значит, «полная» фаза планеты была бы запечатлена на $180/11 \approx 16$ -м снимке.

Рекомендации для жюри

Вывод, что планета внутренняя (пункт а) – **1 балл**. Порядок снимков (пункт б) – **1 балл**. Вычисление радиуса орбиты планеты (пункт с) – **4 балла**. Определение угла между планетой и Солнцем (пункт д) – **4 балла**. Если в пункте б порядок снимков обратный (и только в таком случае), то определение угла для 3-го снимка оценивается из **3 баллов**. Определение номера кадра для полной фазы (пункт е) – **2 балла**.

Максимальная оценка за задачу – **12 баллов**.

(Е.Н. Фадеев)