Осенние учебно-тренировочные сборы по астрономии
11 октября 2017 г.

Теоретический тур

Короткие задачи (10 баллов)

Задача 1. Теория вероятностей (И. Утешев)

Рассмотрим произвольный момент времени в пределах ближайшей тысячи лет. Оцените вероятность, что в какой-либо точке на Земле в этот момент возможно наблюдать покрытие Луной звезды ι Leo ($11^h23^m56^s$, $+10°31'45''$).

Решение: Найдём эклиптическую широту ι Leo. Для этого совершенно необязательно вспоминать формулы преобразования координат: достаточно решить более популярную подзадачу о нахождении расстояния между двумя точками на сфере, а именно светила и северного полюса эклиптики (18^h, $90° - \varepsilon$). Более того, в связи с близостью звезды к точке осени, допустимо использование плоского приближения (что изначально не рассматривалось автором). Так или иначе,

$$\beta = +6°06' = +6.10°. \tag{1}$$

Далее необходимо принять принципиальное решение о продолжении решения задачи: несмотря на то, что $\beta > i = 5.15°$ — широта светила превосходит наклонение лунной орбиты к эклиптике, покрытия будут наблюдаться: в игру вступают угловой радиус Луны и её суточный параллакс:

$$5.15° + 0.25° + 0.95° = 6.35° > \beta. \tag{2}$$

Период прецессии узлов лунной орбиты —18.6 лет, что существенно меньше тысячи лет. Следовательно, можем рассматривать равновероятные, всевозможные положения узлов орбиты и Луны на орбите. Покрытия светила могут происходить при эклиптической широте Луны

$$\beta > \beta_{\text{кр}} = 5.15° - (6.35° - 6.10°) = 5.15° - 0.25° = +4.90°. \tag{3}$$

Задача свелась к нахождению промежутка времени, в течение которого орбита Луны расположена таким образом, чтобы на долготе ι Leo $\beta(\lambda_0) > \beta_{\text{кр}}$ (тогда покрытие происходит, причём, строго говоря, каждый месяц). Окончательно, искомая вероятность

$$f \simeq 2 \arccos \frac{\beta_{\text{кр}}}{i} / 360° = 9\ \%. \tag{4}$$

Небольшим бонусом поощрялись решения, в которых предпринимались попытки учесть условия видимости (день – ночь), исследовалось влияние других факторов.

Задача 2. Dark Matters (А. Веселова)

В некотором скоплении галактик содержится 70 спиральных и 30 эллиптических галактик. Известно, что абсолютная звездная величина эллиптических галактик равна -20, соотношение масса-светимость составляет $15\,\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$. У спиральных галактик в данном скоплении максимальная скорость вращения составляет 210 км/с, соотношение масса–светимость — $5\,\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$.

Оцените долю темной материи внутри скопления, если масса межгалактического газа на порядок превышает массу галактик, а типичные скорости галактик в скоплении составляют 1000 км/с. Размер скопления составляет 7 Мпк. Абсолютная звёздная величина Млечного Пути — -20.9.

Решение: Определим светимость и массу эллиптической галактики:

$$M - M_\odot = -2.5 \lg \frac{L}{L_\odot} \quad \Longrightarrow \quad L = 8 \cdot 10^9 L_\odot; \tag{5}$$

$$15 \times 8 \cdot 10^9 = 1.2 \cdot 10^{11}\,\mathfrak{M}_\odot. \tag{6}$$

Светимость Млечного Пути рассчитаем из известного значения абсолютной звёздной величины: $L_{\text{МП}} = 1.7 \cdot 10^{10} L_\odot$. Для спиральных галактик выполняется соотношение Талли–Фишера: $L \propto v^4$, т. е. $L \approx 0.6 L_{\text{МП}} = 10^{10} L_\odot$. По соотношению масса–светимость оценим массу спиральной галактики как $5 \cdot 10^{10}\,\mathfrak{M}_\odot$.

Суммарная масса галактик оказывается равной

$$30 \times 1.2 \cdot 10^{11}\,\mathfrak{M}_\odot + 70 \times 5 \cdot 10^{10}\,\mathfrak{M}_\odot \approx 7 \cdot 10^{12}\,\mathfrak{M}_\odot. \tag{7}$$

Из теоремы вириала получаем оценку массы скопления

$$\mathfrak{M} = \frac{v^2 R}{G} \approx 7 \cdot 10^{14}\,\mathfrak{M}_\odot. \tag{8}$$

Тогда доля темной материи составляет около 99%.

Задача 3. Бейрут (А. Веселова)

В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ($\alpha_1 = 10^h9^m, \delta_1 = 11°53'$) и Шератан ($\alpha_2 = 11^h15^m, \delta_2 = 15°20'$) находятся на одном альмукантарате в Бейруте ($\varphi = 33°53'$)?

Решение: По теореме косинусов для светил на одном альмукантарате

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta_{1,2} + \cos\varphi \cos\delta_{1,2} \cos t_{1,2}. \tag{9}$$

Пусть $\Delta t = t_2 - t_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = -\Delta\alpha$. Тогда

$$\sin\varphi(\sin\delta_1 - \sin\delta_2) = \cos\varphi(-\cos\delta_1 \cos t_1 + \cos\delta_2 \cos t_1 \cos\Delta\alpha + \cos\delta_2 \sin\Delta\alpha \sin t_1). \tag{10}$$

Пусть $A \equiv -\cos\delta_1 + \cos\delta_2 \cos\Delta\alpha$, $B = \cos\delta_2 \sin\Delta\alpha$. В таких обозначениях

$$\operatorname{tg}\varphi \frac{\sin\delta_1 - \sin\delta_2}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos t_1 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin t_1. \tag{11}$$

Пусть θ таково, что $\cos\theta = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, т. е. $\theta = 6.7^h$, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi \frac{\sin\delta_1 - \sin\delta_2}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\theta - t_1). \tag{12}$$

Отсюда $t_1 = 0.2^h$ или 13.3^h. Звёздное время, соответствующее найденным значениям часового угла, равно $s_1 \approx 10^h20^m$ и $s_2 \approx 23^h27^m$. На момент солнечной полуночи 1 сентября звёздное время равно $s_0 = 24^h - 21 \cdot 24/365 \approx 22^h45^m$. Тогда солнечное время, соответствующее s_1 и s_2, составляет 12^h25^m и 1^h18^m.

Задача 4. Н II (А. Веселова)

Предположим, что за пределами солнечного круга кривая вращения Галактики плоская, параметр плато $v = 240$ км/с. Пусть известно, что диск нейтрального водорода простирается до галактоцентрического расстояния $R_{\max} = 50$ кпк. Мы наблюдаем облако нейтрального водорода на галактической долготе $l = 140°$. Оцените минимально возможное значение лучевой скорости этого облака.

Решение: Пусть R_0 — расстояние от Солнца до центра Галактики, R — галактоцентрическое расстояние облака. Рассмотрим треугольник *облако – Солнце – центр Галактики* ($\triangle CSG$). По теореме синусов

$$\frac{\sin\angle GSC}{R} = \frac{\sin\angle GCS}{R_0}; \tag{13}$$

$$\sin\angle GCS = \frac{R_0}{R}\sin\angle GSC = \frac{R_0}{R}\sin l. \tag{14}$$

Проецируем на луч зрения от Солнца к облаку:

$$\begin{aligned} v_r &= v\cos(90° - \angle GCS) - v\cos(l - 90°) = v\sin\angle GCS - v\sin l = \\ &= v\left(\frac{R_0}{R} - 1\right)\sin l = 240\ \text{км/с} \times \left(\frac{8\ \text{кпк}}{R} - 1\right)\sin 140°. \end{aligned} \tag{15}$$

Минимальное значение лучевой скорости достигается при максимальном значении $R = R_{\max}$;

$$v_{r\min} \approx -130\ \text{км/с}. \tag{16}$$

<u>**Задача 5. Обратный комптон-эффект**</u> (И. Утешев)

Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеяния фотона на ультрарелятивистском свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеянное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприёмнике?

Решение: Эта задача не проверяет, в сущности, знания СТО. Это — «замаскированная» задача об отражении мячика от движущейся стенки. В самом деле, начальная и конечная энергии фотона $\lll m_e c^2$, поэтому можем считать, что в системе отсчёта покоящегося электрона изменяется только направление импульса фотона.

Очевидно, энергетически выгодно (как нам, так и фотону) рассматривать столкновение с поворотом направления движения фотона на 180°. В лабораторной СО начальная энергия фотона E, тогда в СО электрона

$$E' = E\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \tag{17}$$

а в ЛСО конечная энергия фотона (отражённого)

$$E'' = E'\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = E \cdot \frac{c+v}{c-v}. \tag{18}$$

Энергия реликтового фотона $E \approx k_B \times 3$ К, а фотона на фотоприёмнике $E'' = hc/\lambda$, где длина волны $\lambda \sim 0.5$ мкм. *Это грубая оценка.*

Теперь уже нетрудно рассчитать энергию электрона:

$$\mathscr{E} = \frac{m_e c^3}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{19}$$

Преобразуем уравнение (18) к более удобному виду:

$$\frac{E''}{E} = \frac{c+v}{c-v} = \frac{(c+v)^2}{c^2-v^2} \approx \frac{4c^2}{c^2-v^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}} \simeq \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{E''}{E}}. \tag{20}$$

Окончательно

$$\mathscr{E} = \frac{m_e c^2}{2}\sqrt{\frac{E''}{E}} \approx 0.5 \text{ МэВ} \times \frac{\sqrt{(2.5 \text{ эВ})/(2.6 \cdot 10^{-4} \text{ эВ})}}{2} \approx 25 \text{ МэВ}. \tag{21}$$

Небольшим бонусом поощрялись решения, в которых предпринимались попытки найти диапазон возможных $\mathscr{E}$ или учесть влияние других факторов, таких как угол рассеяния.

Задача 6. Спирт — космос (М. Волобуева)

Астрономы проводят наблюдения молекулярного облака в мазерной линии метанола на частоте 6.66 ГГц. Плотность потока излучения при этом составила 120 Ян. Определите длину волны, на которой проводились наблюдения. Оцените яркостную температуру метанолового облака, если известно, что его диаметр равен 1600 а. е., а параллакс составляет 0.77 mas.

Решение: Длина волны, на которой проводились наблюдения

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 4.5 \text{ см}. \tag{22}$$

Расстояние до облака

$$d = \frac{1}{\pi''} = 1.3 \text{ кпк} = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}. \tag{23}$$

Плотность потока излучения равна

$$S_\nu = 120 \text{ Ян} = 1.2 \cdot 10^{-24} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц}) \tag{24}$$

и связана с яркостью источника соотношением $S_\nu = B_\nu \Omega$, где Ω — телесный угол, под которым виден источник:

$$\Omega = \pi \frac{R^2}{d^2} = \frac{\pi D^2}{4d^2}. \tag{25}$$

По формуле Рэлея – Джинса

$$B_\nu = \frac{2kT_b\nu^2}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2S_\nu c^2 d^2}{k\nu^2 \pi D^2} = 3 \cdot 10^6 \ K. \tag{26}$$

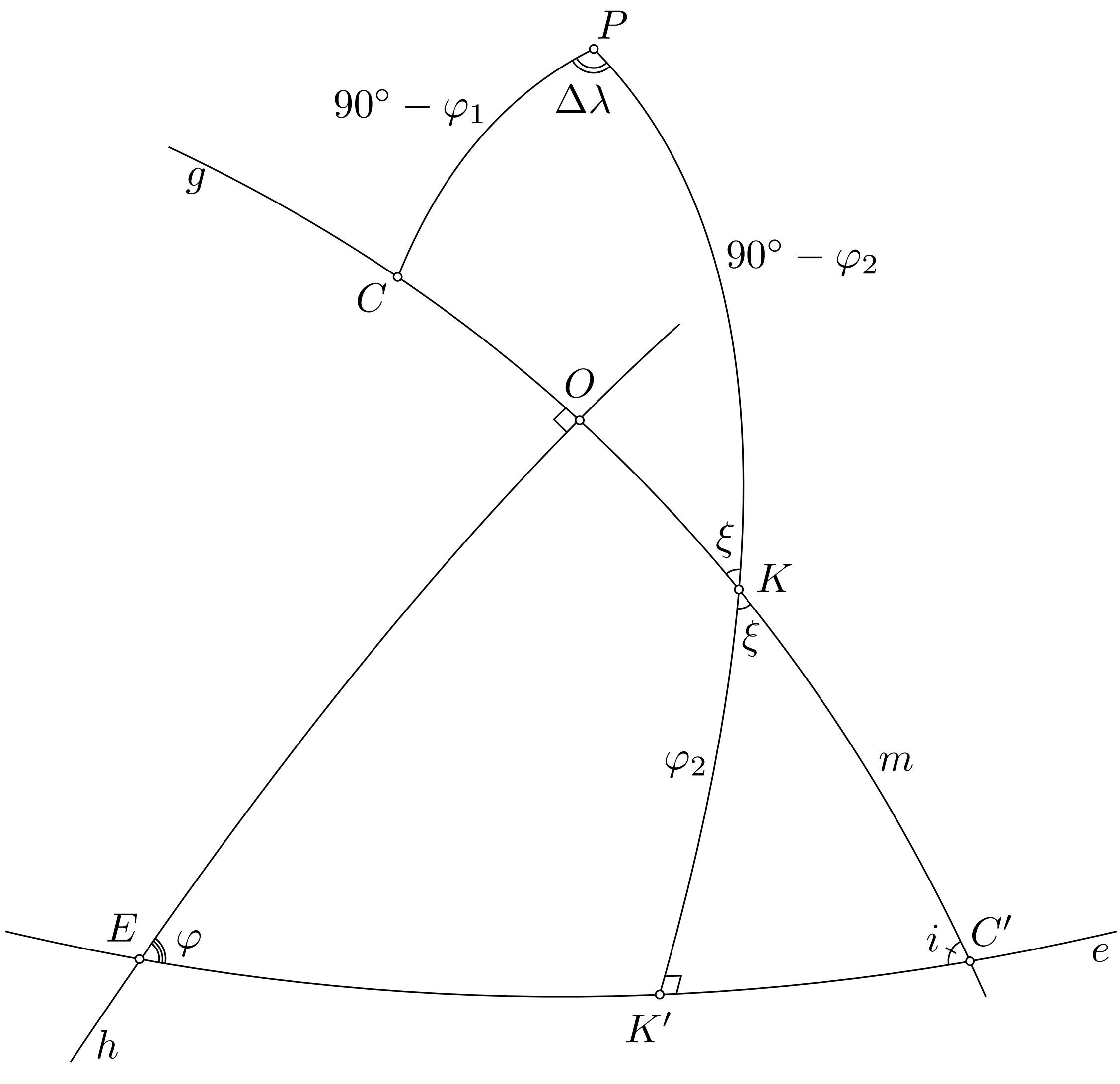
Задача 7. Загадочный круг (А. Шепелев)

Установите астрономический азимут восхода звезды ε CMa ($6^h58^m38^s$, $-28°58'$) при наблюдении из самой северной равноудалённой от Санкт-Петербурга ($59°57'$ с.ш., $30°19'$ в.д.) и Красной Поляны ($43°41'$ с.ш., $40°11'$ в.д.) точки земной поверхности. Атмосферой пренебрегите, Земля — шар.

Решение: Введём обозначения координат: Санкт-Петербург (φ_1, λ_1), Красная Поляна (φ_2, λ_2).

Найдём расстояние l от Санкт-Петербурга (C) до Красной Поляны (K) из теоремы косинусов для сферического треугольника $\triangle CKP$, где P — Северный полюс:

$$\cos l = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda \quad \Longrightarrow \quad l = 17.33°. \tag{27}$$



Обозначив угол $\angle CKP$ за ξ, найдём его по теореме синусов для того же треугольника:

$$\frac{\cos\varphi_1}{\sin\xi} = \frac{\sin l}{\sin\Delta\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \xi = 16.74°. \tag{28}$$

Далее необходимо определить наклонение i большого круга g, содержащего дугу *Санкт-Петербург – Красная Поляна* к экватору (e). Обозначим за K' точку пересечения меридиана Красной Поляны с экватором, а за C' — точку пересечения g с экватором. Вычислим угол i, используя теорему косинусов для углов в сферическом треугольнике $\triangle KK'C'$:

$$\cos i = -\cos\xi \cancelto{0}{\cos 90^\circ} + \sin\xi \cancelto{1}{\sin 90^\circ} \cos\varphi_2 = \sin\xi\cos\varphi_2 \quad\Longrightarrow\quad i = 77.98^\circ. \tag{29}$$

Вычислим длину m дуги KC', используя теорему синусов для треугольника $\triangle KK'C'$:

$$\frac{\sin\varphi_2}{\sin i} = \frac{\sin m}{\cancelto{1}{\sin 90^\circ}} \quad\Longrightarrow\quad m = 44.92^\circ. \tag{30}$$

Все точки, равноудалённые от Санкт-Петербурга и Красной Поляны, лежат на большом круге h, перпендикулярном g и проходящем через середину O дуги CK. Аналогично (29) определим наклонение φ большого круга h к экватору:

$$\cos\varphi = \cos\left(m + \frac{l}{2}\right)\sin i \quad\Longrightarrow\quad \varphi = 54.51^\circ. \tag{31}$$

Самая северная точка большого круга с наклонением j к экватору имеет широту j, следовательно, самая северная точка большого круга h находится на широте φ.

Перейдем к решению следующей подзадачи: нахождению азимута восхода звезды ε CMa на широте φ. Для этого вычислим часовой угол данной звезды в момент её восхода (см. параллактический треугольник):

$$\cancelto{0}{\cos z} = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \quad\Longrightarrow\quad t = 39.07^\circ. \tag{32}$$

Поскольку речь идет об азимуте восхода, часовой угол

$$t' = 360^\circ - t = 320.93^\circ. \tag{33}$$

Осталось применить теорему синусов, чтобы найти астрономический азимут восхода:

$$\frac{\cancelto{1}{\sin z}}{\sin t'} = \frac{\cos\delta}{\sin A} \quad\Longrightarrow\quad A = -33.47^\circ. \tag{34}$$

Задача 8. Антипланеты (А. Шепелев)

Лупа и Пупа живут на антипланетах, обращающихся вокруг звезды с массой $M_\star \simeq 10 M_\odot$ по эллиптической орбите с фокальным параметром $p = 0.3$ а. е. и эксцентриситетом $e = 0.72$. Как и полагается антипланетам, время от времени звезда находится точно между ними; в этот момент X истинная аномалия ν планеты Пупы составляет $237°$.

Однажды кто-то опять всё перепутал, и центральная звезда бесследно исчезла в момент X, уменьшив модули скоростей планет в 217 раз. Установите, с каким периодом T планеты бедных астрономов будут обращаться в отсутствие звезды. Известно, что планеты относятся к классу горячих Юпитеров с массой $M \simeq M_{♃}$.

Решение: Величинам, относящимся к Пупе и его планете, будет присваивать индекс P, а к Лупе, соответственно, — L.

Найдём длину радиуса-вектора для каждой из планет в момент исчезновения звезды, учитывая, они находились на одной прямой:

$$r_1^P = \frac{p}{1 + e\cos\nu} = 0.494 \text{ а. е.}; \tag{35}$$

$$r_1^L = \frac{p}{1 + e\cos(\nu - 180°)} = 0.215 \text{ а. е.} \tag{36}$$

Рассчитаем расстояния от планет Пупы и Лупы до второго фокуса из теоремы косинусов для треугольников $\triangle F_1F_2P$ и $\triangle F_1F_2L$ соответственно:

$$\begin{aligned} r_2^P &= \sqrt{4a^2e^2 + \left(r_1^P\right)^2 - 2\cdot 2ae\cdot r_1^P\cos(\nu - 180°)} = 0.752 \text{ а. е.},\\ r_2^L &= \sqrt{4a^2e^2 + \left(r_1^L\right)^2 - 2\cdot 2ae\cdot r_1^L\cos(360° - \nu)} = 1.030 \text{ а. е.}, \end{aligned} \tag{37}$$

где $a = \dfrac{p}{1-e^2} = 0.623$ а. е. — большая полуось орбиты планет.

Теперь определим угол между направлениями на фокусы орбиты для Пупы и Лупы из теоремы синусов для тех же треугольников:

$$\alpha_P = \arcsin\left(\frac{2ae\sin(\nu - 180°)}{r_2^P}\right) = 89.6°; \tag{38}$$

$$\alpha_L = \arcsin\left(\frac{2ae\sin(360° - \nu)}{r_2^L}\right) = 46.9°. \tag{39}$$

Из «бильярдного» (оптического) свойства эллипса получаем угол между радиус-векторами планет и векторами их скоростей:

$$\beta_P = \frac{180° + \alpha_P}{2} = 134.8°; \tag{40}$$

$$\beta_L = \frac{180° - \alpha_L}{2} = 66.6°. \tag{41}$$

Интеграл энергии поможет найти модули скоростей планет после события X:

$$V_P = \frac{1}{217}\sqrt{GM_\star\left(\frac{2}{r_1^P} - \frac{1}{a}\right)} = 0.68 \text{ км/с}; \tag{42}$$

$$V_L = \frac{1}{217}\sqrt{GM_\star\left(\frac{2}{r_1^L} - \frac{1}{a}\right)} = 1.20 \text{ км/с}. \tag{43}$$

Найдем относительную тангенциальную и радиальную скорости планет:

$$V_\tau = V_P \sin\beta_P + V_L \sin\beta_L = 1.59 \text{ км/с}; \tag{44}$$
$$V_r = V_P \cos\beta_P + V_L \cos\beta_L = 0.00 \text{ км/с}. \tag{45}$$

Здесь уже учтена *ненулевая скорость центра масс* системы.

Мысленно перенесём всю массу в одну из планет, «зафиксируем» её и пустим вторую обращаться вокруг неё с расчётной относительной скоростью:

$$V_\tau^2 + V_r^2 = 2GM\left(\frac{2}{r_1^P + r_1^L} - \frac{1}{a'}\right) \quad\Longrightarrow\quad a' = \left[\frac{2}{r_1^P + r_1^L} - \frac{V_\tau^2 + V_r^2}{2GM}\right]^{-1} = 0.355 \text{ а. е.} \tag{46}$$

Отсюда по обобщённому третьему закону Кеплера осталось найти период:

$$T = T_\oplus\sqrt{\frac{a'^3}{a_\oplus^3}\frac{M_\odot}{2M}} \simeq 4.7 \text{ года}. \tag{47}$$

Задача 9. К Сатурну! (А. Веселова)

Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. При движении по орбите корабль пролетел мимо астероида-троянца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлением на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Орбиты планет считать круговыми. Оцените относительную скорость корабля и астероида в момент сближения.

Решение: Корабль летит по гомановскому эллипсу, перигелий которого находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Сатурна. Тогда большая полуось

$$a = \frac{a_\oplus + a_S}{2} \simeq 5.28 \text{ а. е.}; \tag{48}$$

$$e = 1 - \frac{a_\oplus}{a} \simeq 0.81. \tag{49}$$

Определим скорость, которую должен иметь корабль в точке перицентра:

$$v_p = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{a_E} - \frac{1}{a}\right)} \simeq 40.1 \text{ км/с}. \tag{50}$$

Поскольку Земля движется вокруг Солнца со скоростью около 29.8 км/с, на границе сферы действия Земли корабль должен иметь скорость

$$\Delta v = v_p - v_E = 10.3 \text{ км/с}. \tag{51}$$

Тогда скорость старта с поверхности Земли будет равна

$$v_{\rm st} = \sqrt{(\Delta v)^2 + v_{\rm II}^2} \approx 15.2 \text{ км/с}, \tag{52}$$

где $v_{\rm II}$ — вторая космическая скорость.

Время движения корабля от Земли к Сатурну равно половине орбитального периода для эллипса Гомана:

$$T = \frac{T_\oplus}{2}\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^{3/2} \simeq 6.1 \text{ года}. \tag{53}$$

Поскольку к моменту окончания полета корабль и Сатурн должны оказаться в непосредственной близости друг от друга, угол, который за время полёта корабля проходит Сатурн по своей орбите,

$$360^\circ \times \frac{T}{T_S} \approx 74^\circ. \tag{54}$$

Рассмотрим треугольник *Земля* $\oplus$ — *Солнце* $\odot$ — *Сатурн* S в момент старта корабля. Определим по теореме косинусов геоцентрическое расстояние Сатурна:

$$\oplus S^2 = \oplus\odot^2 + \odot S^2 - 2\oplus S \cdot \odot S \cos(180^\circ - 74^\circ) \quad \Longrightarrow \quad \oplus S \approx 9.9 \text{ а. е.} \tag{55}$$

Тогда по теореме синусов $\angle \odot\oplus S \approx 68^\circ$.

Гектор является троянским астероидом Юпитера и движется по его орбите с опережением на 60°. Запишем закон сохранения момента импульса для точки старта и точки пересечения орбиты троянского астероида:

$$a_\oplus \cdot v_p = a_J v_T \sin\theta, \tag{56}$$

где v_T — скорость корабля при пересечении орбиты Юпитера, θ — угол между радиусом-вектором и вектором скорости корабля.

Определим скорость корабля при пересечении орбиты Юпитера:

$$v_T = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{a_J} - \frac{1}{a}\right)} \approx 13.2 \text{ км/с}, \tag{57}$$

откуда $\theta \approx 144^\circ$. Поскольку орбиту Юпитера мы считаем круговой, вектор скорости Гектора ортогонален проведенному в эту точку радиусу-вектору. Угол между векторами скоростей

$$\Delta\theta = \theta - 90^\circ = 54^\circ. \tag{58}$$

Скорость троянского астероида определим как круговую для орбиты Юпитера:

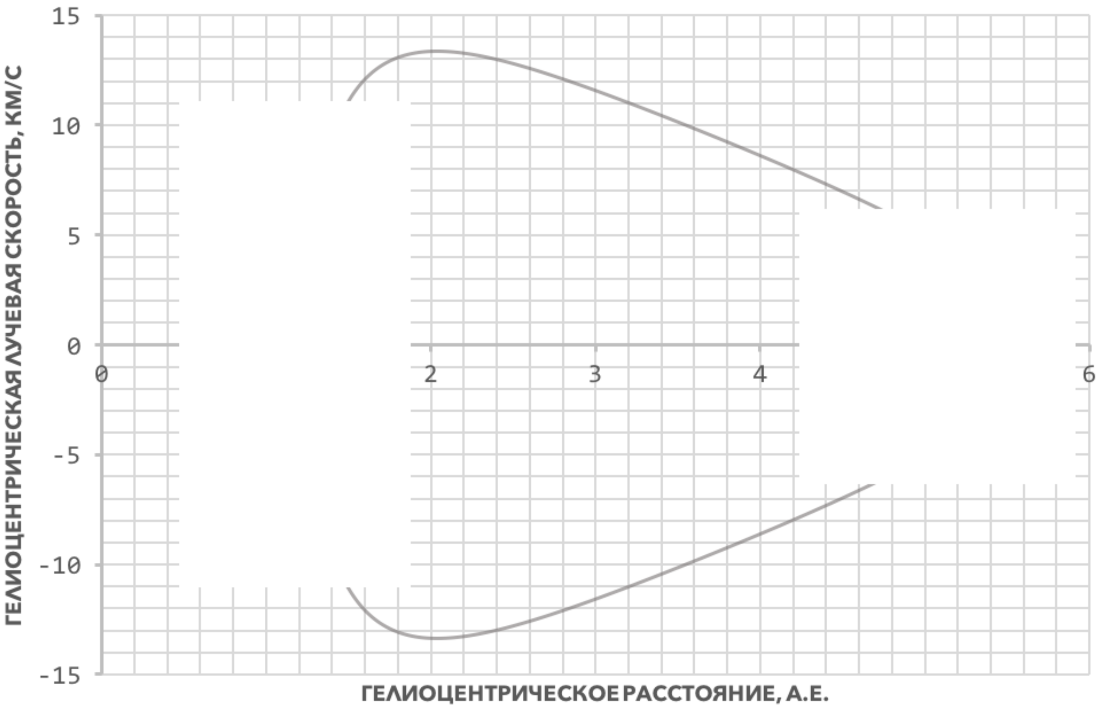
$$v_J = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_J}} \approx 13 \text{ км/с}. \tag{59}$$

Относительную скорость троянца и корабля найдем по теореме косинусов для $\triangle$ скоростей:

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_J^2 + v_T^2 - 2v_J v_T \cos\Delta\theta} \approx 12 \text{ км/с}. \tag{60}$$

Задача 10. 67 P (И. Утешев)

Используя данные прилагаемого графика, определите параметры орбиты объекта 67 P: большую полуось a и эксцентриситет e. Части графика были утрачены в ходе постобработки.



Решение: Как известно, полная энергия тела на кеплеровой орбите является функцией только большой полуоси орбиты: $E = E(a)$. Удобно рассмотреть круговую орбиту радиусом a. Тело движется по ней с круговой скоростью $v = \sqrt{GM/a}$; тогда полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{a} = -\frac{GMm}{2a}, \tag{61}$$

и нетрудно выразить

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}. \tag{62}$$

Последнюю связь также часто называют интегралом энергии для кеплеровой орбиты.

По теореме Пифагора $v^2 = v_\tau^2 + v_r^2$, где v_τ — трансверсальная скорость кометы. Найдём соответствующее выражение, исходя из ЗСМИ и равенства $v_r = 0$ в перигелии и афелии:

$$v_\tau^2 r^2 = a^2(1-e)^2 \cdot GM\left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right) = GMa(1-e^2), \tag{63}$$

откуда сразу следует

$$v_r = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)}{r^2}\right)}. \tag{64}$$

Нетрудно заметить, что касательная к графику горизонтальна в точке $r_0 = 2.04$ а.е., $v_{r0} = 13.4$ км/с, где

$$(v_r)'_r\,(r_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{r_0}{1-e^2}. \tag{65}$$

Подстановка a, r_0, v_{r0} в (64) даёт уравнение относительно e, разрешив которое находим и a.

Ответ: $a = 3.46$ а.е.; $e = 0.64$.