Non est ad astra mollis e terris via

EOUQZFUMVGEFUFUM

Летние учебно-тренировочные сборы по астрономии
Летняя астрономическая школа
30 июня 2017 г.

Вступительный тест (часть С)

61. Для северного тропика Солнце опускается ниже всего под горизонт при склонении $\delta_\odot = -23.5°$, то есть в день зимнего солнцестояния, при этом прямое восхождение составляет $\alpha_\odot = 18^h$. В полночь Солнце находится в нижней кульминации, в верхней кульминации при этом будет находиться точка с прямым восхождением 6^h, то есть звёздное время будет равно 6^h.

Для южного тропика Солнце опускается ниже всего под горизонт при склонении $\Delta_\odot = +23.5°$, то есть в день летнего солнцестояния, при этом прямое восхождение составляет $\alpha_\odot = 6^h$, тогда звёздное время будет равно 18^h.

62. Данная задача была на региональном этапе Всероссийской олимпиады в 2014 году. Приводим авторское решение.

Скорости первой и второй протопланеты до столкновения были равны первой и второй космической скорости для данного расстояния до центрального тела:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Скорости одинаковых по массе тел были сонаправлены, и после абсолютно неупругого удара они слились в одно тело. По закону сохранения импульса, скорость нового тела будет равна среднему арифметическому скоростей исходных тел

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Орбита нового тела будет эллиптической, а точка слияния — перицентром этой орбиты. Для скорости в перицентре справедливо соотношение

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p}(1+e)}.$$

Приравнивая v и v_p, получаем:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2} = \sqrt{1+e}.$$

Эксцентриситет орбиты составит:

$$e = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} = 0.46.$$

63. Воспользуемся теоремами сферической тригонометрии. Кратчайший путь между двумя точками на сфере является частью большого круга, проходящего через данные точки. Рассмотрим сферический треугольник, содержащий Южный полюс (P), Лиму (L) и Джокьякарту (D). Наиболее южная точка (H) маршрута будет основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону DL вдоль поверхности сферы.

Запишем выражения для сторон треугольника PLD: $PL = 90° - |\varphi_{\rm L}|$, $PD = 90° - |\varphi_{\rm D}|$. Также $\angle LPD = \Delta\lambda = 360° - \lambda_{\rm D} - \lambda_{\rm L} = 172°37'$.

Определим сторону DL из теоремы косинусов для сферического треугольника PLD:

$$\cos DL = \cos PL \cos PD + \sin PL \sin PD \cos\angle LPD = \sin|\varphi_{\rm L}|\sin|\varphi_{\rm D}| + \cos|\varphi_{\rm L}|\cos|\varphi_{\rm D}|\cos\Delta\lambda,$$

откуда $DL \approx 158.8°$.

Запишем теорему синусов для сферического треугольника PLD:

$$\frac{\sin DL}{\sin\angle LPD} = \frac{\sin PL}{\sin\angle LDP} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\sin DL}{\sin\angle LPD} = \frac{\cos|\varphi_L|}{\sin\angle LDP} \quad\Longrightarrow\quad \sin\angle LDP = \frac{\sin\angle LPD}{\sin DL}\cos|\varphi_L|.$$

Теперь рассмотрим сферический треугольник PDH, запишем для него теорему синусов:

$$\frac{\sin\angle LDP}{\sin PH} = \frac{\sin\pi/2}{\sin PD} \quad\Longrightarrow$$
$$\sin PH = \cos|\varphi_{\rm D}|\sin\angle LDP = \cos|\varphi_{\rm D}|\frac{\sin\angle LPD}{\sin DL}\cos|\varphi_L| \quad\Longrightarrow\quad PH \approx 20.1°.$$

Широта места равна $90° - PH = 69.9°$ ю.ш.

64. Пусть общее количество звёзд равно N. Сначала определим, до какого расстояния мы можем видеть звезду каждого из трех типов при наблюдении невооруженным глазом. Предельная видимая звездная величина при наблюдении невооруженным глазом равна 5.8^m.

1. Звезды типа Солнца имеют видимую звездную величину $m = -26.8^m$. Для предельного расстояния по формуле Погсона $5.8^m - (-26.8^m) = 5\lg(r/1\text{ а.е.})$, отсюда $r \approx 16$ пк.
2. Звезды с массой 0.8 масс Солнца обладают светимостью $L = L_\odot(0.8)^{3.9} \approx 0.41L_\odot$, тогда на расстоянии 1 а.е. такая звезда обладает $m = -26.8 + 2.5\lg(L_\odot/L) = -25.8^m$. Для предельного расстояния по формуле Погсона $5.8^m - (-25.8^m) = 5\lg(r/1\text{ а.е.})$, отсюда $r \approx 10.1$ пк.
3. Для белых карликов имеем $L = 0.001L_\odot$, тогда на расстоянии 1 а.е. такая звезда обладает $m = -26.8 + 2.5\lg(L_\odot/L) = -19.3^m$.
   Для предельного расстояния по формуле Погсона $5.8^m - (-19.3^m) = 5\lg(r/1\text{ а.е.})$, отсюда $r \approx 0.5$ пк.

Мы получили радиусы сфер, внутри которых можем наблюдать соответствующие звезды. Объёмы сфер пропорциональны кубу радиуса, тогда невооруженным глазом мы видим следующее число звёзд:

$$N_1 = 0.4N\cdot(16/30)^3 + 0.5N\cdot(10.1/30)^3 + 0.1N\cdot(0.5/30)^3 \approx 0.08N.$$

Определим предельную видимую звёздную величину, объекты с которой еще доступны для наблюдения в телескоп (D_e — диаметр зрачка человеческого глаза, ≈ 5 мм):

$$m - 5.8 = 2.5\lg(D_e^2/D^2) \quad\Longrightarrow\quad m = 5.8 + 5\lg(D_e^2/D^2) \approx 12.3^m.$$

Аналогично определяем предельные расстояния, на которых присутствующие в скоплении звезды доступны для наблюдений:

1. Звёзды типа Солнца: $12.3^m - (-26.8^m) = 5\lg(r/1\text{ а.е.})$, отсюда $r \approx 3.1\cdot10^2$ пк, что превышает размеры скопления.

2. Звёзды с массой 0.8 масс Солнца: $12.3^m - (-25.8^m) = 5\lg(r/1\text{ а.е.})$, отсюда $r \approx 2 \cdot 10^2$ пк, что также превышает размеры скопления.
3. Белые карлики: $12.3^m - (-19.3^m) = 5\lg(r/1\text{ а.е.})$, отсюда $r \approx 10$ пк.

Таким образом, в телескоп мы можем наблюдать все звезды скопления первых двух видов, тогда $N_2 = 0.4N + 0.5N + 0.1N \cdot (10.1/30)^3 \approx 0.9N$.

Отношение $N_2/N_1 \approx 11.3$.

65. Оцените ширину линии H_α в спектр Солнца. Линии водорода H_α в спектре Солнца уширяются за счет эффекта Доплера, выражаемого формулой: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$, где v — лучевая скорость частицы (относительно наблюдателя), излучающей квант на длине волны λ_0. Скорость частицы складывается из тепловой скорости газа $v_T = \sqrt{3RT/\nu}$ и скорости вращения Солнца $v_\odot = \frac{2\pi R_\odot}{T_\odot}$. Для получения максимального смещения нужно взять максимальную скорость. Очевидно, что максимальной скоростью удаления будут обладать частицы на краю Солнца, вращающемся от нас, и движущихся с тепловой скоростью от нас. Скорости v_T и $v_\odot$ равны соответственно 12 и 2 км/с. Берем за v их сумму, равную 14 км/с. Далее из формулы для эффекта Доплера имеем $\Delta\lambda = 0.3$ Å. Но уширение происходит в две стороны, за счет удаления и приближения, поэтому окончательный ответ нужно удвоить: 0.6 Å.

66. Обозначим через $S(r)$ площадь сферического слоя толщины dr на расстоянии r от центра сферы:

$$M = \int_0^R S(r)\rho(r)\,dr = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_0 \frac{R-r}{R}\,dr = \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^R (Rr^2 - r^3)\,dr = \frac{4\pi\rho_0}{R}\left(\frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}.$$

67. Максимальная продолжительность будет достигнута при прохождении центра Луны по диаметру Солнца. В таком случае время прохождения T можно вычислить: $T = (\rho_\oplus + \rho_☾)/\omega$.

От момента первого касания до момента последнего касания центр Луны проходит расстояние равное сумме углового диаметра Солнца и Луны ($\rho_\oplus$ и $\rho_☾$ соответственно). Угловая скорость движения Луны относительно Солнца $\omega = \omega_☾ - \omega_\odot = 2\pi(1/T_☾ - 1/T_\odot = 0.51\ '/\text{мин}$ — разность угловых скоростей, т. е. угловая скорость соотнесенная с синодическим периодом обращения Луны. Угловые диаметры находим как отношение линейного диаметра к расстоянию для объекта, для Солнца и Луны это будет $31.9'$ и $31.1'$ соответственно. Теперь имеется все для того, чтобы получить искомую продолжительность солнечного затмения $T = 2^h 4^m$.

68. Известно, что вклад в ускорение свободного падения внутри однородного шара даёт только шар радиусом, равным расстоянию от точки до центра исходного шара. Таким образом, вклад дает только масса $M(x) = \frac{4\pi}{3}\rho x^3$ шара с радиусом x, где за x берется расстояние от центра Земли. Уравнение движения относительно x (единственная координата) имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM(x)}{x^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho Gx.$$

Вид уравнения гармоничен, круговая частота $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}$ равна $\sqrt{GM_\oplus/R_\oplus^3}$ после подстановки плотности

$$\rho = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3},$$

где $M_\oplus$ и $R_\oplus$ — масса и радиус Земли. Таким образом, зная частоту, найдем период $T = 2\pi/\omega = 84$ минуты. Но по условию задачи нам нужна половина периода. Ответ: 42 минуты.