Тренерский штаб сборной России по астрономии и астрофизике
Летние учебно-тренировочные сборы 2020 года

Квалификационный тест № 3

Условия, решения и схемы оценивания

3.0 Общие принципы оценивания

Схемы оценивания приводятся в удобных для оценщиков единицах.
Схемы оценивания и «таблица штрафов» — это *рекомендации* для оценщиков.
Вклад в результат теста рассчитывается системой тестирования автоматически с учётом веса задачи.
Окончательные решения по оценке принимает Тренерский штаб.

Ситуация	**Результат**
Грубая физическая или астрономическая ошибка	**0**
Вычислительная ошибка:	
не повлекшая существенного изменения ответа	$(50 \div 75)$ %
оказавшая существенное влияние на ответ	$\leqslant 50$ %
Ответ:	
некорректный (по смыслу или размерности)	**0**
с неверными или отсутствующими единицами измерения	$\leqslant 50$ %
с избытком или недостатком значащих цифр	$(50 \div 90)$ %
верный, но без обоснований	$\leqslant 10$ %
Недостатки решения:	
решена задача, отличная от поставленной	**0**
используются неопределённые[1] обозначения	$\leqslant 90$ %
нарушена логическая связность решения	$\leqslant 80$ %
отсутствуют ссылки на используемые законы и соотношения	$(50 \div 75)$ %
допущена небрежность, искажающая восприятие решения	$(50 \div 75)$ %
Пропагация ошибок[2]:	
не повлекших изменения хода решения	$(75 \div 100)$ %
оказавших влияние на ход решения	$(0 \div 50)$ %

Апелляции

Рассматриваются только *обоснованные* апелляции, поданные через соответствующие элементы курса, включающие в себя требование об увеличении оценки за задачу на некоторое количество баллов N.
Если апелляция отклонена, оценка за задачу снижается на 0.2N, *если удовлетворена частично — на 20 % от разности требований и изменения баллов в результате апелляции*[3].

[1] Обозначения могут быть введены в решении, условии задачи или справочных данных.
[2] Пропагация ошибок применяется к следующим частям задачи, связанным с текущей.
[3] Такой штраф призван ограничить возможность злоупотребления правом на подачу апелляций.

3.1 На краю Ойкумены (И. Утешев)

Оцените температуру маленькой абсолютно серой пылинки с альбедо $\alpha = 0.1946$, находящейся в точке L_2 системы Солнце–Земля. Орбиту Земли считайте круговой.

Решение. Как известно, точка L_2 находится на геоцентрическом расстоянии

$$r \simeq \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_\oplus}{3\mathfrak{M}_\odot}}\, a_\oplus = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \times \frac{5.974 \cdot 10^{24}\ \text{кг}}{1.989 \cdot 10^{30}\ \text{кг}}} \times 1\ \text{а. е.} = 0.01000\ \text{а. е.}$$

на луче Солнце–Земля за Землёй, в области земной полутени.

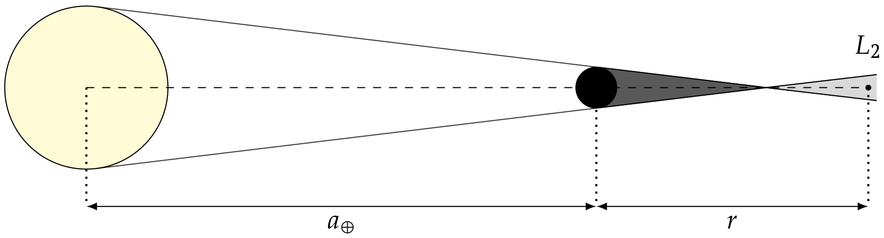


Рис. 1: Относительное расположение объектов и земная тень (полутень)

Будем считать, что создаваемая Солнцем освещённость пропорциональна видимой площади его диска, пренебрегая потемнением диска к краю. Освещённостью, создаваемой другими телами, пренебрежём. Видимые из точки L_2 [средние] угловые радиусы Солнца и Земли

$$\rho_\odot = \arcsin \frac{R_\odot}{a_\oplus + r} = 15.86',$$

$$\rho_\oplus = \arcsin \frac{R_\oplus}{r} = 14.64'.$$

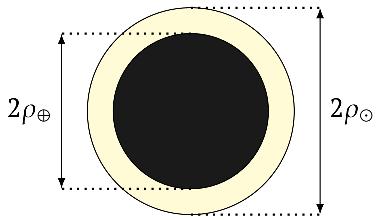


Рис. 2: Вид из точки L_2

поэтому освещённость в точке L_2 с учётом закона обратных квадратов и используемого предположения

$$E = E_\odot \cdot \left(\frac{a_\oplus}{a_\oplus + r}\right)^2 \cdot \frac{\pi\rho_\odot^2 - \pi\rho_\oplus^2}{\pi\rho_\odot^2} = \frac{1360\ \text{Вт/м}^2}{1.01^2} \times \frac{15.86^2 - 14.64^2}{15.86^2} \simeq 197\ \text{Вт/м}^2.$$

Для шаровой пылинки с площадью поперечного сечения C (следовательно, с площадью поверхности $4C$) уравнение баланса энергии с учётом закона Кирхгофа (о связи излучательной и поглощательной способностей) имеет вид

$$C \cdot E \cdot (1 - \alpha) = 4C \cdot \sigma T^4 \cdot (1 - \alpha),$$

откуда искомая температура пылинки

$$T = \sqrt[4]{\frac{E}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{197\ \text{Вт/м}^2}{5.67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)}} \approx \boxed{170\ \text{К.}}$$

Схема оценивания	**10**
Уравнение энергетического баланса:	
для абсолютно серого тела	3
для абсолютно чёрного тела или с учётом альбедо только при отражении	*1*
Положение точки L_2	1
Освещённость в точке L_2:	
учёт затенённости	3
закон обратных квадратов	1
Ответ	2

3.2 Скажи им, что Север помнит (А. Веселова)

Околоземный спутник движется по эллиптической орбите, аргумент перицентра которой равен 270°. Известно, что высота спутника над поверхностью Земли меняется от $23.6 \cdot 10^3$ км до $47.6 \cdot 10^3$ км, наклонение орбиты равно 30° относительно экватора. В течение какого времени спутник способен непрерывно находиться над точками Северного полушария Земли?

Решение. Аргумент перицентра отсчитывается по направлению движения обращающегося тела в плоскости орбиты от направления на восходящий узел до направления на перицентр орбиты.

Таким образом, нас интересует интервал времени, в течение которого истинная аномалия спутника находится в интервале $90° < \nu < 270°$. В соответствии со II законом Кеплера промежуток времени пропорционален заметаемой площади, поэтому оценим долю от полной площади, занимаемой сектором с указанным интервалом истинной аномалии.

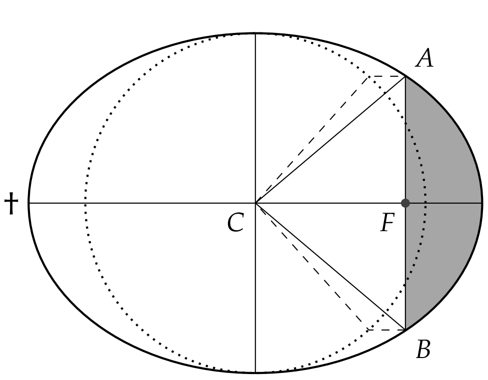


Рис. 3: Геометрия орбиты спутника (тёмно-серый — часть эллипса орбиты ***под*** плоскостью экватора)

Выведем формулу для площади эллиптического сектора $A \dagger B$ с центром в F, состоящего из треугольника ACB и сектора $A \dagger B$ с центром в C. Определим сначала площадь $\triangle ACB$:

$$S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AB = CF \cdot AF = ae \cdot a(1 - e^2) = a^2 e(1 - e^2).$$

Площадь сектора $A \dagger B$ с центром в C вычислим, представив, что соответствующий сектор круга (с радиусом, равным малой полуоси) растянули вдоль большой оси в количество раз, равное отношению большой и малой осей эллипса, то есть в $1 \big/ \sqrt{1 - e^2}$ раз. В таком круге центральный угол сектора равен

$$\gamma = 360° - 2 \operatorname{arctg} \frac{AF}{CF \cdot \sqrt{1 - e^2}} = 360° - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} = 360° - 2 \arccos e.$$

Тогда площадь сектора $A \dagger B$ с центром в C

$$S_{A\dagger B:C} = \left[a\sqrt{1 - e^2}\right]^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot (\pi - \arccos e).$$

Площадь сектора $A \dagger B$ с центром в F есть сумма ранее найденных площадей:

$$S = S_{A\dagger B:C} + S_{ACB} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot (\pi - \arccos e) + a^2 e(1 - e^2) = a^2 \sqrt{1 - e^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin e + e\sqrt{1 - e^2}\right).$$

Перейдем к расчётам. Определим величину большой полуоси орбиты:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{h_p + h_a + 2R_\oplus}{2} = 4.2 \cdot 10^4 \text{ км}.$$

Вычислим период обращения из III закона Кеплера:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_\oplus}} = 23.8^{\text{h}}.$$

Действительно, большая полуось практически совпадает с радиусом орбиты геостационарного спутника, поэтому период обращения равен примерно 24^{h}.

Эксцентриситет орбиты спутника

$$e = \frac{r_a}{a} - 1 = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{(h_a + R_\oplus) - (h_p + R_\oplus)}{(h_a + R_\oplus) + (h_p + R_\oplus)} = \frac{h_a - h_p}{h_a + h_p + 2R_\oplus} \simeq 0.286.$$

В соответствии со II законом Кеплера имеем

$$\Delta T = T \cdot \frac{S}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} = T \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\arcsin e + e\sqrt{1 - e^2}}{\pi} \right) \simeq 0.68T \simeq \boxed{16.2^{\text{h}}.}$$

Альтернативный способ. Можно решить задачу иначе, пользуясь понятиями аномалий. Истинная аномалия связана с эксцентрической соотношением

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\nu}{2} \quad \Longrightarrow \quad E = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\nu}{2} \right).$$

При $|\nu| = 90^\circ$ получаем $|E| = 73^\circ$. Затем из уравнения Кеплера определим среднюю аномалию:

$$M = E - e \cdot \sin E.$$

Модуль средней аномалии равен $|M| = 58^\circ$. Средняя аномалия равномерно меняется со временем, поэтому уже нетрудно найти

$$\Delta T = T \cdot \frac{360^\circ - 2|M|}{360^\circ} \simeq 16.2^{\text{h}}.$$

Схема оценивания	**15**
Период T обращения спутника	1
Эксцентриситет e орбиты спутника	1
Верное направление отсчёта аргумента перицентра	2
Вычисление площади S:	
площадь сектора	6
площадь треугольника	4
ИЛИ работа с аномалиями:	
связь истинной и эксцентрической аномалии	′3
расчёт эксцентрической аномалии	′2
уравнение Кеплера: запись и вычисление	′3+2
Промежуток времени ΔT	1

3.3 У самураев нет цели (А. Веселова)

Два самолёта после одновременного старта летят вдоль меридианов к Северному полюсу. Первый самолёт стартовал из точки 10° с. ш., 0° д., второй — из точки 30° ю. ш., 30° в. д. Скорости самолётов постоянные и одинаковые. Каковы расстояния между самолётами в моменты их максимального сближения и удаления в течение всего полёта первого самолёта?

Решение. Широта первого самолёта [выраженная в радианах] меняется по закону $\varphi_1(t) = \varphi_{10} + vt/R_\oplus$, широта второго — $\varphi_2(t) = \varphi_{20} + vt/R_\oplus$. Угловое расстояние между самолётами найдём по сферической теореме косинусов для треугольника Северный полюс – самолёт 1 – самолёт 2, обозначив для краткости $x \equiv vt/R_\oplus$:

$$\cos l = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Longrightarrow \quad \cos l = \sin(\varphi_{10} + x)\sin(\varphi_{20} + x) + \cos(\varphi_{10} + x)\cos(\varphi_{20} + x)\cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Для определения минимального и максимального расстояния найдём нули производной функции $\cos l$ и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned}(\cos l)' = \cos(\varphi_{10} + x)\sin(\varphi_{20} + x) + \sin(\varphi_{10} + x)\cos(\varphi_{20} + x) - \\ - \cos(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\sin(\varphi_{10} + x)\cos(\varphi_{20} + x) + \cos(\varphi_{10} + x)\sin(\varphi_{20} + x)\right) = \\ = \sin(\varphi_{10} + \varphi_{20} + 2x)\,(1 - \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) = 0.\end{aligned}$$

Выражение $(1 - \cos(\lambda_1 - \lambda_2))$ при заданных долготах ненулевое, поэтому потребуем, чтобы

$$\sin(\varphi_{10} + \varphi_{20} + 2x) = 0.$$

Поскольку $0 < x < \frac{\pi}{2} - \varphi_{10}$, то $\varphi_{10} + \varphi_{20} + 2x = 0$, отсюда $x = 10°$. Заметим, что при большем x знак производной положительный, при меньшем — отрицательный, поэтому в точке $x = 10°$ косинус имеет наименьшее значение, значит, угол l при этом наибольший. Определим величину l:

$$\cos l\Big|_{x=10°} = \sin(10° + 10°)\sin(-30° + 10°) + \cos(10° + 10°)\cos(-30° + 10°)\cos 30°;$$

$$l_{\max} = 49.6°, \qquad d_{\max} = \frac{49.6°\pi R_\oplus}{180°} \simeq \boxed{5.52 \cdot 10^3 \text{ км.}}$$

Минимальное значение расстояния, то есть максимальное значение $\cos l$, должно достигаться на одной из границ интервала [0; 80°]:

$$\cos l\Big|_{x=0°} = \sin 10° \sin(-30°) + \cos 10° \cos(-30°)\cos 30°, \qquad l = 49.3°,$$
$$\cos l\Big|_{x=80°} = \sin 90° \sin 50° + \cos 90° \cos 50° \cos 30°, \qquad l_{\min} = 40.0°.$$

Отсюда видно, что минимальное расстояние достигается в момент финиша первого самолёта и равно

$$d_{\min} = \frac{40.0°\pi R_\oplus}{180°} \simeq \boxed{4.45 \cdot 10^3 \text{ км.}}$$

Схема оценивания	**10**
Зависимость координат от времени	1
Расстояние между самолётами (в общем виде)	2
Определение экстремума функции (любым *обоснованным* способом)	4
Оценка минимума	2
Вычисление линейных расстояний	1

3.4 Заряжены на победу (Р. Сапаев)

1. Оцените величину электрического заряда спокойной звезды массы $\mathfrak{M}$ с медленным вращением.
2. Вычислите электрический заряд Солнца в кулонах и удельный заряд в $e/$кг.
3. Найдите отношение сил гравитационного и электростатического взаимодействия для двух протонов и для двух звёзд (при условии справедливости оценки, полученной в первом пункте задачи).

Решение. Будем считать, что звезда полностью состоит из протон-электронной плазмы. Потенциальная энергия протона на поверхности звезды и вблизи неё складывается из гравитационной и электростатической компонент с потенциалами φ_G и φ_E соответственно:

$$U_p = m_p\varphi_G + e\varphi_E.$$

Выражение для потенциальной энергии электрона имеет аналогичный вид:

$$U_e = m_e\varphi_G - e\varphi_E.$$

В равновесии $U_p = U_e$, поскольку локальные (больцмановские) распределения протонов и электронов совпадают. В таком случае

$$\varphi_E = -\frac{m_p - m_e}{2e}\varphi_G = \frac{m_p - m_e}{2e} \cdot \frac{G\mathfrak{M}}{R},$$

где R — радиус звезды. С другой стороны, при электрическом заряде звезды Q

$$\varphi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R},$$

откуда

$$Q = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 G(m_p - m_e)}{e}\mathfrak{M}} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 G m_p}{e}\mathfrak{M}.$$

При $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\odot$

$$Q_\odot \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0 G m_p}{e}\mathfrak{M} = \frac{2 \times 3.1416 \times 8.854 \cdot 10^{-12} \times 6.674 \cdot 10^{-11} \times 1.66 \cdot 10^{-27} \times 1.989 \cdot 10^{30}}{1.602 \cdot 10^{-19}}\ [\text{Кл}] \approx \boxed{77\ \text{Кл.}}$$

Полученное значение соответствует величине удельного заряда

$$\frac{Q_\odot}{\mathfrak{M}_\odot} \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0 G m_p}{e} = \frac{2 \times 3.1416 \times 8.854 \cdot 10^{-12} \times 6.674 \cdot 10^{-11} \times 1.66 \cdot 10^{-27}}{(1.602 \cdot 10^{-19})^2}\ [e/\text{кг}] \simeq \boxed{2.4 \cdot 10^{-10}\ e/\text{кг.}}$$

Отношение величин гравитационной и кулоновской сил для двух протонов

$$\left.\frac{F_G}{F_E}\right|_p = \frac{G m_p^2}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}e^2} = 4\pi\varepsilon_0 G \cdot \frac{m_p^2}{e^2} \simeq \boxed{8 \cdot 10^{-37};}$$

для двух звёзд

$$\left.\frac{F_G}{F_E}\right|_{\text{зв.}} = \frac{G\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_1Q_2} = 4\pi\varepsilon_0 G\left(\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 G(m_p - m_e)}\right)^2 \simeq \frac{1}{\pi\varepsilon_0 G}\frac{e^2}{m_p^2} = 4 \times \left(\left.\frac{F_G}{F_E}\right|_p\right)^{-1} \simeq \boxed{5 \cdot 10^{36}.}$$

Схема оценивания	**10**
Идея расчёта заряда $Q(\mathfrak{M})$ и ответ	3+1
Заряд и удельный заряд Солнца (в необходимых единицах)	2+1
Отношение сил для протонов и для звёзд	1.5+1.5

3.5 Black Emits Better (И. Утешев)

Естественное радиоизлучение планет было впервые обнаружено Бёрком и Франклином в 1955 году. В последующие годы были исследованы спектры Венеры, Марса и Юпитера в микроволновом диапазоне. Яркостные температуры Марса и Венеры на $\lambda = 3$ см составили соответственно $T_M = 210$ К и $T_V = 600$ К. Излучение Юпитера оказалось многокомпонентным и включает в себя тепловую компоненту с эффективной температурой $T_J = 145$ К.

1. Вычислите спектральные плотности потоков теплового радиоизлучения Меркурия, Венеры и Юпитера B_M, B_V, B_J (в янских) для земного наблюдателя на длине волны $\lambda = 3$ см.

2. Сравните приведённые в условии яркостные температуры Марса и Венеры с оценками их эффективных (чернотельных) температур. Объясните полученные результаты.

Решение. Спектральная плотность потока излучения связана с яркостью источника I_ν и телесным углом Ω, под которым виден этот источник, соотношением

$$B_\nu = I_\nu \Omega = I_\nu \frac{\pi R^2}{d^2},$$

где R — радиус источника, d — расстояние до него. Яркость I_ν найдём по формуле Рэлея–Джинса (T — яркостная температура источника):

$$I_\nu = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} = \frac{2k_B T}{\lambda^2}.$$

Это допустимо, ведь даже для Юпитера, самого холодного из упомянутых в задаче тел, максимум излучения приходится на

$$\lambda_{\max, J} = \frac{b}{T_J} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}}{145\ \text{К}} \ll 1\ \text{мм} \ll \lambda.$$

Для Меркурия яркостная температура в условии не задана. Будем в рамках оценки считать Меркурий абсолютно чёрным телом. Проблему будет вызывать достаточно медленное вращение Меркурия вокруг своей оси и сопутствующее этому сильное остывание его поверхности на ночной стороне. Поэтому сможем оценить лишь температуру дневной поверхности Меркурия и соответствующую плотность потока излучения Меркурия в фазе, близкой к полной (никак не вблизи нижнего соединения!), исходя из условия теплового равновесия с солнечным излучением (полагаем, что излучает в основном обращённая к Солнцу половина планеты):

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 = 2\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{8\pi r^2 \sigma}},$$

где r — гелиоцентрическое расстояние Меркурия. Для Венеры и Марса с её плотной атмосферой ожидаем более изотропного излучения (в силу наличия у Венеры плотной атмосферы, довольно быстрого осевого вращения Марса):

$$\frac{L_\odot}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{16\pi r^2 \sigma}}.$$

Планета	r, а. е.	T, К
Меркурий	$0.31 \div 0.47$	$596 \div 484$
Венера	0.72	330
Марс	$1.38 \div 1.67$	$237 \div 216$

Для Меркурия и Марса придётся учесть заметную эксцентричность орбит: $r_{\min} = a(1-e)$, $r_{\max} = a(1+e)$, где a и e — соответствующие большая полуось и эксцентриситет орбиты планеты. Результаты вычислений сведены в таблицу. Нетрудно видеть, что оценка эффективной температуры Марса неплохо согласуется с приведённой в условии яркостной температурой, в то время как яркостная температура Венеры в миллиметровом диапазоне существенно выше её эффективной температуры.

Причина этого явления хорошо известна: парниковый эффект. Атмосфера Марса разрежена настолько, чтобы незначительное отличие между эффективной и яркостной температурами можно было объяснить недостаточной детализацией используемой модели, экспериментальными погрешностями. Атмосфера Венеры, напротив, обладает двумя важными в контексте настоящей задачи свойствами:

i. достаточно непрозрачная в диапазоне равновесного теплового излучения Венеры (чтобы вызывать парниковый эффект);

ii. достаточно прозрачная в миллиметровом диапазоне, чтобы возможно было наблюдать тепловое излучение самой поверхности Венеры или горячих приповерхностных слоёв атмосферы.

Осталось вычислить спектральные плотности потоков теплового радиоизлучения Меркурия, Венеры и Юпитера, точнее, оценить диапазоны этих величин (поскольку расстояния до планет не заданы). Для Меркурия будем в связи с ранее изложенным полагать его находящимся вблизи верхнего соединении (в перигелии либо афелии), $d_M \simeq r_M + a_\oplus$. Для Венеры соответствующие экстремальные расстояния определяются по формулам $d_V = a_\oplus \pm a_V$ (верхнее и нижнее соединение), для Юпитера $d_J = a_J(1 \pm e_J) \pm a_\oplus$ (соединение и противостояние). Результаты вычислений по формуле

$$B_\nu = \frac{2k_BT}{\lambda^2}\frac{\pi R^2}{d^2} = \frac{2\times 1.381\cdot 10^{-23}\times\pi\times\left(10^6\right)^2}{0.03^2\times\left(1.496\cdot 10^{11}\right)^2}\times\left(\frac{R\ [\text{тыс. км}]}{d\ [\text{а. е.}]}\right)^2\times T\ [\text{К}]\times 10^{26}\ \text{Ян} =$$

$$= \left(\frac{R\ [\text{тыс. км}]}{d\ [\text{а. е.}]}\right)^2\times T\ [\text{К}]\times 4.308\cdot 10^{-4}\ \text{Ян}$$

сведены в таблицу:

Планета	R, тыс. км	d, а. е.	T, К	B, Ян
Меркурий	2.44	$1.31 \div 1.47$	$596 \div 484$	$0.6 \div 0.9$
Венера	6.05	$0.28 \div 1.72$	600	$3.2 \div 120$
Марс[4]	3.40	$0.38 \div 2.67$	210	$0.15 \div 7.2$
Юпитер	71.5	$3.95 \div 6.45$	145	$7.7 \div 20$

Схема оценивания **20**

Формулы:
- спектральная плотность потока через яркость . . . 2
- формула Планка или (с обоснованием применимости) Рэлея–Джинса . . . 2
- эффективная температура планеты . . . 1

Оценка эффективных температур:
- Меркурий . . . 3
- Венера, Марс . . . 1+1

Сравнение температур и комментарий:
- вывод (Марс $\approx$, Венера $\uparrow$) . . . 1
- комментарий (Марс — 1 аргумент, Венера — 2 аргумента) . . . 1+2

Оценка B для Меркурия:
- диапазон значений *(не нижнее соединение!)* . . . 3
- одна точка *1*

Вычисление B для Венеры и Юпитера:
- диапазон значений . . . 1.5+1.5
- одна точка *0.5+0.5*

[4] Марс приведён в таблице для сравнения, проводить такое вычисление для Марса в решении не требовалось.

3.6 **Чистая прибыль** (И. Утешев)

Как-то раз визионер Мелон Хаск решил отправить электрокар куда-нибудь подальше и запустил космический аппарат с ним на околосолнечную орбиту с перигелием на 1.00 а. е. Но в бухгалтерии что-то перепутали, и аппарат испытал близкое сближение с Юпитером вблизи первого прохождения афелия, в результате чего его скорость уменьшилась вдвое.

1. Опишите условия видимости Юпитера в центральной полосе России на дату запуска электрокара.
2. Найдите продолжительность движения по описанному маршруту до ближайшего перигелия.
3. Сколько электроэнергии выработали установленные на аппарате солнечные батареи за найденное время движения при площади батарей 10 м^2 и эффективности 8 %? Выразите ответ в Вт · ч.

Решение. Из условия ясно, что космический аппарат был выведен на эллиптическую гомановскую орбиту с перигелием на орбите Земли и афелием вблизи орбиты Юпитера. Большая полуось такой орбиты (здесь и далее ничего не остаётся, кроме как считать орбиты планет круговыми)

$$a \simeq \frac{a_\oplus + a_J}{2} = \frac{1.00 + 5.20}{2}\,[\text{а. е.}] = 3.10\ \text{а. е.},$$

продолжительность движения по *полу*эллипсу согласно III закону Кеплера (в сравнении с орбитальным движением Земли)

$$\tau = \frac{1}{2}\cdot\left(a\,[\text{а. е.}]\right)^{\frac{3}{2}}\,[\text{лет}] \simeq 2.73\ \text{года}.$$

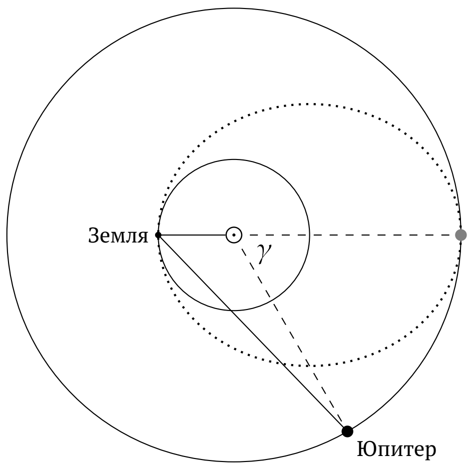


Рис. 4: Земля, Юпитер и исходная орбита аппарата. Вид с Северного полюса эклиптики

В момент достижения аппаратом афелия орбиты Юпитера тот, очевидно, находился напротив точки перигелия орбиты аппарата — точки, в которой во время запуска аппарата находилась Земля. За время полёта аппарата Юпитер прошёл гелиоцентрический угол

$$\gamma = 360^\circ \times \frac{\tau}{T_J} = 360^\circ \times \frac{2.73}{11.86} \simeq 83^\circ.$$

При наблюдении с Земли Юпитер находился западнее Солнца, его элонгация была немного меньше угла γ (поскольку можно считать, что $a_J \gg a_\oplus$). Соответственно, Юпитер имел *утреннюю* видимость, опережая Солнце примерно на 4–5 часов[5].

После орбитального манёвра скорость уменьшилась вдвое. Для расчётов воспользуемся связью между орбитальной скоростью тела, его текущим расстоянием до гравитирующего тела и большой полуосью орбиты. На орбите Юпитера до и после взаимодействия афелийные скорости аппарата $v_a \rightarrow v'_a$ соответствуют изменившейся величине большой полуоси орбиты $a \rightarrow a'$:

$$v_a^2 = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a}\right), \qquad {v'_a}^2 = G\mathfrak{M}_\odot\left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a'}\right).$$

По условию $v'_a = v_a/2$, откуда

$$\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a}\right) \quad\Longrightarrow\quad a' = \frac{1}{\frac{3}{2a_J} + \frac{1}{4a}} = \frac{1\ \text{а. е.}}{\frac{3}{2\times 5.20} + \frac{1}{4\times 3.10}} \simeq 2.71\ \text{а. е.}$$

[5] Если быть точными, на $73^\circ \simeq 4.9^\text{h}$. Ради разницы менее чем в час, которая, очевидно, не влияет на описание условий видимости Юпитера, решать треугольник, пожалуй, бессмысленно.

Продолжительность движения по половине нового эллипса орбиты

$$\tau' = \frac{1}{2} \cdot \left(a' \, [\text{а. е.}]\right)^{\frac{3}{2}} \, [\text{лет}] \simeq 2.23 \text{ года.}$$

Общая продолжительность движения от перигелия до перигелия составила $T = \tau + \tau' \simeq \boxed{5.0 \text{ лет.}}$

Пусть в некоторый момент времени аппарат находится на расстоянии r от Солнца, так что за небольшой промежуток времени δt солнечные батареи площадью A и эффективностью η вырабатывают электроэнергию в количестве

$$\delta q = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \cdot A\eta \cdot \delta t.$$

Заметим, что $\delta t = \delta\varphi/\omega$, где $\delta\varphi$ — малый угол поворота радиус-вектора за время δt, ω — угловая скорость аппарата, поэтому

$$\delta q = \frac{L_\odot A\eta}{4\pi\omega r^2} \cdot \delta\varphi.$$

Комбинация ωr^2 есть удельный момент импульса космического аппарата, который сохраняется в процессе его орбитального движения (в отсутствие взаимодействий с третьими телами). Поскольку в афелии радиальная скорость аппарата равна нулю, удобно вычислить эту величину (до и после сближения с Юпитером) именно для этой точки:

$$l = v_a a_J = \sqrt{G\mathfrak{M}_\odot \left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a}\right)} \cdot a_J = \sqrt{G\mathfrak{M}_\odot a_J \left(2 - \frac{a_J}{a}\right)};$$

$$l' = v'_a a_J = \frac{1}{2} l.$$

Перейдя от малых к конечным приращениям (это нетрудно сделать для линейной связи $\delta q \propto \delta\varphi$) и с учётом $\Delta\varphi = \Delta\varphi' = \pi$ (половина эллипса — поворот на 180°), придём к результату, что на первом участке траектории (до сближения) выработано энергии

$$q = \frac{\pi L_\odot A\eta}{4\pi l} = \frac{L_\odot A\eta}{4} \frac{1}{\sqrt{G\mathfrak{M}_\odot a_J \left(2 - a_J/a\right)}}.$$

На втором участке выработано

$$q' = \frac{L_\odot A\eta}{4l'} = \frac{L_\odot A\eta}{4l} \cdot \frac{l}{l'} = 2q.$$

Итого выработано электроэнергии

$$Q = q + q' = \frac{3}{4} \frac{L_\odot A\eta}{\sqrt{G\mathfrak{M}_\odot a_J \left(2 - a_J/a\right)}} =$$

$$= 0.75 \times \frac{3.88 \cdot 10^{26} \times 10 \times 0.08}{\sqrt{6.674 \cdot 10^{-11} \times 1.989 \cdot 10^{30} \times 5.20 \times 1.496 \cdot 10^{11} \times (2 - 5.20/3.10)}} \, [\text{Дж}] \simeq$$

$$\simeq 40.3 \cdot 10^9 \text{ Дж} = \boxed{11.2 \text{ МВт} \cdot \text{ч.}}$$

Схема оценивания	**15**
Часть I	
Движение по гомановскому полуэллипсу: a, τ	1+1
Положение Юпитера в день старта и описание условий видимости	1+2
Часть II	
Большая полуось a' орбиты после сближения с Юпитером	3
Продолжительность движения по второй половине τ' и общая T	1+1
Часть III	
Связь выработанной энергии, l и $\Delta\varphi$	3
Выработанная электроэнергия Q	2

3.7 Задача от спонсора (И. Утешев)

Оцените, сколько звёзд можно увидеть в тёмную безоблачную ночь вблизи зенита в оптический прицел марки [ДАННЫЕ УДАЛЕНЫ], параметры которого приведены в таблице:

Увеличение, крат	4
Световой диаметр объектива, мм	32
Диаметр выходного зрачка, мм	7.6
Защита от [redacted]	[ДАННЫЕ УДАЛЕНЫ]
Поле зрения, °	6

Результаты сообщите агенту [redacted].

Решение. Определим проницающую способность при наблюдении с таким прицелом по сравнению с наблюдением невооружённым глазом. Световой диаметр D объектива больше диаметра d_e зрачка глаза человека и потому объектив собирает больше света (пропорционально площади $\sim$ квадрату диаметра). Однако диаметр d выходного зрачка прицела также больше диаметра зрачка глаза — не весь собираемый прицелом свет попадает в зрачок. Необходимо учесть оба эффекта, чтобы вычислить, во сколько раз более тусклые звёзды видно через прицел:

$$\xi = \frac{D^2}{d_e^2} \cdot \frac{d_e^2}{d^2} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Для оценки будем считать, что звёзды распределены в пространстве равномерно. Тогда при увеличении чувствительности в ξ раз в соответствии с законом обратных квадратов эффективная дальность видимости звёзд возрастает в $\sqrt{\xi}$ раз, а объём обозреваемой области и количество видимых звёзд — в $\xi^{1.5}$ раз.

Таким образом, если невооружённым глазом на всей небесной сфере можно наблюдать около 6 тыс. звёзд, то с прицелом это количество увеличится до

$$N = 6 \cdot 10^3 \times \left(\frac{D}{d}\right)^3 = 6 \cdot 10^3 \times \left(\frac{32}{7.6}\right)^3 \approx 450 \cdot 10^3.$$

В прицел видна область диаметром $\beta = 6^\circ$. Определим соответствующую долю небесной сферы с учётом того, что длина большого круга небесной сферы составляет 360°:

$$\eta = \frac{\frac{\pi}{4}\beta^2}{4\pi \cdot \left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\left(\frac{360^\circ}{\pi}\right)^2} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\beta}{360^\circ}\right)^2 = 6.85 \cdot 10^{-4}.$$

Искомое число звёзд

$$N\eta \approx \boxed{300.}$$

Схема оценивания	**10**
Проницающая способность прицела:	
учёт отношения площадей	2
учёт светопотерь из-за сверхувеличения	2
Оценка Зелигера (зависимость количества видимых звёзд от проницания)	3
Доля площади небесной сферы	2
Ответ	1

3.8 Никто никогда не вернётся в 2018 год (И. Утешев)

В некоторой точке Земли верхняя кульминация Веги наблюдалась на юге на высоте $+55°$ ровно на 2 часа раньше верхней кульминации Альтаира. …а что Антарес? Найдите время его восхода в день весеннего равноденствия.

Экваториальные координаты (J2000)

	Склонение	Прямое восх.
Вега	$+38°\,47'\,01''$	$18^{\mathrm{h}}\,36^{\mathrm{m}}\,56^{\mathrm{s}}$
Альтаир	$+08°\,52'\,06''$	$19^{\mathrm{h}}\,50^{\mathrm{m}}\,47^{\mathrm{s}}$
Антарес	$-26°\,19'\,22''$	$16^{\mathrm{h}}\,29^{\mathrm{m}}\,24^{\mathrm{s}}$

Очевидное неправильное решение. Можем вычислить широту φ места наблюдения по известным склонению δ_L и высоте $h_{u,L}$ верхней кульминации Веги:

$$h_{u,L} = 90° - \varphi + \delta_L \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 90° - h_{u,L} + \delta_L \simeq +73.8°.$$

На этой широте верхняя кульминация Антареса (склонение δ_S) происходит на высоте

$$h_{u,S} = 90° - \varphi + \delta_S = h_{u,L} - \delta_L + \delta_S = -10.1° < 0.$$

Антарес не восходит, дело раскрыто. Или нет?

Решение. Заметим, что разница прямых восхождений Альтаира (буква A) и Веги (буква L)

$$\alpha_A - \alpha_L = 1^{\mathrm{h}}\,13^{\mathrm{m}}\,51^{\mathrm{s}}$$

не соответствует разности времён их верхних кульминаций (нескольким более 2^{h} звёздного времени). Значит, наблюдения проводятся в эпоху, отличную от J2000.

Прецессия сохраняет эклиптические широты светил, изменяя равномерно их эклиптические долготы. В случае с экваториальными координатами всё сложно: согласованно изменяются обе. Собственным движением звёзд, конечно, будем пренебрегать (его учесть в рамках задачи без дополнительных сведений невозможно).

⋄ Выведем формулы преобразования экваториальных координат в эклиптические и обратно. Введём прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$: начало отсчёта O — центр небесной сферы, ось Ox направлена к точке весны, ось Oy — к точке $(6^{\mathrm{h}}; 0°)$, ось Oz — к Северному полюсу мира, так что точке с прямым восхождением α и склонением δ соответствует вектор

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Для перехода к эклиптическим координатам (широта β, долгота λ) необходимо повернуть систему координат на ε вокруг оси Ox, так что ось Oy' оказывается направлена в точку $(6^{\mathrm{h}}, \varepsilon)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\beta \\ \sin\lambda\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ -\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Обратный переход выполняется обратным поворотом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\beta \\ \sin\lambda\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\lambda\sin\varepsilon \\ \sin\lambda\cos\beta\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon \end{pmatrix}.$$ ⋄

Пусть **N** — вектор, направленный к [текущему] Северному полюсу мира. В эклиптической системе координат эпохи J2000 Северный полюс мира новой эпохи имеет широту и долготу

$$\beta_N(t) = \beta_0 = 90^\circ - \varepsilon,$$
$$\lambda_N(t) = \lambda_0 - \omega t = 90^\circ - \psi,$$

где ψ — прецессионный сдвиг (360° за период прецессии), поэтому в осях $Ox'y'z'$ вектор **N** имеет координаты

$$\begin{pmatrix} x'_N \\ y'_N \\ z'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - \psi)\cos(90^\circ - \varepsilon) \\ \sin(90^\circ - \psi)\cos(90^\circ - \varepsilon) \\ \sin(90^\circ - \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\varepsilon \\ \cos\psi \sin\varepsilon \\ \cos\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Заметим, что расстояние между Вегой и Альтаиром выражается через их экваториальные координаты (на любую эпоху!) как

$$\cos\rho = \cos p_L \cos p_A + \sin p_L \sin p_A \cos\Delta\alpha,$$

где p_L и p_A — полярные расстояния Веги и Альтаира. Если поставить в соответствие положениям этих светил векторы **L** и **A** (по определению единичные), можно записать, что

$$\cos\rho = (\mathbf{L}, \mathbf{A}), \qquad \cos p_L = (\mathbf{L}, \mathbf{N}), \qquad \cos p_A = (\mathbf{A}, \mathbf{N}),$$

и потому

$$\cos\Delta\alpha = \frac{\cos\rho - \cos p_L \cos p_A}{\sin p_L \sin p_A} = \frac{(\mathbf{L}, \mathbf{A}) - (\mathbf{L}, \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{A}, \mathbf{N})}{\sqrt{1 - (\mathbf{L}, \mathbf{N})^2} \cdot \sqrt{1 - (\mathbf{A}, \mathbf{N})^2}}.$$

Скалярные произведения в последней формуле могут уже быть рассчитаны в любой удобной системе координат, поскольку от выбора конкретной системы координат не зависят:

$$(\mathbf{L}, \mathbf{A}) = \Big[\text{экв. J2000:}\Big]\ x_L x_A + y_L y_A + z_L z_A = \sin\delta_L \sin\delta_A + \cos\delta_L \cos\delta_A \cos(\alpha_L - \alpha_A);$$

$$(\mathbf{L}, \mathbf{N}) = \Big[\text{экл. J2000:}\Big]\ x'_L x'_N + y'_L y'_N + z'_L z'_N = \sin(\lambda_L + \psi)\cos\beta_L \sin\varepsilon + \sin\beta_L \cos\varepsilon;$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{N}) = \Big[\text{экл. J2000:}\Big]\ x'_A x'_N + y'_A y'_N + z'_A z'_N = \sin(\lambda_A + \psi)\cos\beta_A \sin\varepsilon + \sin\beta_A \cos\varepsilon.$$

Простейший способ проанализировать этого «крокодила» — графический. Для вычислений необходимо сначала определить эклиптические координаты (по выведенным ранее формулам преобразования сферических координат) Веги и Альтаира, а заодно и Антареса, на эпоху J2000:

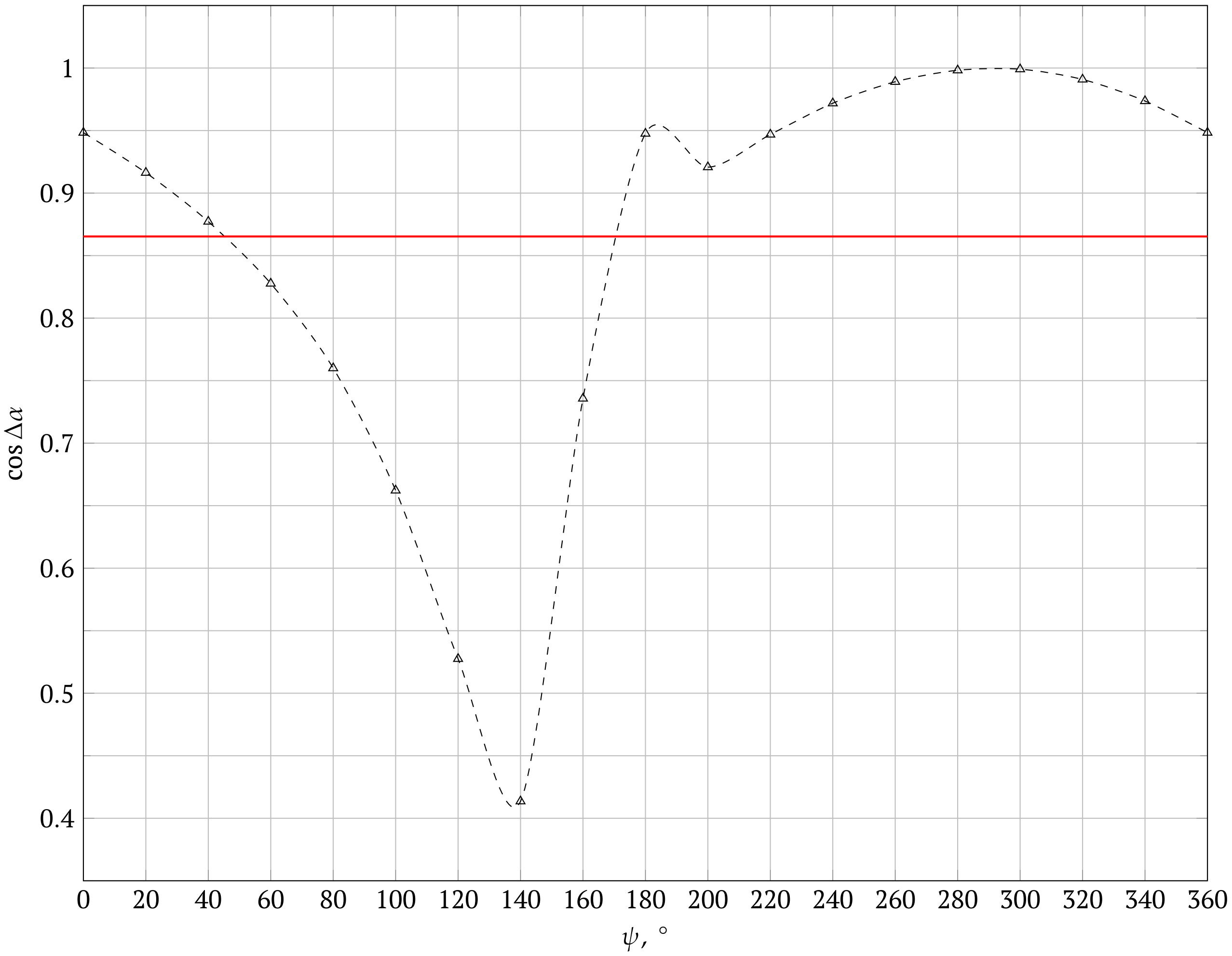
Звезда	λ, °	β, °
Вега	285.314	+61.733
Альтаир	301.776	+29.303
Антарес	249.744	−4.462

При искомом (искомых) ψ разность прямых восхождений (по сути разность звёздных времён) равна

$$\Delta\alpha = 2^\mathrm{h} \times \frac{24^\mathrm{h}}{23^\mathrm{h}\,56^\mathrm{m}\,04^\mathrm{s}} = 2^\mathrm{h}\,00^\mathrm{m}\,20^\mathrm{s},$$

то есть $\cos\Delta\alpha \simeq 0.8653$.

Результаты табулирования по 19 точкам (через каждые 20°) нанесены для наглядности на график. Далее результаты можно и нужно уточнять, например, методом половинного деления на отрезках $\psi \in [40^\circ, 60^\circ]$ и $\psi \in [160^\circ, 180^\circ]$.



Имеем два корня: $\psi_1 \simeq 45.3°$ и $\psi_2 = 163.4°$. Вычислим склонения Веги, Альтаира и Антареса, а для проверки расчётов ещё и прямые восхождения Веги и Альтаира при таких прецессионных сдвигах[6]:

Звезда	δ_1, °	δ_2, °	α_1, °	α_2, °
Вега	+45.7	+85.1	306.2	82.8
Альтаир	+21.8	+51.6	336.3	111.6
Антарес	−25.5	+14.2	/	/

Во втором случае описанная в условии ситуация невозможна, поскольку, имея склонение +85.1°, Вега не может кульминировать *на юге* на высоте +55° (это нетрудно обосновать геометрическими соображениями). В первом же случае $h^{(1)}_{u,S} = h_{u,L} - \delta^{(1)}_L + \delta^{(1)}_S = -16.2° < 0$ — Антарес не восходит.

Схема оценивания **15**

«Очевидное неверное решение» $\leqslant 3$

Решение «в лоб»:
- дело в прецессии 2
- уравнения 3
- данные для подстановки 3
- решение уравнений 4
- получение результата, вывод 3

[6]Некоторая погрешность $\Delta\alpha$ обуславливается большой чувствительностью формулы при склонениях, близких к 90°.

3.9 Вот и сказочке конец… (И. Утешев)

Согласно соотношению Бекенштейна–Хокинга, энтропия S чёрной дыры прямо пропорциональна площади A её горизонта событий:

$$S = \frac{k_B A}{4 l_P^2},$$

где l_P — планковская длина.

1. Выразите температуру Хокинга шварцшильдовской чёрной дыры через её массу $\mathfrak{M}$ и фундаментальные физические постоянные.

2. Покажите, что время жизни чёрной дыры $\tau \propto \mathfrak{M}^{\alpha}$, найдите α.

Подсказка: по определению $\delta S = \delta E / T$, где E — энергия объекта (работу в рассматриваемой ситуации совершать не над чем), T — его температура.

Решение. На горизонте событий шварцшильдовской чёрной дыры, на расстоянии R_S от её центра, [классическая] скорость убегания равна скорости света:

$$c^2 = \frac{2G\mathfrak{M}}{R_S} \quad \Longrightarrow \quad R_S = \frac{2G\mathfrak{M}}{c^2}.$$

Согласно приведённому в условии задачи соотношению Бекенштейна–Хокинга,

$$S = \frac{k_B A}{4 l_P^2} = \frac{k_B}{4 l_P^2} \cdot 4\pi R_S^2 = \frac{\pi k_B}{l_P^2} \cdot \frac{4G^2\mathfrak{M}^2}{c^4}.$$

Выражение для планковской длины составлено из подходящей размерной комбинации фундаментальных физических постоянных G, c и $\hbar$. Нетрудно убедиться, что необходимую размерность имеет следующее выражение:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}.$$

⋄ Действительно, пусть $l_P = G^x c^y \hbar^z$. С учётом размерностей констант ($[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$, $[c] = L T^{-1}$, $[\hbar] = L^2 M T^{-1}$) и желаемой размерности комбинации ($[l_P] = L$) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} L & 3x + y + 2z = 1; \\ M & -x + z = 0; \\ T & -2x - y - z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ x = \frac{1}{2};\ y = -\frac{3}{2};\ z = \frac{1}{2} \right\}.$$ ⋄

Таким образом, энтропия чёрной дыры

$$S = \frac{\pi k_B c^3}{\hbar G} \frac{4G^2\mathfrak{M}^2}{c^4} = \frac{4\pi k_B G}{\hbar c} \mathfrak{M}^2$$

Энергия чёрной дыры Шварцшильда обусловлена её массой: $E = \mathfrak{M} c^2$. Приращения энтропии и энергии

$$\delta S = \frac{8\pi k_B G}{\hbar c} \mathfrak{M}\, \delta\mathfrak{M},$$
$$\delta E = \delta\mathfrak{M}\, c^2$$

связаны между собой определением энтропии, откуда находим зависимость температуры чёрной дыры от её массы:

$$T = \frac{\delta E}{\delta S} = \boxed{\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G} \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}}}.$$

Вычислим зависимость мощности L излучения Хокинга чёрной дыры по закону Стефана–Больцмана при заданной $T(\mathfrak{M})$:

$$L = A \cdot \sigma T^4 \propto \mathfrak{R}_S^2 \cdot T^4 \propto \mathfrak{M}^2 \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}^4} \propto \mathfrak{M}^{-2}.$$

С другой стороны,

$$L = -\frac{\delta E}{\delta t} \propto -\frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t},$$

то есть $\delta t \propto -\mathfrak{M}^2\, \delta\mathfrak{M}$, откуда уже очевидно, что время жизни $\tau \propto \mathfrak{M}^3$ ($\boxed{\alpha = 3}$).

Схема оценивания	**10**
Выражение для планковской длины:	
верное	2
с точностью до константы (например, основанное на h вместо $\hbar$)	*1*
Зависимость $S(\mathfrak{M})$	1
Результат для температуры	3
Дифференциальное уравнение на $\mathfrak{M}(t)$	2
Результат для показателя α	2

3.10 Главная дорога (А. Веселова)

Перед вами таблица масс и абсолютных звёздных величин для некоторых звёзд главной последовательности. Определите по этим данным параметры зависимости масса–светимость.

	o Aql	α Cen C	AD Leo	U Gem	GJ 422	LHS 57	EE Leo
$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_\odot$	0.33	0.123	0.39	0.42	0.35	0.17	0.20
M	11.9	15.49	10.96	9.5	11.00	13.26	12.47
	SZ Cra	GJ 625	HU Del A	GJ 317	HU Del B	GAT 1370	i Cen
$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_\odot$	0.4	0.30	0.24	0.24	0.114	0.089	2.5
M	10.0	10.17	13.46	11.84	16.73	17.2	1.47
	K Car	σ Ori	δ UMa	AB Aur	γ_1 Vel	ε Boo	υ Cyg
$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_\odot$	3.3	18	2.41	3.1	14	4.6	9.3
M	0.22	−3.49	1.39	1.27	−3.62	−1.61	−2.03
	ζ Cha	ζ Cru	β Sco	ω_1 Sco	η Cen	o Per	δ_1 Lyr
$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_\odot$	5.9	7.7	12.5	11.4	12	15.5	7.9
M	−1.15	−1.13	−3.2	−1.87	−2.53	−3.82	−1.55

Решение. Зависимость масса–светимость предполагается степенной вида $L/L_\odot = k\,(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)^n$, поэтому для удобства имеет смысл перейти к логарифмическим величинам, в таком случае

$$\lg \frac{L}{L_\odot} = \lg k + n \lg \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}.$$

В логарифмической шкале зависимость имеет вид линейной функции. Заметим, что логарифм отношения светимостей возможно вычислить на основе сопоставления абсолютной звёздной величины каждой звезды и Солнца:

$$\lg \frac{L}{L_\odot} = 0.4(M_\odot - M) = 0.4 \cdot (4.8 - M).$$

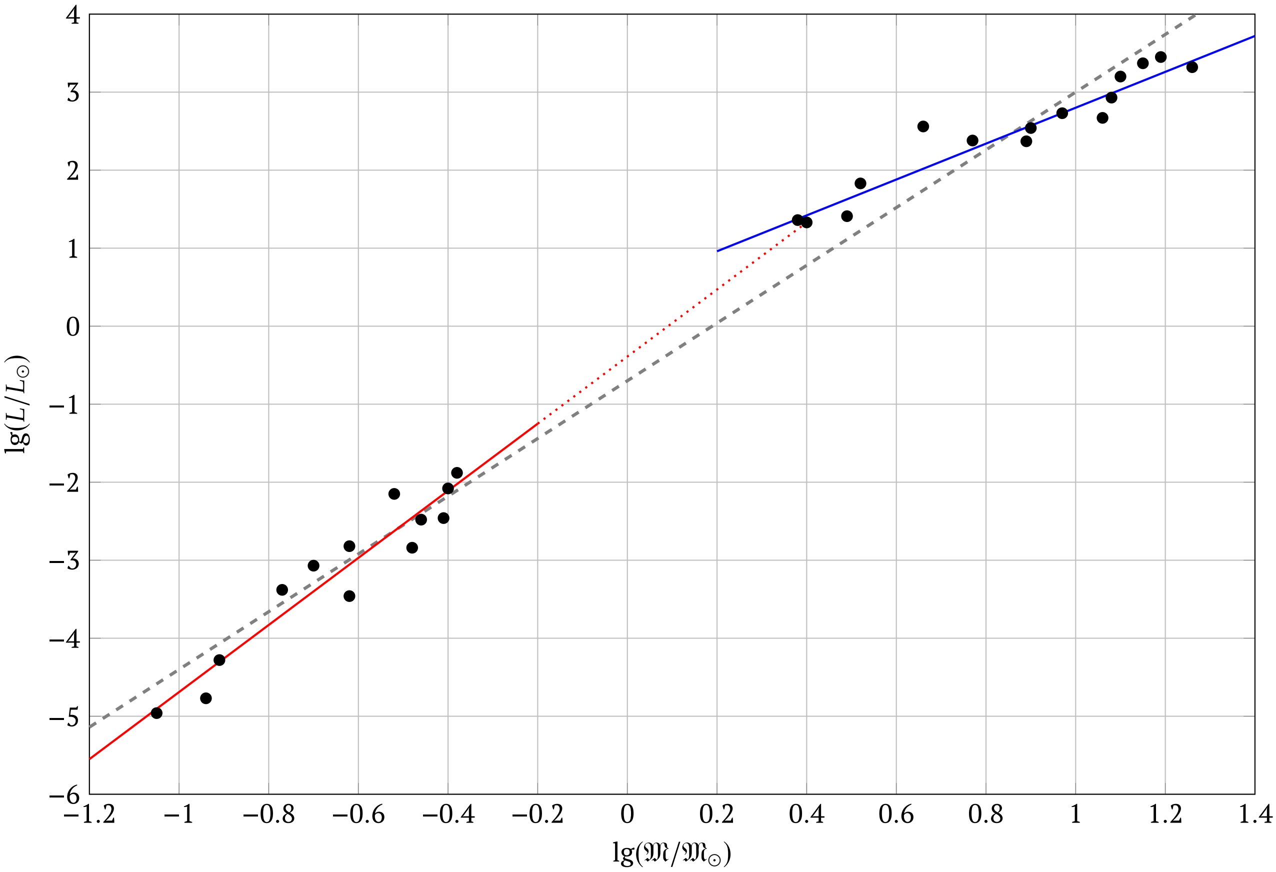
Занесем в таблицу логарифмы отношений масс и светимостей:

	o Aql	α Cen C	AD Leo	U Gem	GJ 422	LHS 57	EE Leo
$\lg(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)$	−0.48	−0.91	−0.41	−0.38	−0.46	−0.77	−0.70
$\lg(L/L_\odot)$	−2.84	−4.28	−2.46	−1.88	−2.48	−3.38	−3.07
	SZ Cra	GJ 625	HU Del A	GJ 317	HU Del B	GAT 1370	i Cen
$\lg(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)$	−0.40	−0.52	−0.62	−0.62	−0.94	−1.05	0.40
$\lg(L/L_\odot)$	−2.08	−2.15	−3.46	−2.82	−4.77	−4.96	1.33
	K Car	σ Ori	δ UMa	AB Aur	γ_1 Vel	ε Boo	υ Cyg
$\lg(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)$	0.52	1.26	0.38	0.49	1.15	0.66	0.97
$\lg(L/L_\odot)$	1.83	3.32	1.36	1.41	3.37	2.56	2.73
	ζ Cha	ζ Cru	β Sco	ω_1 Sco	η Cen	o Per	δ_1 Lyr
$\lg(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\odot)$	0.77	0.89	1.10	1.06	1.08	1.19	0.90
$\lg(L/L_\odot)$	2.38	2.37	3.20	2.67	2.93	3.45	2.54

По данным таблицы построим график. Определение параметров прямой осложняется тем, что график довольно неудобно строить в масштабе 1 : 1. Можно заметить, что данные отображаются на графике в виде двух групп, причем единой прямой их аппроксимировать не удастся. Это неудивительно: поскольку звёзды в двух группах существенно различаются по массам, единой зависимости для них ожидать не следует.

По двум точкам прямой $y = kx + b$ можно определить величину углового коэффициента:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



У маломассивных звёзд наклон оказывается равным примерно 4.3, у более массивных — около 2.3. С константой ситуация обстоит хуже, её можем определить с существенно худшей точностью, поскольку её величина сильно зависит от принятого значения наклона. При указанных выше угловых коэффициентах величины констант равны соответственно примерно −0.4 и 0.5. Погрешности определения параметров зависимости можно оценить любым разумным способом (вычисления опустим).

В итоге

для маломассивных звёзд $$\frac{L}{L_\odot} \approx 0.4 \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^{4.3},$$

для более массивных звёзд $$\frac{L}{L_\odot} \approx 3.2 \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}\right)^{2.3}.$$

Полученные значения сильно отличаются от общепринятых из-за анализа на небольшой выборке.

Отметим, что в случае попытки представить зависимость единой степенной функцией, без разбиения на две группы, показатель степени окажется несколько меньше 4, коэффициент — около 0.3.

Схема оценивания	**20**
Общий вид зависимости:	
степенная формула $L(M)$ либо линейная формула $\lg L(\lg M)$, два параметра	4
только показатель степени (один параметр)	*1*
Определение коэффициентов соотношения (любым обоснованным способом):	
два кластера, два параметра	13
два кластера, один параметр	*10*
вся выборка, два параметра	*8*
вся выборка, один параметр	*5*
Оценка погрешности (любым обоснованным способом)	3