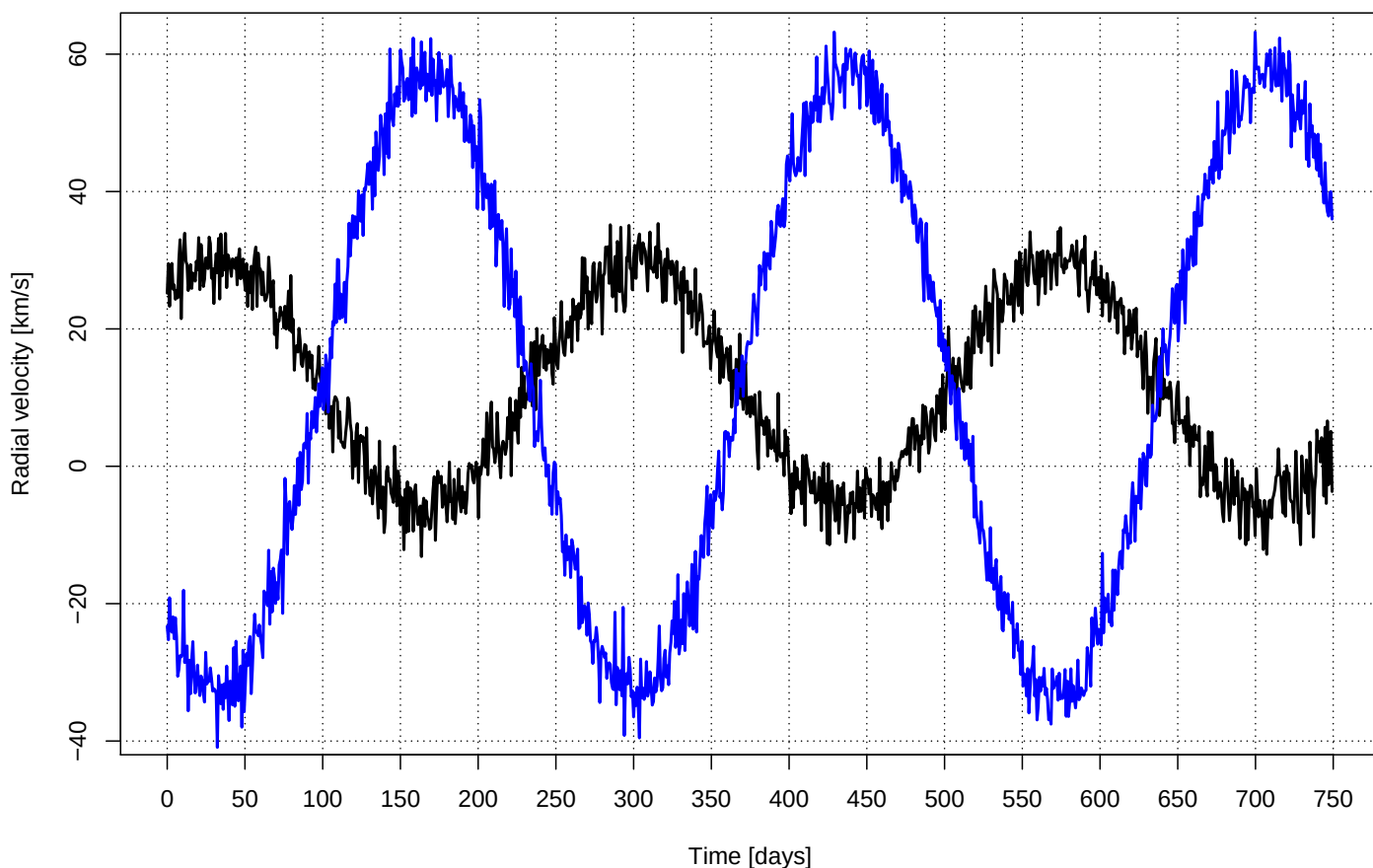


Практический тур

Задача 1. Двойная звезда (В. Григорьев)

Двойная звезда расположена в 173 пк от Солнца. Её компоненты расходятся друг от друга на угол 10 mas. В результате длительных наблюдений были получены зависимости гелиоцентрических лучевых скоростей компонентов этой двойной системы от времени (см. график). Определите массы компонентов по отдельности, считая, что они движутся по круговым орбитам.



Решение: Используя график, определим значения следующих величин:

Лучевая скорость центра масс системы	12 км/с	(не ноль!)
Амплитуда лучевой скорости звезды 1	$V_1^{\max} = 18$ км/с	чёрная кривая
Амплитуда лучевой скорости звезды 2	$V_2^{\max} = 45$ км/с	синяя кривая
Период обращения системы	$P = 270$ сут.	

Конструируем функцию масс для каждой из звезд (массы M_1 и M_2). Запишем уравнения, описывающие рассматриваемую систему: выражение для большой полуоси a в виде суммы радиусов r_1

и r_2 орбит звёзд относительно центра масс; уравнение центра масс; третий закон Кеплера и зависимость величины наблюдаемой амплитуды скорости от наклона орбиты i — угла между лучом зрения и нормалью к плоскости орбиты:

$$r_1 + r_2 = a; \quad (1)$$

$$M_1 r_1 = M_2 r_2; \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}; \quad (3)$$

$$V_j^{\max} = \frac{2\pi r_j}{P} \sin i, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Наша цель — прийти к выражению, в котором останется наименьшее число неизвестных величин, но при этом наибольшее число величин, получаемых из наблюдений. Для этого выразим из (1) и (2) величину r_1 :

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a. \quad (5)$$

Подставим полученное выражение в уравнение (4, $j = 1$) и возведём результат в куб:

$$(V_1^{\max})^3 = \frac{8\pi^3}{P^3} \sin^3 i \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^3 a^3. \quad (6)$$

Куб большой полуоси можно выразить из третьего закона Кеплера (3). Итоговое выражение перепишем, оставив неизвестные величины в левой части, получив функцию масс, определяемую по данным, относящимся к движению звезды 1:

$$f_1(M) \equiv \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P (V_1^{\max})^3}{2\pi G}. \quad (7)$$

Замечание. Данная функция позволяет оценить «снизу» массы компонентов системы. В самом деле,

$$\frac{f_1(M)}{M_2} = \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \sin^3 i \leq 1 \implies M_2 \geq f_1(M). \quad (8)$$

Таким образом, $M_2 \geq 0.16 M_\odot$. Аналогичными рассуждениями придём к оценке $M_1 \geq 2.6 M_\odot$.

По известному расстоянию до системы и максимальному угловому разделению компонентов находим большую полуось $a = 1.73$ а.е., откуда с помощью соотношения (3) получим и суммарную массу системы: $M_{\text{total}} \equiv M_1 + M_2 = 9.5 M_\odot$.

Теперь можно определить наклон орбиты i . Запишем выражение (7) в виде

$$M_2 \sin i = \sqrt[3]{f_1(M) M_{\text{total}}^2}, \quad (9)$$

$$(M_1 + M_2) \sin i = \sqrt[3]{f_1(M) M_{\text{total}}^2} + \sqrt[3]{f_2(M) M_{\text{total}}^2} \implies \sin i = \frac{\sqrt[3]{f_1(M)} + \sqrt[3]{f_2(M)}}{\sqrt[3]{M_{\text{total}}}} = 0.90. \quad (10)$$

Функция масс (7) с учётом известного значения $\sin i$ позволяет получить искомые массы звёзд:

$$M_1 = 6.8 M_\odot;$$

$$M_2 = 2.7 M_\odot.$$

Задача 2. Клеобул (А. Шепелев)

В таблице представлены расчётные данные наблюдений астероида Клеобул: дата, горизонтальный параллакс и элонгация. Астероид считать сферическим.

1. Для того, чтобы визуально разрешить астероид 21 июля 2018 г., потребуется телескоп с минимальной апертурой $D \simeq 100$ м. Оцените диаметр астероида.
2. Рассчитайте абсолютную звездную величину астероида, если 17 декабря 2020 г. его видимая звездная величина составит $m = 18.12^m$.
3. Определите большую полуось и эксцентриситет орбиты астероида.
4. Оцените периодичность великих противостояний астероида.
5. Найдите дату ближайшего противостояния.

Дата	$\pi, ''$	$\lambda, ^\circ$	Дата	$\pi, ''$	$\lambda, ^\circ$
2017 – Feb – 16	6.0	91.9 W	2019 – Jun – 06	2.4	106.0 W
2017 – Mar – 28	6.8	127.7 W	2019 – Jul – 16	2.9	146.6 W
2017 – May – 07	6.8	176.0 W	2019 – Aug – 25	3.0	166.7 E
2017 – Jun – 16	5.2	137.6 E	2019 – Oct – 04	2.8	122.3 E
2017 – Jul – 26	3.7	101.9 E	2019 – Nov – 13	2.4	83.9 E
2017 – Sep – 04	2.8	72.3 E	2019 – Dec – 23	2.1	50.8 E
2017 – Oct – 14	2.3	45.0 E	2020 – Feb – 01	2.0	21.1 E
2017 – Nov – 23	2.1	17.9 E	2020 – Mar – 12	2.1	6.6 W
2018 – Jan – 02	2.0	10.0 W	2020 – Apr – 21	2.3	32.3 W
2018 – Feb – 11	2.0	39.1 W	2020 – May – 31	2.7	57.4 W
2018 – Mar – 23	2.2	70.5 W	2020 – Jul – 10	3.4	83.3 W
2018 – May – 02	2.6	105.7 W	2020 – Aug – 19	4.7	112.7 W
2018 – Jun – 11	2.9	147.0 W	2020 – Sep – 28	7.0	150.8 W
2018 – Jul – 21	2.9	166.5 E	2020 – Nov – 07	9.1	159.0 E
2018 – Aug – 30	2.6	123.1 E	2020 – Dec – 17	8.7	113.7 E
2018 – Oct – 09	2.2	85.4 E	2021 – Jan – 26	7.7	85.9 E
2018 – Nov – 18	1.9	51.9 E	2021 – Mar – 07	7.2	71.6 E
2018 – Dec – 28	1.7	20.8 E	2021 – Apr – 16	6.6	66.1 E
2019 – Feb – 06	1.7	9.9 W	2021 – May – 26	5.6	63.1 E
2019 – Mar – 18	1.8	40.0 W	2021 – Jul – 05	4.5	56.6 E

Решение:

1 Оценим угловой размер астероида α из предельного разрешения оптического телескопа, по данному на дату горизонтальному параллаксу рассчитаем геоцентрическое расстояние астероида R , а далее — его линейный размер d :

$$\alpha \simeq \frac{1.22\lambda}{D} \simeq \frac{1.22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{100} = 6.6 \cdot 10^{-9} \text{ рад}, \quad (11)$$

$$R = \frac{R_\oplus}{2.9''} \cdot 206265 = 4.5 \cdot 10^8 \text{ км}, \quad (12)$$

$$d = R\alpha \approx 3 \text{ км}. \quad (13)$$

2 Напомним, что абсолютной звездной величиной объекта Солнечной системы называется его звездная величина, как если бы он при полной фазе находился на расстоянии 1 а.е. от Солнца и от наблюдателя. Геоцентрическое расстояние астероида $\mathcal{A}$ на указанную дату

$$R = \frac{R_{\oplus}}{8.7''} \cdot 206265 = 1.5 \cdot 10^8 \text{ км} = 1.0 \text{ а.е.} \quad (14)$$

Из теоремы косинусов для треугольника $\triangle\{\odot; \oplus; \mathcal{A}\}$ определим гелиоцентрическое расстояние Клеобула, по теореме синусов рассчитаем фазовый угол, затем — фазу астероида:

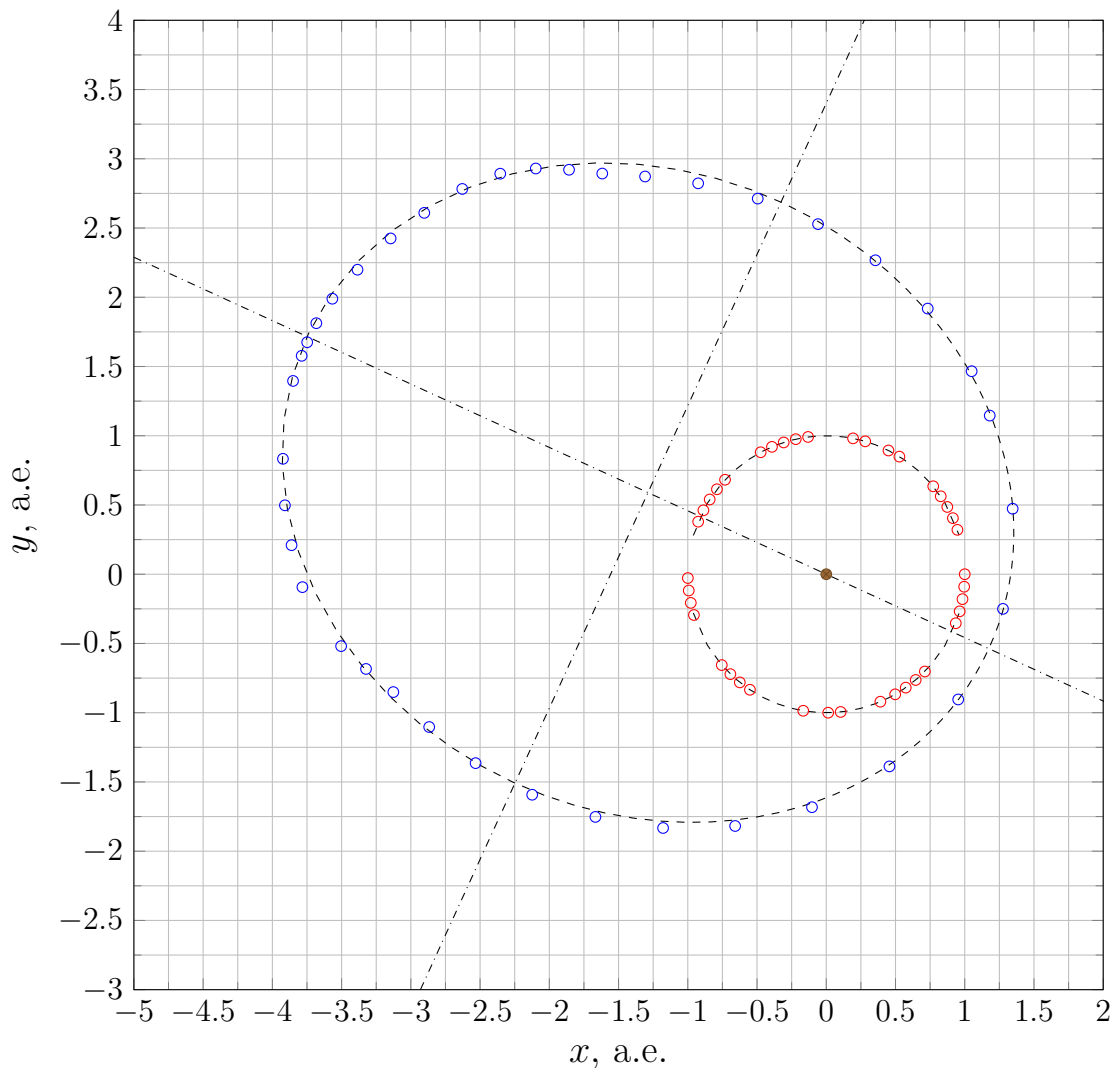
$$r = \sqrt{a_{\oplus}^2 + R^2 - 2a_{\oplus}R \cos \lambda} = 1.67 \text{ а.е.}, \quad (15)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{a_{\oplus} \sin \lambda}{r} = 33.3^\circ \implies \Phi = \frac{1 + \cos \varphi}{2} = 0.92. \quad (16)$$

Окончательно, по формуле Погсона

$$M = m - 2.5 \lg \frac{r^2 R^2}{a_{\oplus}^4 \Phi} = 16.9^m. \quad (17)$$

3 Для определения параметров орбиты астероида построим положения Земли и астероида на миллиметровке. Для удобства предлагается пересчитать горизонтальный параллакс астероида в расстояние от Земли в а.е., время наблюдения — в разность эклиптических долгот Земли по сравнению с первым моментом; зафиксировать положение Солнца в точке (0;0), а Землю — в точке (1;0). С помощью транспортира и линейки строится положение Земли, а относительно него — положение астероида:



Осталось провести по нанесённым на график точкам эллипс — орбиту астероида, измерить его большие оси и рассчитать эксцентриситет:

$$2a = 5.4 \text{ а.е.}, \quad 2b = 4.6 \text{ а.е.} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0.52. \quad (18)$$

4 По III закону Кеплера определим сидерический период:

$$T \sim a^{3/2} = 4.46 \text{ лет.} \quad (19)$$

Составим таблицу $(N_{\oplus}, N_{\text{Кл}})$ соответствия числа полных оборотов Земли и Клеобула. Строка с близкими к целым числами удовлетворяет условию наступления великих противостояний. Приводим первые две такие строки:

$$\begin{array}{ll} T_G = 9 \text{ лет} & 1\%, \\ T_G = 58 \text{ лет} & 0.007\%. \end{array}$$

5 Противостояние происходит в некоторый момент между наблюдениями, когда меняется сторона элонгации, а значение угла близко к 180° . После внимательного взгляда на таблицу понимаем, что ближайшее противостояние Клеобула (на дату проведения тура) произойдёт между 11 июня и 21 июля 2018 г. Будем считать, что угловая скорость движения астероида по орбите вокруг Солнца существенно не изменяется на этом промежутке времени, и рассчитаем её.

По графику из части 3 задачи определим истинную аномалию Клеобула 11 июня 2018 г., и, подставляя её значение в уравнение эллипса, найдём гелиоцентрическое расстояние Клеобула в этот день

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \bigg|_{\theta=162^\circ} = 3.9 \text{ а.е.} \quad (20)$$

Угловая скорость астероида выражается из закона сохранения момента импульса (в качестве опорной точки выбрана точка перигелия):

$$\omega = \frac{L}{mr^2} = \frac{ma(1 - e)\sqrt{GM_{\odot} \left[\frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right]}}{mr^2} = \frac{\sqrt{GM_{\odot}a(1 - e^2)}}{r^2} = 0.15^\circ/\text{сут.} \quad (21)$$

Найдём из графика разность долгот Земли и астероида (11 июня 2018 г.) и, соответственно, время, через которое произойдет противостояние:

$$\Delta t = \frac{\Delta \lambda}{\omega_{\oplus} - \omega} \bigg|_{\Delta \lambda=24^\circ} = 29 \text{ сут.} \quad (22)$$

Следовательно, ближайшее противостояние произойдет ориентировочно 10 июля 2018 г.

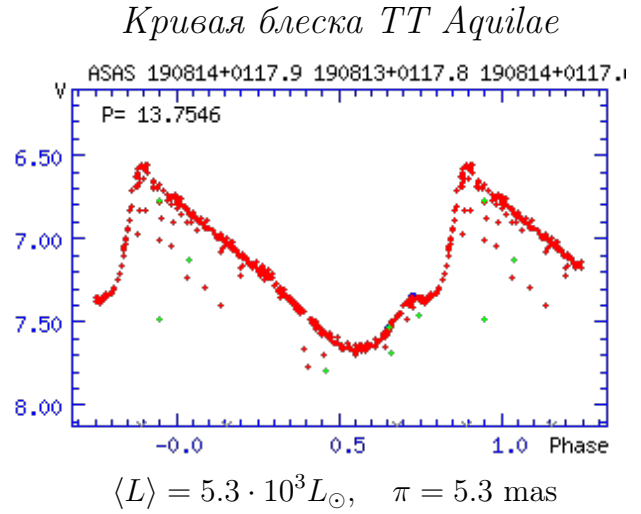
Задача 3. Одни сутки (М. Гаврилов)

Мы решили не публиковать эту задачу, поскольку с ней всё равно бы никто не справился.

Задача 4. Цефеиды в БМО (М. Кузнецов, И. Утешев)

В вашем распоряжении 40 кривых блеска переменных звёзд типа δ Cephei, принадлежащих Большому Магелланову Облаку, а также кривая блеска близкой галактической цефеиды TT Aquilae, полученные на автоматическом обзоре неба ASAS.

1. Постройте зависимость период-светимость для цефеид БМО в логарифмическом масштабе: средняя звёздная величина против десятичного логарифма периода в сутках $\langle m_V \rangle (\lg P_{\text{day}})$.
2. Определите вид и параметры указанной зависимости. Оцените погрешности рассчитанных коэффициентов.
3. Найдите среднюю абсолютную звездную величину цефеиды TT Aquilae.
4. Рассчитайте расстояние l до БМО и оцените погрешность Δl .
5. Оцените величину межзвёздного поглощения в фильтре V для цефеиды TT Aquilae (в $m/\text{кпк}$).



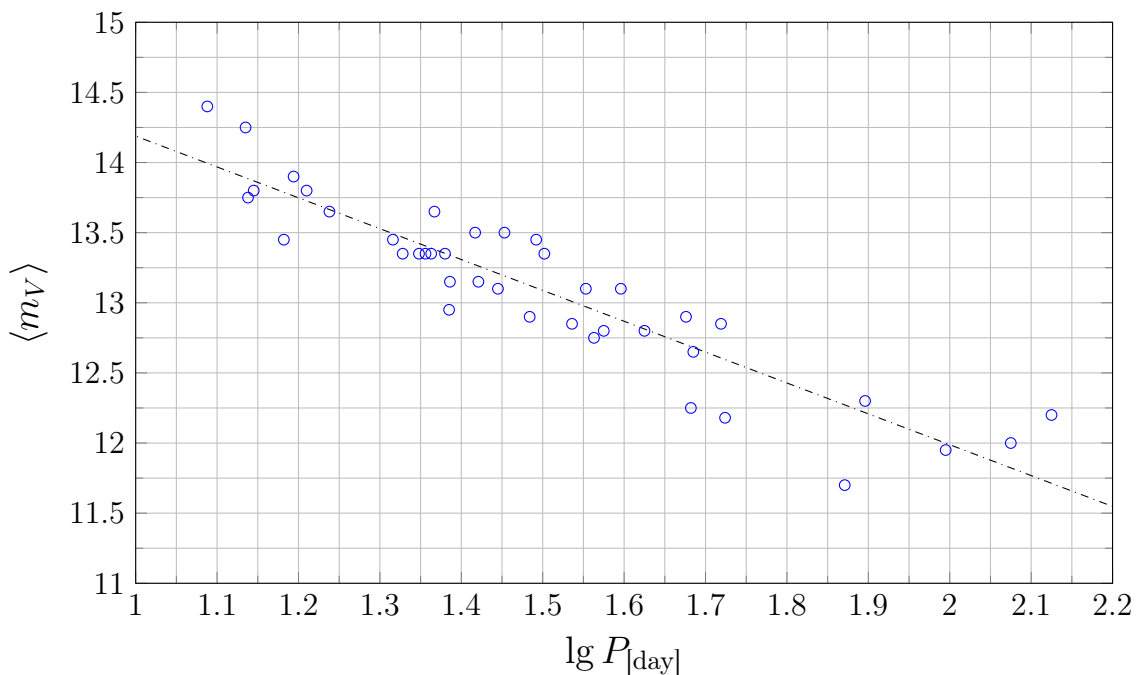
Решение:

А Поскольку периоды цефеид указаны непосредственно, необходимо лишь определить их средние звёздные величины. Кривые блеска в целом имеют «пилообразный» вид, поэтому положим

$$\langle m_V \rangle \simeq \frac{m_V^{\min} + m_V^{\max}}{2}. \quad (23)$$

Построим график в требуемых координатах и заметим, что зависимость имеет линейный вид. Её параметры, в том числе соответствующие погрешности, можно определить при помощи МНК (*IOAA way*) или графически:

$$\langle m_V \rangle = \boxed{-2.2 \pm 0.2} \lg P_{\text{day}} + \boxed{16.4 \pm 0.3}$$



В Средняя видимая звёздная величина ТТ Aquilae $\langle m_V^0 \rangle \simeq 7.2^m$, что соответствует абсолютной величине

$$\langle M_V^0 \rangle = \langle m_V^0 \rangle + 5^m + 5 \lg \pi'' - \frac{A}{\pi''} = M_\odot - 2.5 \lg \frac{\langle L \rangle}{L_\odot} = -4.5^m. \quad (24)$$

Расчёт даёт величину поглощения $A \approx 28^m/\text{кпк}$ (!), это существенно отличается от ожидаемого.

Сопоставив абсолютную и расчётную видимую звёздные величины, найдём модуль расстояния и само расстояние l до БМО:

$$\langle m_V^{\text{calc}} \rangle (\lg P_{\text{day}}^0) = 13.9 \pm 0.4; \quad (25)$$

$$\Delta \equiv \langle M_V^0 \rangle - \langle m_V^{\text{calc}} \rangle = 18.4 \pm 0.4 \implies l = 10^{\Delta/5+1} \text{ пк} = 48 \pm 10 \text{ кпк}. \quad (26)$$

Кривые блеска цефеид в БМО (миниатюры)

