XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Смоленск, 2017 г.

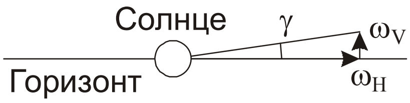
Теоретический тур

IX.1 СЕВЕРНЫЙ ЭКСПРЕСС

О.С. Угольников

Условие. Поезд движется точно на север. При наблюдении из этого поезда в момент пересечения Северного полярного круга Солнце появилось в точке севера и стало восходить, двигаясь под углом 5 градусов к горизонту. Определить скорость поезда. Рельефом Земли, рефракцией и угловыми размерами Солнца пренебречь.

Решение. Если в момент пересечения Северного полярного круга Солнце оказалось в точке севера, значит, дело происходило вблизи летнего солнцестояния, и склонение Солнца было равно ε=23.4°. Если бы наблюдатель на Земле был неподвижным, движение Солнца в этот момент происходило бы вдоль горизонта с угловой скоростью



$$\omega_{\text{H}} = \frac{2\pi\ \cos\varepsilon}{T} = 13.8^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь T – продолжительность солнечных суток. Движение поезда со скоростью v на север, в направлении восходящего Солнца, приводит к появлению вертикальной компоненты

$$\omega_{\text{V}} = \omega_{\text{H}}\,\text{tg}\gamma\ = \frac{v}{R} = 1.2^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь R – радиус Земли. Отсюда мы получаем выражение для скорости поезда:

$$v = \frac{2\pi R\cos\varepsilon\ \cdot \text{tg}\,\gamma}{T} = 135\ \text{км/ч}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задания разделяется на три этапа:

1 этап: 4 балла.
Выражение угловой скорости горизонтального перемещения Солнца или углового движения точки Земли с вокруг оси. Если при этом опускается множитель cos ε, и ответ слегка

завышен, то оценка снижается на 1 балл (сумма за этап – 3 балла), дальнейшие вычисления оцениваются в полной мере.

2 этап: 2 балла.

Анализ вертикального перемещения Солнца, вычисление соответствующей угловой скорости.

3 этап: 2 балла.

Окончательное вычисление линейной скорости движения поезда.

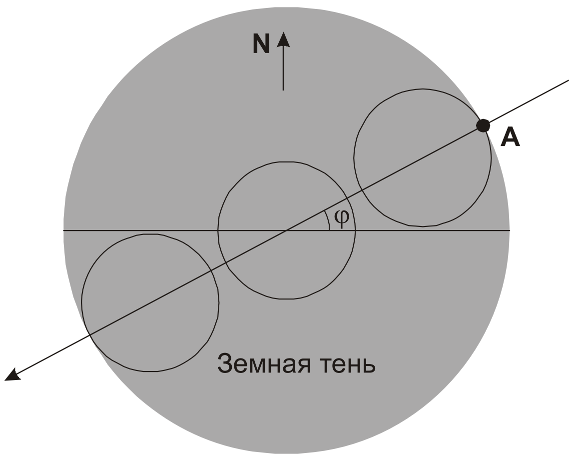
Вероятная ошибка при решении: участники могут предположить, что при учете вращения Земли сам поезд движется под углом 5° к параллели, что не соответствует действительности. Линейная скорость вращения Земли на полярном круге составляет 660 км/ч, и скорость поезда получается равной 58 км/ч. В подобном решении не оценивается первый этап (0 баллов из 4). За второй этап выставляется 1 балл из 2; третий этап засчитывается полностью в случае правильного математического выполнения с получением ответа 58 км/ч. Максимальная оценка за решение составляет 3 балла, она снижается в случае ошибок при выполнении.

IX.2 ТЕНЬ САХАРЫ НА ЛУНЕ

О.С. Угольников

Условие. На Земле наступило полное лунное затмение. В ходе его наблюдений в момент начала полной фазы ученые получили возможность исследовать состав атмосферы Земли над пустыней Сахара (28° с.ш., 10° в.д.), а в середине затмения центр видимого диска Луны совпал с центром земной тени. Определите примерную дату и всемирное время начала полного затмения. Было ли это затмение видно в России?

Решение. Изобразим путь Луны сквозь земную тень на небесной сфере так, чтобы верх рисунка соответствовал направлению на север – так, как это делается во всех астрономических справочниках. Тогда горизонтальное направление будет параллельно небесному и земному экватору.



Всю земную тень можно воспринимать как некое прямое изображение дневного полушария Земли (или зеркальное изображение ночного полушария), перенесенное на небесную сферу. Верхняя точка может не совпадать с северным полюсом (совпадение будет только в дни равноденствий), но боковые точки будут всегда соответствовать экватору.

В момент начала полной фазы солнечные лучи, идущие в тень Земли, проходили в земной атмосфере над точкой, соответствующей точке **A** края тени. Коль скоро она соответствует широте +28°, направление на точку **А** из центра тени должно образовывать с экватором угол, не меньший этой величины. Нам известно, что затмение было центральным. Максимальный угол между видимым путем Луны и экватором как раз близок к 28° (это сумма наклона экватора и наклона орбиты Луны к эклиптике). Этот угол достигается в равноденствия. Коль скоро Луна движется сквозь тень на юг, дело происходило вблизи весеннего равноденствия (сама Луна располагалась на небе около точки осеннего равноденствия).

Чтобы определить Всемирное время начала полной фазы учтем, что на точке Земли, соответствующей точке тени **А**, в этот момент наблюдался заход Солнца. Местное время T там составляло 18 часов. Обозначив долготу через λ и выразив ее в часовой мере, получаем выражение для Всемирного времени:

$$UT = T - \lambda = 17ч20м.$$

Затмение было видно на большей части территории России, где в это время ночь.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на четыре этапа, которые можно выполнять в разной последовательности:

1 этап: 3 балла.
Необходимо установить путь Луны через земную тень и указать, что дело происходило в весеннее равноденствие. Если при правильных рассуждениях участники олимпиады путают весеннее равноденствие с осенним, из этих 3 баллов выставляется только 1, но оставшееся решение оценивается в полной мере.
2 этап: 3 балла.
Необходимо сделать вывод, что в указанной точке Земли в момент начала затмения Солнце заходит за горизонт, либо другим способом верно описать положение полуденной или полуночной линии или терминатора на Земле. Если вместо вывода о заходе Солнца в Сахаре указывается восход Солнца, то вместо 3 баллов опять же выставляется только 1, при этом не оцениваются неверные выводы последнего этапа задания. Если указывается, что на Сахаре полночь, и Луна находится там в верхней кульминации, второй и третий этапы не оцениваются (0 баллов).
3 этап: 1 балл.
Определение Всемирного времени начала затмения. Один балл ставится только в случае правильного ответа.
4 этап: 1 балл.
Вывод о видимости затмения в России. Этот балл ***не выставляется***, если вывод о видимости делается без правильных обоснований, идущих из предыдущих этапов решения.

IX/X.3 ПЛАНЕТНОЕ ТРИО

О.С. Угольников

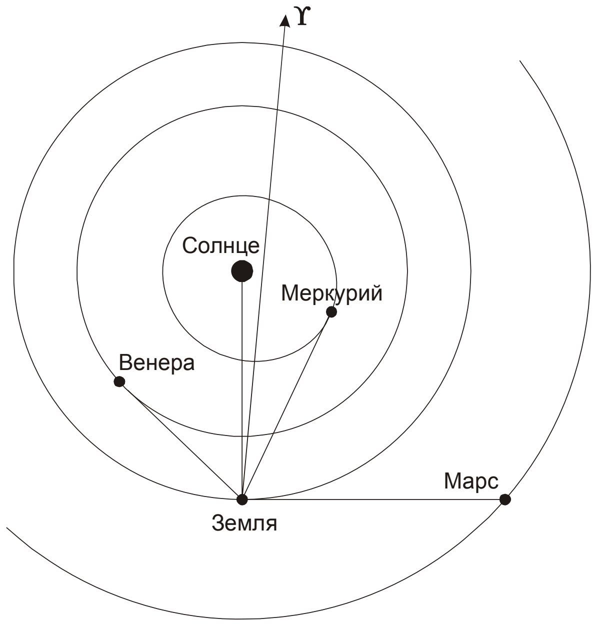
Условие. В таблице приведены экваториальные координаты Меркурия, Венеры и Марса на Земле в некоторый момент времени. Считая орбиту Марса круговой, определите его угловой диаметр в этот момент.

Планета	Прямое восхождение, α	Склонение, δ
Меркурий	22ч33.2м	–10° 27′
Венера	03ч06.0м	+20° 34′
Марс	18ч15.7м	–23° 32′

Решение. Казалось бы, задачу нельзя решить, не зная текущую конфигурацию Марса, зависящую от неизвестного положения Солнца. Однако мы можем подметить интересную особенность – внутренние планеты, Меркурий и Венера, располагаются необычно далеко друг от друга. Они находятся вблизи эклиптики по разные стороны от экватора, и угловое расстояние между ними можно найти по теореме Пифагора:

$$\lambda_{MV} = \sqrt{(\alpha_V - \alpha_M)^2 + (\delta_V - \delta_M)^2} = 75^O.$$

Здесь прямое восхождение Меркурия α_M уменьшено на 24 часа. Угловое расстояние между планетами равно сумме их максимальных элонгаций от Солнца: 28° для Меркурия и 47° для Венеры. Такое может быть, только если одновременно наступила наибольшая западная элонгация Меркурия (28°) и наибольшая восточная элонгация Венеры (47°). В этом случае мы можем найти положение Солнца на небе достаточно простым образом:



$$\alpha_0 = \alpha_M + \frac{28}{75}(\alpha_V - \alpha_M) = 0ч\,15м;$$

$$\delta_0 = \delta_M + \frac{28}{75}(\delta_V - \delta_M) = +0^O 45'.$$

Планеты не находятся точно на эклиптике, сделанные расчеты приближенные, поэтому положение Солнца также не попало точно на эклиптику. Главный вывод, который можно сделать по прямому восхождению Солнца – оно находится в 90° к востоку от Марса, и последний находится в западной квадратуре. Считая его орбиту круговой (орбита Земли тоже близка к окружности), определяем угловой диаметр планеты:

$$d = \frac{D}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} = 4 \cdot 10^{-5}\ рад = 8''.$$

Здесь a и a_0 – радиусы орбит Марса и Земли, D – физический диаметр Марса.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение углового расстояния между Меркурием и Венерой. Это можно делать как точно, так и приближенно, проецируя участок небесной сферы на плоскость.
2 этап: 2 балла.
Вывод о том, что Меркурий и Венера находятся в противоположных наибольших элонгациях.
3 этап: 1 балл.
Определение положения Солнца на небе (приближенно) в данный момент.
4 этап: 1 балл.
Вывод о квадратуре Марса либо вычисление его углового расстояния от Солнца.
5 этап: 2 балла.
Вычисление углового диаметра Марса.

Если участник сразу необоснованно пишет, что Марс располагается в квадратуре, то засчитаны могут быть только 4 и 5 этапы, и наибольшая оценка за все решение не может быть больше 3 баллов.

Возможный альтернативный подход к решению: участник олимпиады может определить диапазон возможных угловых расстояний Марса от Солнца, исходя из углового расстояния между Марсом и Меркурием, а потом провести такой же анализ, исходя из углового расстояния между Марсом и Венерой. Пересечение этих интервалов дает узкое множество возможных значений углового расстояния между Марсом и Солнцем около 90°. При условии верного выполнения такое решение засчитывается в полной мере.

Возможная ошибка при решении: максимальная элонгация Меркурия определяется в предположении его круговой орбиты и составляет 23°. Из этого делается вывод, что Меркурий и Венера не могут быть так далеко на небе друг от друга, и задание решения не имеет. В этом случае выставляется только 2 балла за первый этап решения.

IX.4 ЗВЕЗДА У ЗЕНИТА

О.С. Угольников

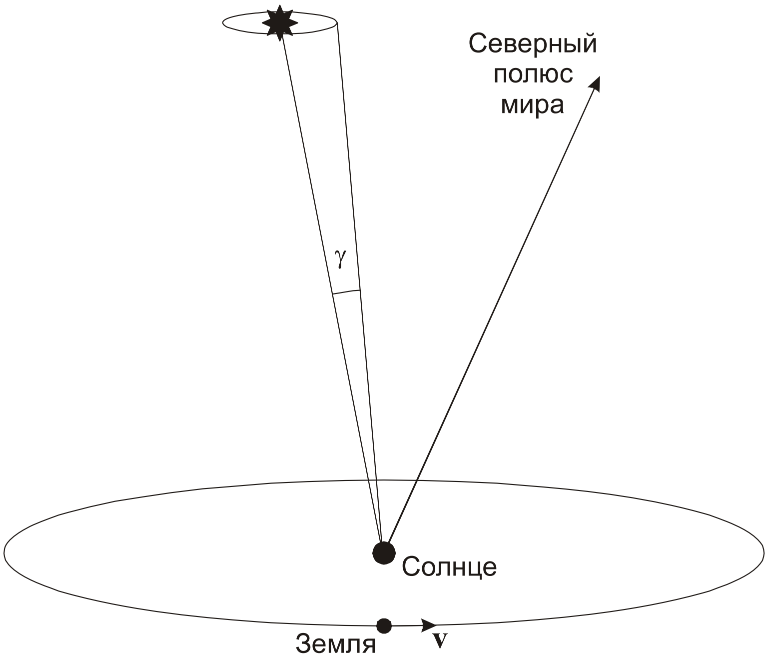
Условие. В начале XVIII века английский астроном Джеймс Бредли пытался определить параллакс звезды Этамин (γ Дракона) в обсерватории в Ванстеде, Лондон (51°34′40″ с.ш., 0°01′43″ в.д.). Параллакс он не обнаружил, но открыл явление аберрации света, вызванное движением Земли и конечностью скорости света. Тем самым Бредли доказал вращение Земли вокруг Солнца и существенно уточнил величину скорости света. В какой сезон и в какое местное (среднее солнечное) время эта звезда оказывалась ближе всего к зениту? Чему было равно минимальное зенитное расстояние звезды? Склонение звезды на эпоху наблюдений было равно +51°32′06″, прямое восхождение считать равным точно 18ч. Эксцентриситетом орбиты Земли, прецессией, уравнением времени, нутацией, параллаксом и собственным движением звезды пренебречь.

Решение. Аберрация света – явление отклонения положения звезды на небе, вызванное орбитальным движением Земли. Аберрационное смещение звезды направлено к точке неба, к которой движется Земля в настоящий момент. В общем случае (вообще говоря, не требующемся для решения данной задачи) величина аберрационного смещения в радианах равна

$$\gamma = v \sin\theta / c,$$

где v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, θ – угол между скоростью и направлением на звезду. Величина аберрации максимальная, когда движение нашей планеты происходит перпендикулярно направлению на звезду. Для указанной в условии задачи звезды Этамин близкая к этому ситуация наблюдается постоянно, так как эта звезда располагается недалеко от северного полюса эклиптики (прямое восхождение 18ч, склонение +66.6), угол θ всегда не меньше 75°, а его синус – не меньше 0.966. В этом случае звезда описывает на небе за год круг, а величина аберрации составляет

$$\gamma = v/c = 10^{-4} \text{ рад} \sim 20''.$$



Мы видим, что склонение звезды примерно на 2′ меньше широты обсерватории. Чтобы зенитное расстояние было минимальным, аберрационное смещение звезды должно быть направлено на север, вдоль меридиана. Это может быть, если Земля движется в направлении самой северной точки эклиптики – точки летнего солнцестояния, которая находится по другую сторону от полюса мира. Это имеет место около дня осеннего равноденствия 23 сентября. Минимальное зенитное расстояние звезды в этот день составляло

$$z = \varphi - \delta - \gamma = 2'14''.$$

Очевидно, это имело место в момент верхней кульминации звезды. В день осеннего равноденствия звездное время совпадает с местным, поэтому верхняя кульминация наступила в 18ч по местному времени.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Правильное указание направления сдвига звезды за счет аберрации, описанное явно или следующее из решения.
2 этап: 1 балл.
Правильное указание величины аберрационного смещения звезды как известного, либо его получение на основе значения орбитальной скорости Земли.
3 этап: 2 балла.

Определение сезона, в который достигается минимум зенитного расстояния. Если в качестве момента указывается весеннее равноденствие или другой сезон, отличный от верного, оценка за 3 этап составляет 0 баллов.

4 этап: 2 балла.

Определение местного времени минимального зенитного расстояния. Если ошибка этой величины вызвана только неправильным выполнением 3 этапа, то 4 этап засчитывается полностью.

5 этап: 2 балла.

Нахождение минимального зенитного расстояния звезды.

Возможная ошибка при решении задачи: правильное определение величины аберрации, но ошибочное указание его направления (например, на 180° или на 90°, путая с явлением параллакса). В этом случае полностью не засчитывается первый этап (1 балл) и третий этап (2 балла) решения. Второй, четвертый и пятый этап засчитываются при условии их правильного выполнения (при этом значение местного времени будет иным). Максимальная оценка составляет 5 баллов.

Возможная ошибка при решении задачи: полное игнорирование явлением аберрации с вычислением минимального зенитного расстояния для заданных гелиоцентрических координат Земли (оно будет равно 2′34″). В этом случае засчитан может быть только пятый этап решения, оценка не может превышать 2 баллов при условии правильного выполнения.

IX.5 ВБЛИЗИ ДВОЙНОГО КАРЛИКА

М.И. Волобуева

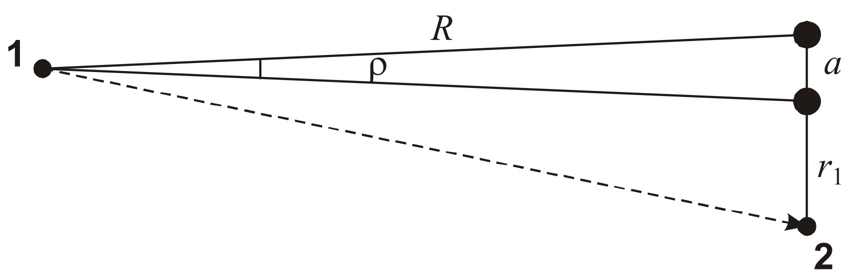
Условие. Штурман космического корабля наблюдает за двойной системой, состоящей их двух одинаковых белых карликов с массой каждого, равной массе Солнца, движущихся по круговой орбите с периодом 7.9 лет. В некоторый момент расстояние от корабля до обеих компонент системы было одинаковым, видимый блеск каждой из них был равен -1^m, а угловое расстояние между ними составляло 14′19.4″. Через некоторое время корабль, пролетая вблизи этой системы, оказался практически на одной линии со звездами на расстоянии 15 а.е. от ближайшей из них. Какую суммарную звездную величину будет иметь система в этот момент, если штурман видит обе звезды полностью?

Решение. Выражая массу компонент в массах Солнца, период в годах, а расстояние – в астрономических единицах, запишем III закон Кеплера и найдем расстояние между белыми карликами:

$$a = (T^2 \cdot (M_1 + M_2))^{1/3} = 5.0 \text{ а.е.}$$

В момент t_1, когда расстояние от корабля до обеих звезд одинаково, отрезок, соединяющий центры звезд, перпендикулярен лучу зрения. Отсюда получаем расстояние от каждой из компонент до корабля

$$R = a \,/\, \rho \text{ (рад)} = 1200 \text{ а.е.}$$



Здесь ρ – угловое расстояние между звездами. В момент t_2, когда корабль оказался на одной линии со звездами, первая компонента оказалась ближе в 1200/15=80 раз, вторая – в 1200/(15+5)= 60 раз. Так как блеск обратно пропорционален квадрату расстояния, то суммарный блеск компонент в момент t_2 возрос в $60^2+80^2=10000$ раз по сравнению с блеском одиночной звезды в момент t_1, что соответствует разнице в 10^m. Таким образом, суммарный блеск системы в момент t_2 составит $-1^m -10^m = -11^m$.

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на несколько элементарных этапов, которые можно выполнять в разной последовательности.

1 этап: 2 балла.
Определение расстояния между двумя белыми карликами. Если при этом не учитывается их двойная масса (по сравнению с Солнцем), эти 2 балла не выставляются, но оставшаяся часть решения, несмотря на вытекающие ошибки, оценивается в полной мере.
2 этап: 1 балл.
Определение расстояния от звезд до корабля в первый момент времени.
3 этап: 2 балла.
Определение расстояния от корабля до каждой из звезд во второй момент времени (по 1 баллу за каждое). Данные величины могут не быть записаны в явном виде, но учитываться при вычислениях.
4 этап: 3 балла.
Нахождение звездной величины системы во второй момент времени. В случае ошибок, связанных с пренебрежением того, что в первый момент времени обе звезды светили как -1m каждая, оценка уменьшается на 1 балл.

IX/X.6 К НОВЫМ ГОРИЗОНТАМ

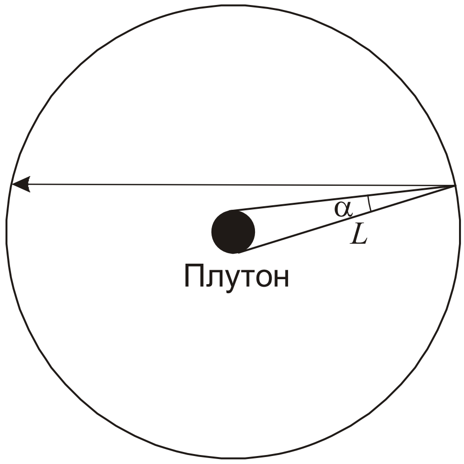
С.Г. Желтоухов

Условие. Когда межпланетная станция New Horizons пролетала около Плутона (радиус 1190 км) на расстоянии 33 а.е. от Солнца, угловой диаметр Плутона был больше одного градуса всего около 5 часов. В середине этого интервала угловой диаметр Плутона достиг 10°. Сможет ли эта межпланетная станция вылететь из Солнечной системы? Оцените, за какое время станция долетит до орбиты тела 2014 MU69, если радиус этой орбиты равен 44 астрономическим единицам. Орбиту этого тела можно считать круговой.

Решение. Определим расстояние L, с которого Плутон виден как диск с угловым диаметром α:

$$L = \frac{2R}{sin\alpha} = 135000 \text{ км.}$$

Если считать траекторию аппарата около Плутона прямой, проходящей вблизи Плутона (на это указывает большой угловой диаметр в середине интервала), а его скорость v – постоянной, то она будет равна $2L/t$ = 54000 км/ч или 15 км/с. Это существенно больше второй космической скорости даже на поверхности Плутона. Поэтому мы можем считать, что притяжение самого Плутона не оказало существенного влияния на скорость аппарата.



Сравним теперь полученную скорость (относительно Плутона) со скоростью движения по параболической орбите на таком расстоянии от Солнца a_1 (выраженном в астрономических единицах):

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{2}{a_1}} = 7.3 \text{ км/с.}$$

Здесь v_0 – круговая скорость на орбите Земли. Полученная скорость вдвое меньше скорости "Новых Горизонтов". Вне зависимости от направления движения относительно Плутона гелиоцентрическая скорость аппарата больше второй космической, и он может покинуть Солнечную систему.

Обратим внимание, что аппарат, имея столь высокую скорость, прилетел из внутренних областей Солнечной системы, с Земли. Следовательно, аппарат движется вблизи Плутона в направлении, близком к радиальному (от Солнца), перпендикулярно движению самого Плутона. Его гелиоцентрическая скорость мало отличается от плутоно-центрической и близка к v. Движение от Плутона к астероиду 2014 MU69 будет происходить по прямой линии с практически постоянной скоростью. Это займет время

$$t = \frac{a_2 - a_1}{v} = 3.5 \text{ года.}$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение расстояния, с которого Плутон имеет заданные угловые размеры.
2 этап: 2 балла.
Определение скорости аппарата относительно Плутона. В случае ошибки в 2 раза, вызванной путаницей радиусов и диаметров, эти 2 балла не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Предположение, что аппарат летел по хорде в случае правильного вычисления длины хорды оценивается в полной мере.
3 этап: 1 балл.
Вывод о том, что аппарат сможет покинуть Солнечную систему.
4 этап: 1 балл.
Вывод о радиальном направлении скорости аппарата. Если этот вывод не делается, то данный балл не выставляется даже при последующем верном решении.
5 этап: 2 балла.
Расчет времени перелета аппарата к астероиду 2014 MU69.

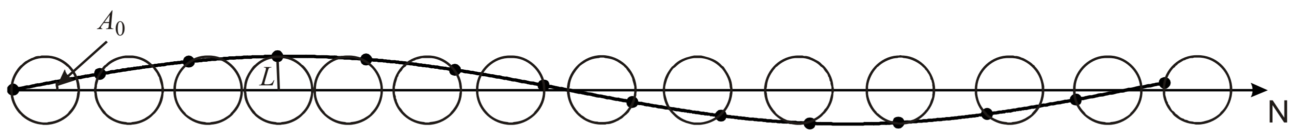
X.1 ПУТЕВОДНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

Условие. Океанский корабль движется в сторону севера, пересекая параллель +60° с.ш. Капитан корабля держит курс точно на Полярную звезду, забыв о том, что она не находится точно в Северном полюсе мира (склонение звезды на текущую эпоху +89°20′). Каково максимальное смещение корабля (в км) от прямолинейного курса (меридиана), если его скорость равна 30 км/ч? Считать, что оптические приборы на борту позволяют видеть Полярную звезду даже днем.

Решение. Полярная звезда не находится точно в Северном полюсе мира и описывает вокруг него суточный круг с радиусом ρ, равным 40′. Центр этого круга располагается на высоте φ=60°, на альмукантарате с длиной, вдвое меньшей горизонта (большого круга небесной сферы). Поэтому азимут Полярной звезды изменяется практически синусоидально с периодом в звездные сутки T и амплитудой A_0 (отклонением от севера) в $\rho/\cos\varphi$ = 80′. В момент, когда азимут отличается от северного на эту величину, у скорости корабля появляется компонента, направленная вдоль параллели, и равная

$$v_P = v \sin A_0 = 0.70 \text{ км/ч.}$$



Здесь v – полная скорость корабля. Он идет по синусоиде, и этот путь можно представить как наложение прямолинейного и слегка неравномерного движения на север и вращения по кругу со скоростью v_P и периодом T. Максимальное отклонение корабля от курса есть радиус этого круга:

$$L = \frac{v_P T}{2\pi} = \frac{v \sin A_0 T}{2\pi} \approx \frac{v \rho T}{2\pi \cos\varphi} = 2.7 \text{ км.}$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

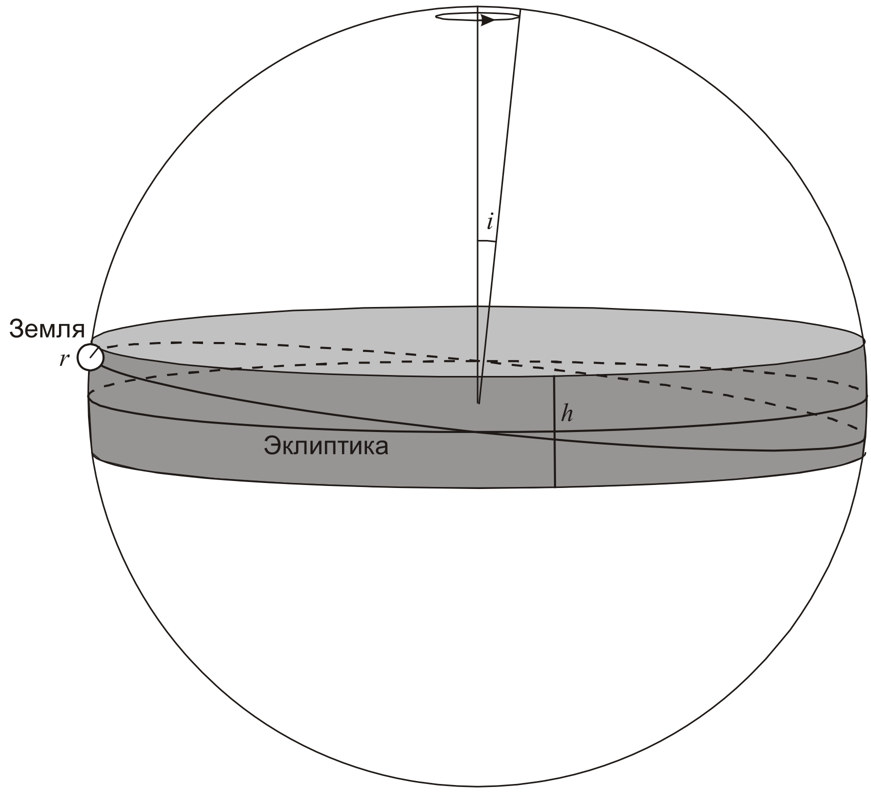
1 этап: 3 балла.
Определение максимального отклонения азимута Полярной звезды от направления на север. Это оценивается в 3 балла. Если при этом не учитывается фактор cos φ с итоговой ошибкой в 2 раза, данные 3 балла не выставляются, но оставшееся решение оценивается в полной мере.
2 этап: 2 балла.
Определение максимальной величины компоненты скорости корабля перпендикулярно меридиану.
3 этап: 3 балла.
Вычисление максимального отклонения от прямолинейного курса. Второй и третий этапы могут выполняться вместе без промежуточных численных выводов. Может использоваться как «модель круга», так и прямой анализ синусоидального движения.

X.2 ЛУННЫЙ ЗВЕЗДНЫЙ КАТАЛОГ

О.С. Угольников

Условие. На стационарной лунной обсерватории будущего проводится изучение атмосферы Земли на основе спектроскопии звезд у земного лимба. Для этой цели создан каталог звезд ярче 6^m, которые могут покрываться Землей при наблюдении из этой обсерватории. Оцените количество звезд в этом каталоге.

Решение. Перечислим все факторы, которые будут влиять на размер области неба, которая может быть покрыта Землей при наблюдении с лунной обсерватории. Земля имеет значительный угловой размер (максимально возможный радиус r около 1.02°) и движется относительно звезд вдоль линии пересечения небесной сферы и плоскости орбиты системы Земля-Луна. Ось этой линии наклонена на угол i (5.15°) к оси эклиптики и вращается вокруг нее с периодом 18.6 лет. Таким образом, Земля в своем движении заметает пояс вдоль эклиптики шириной



$$h = 2\,(i + r) \sim 12.3°.$$

Мы не учитываем здесь параллактический сдвиг Земли, зависящий от положения точки на Луне, так как за счет синхронного осевого вращения Луны этот сдвиг будет почти постоянным и приведет только к смещению серой области на рисунке как единого целого. Влияние лунных либраций будет исчисляться несколькими сотыми градуса, что можно не учитывать. Если лунная обсерватория установлена вдали от полюсов, то в разные моменты времени с нее будут доступны все участки области небесной сферы, которые могут быть покрыты Землей. Определим отношение площади данной области и всего неба:

$$\eta = \frac{2\pi R^2 h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2} \approx 0.107.$$

Если считать, что 6000 звезд ярче 6^m распределены по небесной сфере равномерно (это можно делать, так как эклиптика образует большой угол с Млечным путем), то в данный каталог должно войти около 650 звезд.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 5 баллов.
Указание факторов, определяющих размер области неба, покрываемой Землей: прецессии плоскости орбиты системы Земля-Луна ($2i$ = 11.3°, 3 балла) и видимые размеры Земли ($2r$ = 2.0°, максимальные или средние, 2 балла). Не-учет фактора 2 на каждом из этапов уменьшает оценку на 1 балл. Если вместо угла (i+r) участники берут близкую величину либрации Луны по широте (около 7°), оценка уменьшается на 2 балла, так как на либрацию влияет также наклон оси вращения Луны к плоскости ее орбиты, а на покрытиях звезд он не сказывается. Если участники олимпиады дополнительно учитывают параллактическое смещение Земли за счет либраций (2*0.03°) – это не изменяет оценку, если же они берут полный параллакс (2*0.25°) – оценка уменьшается на 2 балла, так как при наблюдении из фиксированной точки Луны параллактическое смещение Земли практически постоянно. Неточности, допущенные на первом этапе, не являются основанием для снижения оценки на последующих этапах, если там не сделаны дополнительные ошибки.
2 этап: 2 балла.
Определение доли небесной сферы, где могут происходить покрытия. Эту долю участники могут считать как цилиндром, так и фрагментом сферы.
3 этап: 1 балл.
Определение числа звезд в каталоге. Необходимо принимать во внимание, что это лишь примерная оценка, участники могут брать несколько различающиеся значения общего числа ярких звезд на небе (5500-6500).

X.4 ЗВЕЗДА В ЗЕНИТЕ

О.С. Угольников

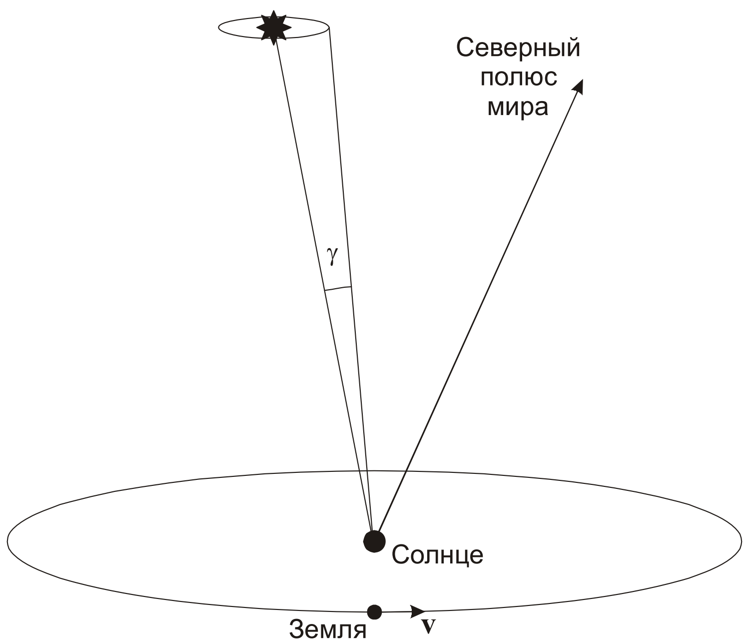
Условие. В какой сезон и в какое местное (среднее солнечное) время звезда Грумиум (ξ Дракона) может оказаться точно в зените в точке России с координатами 56°52′00″ с.ш., 30°00′00″ в.д.? Склонение звезды на эпоху 2017 года равно +56°52′13″, прямое восхождение считать равным точно 18ч. Эксцентриситетом орбиты Земли, уравнением времени, прецессией, нутацией, параллаксом и собственным движением звезды пренебречь.

Решение. Мы видим, что склонение звезды немного отличается от широты места наблюдения. Тем не менее, звезда может попасть в зенит, так как ее положение на небе смещается за счет аберрации света – явление, вызванного орбитальным движением Земли. Аберрационное смещение звезды направлено к точке неба, к которой движется Земля в настоящий момент. В общем случае (вообще говоря, не требующемся для решения данной задачи) величина аберрационного смещения в радианах равна

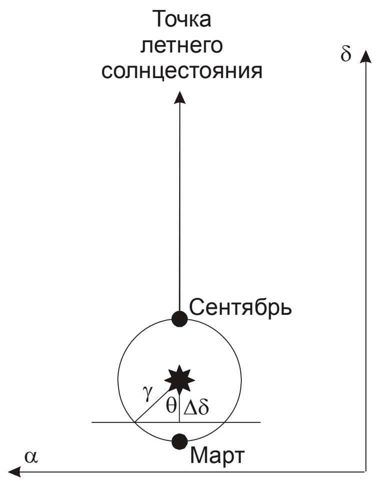
$$\gamma = v \sin\theta / c,$$

где v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, θ – угол между скоростью и направлением на звезду. Величина аберрации максимальна, когда движение нашей планеты происходит перпендикулярно направлению на звезду. Для указанной в условии задачи звезды Грумиум близкая к этому ситуация наблюдается постоянно, так как эта звезда располагается недалеко от северного полюса эклиптики (прямое восхождение 18ч, склонение +66.6°), угол θ всегда не меньше 80°, а его синус – не меньше 0.985. В этом случае звезда описывает на небе за год круг, а величина аберрации составляет

$$\gamma = v/c = 10^{-4}\ \text{рад} \sim 20''.$$



В день осеннего равноденствия, когда орбитальная скорость Земли направлена вдоль плоскости меридиана в направлении точки летнего солнцестояния (рисунок), аберрационное смещение направлено на север. В день весеннего равноденствия видимое положение звезды смещается на юг. Склонение звезды на $\Delta\delta$=13″ больше широты места наблюдения, и аберрация должна сместить ее на юг на эту величину.



Из рисунка видно, что условие задачи будет выполнено, если положение звезды на круге аберрации (и Земли на орбите) будет отстоять от положения, соответствующего весеннему равноденствию, на угол

$$\theta = \arccos\frac{\Delta\delta}{\gamma} \approx 50^{\circ} = 3ч20м.$$

Это происходит примерно за 51 день до и после весеннего равноденствия, то есть около 30 января и 10 мая. Если пренебречь уравнением времени, то звездное время в среднюю полночь S в эти дни равно 180 ± 50° или 12ч ± 3ч20м (январю соответствует знак "–", маю – знак "+"). Местное время верхней кульминации данной звезды в зените соответствует звездному времени, равному ее прямому восхождению α (его изменением за счет аберрации мы пренебрегаем) и равно

$$T = \alpha - S = 9\text{м}20\text{м или } 2\text{ч}40\text{м}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Указание аберрации света как причины изменения видимых экваториальных координат звезды.
2 этап: 1 балл.
Правильное указание величины аберрационного смещения звезды как известного, либо его получение на основе значения орбитальной скорости Земли.
3 этап: 2 балла.
Правильное указание направления сдвига звезды за счет аберрации в разные сезоны года, описанное явно или следующее из решения. Если направление отличается от правильного на значительный угол (90°, 180°), за 3 этап выставляется 0 баллов, но последующие этапы оцениваются в полной мере при условии их корректного выполнения.
4 этап: 2 балла.
Указание двух сезонов (каждый – по 1 баллу), в которые возможна кульминация звезды в зените. Учет изменения прямого восхождения звезды за счет аберрации на оценку не влияет.
5 этап: 2 балла.
Определение местного времени кульминации звезды в каждый из этих сезонов (по 1 баллу).

Возможная ошибка при решении: игнорирование явлением аберрации и вывод, что звезда в зенит не попадает. Оценка в этом случае составляет 1 балл.

X/XI.5 ОСКОЛКИ ЛУНЫ

Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников

Условие. Враждебные инопланетяне разрушили Луну, превратив ее в огромное количество шарообразных осколков диаметром 10 м. Все эти тела стали двигаться, равномерно заполнив пространство вокруг Земли между сферами размером с перигей и апогей лунной орбиты. Оцените концентрацию этих осколков и звездную величину всей полусферы ночного неба на Земле. Влиянием земной атмосферы пренебречь. Считать все осколки одинаковыми, а их плотность и оптические свойства аналогичными самой Луне.

Решение. Ответим сначала на первый вопрос задачи. Пусть R – радиус Луны (1738 км), а r – радиус осколка (5 м). Объем Луны составляет $(4/3)\pi R^3$, Объем осколка – $(4/3)\pi r^3$. Поскольку объем всех осколков равен объему Луны, полное число этих тел равно

$$N = (R/r)^3 = 4.2\cdot 10^{16}.$$

Пространство, заполненное осколками, представляет собой сферический слой со средним радиусом D (среднее расстояние от Земли до Луны) и толщиной $2De$ (e - эксцентриситет орбиты Луны), толщина существенно меньше радиуса. Объем этой области равен

$$V = 4\pi D^2\cdot 2De = 8\pi D^3 e = 7.8\cdot 10^{16}\ \text{км}^3.$$

Концентрация осколков $n=N/V$~0.55 км$^{-3}$. Если мы возьмем предельные значения расстояния Луны в перигее и апогее из справочных данных, то мы получим несколько большее значение объема (9.2·10^{16} км^3) и концентрации (0.45 км$^{-3}$).

Теперь нужно выяснить, какую яркость ночного неба будут создавать эти осколки. Казалось бы, мы можем достаточно просто решить эту задачу, определив яркость каждого осколка и умножив ее на число осколков видимых на небе. Луна и все осколки находятся на примерно одинаковом расстоянии от наблюдателя. Обозначив яркость Луны как J_0, получаем, что яркость одного осколка есть

$$j = Jr^2/R^2.$$

Из любой точки Земли будет видна примерно половина всех осколков. Их суммарная яркость составит

$$J = (N/2)\, j = JR/2r.$$

Соответствующая звездная величина будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg (JR / 2r) = m_0 - 13.1.$$

Сам по себе этот ответ уже вызывает удивление: небо оказывается очень ярким. Действительно, среднюю звездную величину Луны можно взять для фазы, близкой к первой или последней четверти, а можно определить, зная ее сферическое альбедо A:

$$m_0 = M_0 - 2.5\lg\frac{\pi R^2 A}{4\pi D^2} = M_0 - 2.5\lg\frac{R^2 A}{4D^2} = M_0 + 16.1 = -10.6.$$

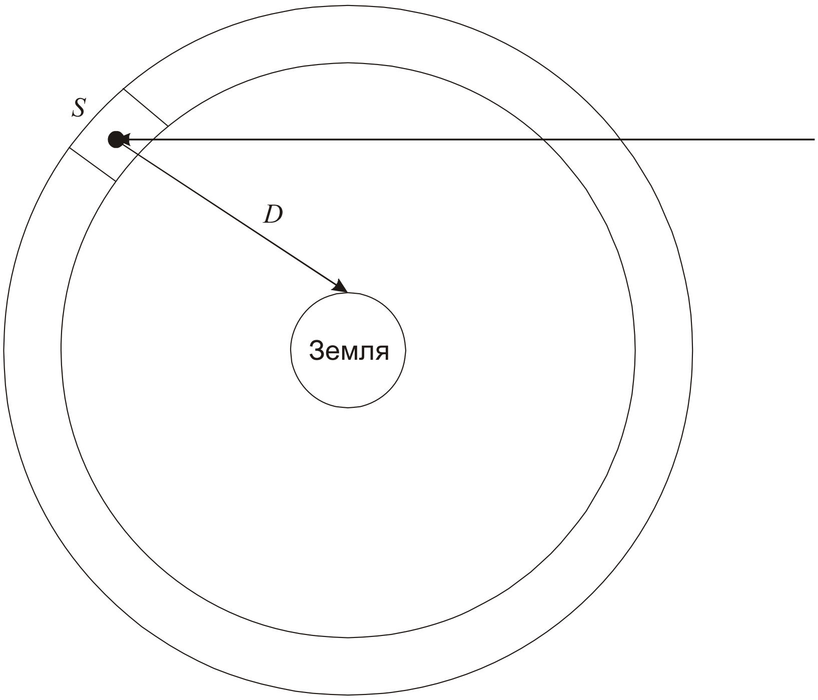
Выходит, что при сферическом альбедо 0.07 небо должно иметь величину –23.7^m, то есть всего на 3^m или в 16 раз слабее Солнца! Мысленно предположив большее альбедо (порядка единицы) и возможность наблюдения всей сферы из осколков, мы получим, что они светили бы ярче Солнца, чего не может быть (в реальности, даже при альбедо, равном единице, вся равномерно рассеивающая сфера не может светить ярче 1/4 от яркости Солнца).

Причина противоречия в том, что мы не учли высокую оптическую плотность слоя осколков. Умножим площадь, на которой осколок задерживает излучение (πr^2) на число осколков (R^3/r^3), и разделим это на площадь всей сферы:

$$\tau = \frac{\pi r^2 R^3}{r^3 4\pi D^2} = \frac{R^3}{4rD^2} = 1.8.$$

Полученная величина есть среднее количество осколков на пути луча, идущего перпендикулярно к слою (фактически, его оптическая толщина). Даже в этом случае осколки будут в заметной степени затенять друг друга. С другой стороны, коль скоро это число порядка единицы, значительное число света будет рассеиваться осколками и попадать к наблюдателю.

Точный расчет яркости сферы представляет собой достаточно сложную задачу, однако это можно сделать приближенно. Приведем один из наиболее простых и при этом эффективных способов. Рассмотрим одну из возможных траекторий луча света от Солнца к какому-либо осколку и далее к Земле.



Путь луча до осколка может быть разным, он может проходить через слой один или два раза с существенно разной длиной. Так как нас интересует полная яркость небесной полусферы, будем считать, что каждый равный элемент площади сферы S рассеивает одинаковое количество солнечного излучения. Будем считать, что вся солнечная энергия, попадающая на сферу, задерживается или рассеивается в ней (оптическая толщина по диаметру не менее 3.6, по хорде – еще больше). Сфера площадью $4\pi D^2$ за единицу времени задерживает $\pi D^2 \cdot J_0$ солнечной энергии (J_0 – плотность потока солнечного излучения на расстоянии Земли). 7% этой энергии рассеивается в окружающее пространство. Плотность потока энергии от элемента сферы с площадью S на Земле будет равна

$$j_S = J_0 \pi D^2 \frac{S}{4\pi D^2} \cdot \frac{A}{4\pi D^2} \cdot e^{-\tau/2}.$$

Последний множитель выражает ослабление излучения в сфере уже после рассеяния, средний путь через сферу при этом равен половине ее толщины. Суммируя все элементы с площадью S по полусфере, получаем общую плотность потока излучения от нее на Земле:

$$j = j_S \cdot \frac{2\pi D^2}{S} = J_0 \frac{A}{8} e^{-\tau/2}.$$

Переведем это в звездные величины:

$$m = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8} e^{-\tau/2}\right) = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8}\right) + \frac{1.08\tau}{2} = M_0 + 6.1 = -20.7.$$

Несмотря на большую оптическую плотность сферы, небо все равно остается достаточно ярким. Конечно, здесь мы не учли, что эта яркость будет существенно меньше в областях неба вдали от Солнца, но и там засветка останется значительной. Если говорить об астрономических наблюдениях, то они будут затруднены также тем, что сфера будет блокировать излучение далеких объектов.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение концентрации осколков в слое.
2 этап: 1 балл.
Указание, что осколки будут затенять свет Солнца друг от друга, а также накладываться друг на друга при наблюдении с Земли.
3 этап: 3 балла.
Создание модели расчета звездной величины неба в условиях взаимного затенения осколков. Модель может отличаться от предложенной выше, оценка определяется ее адекватностью.
4 этап: 2 балла.
Расчет звездной величины неба.

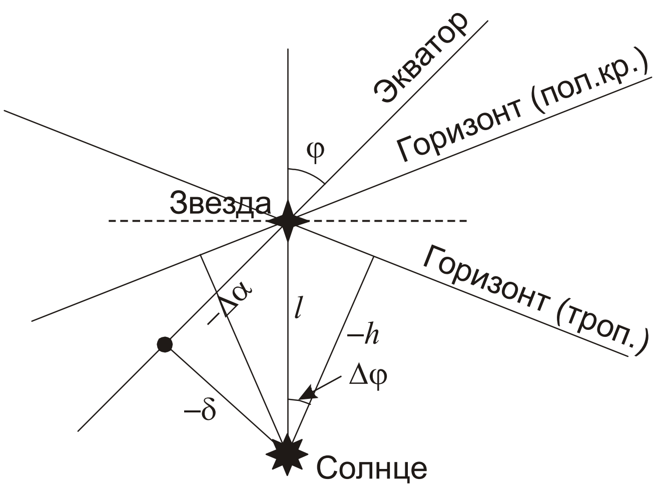
Вероятная ошибка при решении: Расчет звездной величины одного осколка, за которым следует прямой переход ко всей небесной полусфере с известным числом осколков, без учета эффекта затенения. В этом случае может быть выставлено 2 балла за первый этап и 2 балла за четвертый этап, с максимальной суммарной оценкой 4 балла. Если при этом не учитывается эффект фазы, и все осколки считаются полностью освещенными (с итоговым ответом около -25.8^m), то общая оценка уменьшается до (2+1)=3 баллов.

XI.1 ГЕЛИАКИЧЕСКИЙ ВОСХОД

О.С. Угольников

Условие. Гелиакическим восходом звезды называется ее восход на фоне утренней зари, при котором она впервые становится видимой после эпохи соединения с Солнцем. Известно, что у некоторой звезды на небесном экваторе гелиакический восход в двух пунктах на одном меридиане на северном тропике и северном полярном круге произошел одновременно. Определите прямое восхождение этой звезды. Считать, что звезда становится видимой на фоне зари при погружении Солнца под горизонт на 12°. Атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

Решение. Коль скоро звезда находится на небесном экваторе, ее восход будет происходить в точке востока. Изобразим звезду, Солнце и линии горизонта для обеих широт.



Горизонтальная пунктирная линия – биссектриса линий горизонта для двух указанных в условии широт. Она сама является горизонтом для широты φ=45° – среднего арифметического этих широт. Вертикальная линия направлена в зенит этой широты, и небесный экватор образует угол φ с этой линией. Модуль разницы между величинами каждой из широт и средней широтой φ есть Δφ (21.6°). Звезда находится в точке востока, на горизонте обеих широт, а Солнце располагается на высоте $-h$=–12° на этих широтах, то есть равноудалено от линий горизонта. Следовательно, оно находится на вертикальной линии, ниже звезды. Отсюда мы можем получить угловое расстояние между звездой и Солнцем:

$$l = \frac{-h}{\cos \Delta\varphi} \approx 13^{\mathrm{O}}.$$

Склонение Солнца отрицательно и равно

$$\delta = l \sin\varphi = \frac{-h \sin\varphi}{\cos \Delta\varphi} = -9^{\mathrm{O}}.$$

Такое склонение у Солнца бывает вскоре после осеннего равноденствия и незадолго перед весенним равноденствием. Обозначив угол наклона экватора к эклиптике через ε, запишем выражения для прямого восхождения Солнца:

$$\alpha_{01} = 12\text{ч} + \frac{-\delta}{\mathrm{tg}\varepsilon} = 13\text{ч}\,25\text{м}; \quad \alpha_{02} = 24\text{ч} - \frac{-\delta}{\mathrm{tg}\varepsilon} = 22\text{ч}\,35\text{м}.$$

На рисунке видно, что звезда располагается западнее Солнца, ее прямое восхождение меньше. Соответствующая разница составляет

$$\Delta\alpha = l \cos\varphi = \frac{-h \cos\varphi}{\cos \Delta\varphi} \approx -35 \text{ м}.$$

Итак, два возможных значения прямого восхождения звезды составляют

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{01,2} + \Delta\alpha = 12\text{ч}50\text{м};\ 22\text{ч}00\text{м}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

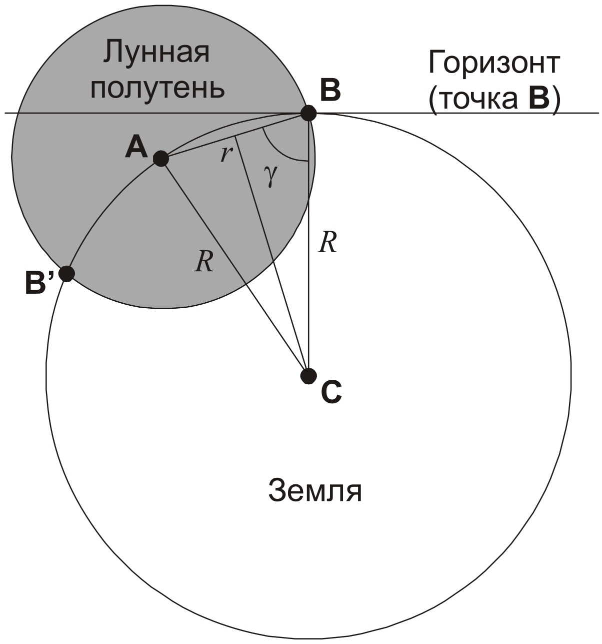
1 этап: 2 балла.
Правильное представление о взаимном расположении Солнца, звезды и горизонта на разных широтах (тропик, 45°, полярный круг).
2 этап: 1 балл.
Вычисление склонения Солнца.
3 этап: 2 балла.
Вычисление прямого восхождения Солнца (по 1 баллу за каждый из вариантов).
4 этап: 1 балл.
Определение разности прямых восхождений звезды и Солнца.
5 этап: 2 балла.
Определение прямого восхождения звезды (по 1 баллу за каждый из вариантов).

XI.2 ЗАТМЕНИЕ НА ГОРИЗОНТЕ

О.С. Угольников

Условие. В некоторый момент времени в пункте **A** на Земле наблюдается полное солнечное затмение с фазой 1.000, а в пункте **B** – частное солнечное затмение с фазой 0.001. В обоих случаях затмение наблюдается у горизонта. Нарисуйте вид Солнца и Луны в пункте **B**. С какой стороны (под каким углом по отношению к вертикали) располагается ущерб на диске Солнца при наблюдении в пункте **B**? Угловые размеры Солнца и Луны во время затмения одинаковы.

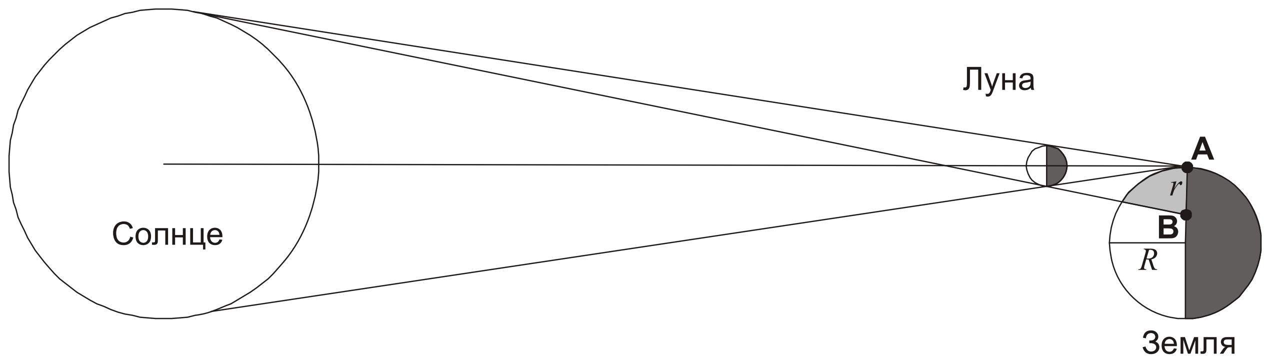
Решение. Изобразим Землю и лунную тень и полутень со стороны Солнца в указанный момент. Коль скоро полное затмение видно у горизонта, центр тени и полутени будет располагаться на краю изображения Земли. Для удобства расположим точку **B** в верхней части рисунка (в реальности таких точек две, **B** и **B'**, ответ на задачу в них будет одинаковым).



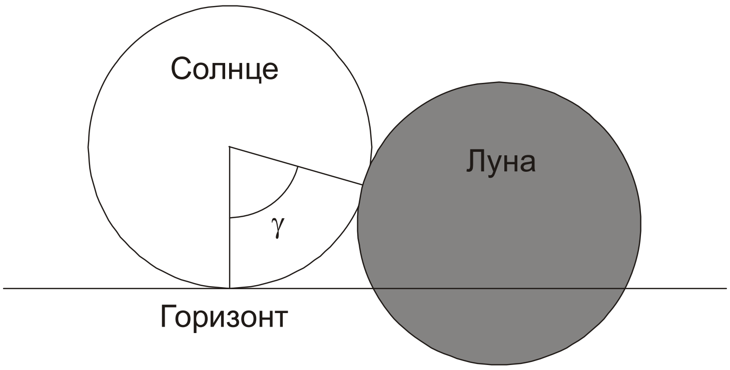
При наблюдении из пункта **B** линия на небесной сфере "Центр Солнца - центр Луны" будет указывать направление на центр тени, где в этот момент происходит полное затмение. По рисунку видно, что Луна в точке **B** окажется ниже Солнца, а ее положение относительно вертикали будет определяться углом γ. Треугольник **ABC** – равнобедренный, и данный угол можно вычислить как:

$$\gamma = \arccos\frac{r}{2R}.$$

Здесь R – радиус Земли, r – радиус лунной полутени. Последнюю величину можно легко определить из рисунка:



Если вершина конуса тени попадает на лимб Земли, то, с учетом несравнимых расстояний до Солнца и Луны радиус полутени r равен диаметру Луны, 3476 км. Итак, угол γ равен 74°, и вид Солнца и Луны в пункте **B** будет следующим:



В точке **B'** картина будет аналогичной, только диск Луны будет располагаться с другой стороны (слева) от диска Солнца.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Правильное понимание положения тени и полутени Луны на Земле и расположения точек **A** и **B**, выраженное рисунком или текстовым описанием.
2 этап: 2 балла.
Указание, что угол γ с вершиной в точке **B**, есть позиционный угол (относительно вертикали), под которым будет появляться ущерб на диске Солнца. Второй этап может выполняться вместе по ходу четвертого, что не является ошибкой.
3 этап: 2 балла.
Расчет размеров полутени Земли (либо прямого указания, что ее радиус равен диаметру Луны, что также считается правильным, рисунок не является обязательным).
4 этап: 2 балла.
Вычисление угла γ. Рисунок, иллюстрирующий положение Луны на небе относительно Солнца, желателен, но не обязателен.

XI.3 ФОКУС В ТОЧКЕ ЛАГРАНЖА

С.Б. Борисов

Условие. Планета обращается вокруг звезды с массой M по круговой орбите с радиусом R. С нее стартует космический аппарат. Он выходит на эллиптическую орбиту вокруг звезды, у которой точка старта является апоцентром, а второй фокус (свободный от звезды) совпадает с текущим положением внутренней точки Лагранжа $\mathbf{L_1}$ системы "планета-звезда". При каком отношении масс планеты и звезды (m/M<1) аппарат сможет без коррекций орбиты быстрее всего вернуться к планете? Взаимодействие аппарата с планетой не учитывать.

Решение. Для начала определим расстояние точки Лагранжа $\mathbf{L_1}$ от планеты r. В этой точке физическое тело может вращаться вокруг звезды с той же угловой скоростью ω, что и планета. Запишем уравнения движения этого тела и планеты:

$$\omega^2(R-r)=\frac{GM}{(R-r)^2}-\frac{Gm}{r^2};\quad \omega^2 R=\frac{GM}{R^2}.$$

Вычтем из второго уравнения первое:

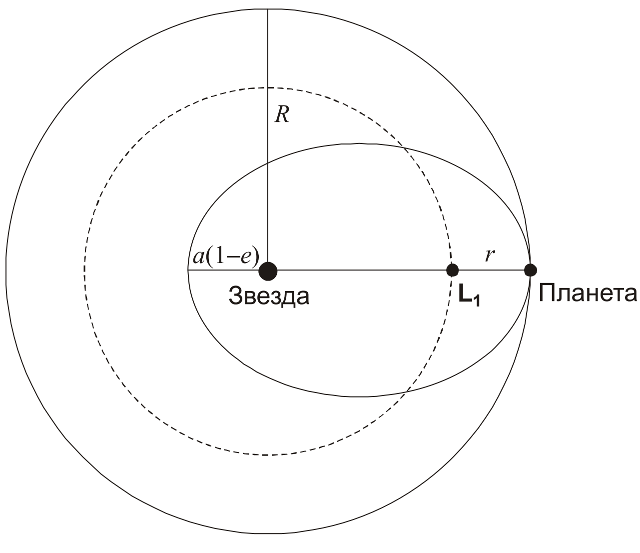
$$\frac{GMr}{R^3}=\frac{Gm}{r^2}+\left(\frac{GM}{R^2}-\frac{GM}{(R-r)^2}\right).$$

Воспользовавшись формулами для приближенного вычисления, получаем

$$\frac{GMr}{R^3}=\frac{Gm}{r^2}-\frac{2GMr}{R^3}.$$

В итоге имеем:

$$r=R\cdot\left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$



Коль скоро масса планеты меньше массы звезды, точка $\mathbf{L_1}$ располагается недалеко от планеты. Орбита аппарата – эллиптическая. Апоцентр орбиты аппарата – единственная ее точка, где он может вернуться к планете. Наиболее быстрое возвращение может случиться через один оборот планеты, когда она сама окажется в этой точке. Тогда орбитальный период аппарата t должен быть равен T/N, где T – орбитальный период планеты, а N – натуральное число. Считая массу планеты малой по сравнению с массой звезды и не учитывая взаимодействие аппарата с планетой, получаем выражение для большой полуоси орбиты аппарата

$$a = R \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^{2/3}.$$

Физический смысл имеет только случай с N=2, так как уже при N=3 мы получим значение a, меньшее R/2, что невозможно для апоцентра аппарата на расстоянии R. Исходя из расстояния в апоцентре, получаем значение эксцентриситета орбиты:

$$e = \frac{R}{a} - 1 = 2^{2/3} - 1 = 0.59.$$

Точка $\mathbf{L_1}$ является фокусом эллипса, и $a(1-e)=r$:

$$R \cdot (2^{1/3} - 1) = R \cdot \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$

Отсюда получаем соотношение масс планеты и звезды

$$\frac{m}{M} = 3 \cdot (2^{1/3} - 1)^3 \approx 0.05.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Решение задачи разбивается на несколько этапов, которые могут выполняться в произвольной последовательности.

1 этап: 3 балла.
Выражение для расстояния между планетой и точкой Лагранжа, которое можно вывести или взять как известное. Участники могут рассматривать более общий случай произвольного соотношения масс двух тел при вычислении положения точки Лагранжа. Это не считается ошибкой и оценивается полностью при условии правильности вычислений.
2 этап: 2 балла.
Формулировка условия скорейшего возвращения аппарата к планете. При этом нужно обосновать, что смысл имеет только случай N=2 (аппарат делает два, а не какое-либо другое целое число оборотов вокруг звезды). Если этого не делается и рассматривается только случай N=2, оценка уменьшается на 1 балл.
3 этап: 3 балла.
Вычисление отношения масс.

XI.4 ЭФФЕКТ ПОЙНТИНГА-РОБЕРТСОНА

О.С. Угольников

Условие. Суть известного эффекта Пойнтинга-Робертсона состоит в тормозящем действии боковых солнечных фотонов, имеющих встречную компоненту скорости относительно тела, движущегося вокруг Солнца. Как и насколько изменит расстояние от Солнца за один оборот сферическая графитовая частица радиусом 10 мкм и плотностью 2.1 г/см^3, изначально обращающаяся по орбите радиусом 1 а.е. и эксцентриситетом, равным нулю?

Решение. Вначале обратим внимание, что кроме эффекта Пойтинга-Робертсона на частицу будет действовать световое давление, основная компонента которого направлена от Солнца. Определим силу светового давления на расстоянии 1 а.е. от Солнца:

$$F_S = \frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \frac{\pi r^2}{c} = S\frac{\pi r^2}{c} = 1.4 \cdot 10^{-15}\ H.$$

Здесь J_0 – светимость Солнца, R – расстояние от Солнца до пылинки, r – радиус пылинки, S – солнечная постоянная. Мы учли, что пылинка графитовая, и свет в ней поглощается. Сила притяжения со стороны Солнца направлена в другую сторону и равна

$$F_G = \frac{GMm}{R^2} = \frac{4GM\rho r^3}{3R^2} = 1.7 \cdot 10^{-14}\ H.$$

Здесь M и m – массы Солнца и пылинки, ρ – плотность пылинки. Для частиц такого размера сила светового давления в 12 раз меньше силы притяжения. Важно понимать, что сила светового давления не приводит к изменению радиуса орбиты частицы, так как она продолжает двигаться в центральном поле Солнца с эффективной силой притяжения, зависящей от радиуса как $1/R^2$. Мы можем дальше не учитывать эту силу либо проводить расчеты с эффективной массой Солнца M', равной $0.92M$.

Сила Пойнтинга-Робертсона несравнимо меньше светового давления, но она направлена навстречу движения пылинки и поэтому будет изменять ее орбиту. Величина силы равна

$$F_{PR} = F_S\frac{v}{c} = \frac{J_0}{4\pi R^2} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Здесь v – скорость пылинки. Работа этой силы за один оборот отрицательна и равна

$$A_{PR} = -F_{PR} \cdot 2\pi R = -\frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Эта работа приводит к изменению полной энергии пылинки, равной для кругового вращения

$$E = -\frac{GM'm}{2R}.$$

Обозначим изменение радиуса орбиты как ΔR и учтем, что эта величина существенно меньше R. Тогда

$$-\frac{GM'm}{2(R+\Delta R)} = -\frac{GM'm}{2R} - \frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

В соответствии с формулами для малых приращений

$$\frac{1}{R+\Delta R} \approx \frac{1}{R} - \frac{\Delta R}{R^2}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, имеем:

$$-\frac{GM'm\Delta R}{2R^2} = \frac{J_0}{2R} \cdot \frac{\pi r^2 v}{c^2}.$$

Изменение радиуса орбиты за один оборот составит

$$\Delta R = -\frac{J_0 \pi r^2 vR}{GM' mc^2} = -\frac{J_0 \pi r^2}{mc^2}\sqrt{\frac{R}{GM'}} = -\frac{3J_0}{4\rho rc^2}\sqrt{\frac{R}{GM'}} \approx -5000 \text{ км}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Проверка, что данная пылинка может обращаться по круговой орбите и не будет выброшена световым давлением, либо вычисление эффективной массы Солнца (его положительная величина автоматически означает выполнение проверки). В случае этой проверки в последующем решении участник может пользоваться как эффективной, так и обычной массой Солнца, что не является ошибкой.
2 этап: 3 балла.
Запись выражения для силы Пойнтинга-Робертсона.
3 этап: 4 балла.
Вычисление изменения радиуса орбиты за один оборот. Если участник олимпиады путает полную и кинетическую энергию частицы, получая тот же численный ответ, но с другим знаком (изменение кинетической, а не полной энергии, уменьшение скорости и удаление частицы от Солнца), эти 4 балла не выставляются.

XI.6 МЕЖЗВЕЗДНЫЙ ЭКРАН

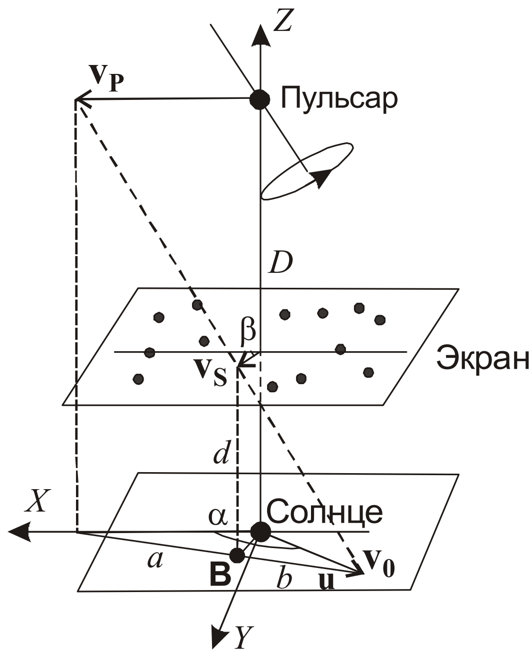
Е.Н. Фадеев

Условие. Излучение пульсара на пути к Земле проходит через тонкий рассеивающий слой (экран), расположенный на расстоянии двух третей пути до наблюдателя. В результате рассеяния на неоднородностях этого слоя к наблюдателю приходит не один луч, а множество, которые образуют интерференционную картину. Известно, что пульсар расположен на расстоянии 1 кпк от Солнца, его собственное движение равно 65 миллисекунд дуги в год. Измерения показали, что дифракционная картина движется относительно Солнца в плоскости, перпендикулярной направлению на пульсар, со скоростью 100 км/с под углом 150° к направлению движения пульсара. Определите возможные значения скорости и направления движения среды, составляющей экран.

Решение. Вначале определим величину тангенциальной скорости пульсара, исходя из его собственного движения μ и расстояния до него D:

$$v_P \text{ (км/с)} = 4.74\ \mu(''/\text{год})\ D \text{ (пк)} = 308 \text{ км/с}.$$

Введём декартову систему координат с центром в Солнце (рисунок). Ось Z направим на пульсар, ось X – параллельно тангенциальной скорости пульсара. Пусть $\mathbf{v}_0$, v_P и $\mathbf{v}_S$ – векторы скоростей дифракционной картины, пульсара и экрана соответственно, α=150° – угол между $\mathbf{v}_0$ и осью X, β – угол между $\mathbf{v}_S$ и осью X.



Рассмотрим движение пульсара и экрана на некотором интервале времени. Отметим, что этот интервал мал, и перемещения пульсара и экрана несопоставимо меньше их расстояния до Солнца. В этом случае линия, соединяющая пульсар и наблюдателя, все время образует очень малый угол с осью Z. Лучевые скорости экрана и пульсара не влияют на ситуацию, и мы их в расчет не принимаем.

Пусть в начальный момент времени пульсар находился на расстоянии D на оси Z. Тогда через некоторое время t его координаты будут $(v_p t,\ 0,\ D)$. За это же время то дифракционное пятно, которое находилось в начале координат, сместится в точку с координатами $(v_0 t\cos\alpha,\ v_0 t\sin\alpha,\ 0)$. Это дифракционное пятно сформировано лучами, которые в начальный момент времени проходили через область экрана вблизи оси Z. За время t центр этой области сместился в точку $(v_S t\cos\beta,\ v_S t\sin\beta,\ d)$. Здесь d – расстояние от Земли до экрана. Очевидно, что все три точки (пульсар, центр пятна рассеяния на экране и центр дифракционного пятна) находятся на одной прямой. Спроектируем эту прямую на плоскость OXY, получив вектор $\mathbf{u}t$. Сделаем то же самое с векторами перемещения пульсара и экрана, которые параллельны данной плоскости. Опустив постоянный множитель t, мы можем записать в векторном виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v_0} - \mathbf{v_P}.$$

Проекция центра пятна рассеяния на экране на плоскость OXY обозначена на рисунке как **B**. Она делит вектор **u** на части. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{b}{d} = \frac{a+b}{D}.$$

Из этого мы можем записать выражение для тангенциального перемещения экрана:

$$\mathbf{v_S} = \mathbf{v_0} - \frac{b}{a+b}\mathbf{u} = \mathbf{v_0} - \frac{d}{D}\mathbf{u} = \frac{D-d}{D}\mathbf{v_0} + \frac{d}{D}\mathbf{v_P}.$$

Отсюда мы можем вычислить скорость и направление перемещения экрана, учитывая, что $D=3d$, $s=(D-d)/D=2/3$. Разложим вектора по координатным осям:

$$v_S \cos\beta = \frac{D-d}{D} v_0 \cos\alpha + \frac{d}{D} v_P; \quad v_S \sin\beta = \frac{D-d}{D} v_0 \sin\alpha.$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{sv_0 \sin\alpha}{sv_0 \cos\alpha + (1-s)v_P}. \quad \beta = arctg \frac{sv_0 \sin\alpha}{sv_0 \cos\alpha + (1-s)v_P} = 37^O.$$

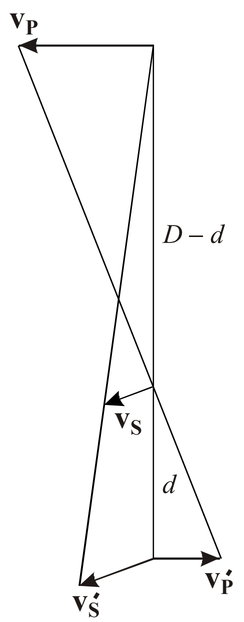
Теперь возведем оба уравнения системы в квадрат и сложим:

$$v_S^2 = s^2 v_0^2 \sin^2\alpha + s^2 v_0^2 \cos^2\alpha + (1-s)^2 v_p^2 + 2s(1-s)v_0 v_p \cos\alpha,$$

$$v_S = \sqrt{(1-s)^2 v_P^2 + s^2 v_0^2 + 2s(1-s)v_P v_S \cos\alpha} = 56 \text{ км/с}.$$

К этому же ответу можно прийти другим способом. Предположим, что экран неподвижен. Тогда движение дифракционной картины будет определяться только движением пульсара. Дифракционная картина будет двигаться со скоростью

$$v_P' = \frac{d}{D-d} v_P = \frac{1-s}{s} v_P.$$



Аналогично, если пульсар покоится, а движется только экран. Тогда скорость дифракционной картины будет неизменной и составит

$$v_S' = \frac{D}{D-d} v_S = \frac{1}{s} v_S.$$

В случае, когда и пульсар, и экран движутся, смещение дифракционной картины будет векторной суммой этих двух векторов. Поскольку нам известен угол α, воспользуемся теоремой косинусов:

$$v_S'^2 = v_0^2 + v_P'^2 - 2v_0 v_P' \cos(\pi - \alpha),$$

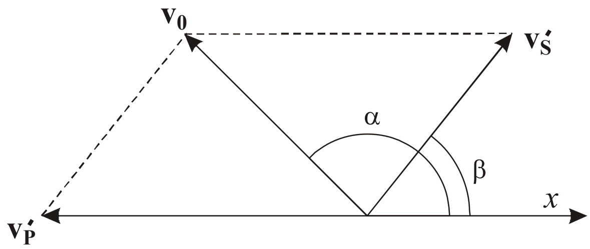
$$\frac{v_S^2}{s^2} = v_0^2 + \frac{(1-s)^2}{s^2} v_P^2 + 2v_0 \frac{1-s}{s} v_P \cos\alpha \,,$$

$$v_S = \sqrt{(1-s)^2 v_P^2 + s^2 v_0^2 + 2s(1-s) v_P v_S \cos\alpha} = 56 \text{ км/с}.$$

Мы пришли к тому же ответу. Для нахождения угла β воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\beta} = \frac{v_S{}'}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{v_S}{s\cdot\sin\alpha} \,,$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{s v_0}{v_s}\sin\alpha\right) \approx 37^\circ \,.$$



Наконец, запишем третий вариант решения задачи. Уравнение прямой в пространстве в симметричной форме имеет вид

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} = \frac{z-z_2}{z_1-z_2} \,.$$

Запишем в такой форме уравнение прямой, соединяющей концы векторов $\mathbf{v}_P$ и $\mathbf{v}_0$, понимая под координатами с индексами 1 и 2 координаты концов векторов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_P$, а без индекса – $\mathbf{v}_S$:

$$\frac{v_S\cos\beta - v_P}{v_0\cos\alpha - v_P} = \frac{v_S\sin\beta}{v_0\sin\alpha} = \frac{d-D}{-D} = \frac{D-d}{D} = s \,.$$

На самом деле, это система из двух независимых уравнений. Решая эту систему, мы придем к такому же результату, как и в первом варианте решения задачи.

6. Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Правильная геометрическая модель происходящего явления.
2 этап: 1 балл.
Вычисление тангенциальной скорости пульсара.
3 этап: 1 балл.
Получение векторной формулы (или системы из двух формул в проекциях) для связи скоростей пульсара, экрана и интерференционной картины.
4 этап: 2 балла.
Получение формул для величины и направления скорости экрана (по 1 баллу за каждую).
5 этап: 2 балла.
Определение численных значений величины скорости и угла (по 1 баллу за каждое).

XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Смоленск, 2017 г.

Практический тур

IX.1 НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ МАРСА

О.С. Угольников

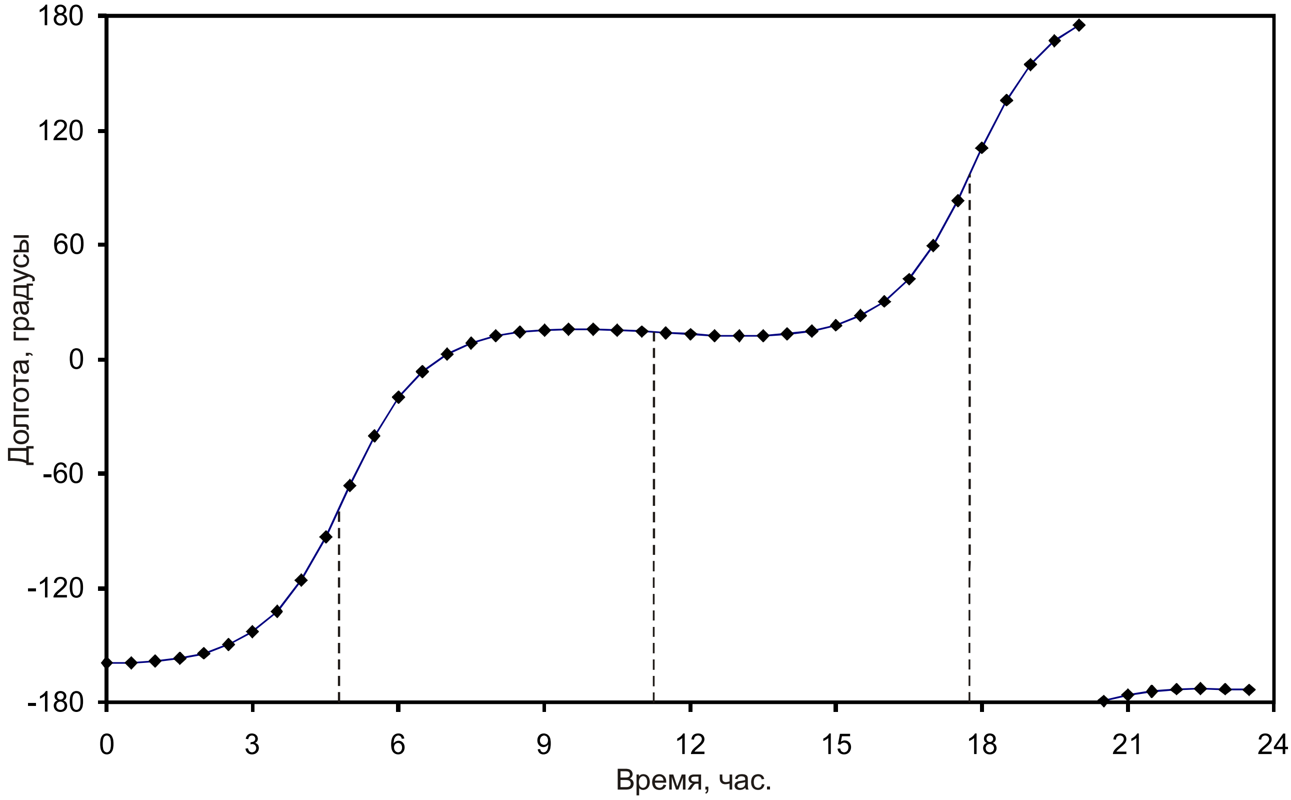
Условие. Орбитальная станция обращается вокруг Марса по экваториальной орбите с выключенными двигателями и каждые полчаса фотографирует поверхность планеты точно под собой (в надире). В таблице приведены моменты съемки по бортовым часам аппарата (Всемирное время на Земле) и марсианская долгота центра кадра. Определите наибольшее и наименьшее расстояние аппарата от центра Марса.

Час (UT)	Долгота	Час (UT)	Долгота	Час (UT)	Долгота	Час (UT)	Долгота
0.0	–159.09	6.0	–20.01	12.0	13.14	18.0	110.98
0.5	–159.03	6.5	–6.32	12.5	12.57	18.5	135.99
1.0	–158.38	7.0	2.71	13.0	12.29	19.0	154.60
1.5	–156.88	7.5	8.53	13.5	12.45	19.5	167.22
2.0	–154.17	8.0	12.19	14.0	13.25	20.0	175.50
2.5	–149.73	8.5	14.36	14.5	14.96	20.5	–179.18
3.0	–142.76	9.0	15.48	15.0	17.97	21.0	–175.87
3.5	–132.05	9.5	15.86	15.5	22.84	21.5	–173.94
4.0	–115.98	10.0	15.73	16.0	30.45	22.0	–172.99
4.5	–93.33	10.5	15.27	16.5	42.10	22.5	–172.73
5.0	–65.98	11.0	14.60	17.0	59.45	23.0	–172.94
5.5	–39.98	11.5	13.85	17.5	83.35	23.5	–173.45

Решение. Съемка поверхности Марса производится с интервалом в 30 минут. Для начала мы должны отметить, что этот интервал времени существенно меньше орбитального периода аппарата. Действительно, даже если не учитывать наличие у Марса атмосферы, минимальное время облета Марса составляет

$$T_M = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} \sim 1.7 \text{ ч.}$$

Следовательно, мы можем не рассматривать варианты совершения спутником целого оборота за время между двумя последовательными актами съемки. Приведенные в таблице данные можно анализировать напрямую, можно представить их в виде графика. Мы видим, что большую часть времени долгота точки Марса под спутником меняется медленно, но в некоторые периоды начинает быстро возрастать. Из этого можно сделать вывод, что спутник обращается по эллиптической орбите в ту же сторону, что и вращение Марса вокруг своей оси. Большую часть времени угловая скорость спутника сравнима с угловой скоростью Марса, и он даже может отставать от планеты, смещаясь над ее поверхностью на запад. Вблизи периария угловая скорость спутника заметно увеличивается, и он начинает обгонять осевое вращение Марса.



По приведенным данным можно оценить моменты прохождения периария, во время которых рост долготы происходил максимально быстро. Эти моменты соответствуют 4.75ч и 17.75ч. Из этого мы получаем величину орбитального периода *T*: 13.0 часов. Из III закона Кеплера определяем величину большой полуоси орбиты аппарата:

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 13300 \text{ км}.$$

Эксцентриситет орбиты Марса, а вместе с ним и наибольшее и наименьшее расстояние проще всего найти, определив угловые скорости аппарата в периастрии и апоастрии. Взяв найденные интервалы, соответствующие периастрию (4.5-5.0 часов и 17.5-18.0 часов), мы видим, что долгота точки съемки меняется на 27.5°, то есть ее изменение $\Delta\lambda_P$ составляет 55.0° в час. Момент апоария соответствует середине временного отрезка между периариями, то есть времени 11.25 часов. Взяв интервал (11.0-11.5 час), мы видим, что долгота уменьшается на 0.75°, изменение $\Delta\lambda_A$ есть –1.5° в час. Чтобы определить сами угловые скорости, нужно учесть осевое вращение Марса с периодом *S* (24.623 часа).

$$\omega_P = \frac{360^O}{S} + \Delta\lambda_P = 69.6^O/\text{ч}.$$

$$\omega_A = \frac{360^O}{S} + \Delta\lambda_A = 13.1^O/\text{ч.}$$

Из II закона Кеплера мы знаем, что

$$\frac{\omega_P}{\omega_A} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2.$$

Из этого мы получаем

$$\frac{1+e}{1-e} = 2.3; \quad e \approx 0.4.$$

Минимальное и максимальное расстояние аппарата от центра Марса равны

$$d_{MIN} = a\ (1-e) \sim 8.0 \text{ тыс.км}; \ d_{MAX} = a\ (1+e) \sim 18.6 \text{ тыс.км}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри). Для решения задачи необходимо правильно интерпретировать представленные в таблице данные, и получить из них величины большой полуоси и эксцентриситета орбиты космического аппарата.

1 этап: 1 балл.
Обоснование, что варианты совершения аппаратом целого оборота в период между съемками можно не рассматривать.
2 этап: 2 балла.
Правильное определение орбитального периода аппарата (возможна погрешность до 0.5 часа).
3 этап: 1 балл.
Определение величины большой полуоси орбиты аппарата.
4 этап: 4 балла.
Определение соотношения угловых скоростей аппарата в периарии и апоарии с учетом вращения самой планеты.
5 этап: 2 балла.
Вычисление эксцентриситета орбиты аппарата.
6 этап: 2 балла.
Определение максимального и минимального расстояния аппарата от центра Марса (по 1 баллу).

Возможный вариант решения: Участники олимпиады могут вычислить угловую скорость только в одной точке орбиты (например, в периарии) и из этого вычислять эксцентриситет. Этот способ существенно более сложный (сводится к кубическому уравнению), но при условии правильности выполнения он также оценивается полностью: 4 балла за вычисление угловой скорости (4 этап), 2 балла за вычисление эксцентриситета (5 этап), 2 балла за ответ (6 этап).

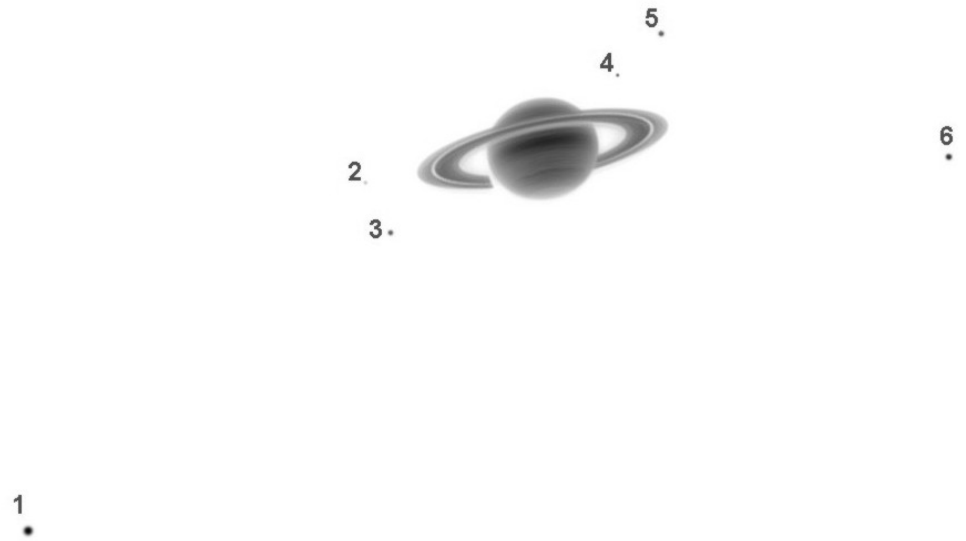
Возможная ошибка при решении: При вычислении угловой скорости аппарата может не учитываться осевое вращение Марса. В этом случае вне зависимости от результата, четвертый, пятый и шестой этапы решения не оцениваются, и суммарная оценка не превышает 4 баллов.

IX.2 САТУРН СО СВИТОЙ

А.Н. Акиньщиков

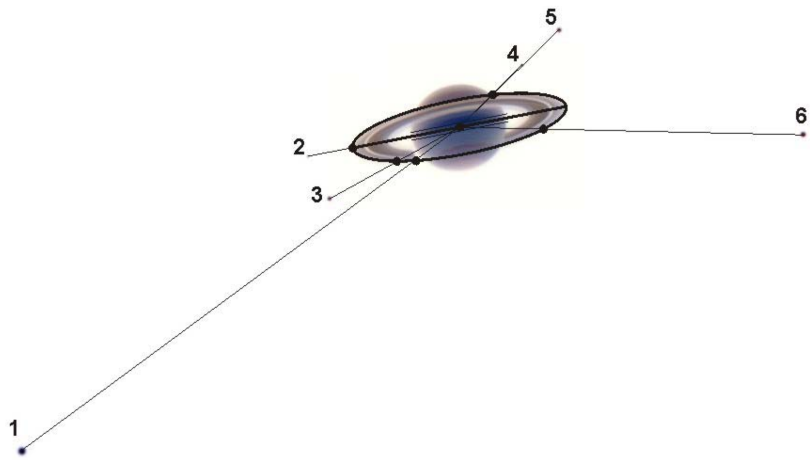
Условие. Перед Вами фотография Сатурна и некоторых его спутников (негатив), сделанная с Земли (автор – Рафаэль Дефавари). Используя наиболее точный, по Вашему мнению, метод, идентифицируйте спутники на фотографии. Укажите, какой из всех изображенных спутников в момент съемки находился ближе всех к Земле. Считайте, что все кольца и все спутники находятся в одной плоскости, орбиты спутников круговые. Данные о наиболее крупных спутниках Сатурна приведены в таблице.

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геомет-рич. альбедо	Видимая звездная величина
Мимас	$3.75\cdot10^{19}$	390	1.15	185590	0.942421	0.5	~11
Энцелад	$1.08\cdot10^{20}$	250	1.61	237950	1.370218	0.99	~11
Тефия	$7.55\cdot10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05\cdot10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49\cdot10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35\cdot10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88\cdot10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.2	~11.0



Решение. Проще всего было бы отождествить спутники Сатурна по их видимой яркости, однако некоторые из них схожи по этому параметру. Кроме этого, яркость может неточно передаваться на фотографии. Правильней определить спутники по их положению относительно Сатурна. Хотя мы видим их в плоскости рисунка и изначально не знаем их текущего положения на орбите, мы можем определить их пространственное расстояние от Сатурна.

Учтем, что все спутники находятся на своих круговых орбитах в той же плоскости, что и кольца Сатурна. Кольца Сатурна также круглые и видны на фото как эллипс из-за эффекта проекции. Следовательно, все орбиты спутников будут иметь форму эллипсов, подобных эллипсу кольца. Мы можем определить радиус орбиты спутника R_i по отношению к внешнему радиусу кольца R_R, соединив спутник с центром Сатурна и отметив точку, где эта линия пересечет внешнюю границу кольца.



В таблице приведены отношения R_i/R_R для всех шести спутников. Далее мы можем вычислить отношение радиуса кольца к экваториальному радиусу Сатурна R_R/R_0, измерив большие полуоси соответствующих эллипсов (отношение около 2.1). Наконец, перемножив эти две величины и радиус Сатурна R_0, мы получаем пространственные расстояния спутников от центра Сатурна R_i. Вследствие ошибок измерений они отличаются от табличных, но отождествить спутники можно.

№	R_i/R_R	R_i/R_0	$R_i/10^5$ км	Спутник
1	10.2	21.3	12.9	Титан
2	1.4	2.9	1.8	Мимас
3	2.0	4.3	2.6	Тефия
4	1.9	4.0	2.4	Энцелад
5	3.1	6.4	3.9	Диона
6	4.1	8.6	5.2	Рея

Нам остается ответить на вопрос, какой из спутников ближе всех к Земле. По виду кольца и его тени можно сделать вывод, что верхние части эллипсов находятся в пространстве ближе к нам. Поэтому самым близким оказывается спутник 5 – Диона, расположенный выше всех на фотографии.

Система оценивания (от одного члена жюри).

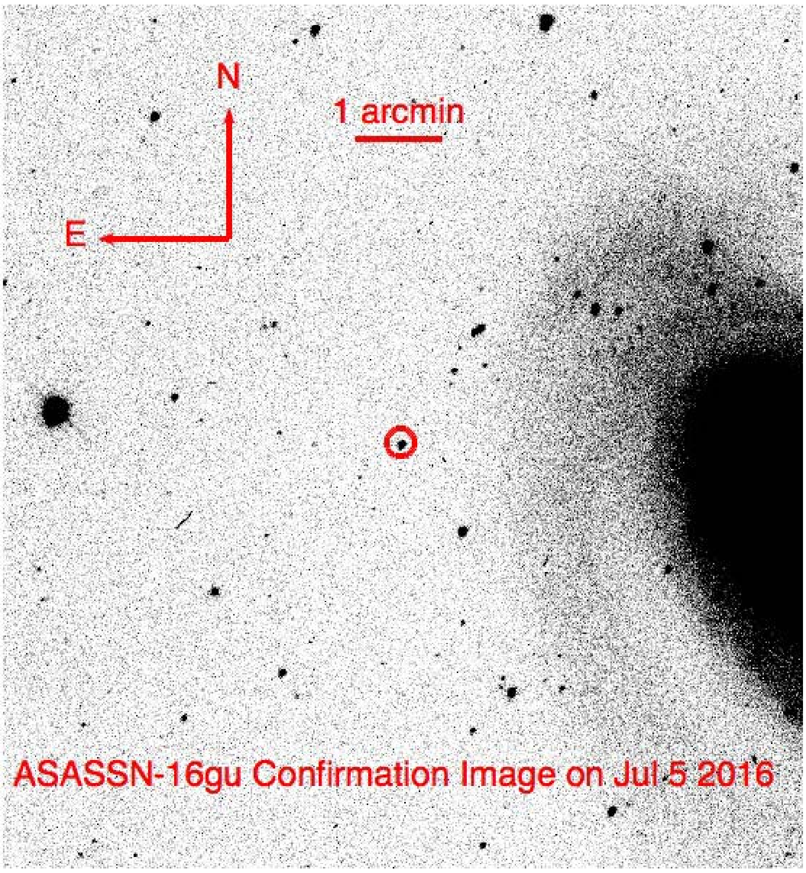
1 этап: 4 балла.
Правильное построение метода и вычисление расстояний от спутников до центра Сатурна, на основе точек пересечения направлений на спутники с кольцом. Участники не обязаны использовать внешний край кольца, хотя это наиболее точный метод.
2 этап: 6 баллов.
Отождествление спутников Сатурна, по 1 баллу за каждый спутник.
3 этап: 2 балла.
Определение ближайшего к Земле спутника, при наличии верного обоснования.

Возможная ошибка при решении: спутники отождествляются, исходя из их яркости или распределения в картинной плоскости. В этом случае за первый этап решения выставляется не более 1 балла.

IX.3 «СВЕРХНОВАЯ» МАКЕМАКЕ

Е.Н. Фадеев

Условие. Астрономы из команды ASAS-SN, патрулирующие небо в поисках сверхновых звезд, обнаружили на снимке 5 июля 2016 года объект, которого не было на снимке от 26 июня 2016 года. В первом сообщении было объявлено, что найдена новая сверхновая в далекой галактике NGC 4725, но позже оказалось, что обнаруженный объект – это карликовая планета Макемаке. По предоставленной фотографии определите, за сколько дней до обнаружения Макемаке появилась в кадре? Считать, что во время наблюдений Макемаке была в противостоянии с Солнцем на расстоянии 51 а.е. от Земли.



3. Решение. Макемаке – далекий объект Солнечной системы. Как видно по расстоянию от Земли, скорость орбитального вращения Макемаке в 7 с лишним раз меньше, чем у Земли (в реальности, она еще меньше, так как сейчас Макемаке располагается близ афелия своей орбиты). Если карликовая планета находится в противостоянии, то Земля движется примерно перпендикулярно направлению на нее. Угловая скорость движения Макемаке по небу будет определяться, прежде всего, движением Земли (скорость v_0) и составит

$$\omega = v_0/L = 0.02° \text{ в день.}$$

Здесь L – расстояние от Земли до Макемаке. На снимке 5 июля она находилась в центре кадра, в 4.5′ или (1/13)° от края. Такое угловое расстояние она пройдет примерно за 4 дня.

Так как Макемаке вступила в противостояние вблизи летнего солнцестояния, то за счет движения Земли она движется по небу попятным движением параллельно экватору, вдоль горизонтальной оси кадра. Собственная пространственная скорость Макемаке существенно меньше и на картину влияет мало.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 6 баллов.
Оценка угловой скорости Макемаке по небу. Ее можно проводить, считая саму планету неподвижной в пространстве (движение по небу только за счет орбитального движения Земли), можно пытаться учесть и движение самой Макемаке, сделав предположение о характере ее орбиты.
2 этап: 3 балла.
Определение размера поля зрения кадра.
3 этап: 3 балла.
Вычисление времени нахождения Макемаке в кадре. Если участник не учитывает, что Макемаке дошла только до середины кадра, и получает вдвое больший ответ – оценка уменьшается на 2 балла.

Возможная ошибка при решении: угловая скорость Макемаке по небу приравнивается к ее гелиоцентрической орбитальной угловой скорости (не учитывается движение Земли), которая меньше примерно в 7 раз. В этом случае за 1 этап выставляется 2 балла вместо 6 и 0 балл из 3 за третий этап, так как получающийся в этом случае ответ противоречит условию задачи, Макемаке наблюдалась бы в кадре 26 июня. Итоговая оценка не может превышать 5 баллов.

Возможная ошибка при решении: предположение, что Макемаке движется по кадру по диагонали с итоговым ответом 6 дней. Это не соответствует действительности, так как движение Макемаке в противостоянии не может образовывать большой угол с эклиптикой. В этом случае не засчитывается третий этап решения задачи, и общая оценка не превышает 9 баллов. Учет наклона экватора к эклиптике (23.5°) увеличивает ответ менее, чем на сутки, и на оценку не влияет.

X/XI.1 ЗВЕЗДЫ-БЕГЛЕЦЫ

О.С. Угольников

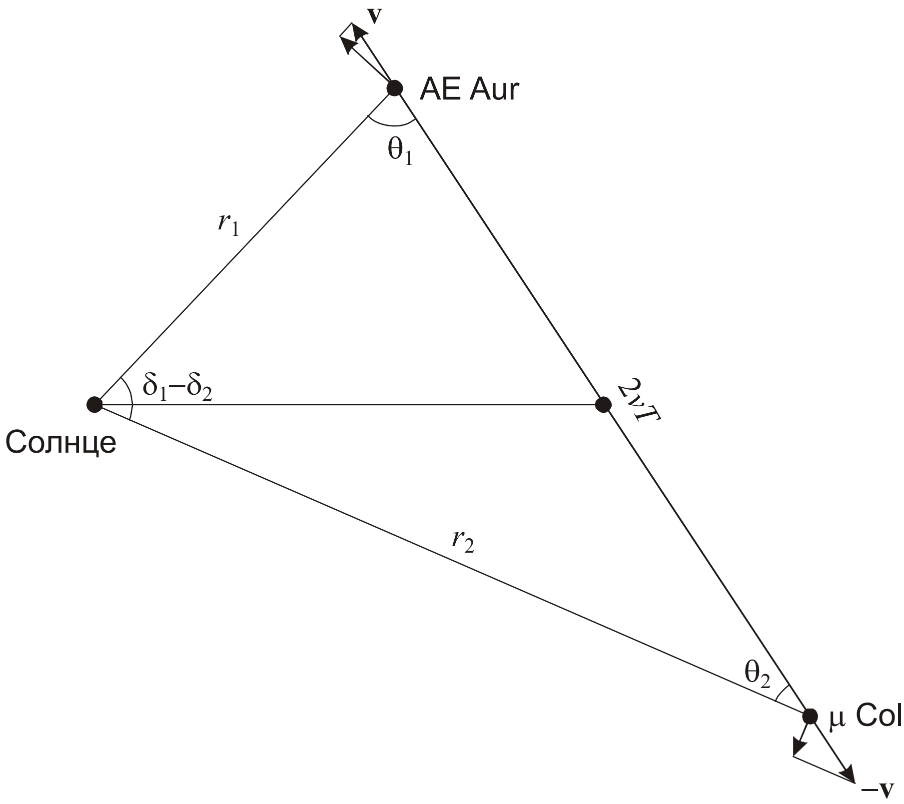
Условие. В таблице приведены координаты и данные о собственном движении двух звезд. Известно, что эти звезды образовались совместно, после чего разлетелись в противоположных направлениях с равными скоростями. Исходя из этого, определите, сколько времени прошло с момента их разлета. Разницей прямых восхождений, собственным движением звезд по прямому восхождению, а также их гравитационным взаимодействием (взаимным и с другими объектами) пренебречь. Считать, что Солнце неподвижно относительно центра масс системы из этих звезд. Что Вы можете сказать о месте образования звезд?

Звезда	α	δ	$\mu\alpha$, 0.001″/год	$\mu\delta$, 0.001″/год
AE Возничего	05.5ч	+34.3°	~0	+44.7
μ Голубя	05.5ч	–32.3°	~0	–22.2

Решение. В соответствии с условием задачи, звезды имеют сходное прямое восхождение и движутся на небе в противоположные стороны вдоль одного круга склонения. Самый простой, но при этом не вполне точный способ определить время с момента разлета звезд – предположить, что собственное движение за это время не менялось. Тогда решение находится элементарно:

$$\tilde{T} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{1^O}{0.001''} \text{ } лет = 3.6 \text{ } млн \text{ } лет.$$

Однако, сделанное при этом предположение, вообще говоря, противоречит условию задачи. Очевидно, что в момент разлета звезды имели собственные движения, равные по модулю и противоположные по знаку. Как видно из таблицы, в настоящий момент это не так, следовательно, собственные движения успели измениться. Изобразим положение звезд на рисунке в плоскости, содержащей Солнце и линию, соединяющую звезды:



По условию задачи, звезды разлетаются в пространстве вдоль одной прямой со скоростями v и $-v$ и к моменту наблюдений разошлись на расстояние $2vT$, где T – возраст звезд. Обозначим через $r_{1,2}$ текущие расстояния до звезд. Собственные движения (угловые скорости) звезд равны

$$\mu_1 = \frac{v \sin \theta_1}{r_1}; \quad \mu_2 = -\frac{v \sin \theta_2}{r_2}.$$

Рассмотрим треугольник "Солнце – AE Aur – μ Col". Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta_1}.$$

Подставим в последнюю формулу выражение для синусов углов из определения собственного движения:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1-\delta_2)} = -\frac{vr_1}{r_2\mu_2} = \frac{vr_2}{r_1\mu_1}.$$

Возведем в квадрат первое из трех равных выражений и перемножим два других:

$$\frac{4v^2T^2}{\sin^2(\delta_1-\delta_2)} = -\frac{v^2}{\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда получаем выражение для интервала времени с момента разлета звезд:

$$T = \frac{\sin(\delta_1-\delta_2)}{2\sqrt{-\mu_1\mu_2}} = 3.0 \text{ *млн лет.*}$$

Знак "–" под квадратным корнем не должен смущать, так как собственные движения звезд имеют разные знаки. Звезды очень молодые, что естественно, так как обе являются горячими сверхгигантами со светимостью в несколько десятков тысяч светимостей Солнца. По координатам мы можем видеть, что точка их рождения находится вблизи туманности Ориона. Данные две звезды являют собой классический пример так называемых "звезд-беглецов", получивших сильные противоположные импульсы в результате взаимодействия с другими звездами этой ассоциации, вероятнее всего – с компонентами двойной системы ι Ориона.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 6 баллов.
Правильная двумерная геометрическая картина взаимного расположения и движения двух звезд относительно Солнца, учет изменения их собственного движения с момента разлета.
2 этап: 4 балла.
Вычисление времени, прошедшего с момента разлета звезд.
3 этап: 2 балла.
Вывод о происхождении звезд в Туманности Ориона.

Возможная ошибка при решении: участники могут найти время с момента разлета по первой формуле решения, предполагая постоянство собственных движений. В этом случае первый этап решения не засчитывается, второй и третий оцениваются, исходя из точности выполнения. Максимальная оценка может составить 6 баллов.

Возможная ошибка при решении: участники отмечают, что скорости звезд не перпендикулярны направлению к наблюдателю, но время оценивают в модели постоянных собственных движений. В этом случае суммарная оценка за 1-2 этапы (при отсутствии ошибок) не превосходит 6 баллов.

X.2 СУМЕРКИ НА ТИТАНЕ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами фотография, сделанная с борта АМС "Кассини" (негатив). На ней видны три спутника Сатурна – Титан, Мимас и Рея. Оцените по фотографии длительность сумерек (в земных часах) на экваторе Титана.

2. Решение. В условии задачи не сказано, на каком расстоянии от каждого из спутников находилась АМС "Кассини" в момент съемки, поэтому видимые поперечники спутников не соответствуют их реальным размерам. Тем не менее, мы можем сразу указать на фотографии Титан – наличие у него атмосферы приводит к большей толщине серпа и эффекту "удлинения рогов" серпа, которого нет у Реи (слева сверху) и Мимаса (внизу). Обратим внимание, что у Титана данный эффект значительно сильнее, чем у Венеры по наблюдениям с Земли, и вообще оказывается самым сильным среди тел Солнечной системы с атмосферами, что будет объяснено далее.

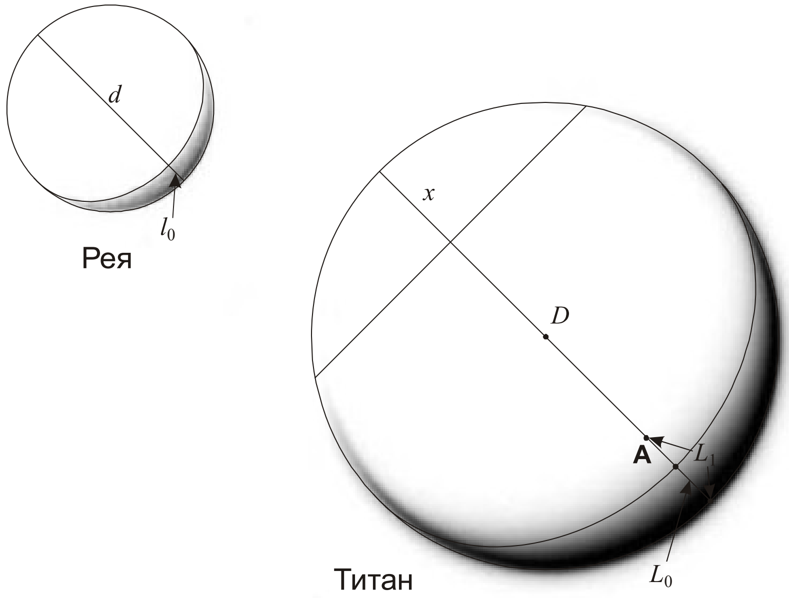
Так как Солнце располагается от точки съемки несравнимо дальше всех трех спутников, то при отсутствии атмосферы их фазы должны быть одинаковы, а рога серпов направлены в одну сторону. О форме серпа в этом случае лучше всего судить по спутнику Рея. По фотографии можно определить величину фазы Реи (см. рисунок):

$$F_0 = \frac{l_0}{d} \approx 0.1.$$

Если бы фаза Титана была такой же, видимая толщина составляла $L_0 = DF_0$ (показана на рисунке). В реальности серп имеет толщину L_1 и фазу

$$F = \frac{L_1}{D} \approx 0.2.$$

Очевидно, что фазу можно измерить лишь приближенно, однако, как мы увидим далее, более точные измерения для решения задачи и не требуются. Расстояние от аппарата до Реи и Титана много больше их размеров, поэтому мы можем считать, что с аппарата видна ровно половина поверхности этих спутников.



У Титана освещено не только дневное полушарие, но и сумеречное кольцо. Определим максимальное погружение Солнца под горизонт, при котором мы еще видим рассеянное в атмосфере излучение (см. рисунок). Этот угол можно найти по формуле:

$$\gamma_1 = \arccos \frac{R - L_1}{R} - \arccos \frac{R - L_0}{R} = \arccos(1 - 2F_1) - \arccos(1 - 2F_0) = 16^{\circ}.$$

Здесь R – радиус Титана ($D/2$). Мы можем сразу отметить, что этот угол явно больше, чем у Земли, так как на нашей планете погружение Солнца под горизонт на 16° соответствует поздней стадии астрономических сумерек, во время которых освещенность несравнимо меньше, чем днем.

Другой способ оценки того же угла – по удлинению рогов серпа Титана. Мы можем измерить расстояние x (см. рисунок сверху), которое оказывается равным $0.2D$ или $0.4R$. (при отсутствии атмосферы оно было бы равно радиусу R). Спроектировав Титан на плоскость, содержащую Солнце и аппарат (см. рисунок снизу), мы имеем:

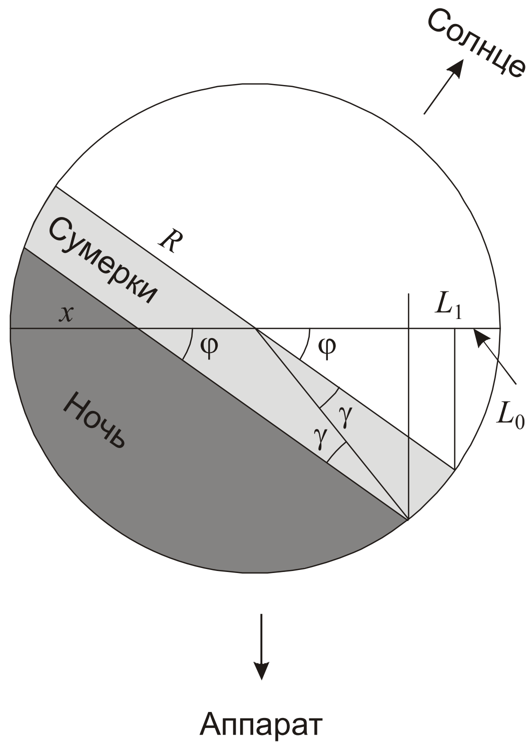
$$\frac{R - x}{\sin \gamma_2} = \frac{R}{\sin \varphi} = \frac{R}{\sqrt{1 - (1 - 2F_0)^2}}.$$

Отсюда

$$\gamma_2 = \arcsin\left(\sqrt{1 - (1 - 2F_0)^2}\, \frac{R - x}{R} \right) = 21^{\circ}.$$

Углы не совпадают, что естественно, так как все расстояния измеряются приближенно. Будем для определенности считать угол γ равным 18°.

На экваторе Титана во время равноденствия Солнце заходит перпендикулярно горизонту, и сумерки продолжаются, пока спутник поворачивается на этот угол γ. Период осевого вращения Титана T, как и у всех крупных спутников планет, синхронизован с орбитальным периодом и равен примерно 16 дней.



Синодический период (длительность солнечных суток) несколько больше из-за движения Сатурна по орбите, но так как он движется очень медленно, этой разницей можно пренебречь. Длительность сумерек во время равноденствия равна

$$t = T\frac{\gamma}{360^{\circ}} = 0.8 \text{ сут } \approx 19 \text{ час.}$$

Во время солнцестояний, когда склонение Солнца на Сатурне и Титане δ достигает 27°, длительность сумерек увеличивается на фактор (1/cos δ) и достигает 0.9 суток или 21.5 часа.

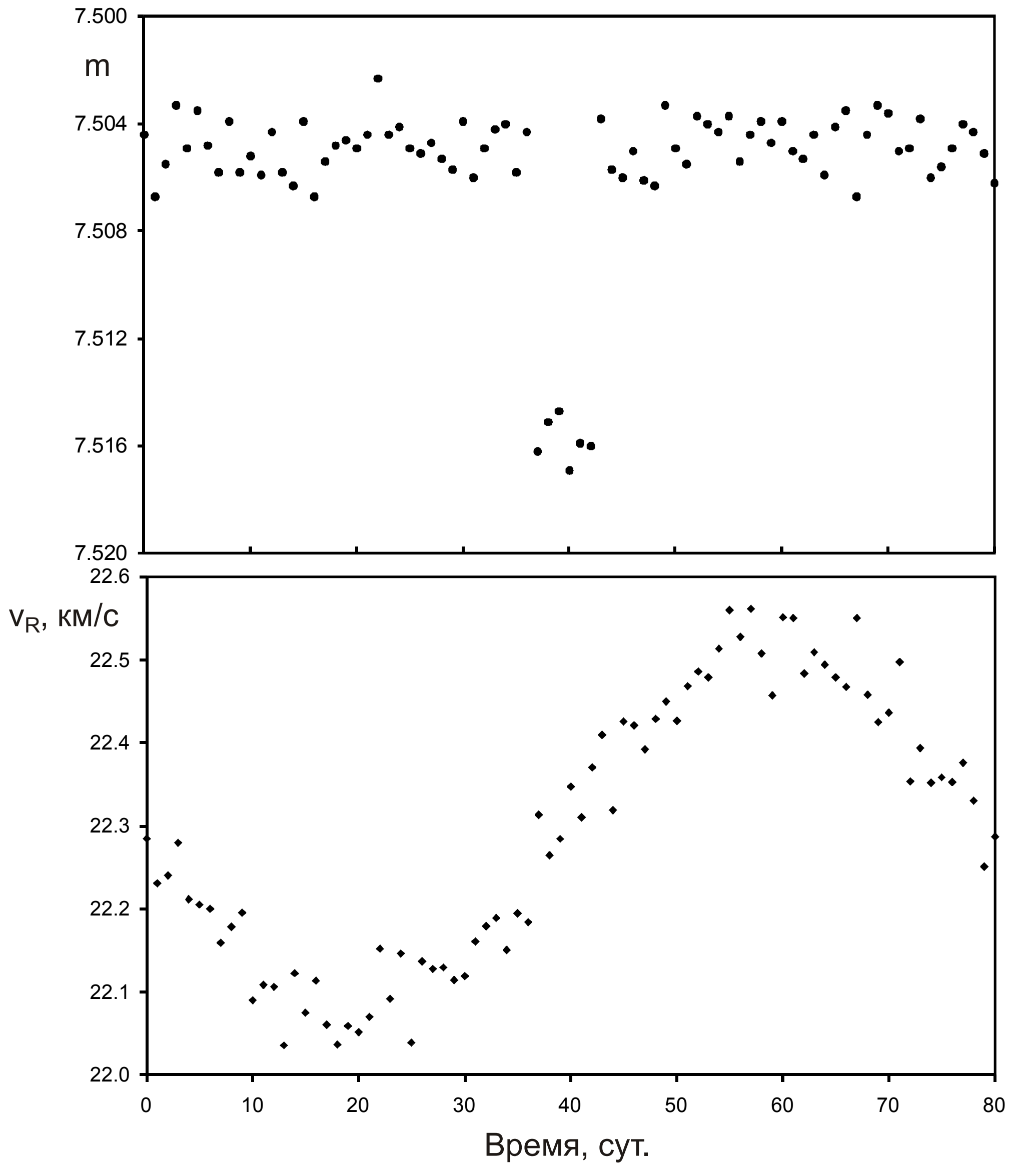
Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап – 2 балла.
Указание, какой из трех спутников – Титан, сделанное не на основе видимых размеров, на которые могло повлиять расположение космического аппарата, а оптического эффекта «удлинения рогов» либо видимого увеличения фазы.
2 этап – 6 баллов.
Определение угла погружения Солнца под горизонт, при котором еще продолжаются сумерки, и соответствующий участок на фотографии Титана еще остается освещенным. Это можно сделать любым из двух способов (увеличение фазы или удлинение рогов). Допускается погрешность до 5-6 градусов. Из данных 6 баллов три выставляется за качество геометрических измерений на фото, другие три – за точность вычислений.
3 этап – 1 балл.
Указание, что осевой период Титана равен орбитальному периоду. Участники могут вычислить синодический период Титана, который практически неотличим от осевого, возможно их прямое отождествление.
4 этап – 2 балла.
Вычисление длительности сумерек на экваторе Титана для элементарного случая равноденствий.
5 этап – 1 балл.
Учет случая солнцестояний.

X/XI.3 ДАЛЕКАЯ ПЛАНЕТА

О.С. Угольников

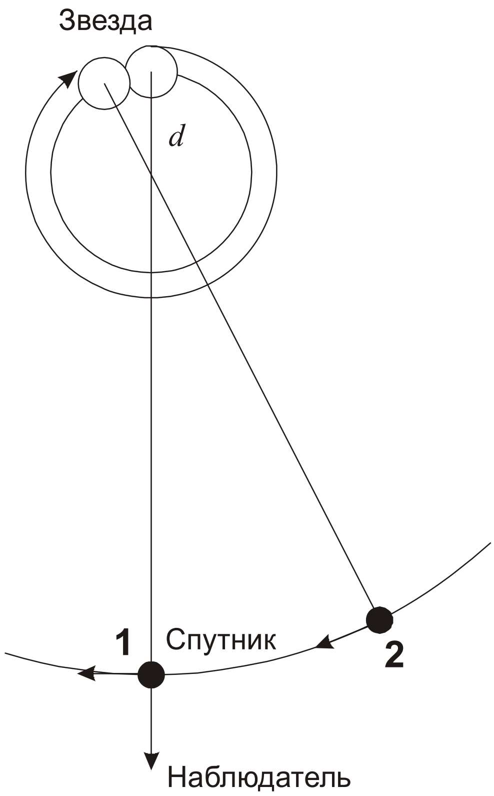
Условие. Около звезды с массой, равной массе Солнца, был обнаружен темный спутник. В некоторой обсерватории с интервалом ровно в 1 сутки производились одновременные измерения видимой звездной величины и гелиоцентрической лучевой скорости звезды, результаты представлены на графиках. Определите радиус звезды, массу и радиус спутника. Считать, что наблюдатель располагается в плоскости круговых орбит системы, а оба тела имеют сферическую форму. Других массивных тел в этой системе нет. Эффект потемнения звезды к краю не учитывать. Что из себя представляет эта звезда и чему равно расстояние до нее?



Решение. На первый взгляд, графики достаточно четко создают представление об этой системе. Наличие спутника приводит к двум эффектам – кратковременному падению блеска звезды в тот момент, когда темный спутник оказывается перед ней, а также синусоидальному изменению лучевой скорости звезды, связанному с ее движению относительно общего центра масс. Можно предположить, что орбитальный период составляет как раз 80 суток. Однако, более внимательный анализ показывает, что это не соответствует действительности.

Рассмотрим момент, соответствующий затмению звезды (момент времени 40 суток на графике), изображенный на рисунке цифрой 1. В это время оптическая звезда находится в наиболее удаленной от Земли точке орбиты. После затмения она должна начать приближаться к наблюдателю, что означает уменьшение ее лучевой скорости. Однако, последующие точки на кривой лучевой скорости, если не учитывать их погрешность, оказываются выше, то есть соответствуют удалению оптической звезды от наблюдателя.

Данное противоречие снимается, если вспомнить, что все наблюдения производились с интервалом ровно в 1 сутки. Коль скоро последующие за затмением (40 суток) измерения соответствуют большей лучевой скорости, на них система оказывается в предшествующей фазе (начало затмения или незадолго до него). Следовательно, за 1 сутки система почти успевает сделать N целых оборотов, приближаясь уже к следующему затмению (случай N=1 показан на рисунке).



К моменту следующего наблюдения через время t (1 сутки) система не успела завершить (1/K) целого оборота, где K=80. Тогда орбитальный период выражается как:

$$T = \frac{t}{N - (1/\mathrm{K})} \approx \frac{t}{N}.$$

Целое число N заранее неизвестно. Определим другие характерные параметры системы. Предположив, что масса спутника меньше массы звезды (в дальнейшем мы сможем это проверить), которая сама равна массе Солнца, из III закона мы получаем величину радиуса орбиты спутника:

$$a = (T, \textit{годы})^{2/3} = 3 \text{ млн км} / N^{2/3}.$$

Звездная величина вне затмений составляет m_0 = 7.505, во время затмений она уменьшается до m_1 = 7.516. Так как наблюдатель находится точно в плоскости орбиты системы, а яркость звезды однородна по диску, мы можем получить соотношение радиусов компонент:

$$m_0 - m_1 = 2.5\log\left(\frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2}\right) = 2.5\frac{\ln(1 - r^2 / R^2)}{ln 10} = -\frac{2.5}{\ln 10}\frac{r^2}{R^2};$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{\ln 10 \cdot (m_1 - m_0)}{2.5}} \approx \sqrt{0.92(m_1 - m_0)} = 0.1.$$

Спутник в 10 раз меньше звезды по радиусу. Далее, из $K=80$ измерений через равные интервалы времени $k=6$ пришлись на затмения. Следовательно, длительность затмения есть примерно k/K от орбитального периода T. За весь период спутник пролетает путь $2\pi a$, а за время затмения – диаметр главной звезды (мы вновь считаем спутник много меньшим звезды как по размерам, так и по массе). Тогда мы получаем величину радиуса звезды:

$$\frac{2R}{2\pi a} = \frac{k}{K}; \quad R = \frac{\pi a k}{K} = \frac{700\ \text{тыс.км}}{N^{2/3}}.$$

Итак, если предположить, что за одни сутки система почти завершила один оборот, то радиус звезды получается равным радиусу Солнца. Учитывая, что по массе звезда также схожа с Солнцем, это представляется наиболее вероятным вариантом. Действительно, подстановка N=2 дает радиус в 0.63 радиуса Солнца. Подобных звезд с солнечной массой не существует, так как звезда солнечной массы не может иметь подобный радиус ни на каких стадиях своей эволюции. Даже редкие типы звезд - субкарлики - при солнечной массе имеют больший радиус. Такие же выводы можно сделать и для больших N. Единственный альтернативный вариант, который можно считать теоретически возможным – белый карлик с радиусом порядка радиуса Земли, и тогда N~1000. Хоть это и представляется крайне маловероятным для затменной системы, мы рассмотрим этот вариант наряду с основным в дальнейшем решении.

Амплитуда изменений лучевой скорости звезды v (ее отклонение от среднего значения) составляет 0.2 км/с. Учитывая ориентацию орбиты, это есть сама орбитальная скорость звезды. Радиус орбиты звезды составляет

$$A = \frac{vT}{2\pi} = \frac{3000\ \text{км}}{N}.$$

Зная радиусы орбит звезды и спутника, мы получаем соотношение их масс:

$$\frac{m}{M} = \frac{A}{a} = \frac{3000\ \text{км}}{N} \cdot \frac{N^{2/3}}{3\ \text{млн км}} = \frac{0.001}{N^{1/3}}.$$

Если вспомнить о варианте белого карлика (N~1000), то спутник будет представлять собой тело с массой 10^{-4} массы Солнца. При этом его радиус в 10 раз меньше радиуса звезды, то есть около 600 км! В настоящее время таких плотных маломассивных объектов во Вселенной не найдено, более того, непонятно, как они могли бы появиться. Поэтому правдоподобным остается лишь вариант N=1, при котором звезда оказывается копией Солнца, а ее спутник в 10 раз меньше по размеру и в 1000 раз меньше по массе. Он очень похож на планету Юпитер. Можно показать, что несмотря на близость к звезде, он будет устойчивым к приливным силам, которые будут более чем в 10 раз слабее, чем это требуется для разрыва планеты.

Нам остается найти расстояние до системы. Учитывая, что звезда похожа на Солнце (абсолютная величина $+4.7^m$), а ее видимый блеск равен $+7.5^m$, мы можем заключить, что система отстоит от нас на 35 пк.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 4 балла.
Ключевой момент решения – вывод о возможных значениях орбитального периода. При выводе, что период равен 80 суткам, весь этап не засчитывается (0 баллов). Если в качестве единственного возможного периода берутся 1 сутки (без рассмотрения возможности других целых *N*), из этих 4 баллов выставляется 3 балла, остальные этапы решения (кроме возможного анализа типа звезд для разных *N*) оцениваются в полной мере, даже если они рассматриваются только для *N*=1.
2 этап: 1 балл.
Вычисление соотношения радиусов, исходя из глубины минимумов блеска.
3 этап: 1 балл.
Выражение для радиуса звезды, исходя из длительности затмений (в явном виде либо учет по ходу последующих вычислений).
4 этап: 2 балла.
Выражение для массы планеты через амплитуду лучевой скорости звезды. Если вместо амплитуды берется сама лучевая скорость (22 км/с), данный этап не засчитывается, ровно как и последующие, так как они приводят к неестественно большой массе планеты.
5 этап: 2 балла.
Анализ, какие из чисел *N* могут иметь физический смысл. Оценивается только для тех решений, где предположена возможность разных чисел *N*. Необходимо сделать вывод, что значения *N*>1 не соответствуют ни нормальным звездам, ни белым карликам (из-за неестественных свойств планеты). Если участник олимпиады допускает вариант *N*=2 как соответствующий субкарликам, эта ошибка считается незначительной и не влияет на оценку.
6 этап: 1 балл.
Вывод о типе звезды. Выставляется только в случае правильного ответа (Солнце), полученного на основе правильного анализа случая *N*=1.
7 этап: 1 балл.
Определение расстояния до системы. Оценивается только для правильного и обоснованного на предыдущих этапах вывода, что звезда аналогична Солнцу по своим свойствам.

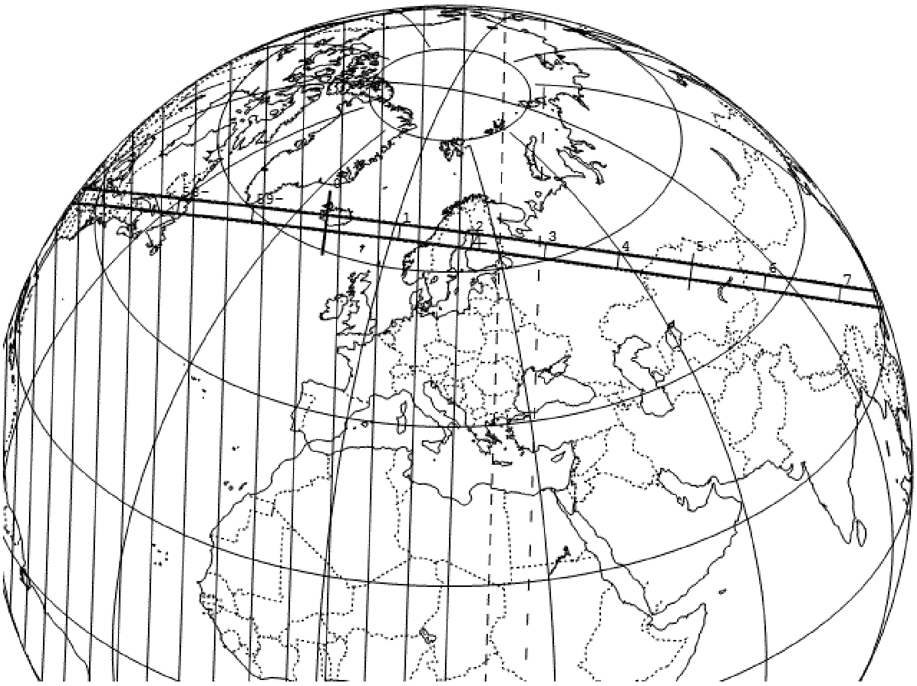
Возможная ошибка участника: Предположение, что орбитальный период планеты составляет 80 дней. Оно приводит к большому радиусу как звезды (20 радиусов Солнца), так и планеты (2 радиуса Солнца!). При подобном решении не засчитывается первый этап (0 баллов). Этапы 2-4 засчитываются при условии корректности расчетов (сумма – 4 балла). Этап 5 в этом решении отсутствует, этап 6 в задаче не засчитывается, так как он приводит к абсурдному радиусу планеты. 7 этап правильно выполнить невозможно, так как неизвестна светимость звезды. Общая оценка не может превышать 4 баллов.

Возможная ошибка участника: рассматривается только вариант N=1 с получением правильного ответа (звезда типа Солнца). В этом случае за первый этап выставляется 3 балла, этапы 2-4 засчитываются полностью (при условии правильности выполнения). Этап 5 при таком решении отсутствует, этапы 6 и 7 – корректны. Общая оценка не может превышать 9 баллов.

XI.2 ГРЯДУЩЕЕ ПОКРЫТИЕ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами карта видимости покрытия звезды TYC 2428-01094-1 (видимая величина 11.5^m) астероидом Каллиопа 24 марта 2017 года с 16ч57м до 17ч08м по Всемирному времени, видимого на территории России (моменты времени в минутах указаны на карте). Земля изображена, как она наблюдается со стороны астероида. Дневная часть поверхности Земли заштрихована сплошными линиями, сумеречная – пунктирными линиями. Координаты звезды: α = 6ч17.6м, δ = +34°39′. Астероид принадлежит главному поясу. Считая его орбиту круговой, определите расстояние от Земли до астероида в момент покрытия.



2. Решение. Покрытие звезды астероидом наблюдается через 4 дня после весеннего равноденствия. За это время Солнце сместилось в своем видимом движении примерно на 4° (16 минут) к востоку от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики. По координатам мы видим, что звезда и астероид отстоят примерно на то же расстояние к востоку от точки летнего солнцестояния и при этом находятся чуть выше эклиптики. Получается, что астероид располагается в восточной квадратуре, в 90° от Солнца и примерно в 11° к северу от точки летнего солнцестояния. К выводу о квадратуре также можно прийти, заметив, что с астероида видна половина освещенной части поверхности Земли.

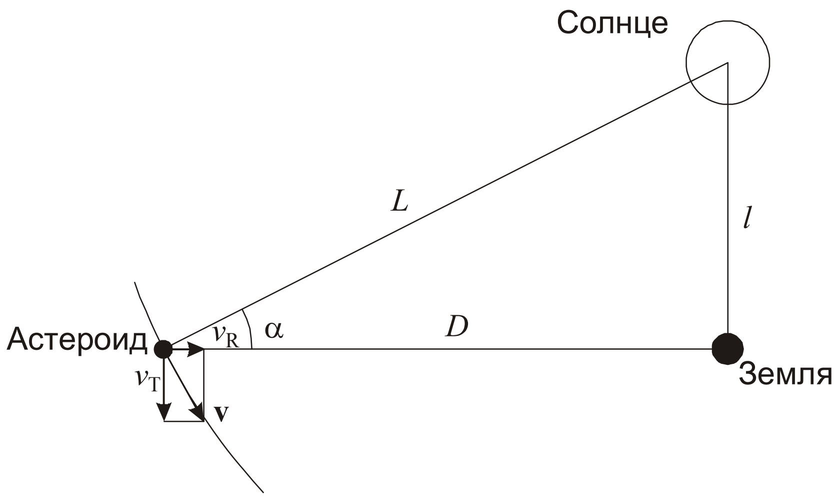
Если изобразить Землю в плоскости, перпендикулярной плоскостям экватора и эклиптики, то астероид и звезда также окажутся вблизи плоскости этого рисунка. Радиус-вектор орбиты Земли перпендикулярен плоскости рисунка, Солнце в нем располагается за Землей. В своем орбитальном движении Земля движется практически от астероида.

Так как звезда располагается от Земли несопоставимо дальше, чем астероид, движение его тени (области видимости покрытия) происходит с той же скоростью, что и геоцентрическое движение астероида. Из предложенной карты мы можем определить компоненты этой скорости в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Отметив положения центра тени на двух хорошо заметных удаленных делениях (например, 16ч59м и 17ч07м), получаем, что в горизонтальном направлении за восемь минут (480 секунд) астероид проходит расстояние, равное 0.64 от диаметра Земли или 8100 км. Геоцентрическая скорость астероида v_T в этом направлении равна 16.9 км/с. Это направление перпендикулярно плоскости рисунка выше, и полученная скорость отражает движение астероида вокруг Солнца, так как Земля движется в плоскости рисунка.

В перпендикулярном направлении геоцентрическое движение астероида направлено на юг, а его скорость составляет 0.085 диаметра Земли или 1080 км за 8 минут. Соответствующая скорость равна 2.3 км/с. Скорость Земли в этом направлении составляет

$$u_V = u \sin(\delta - \varepsilon) = 5.9 \text{ км/с}$$

и направлена на север. Мы получаем, что вертикальная проекция гелиоцентрической скорости астероида v_V составляет всего 3.6 км/с, что существенно меньше проекции v_T. Мы можем пренебречь проекцией v_V и считать, что астероид в проекции рисунка движется горизонтально. Изобразим теперь ситуацию в проекции на плоскость, перпендикулярную первому рисунку и содержащую Солнце, Землю и астероид.



Обозначим радиусы орбит Земли и астероида как l и L, а угловое расстояние между Солнцем и Землей как α. Очевидно, что $\sin\alpha = l/L$. Орбитальная скорость астероида равна

$$v = \frac{v_T}{\cos\alpha} = u\sqrt{\frac{l}{L}} = u\sqrt{\sin\alpha}.$$

Здесь u – орбитальная скорость Земли. Отсюда получаем:

$$\frac{v_T}{u} = \cos\alpha\sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)};$$

$$\sin^3\alpha - \sin\alpha + (v_T/u)^2 = 0.$$

У этого кубического уравнения, вообще говоря, будет три корня, два из которых имеют физический смысл ($0 < \sin\alpha < 1$). Чтобы решить это уравнение наиболее простым способом, и при этом сразу найти единственный нужный корень, учтем, что астероид принадлежит главному поясу, и мы примерно знаем отношение l/L (около 1/3). Будем считать это число малым и введем обозначения: $\sin\alpha = x$, $(v_T/u)^2 = C$:

$$x^3 - x + C = 0.$$

Предположим поначалу, что число x^3 очень мало, и определим приближенное решение:

$$x_0 = C = 0.32,$$

что само по себе близко к сделанному выше предположению (1/3). Введя обозначение $x=x_0+\delta x$ и считая величину δx малой, имеем:

$$x_0^3 + 3x_0^2\delta x - x - \delta x + C = C^3 + 3C^2\delta x - C - \delta x + C = C^3 + (3C^2 - 1)\delta x = 0;$$
$$x = C + \delta x = C + \frac{C^3}{1-3C^2} = \frac{C-2C^3}{1-3C^2} = 0.37.$$

Данное решение кубического уравнения можно также получить методом последовательных приближений с учетом малой величины x^3. В этом случае, приближенное решение на (N+1) шаге равно

$$x_{N+1} = x_N^3 + C.$$

Начальное приближение берется в таком же виде: $x_0 = C = 0.32$. Цепочка приближений даст тот же ответ $x = 0.37$. Он отличается от точного лишь в третьем знаке после запятой. Нам остается найти расстояние между Землей и астероидом:

$$D = \frac{l}{\mathrm{tg}\,\alpha} = l\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = 2.5 \text{ а.е.},$$

что опять же близко к истинному значению, несмотря на все сделанные предположения. В реальности, орбита Каллиопы слегка вытянута, и в момент покрытия астероид располагается ближе к точке перигелия. Тем не менее, расстояние составляет 2.54 а.е., мало отличаясь от полученного в ходе решения.

2. Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Вывод, что астероид находится вблизи квадратуры либо вычисление его углового расстояния от Солнца на небе.
2 этап: 3 балла.
Определение геоцентрической скорости астероида (две компоненты либо модуль и угол). Если находится только горизонтальная скорость в пренебрежении углом наклона, из этих 3 баллов выставляется 2, остальные этапы решения оцениваются в полной мере. Допускаются погрешности в пределах 0.3-0.4 км/с.
3 этап: 3 балла.
Выражение для гелиоцентрической орбитальной скорости астероида. При этом участники могут указать, что она лежит в плоскости "Солнце-Земля-астероид", пренебрегая компонентой v_V, а могут проводить полный трехмерный анализ.
4 этап: 4 балла.
Вычисление расстояния между Землей и астероидом.

Возможная ошибка участника: Полученная тангенциальная скорость астероида сразу приравнивается к его орбитальной скорости, пренебрегая углом α (это эквивалентно нулевому приближению решения кубического уравнения) с ответом 2.8-2.9 а.е. В этом случае за третий этап при правильных вычислениях выставляется только 1 балл, за 4 этап – также 1 балл. Максимальная оценка составляет 7 баллов.

XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

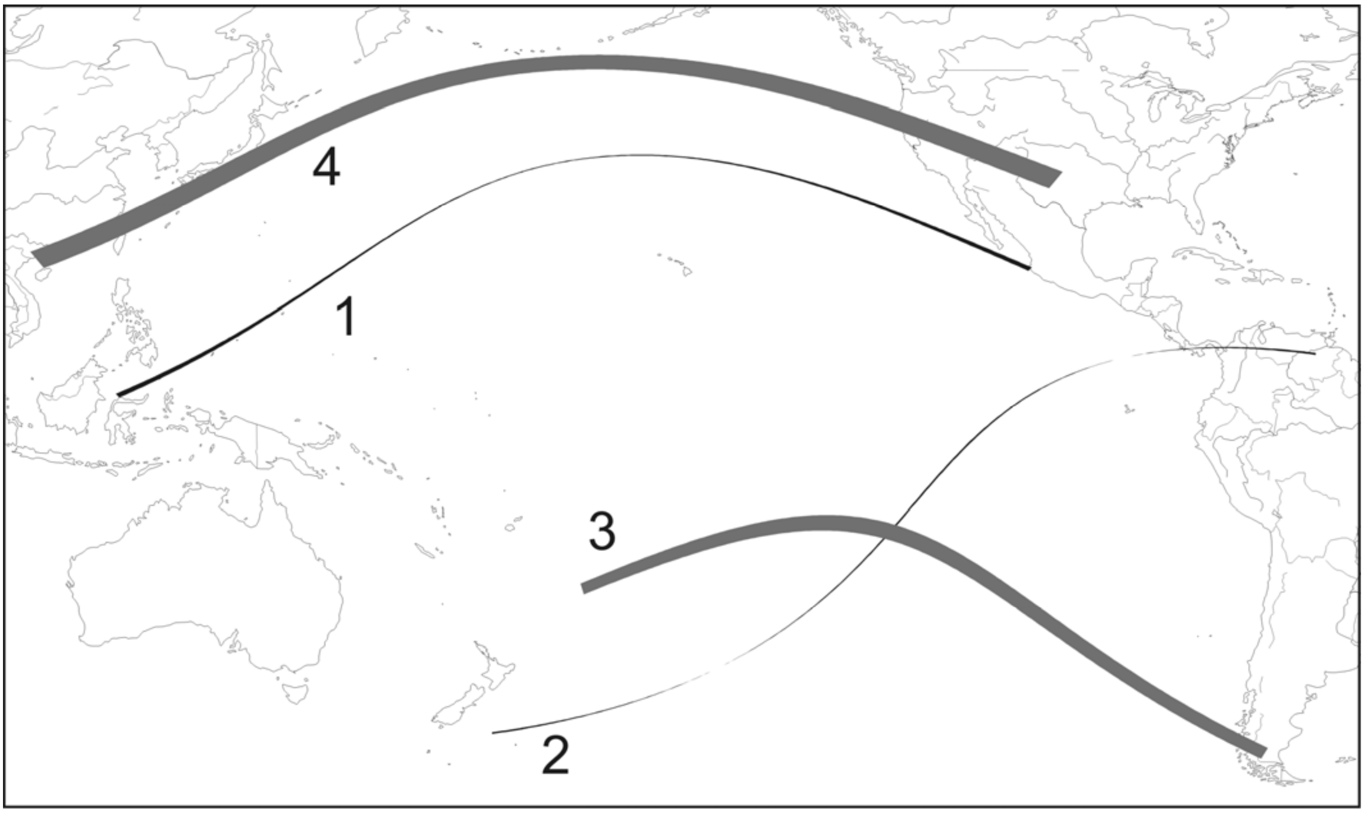
Смоленск, 2017 г.

Блиц-тест

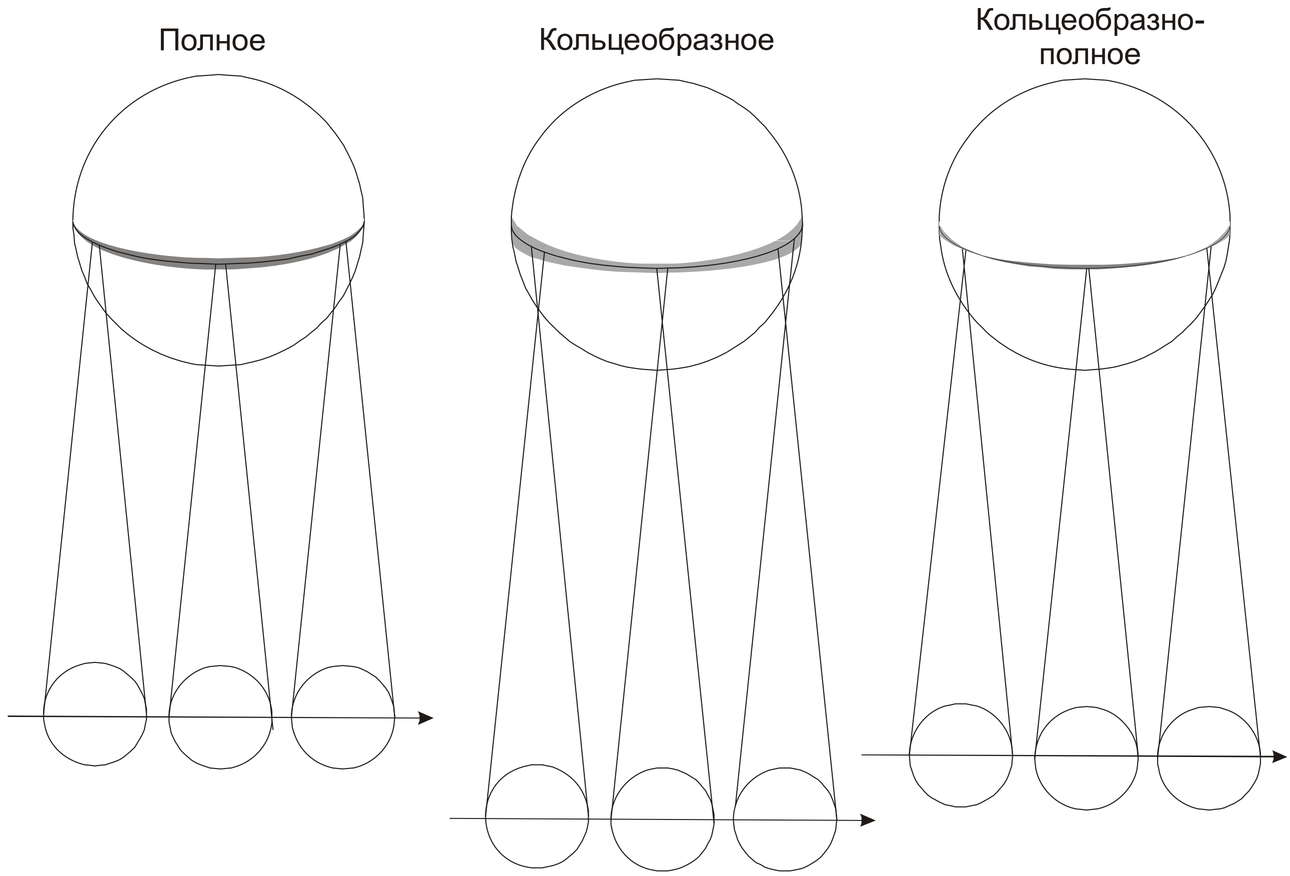
IX/X/XI.1 ЧЕТЫРЕ ПОЛОСЫ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами карта части поверхности Земли, на которой нанесены области видимости полных и кольцеобразных фаз четырех солнечных затмений. Определите тип каждого затмения, вписав букву в соответствующую графу таблицы: А – кольцеобразное, В – кольцеобразно-полное, С – полное.



Решение. Обратим внимание, что полосы затмений несколько разные. Полосы 1 и 4 сужаются в середине, а полоса 3, наоборот, утолщается. Полоса 2 очень тонкая, а в двух местах она сужается настолько, что почти не видна на рисунке. Рассмотрим, как изменяется по ходу движения по поверхности Земли полоса видимости затмений всех трех типов (рисунок):



У полного затмения ширина полосы в середине увеличивается, так как эти точки поверхности Земли ближе к Луне, и ее тень там шире. У кольцеобразного затмения полоса в середине, наоборот, сужается. Кольцеобразно-полное затмение начинается на Земле как кольцеобразное с постепенно сужающейся полосой. Потом она превращается в точку, в которой видно центральное затмение с фазой, равной единице (диски Солнца и Луны совпадают). Далее идет полное затмение с постепенно расширяющейся полосой до ее середины, после чего все происходит в обратном порядке. Сравнивая этот рисунок с картой в условии, мы можем ответить на вопрос задачи. Для справки приводим и даты затмений, карты которых приведены в условии.

1	2	3	4
A	B	C	A
10.06.2002	08.04.2005	10.07.2010	21.05.2012

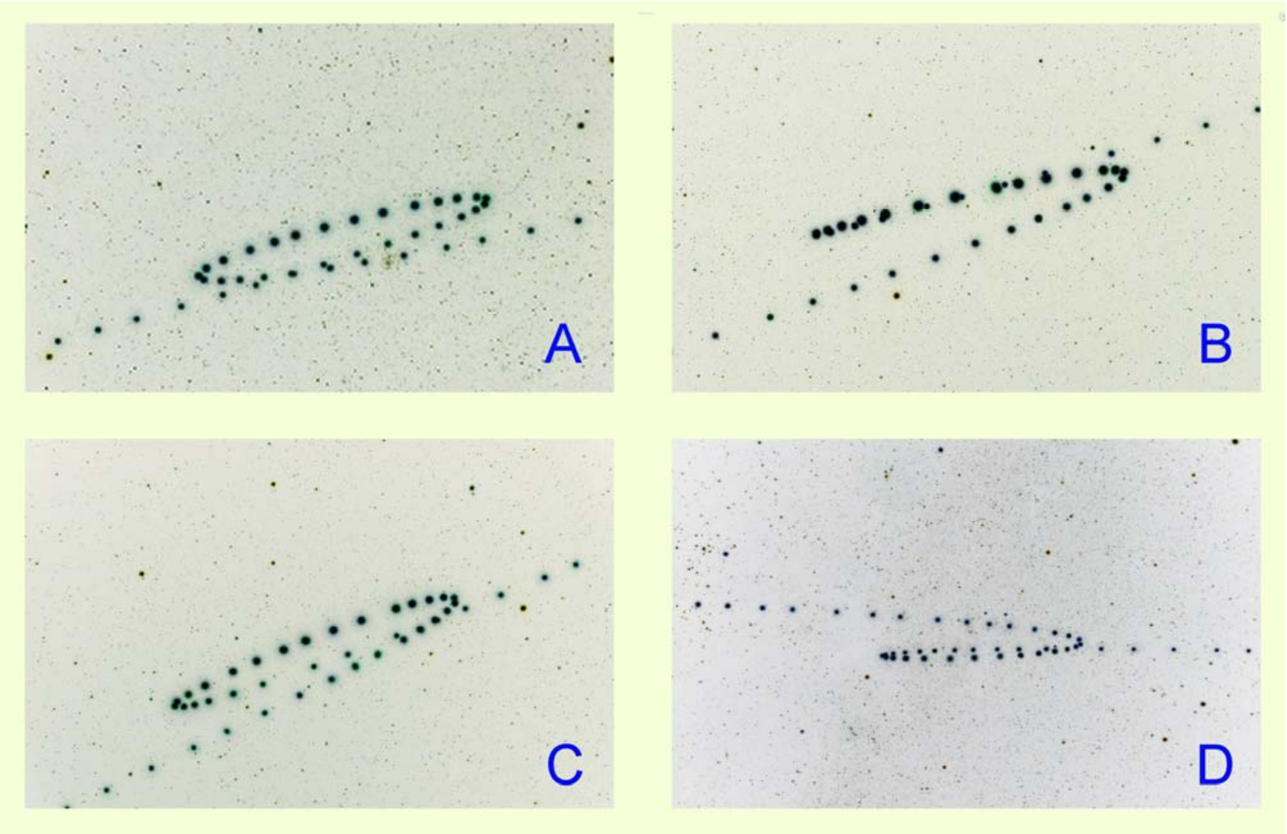
Алгоритм оценивания. Каждый правильный ответ оценивается в 2 балла. Некоторые неточные ответы (указание затмения 1 с тонкой полосой как кольцеобразно-полного и затмения 2 как полного) оцениваются 1 баллом.

Затмение	Нет ответа	A	B	C
1	0	2	1	0
2	0	0	2	1
3	0	0	0	2
4	0	2	0	0

IX/X/XI.2 МАРСИАНСКИЕ ПЕТЛИ

Н.Е. Шатовская

Условие. На фото показаны треки Марса близи четырех последовательных противостояний (фото с сайта "Мир ночью" http://www.twanight.org, автор Тунк Тезель, негатив). Расположите фото в хронологической последовательности от самой ранней к самой поздней. Большая полуось орбиты Марса составляет 1.524 а.е.



Решение. Из большой полуоси орбиты Марса мы можем получить период его обращения вокруг Солнца (687 суток) и синодический период – промежуток времени между двумя последовательными противостояниями Марса (780 суток). Он чуть больше марсианского года и двух земных лет. Поэтому каждое следующее противостояние будет происходить несколько восточнее на небе вдоль эклиптики, чем предыдущее. Хронологический порядок можно восстановить, отождествив созвездия, по которым перемещается планета.

На фото A Марс перемещается по созвездию Рака: трек проходит по звёздному скоплению Ясли (M44), у правого края фото видны Близнецы - Кастор и Поллукс, у левого - голова Льва. На фото B несложно узнать созвездие Девы, на фото C - трапецию Льва. Таким образом, фото C сделано позже фото A и раньше фото B.

Чтобы отождествить созвездия на фото D, нужно догадаться, что оно перевернуто "вверх ногами". У верхнего края фото видны Бетельгейзе и Беллатрикс, в правом верхнем углу – Процион, у правого края – Близнецы, у левого – голова Тельца, у нижнего – Капелла. Поскольку Телец – самое западное из упомянутых зодиакальных созвездий, фото D в хронологическом порядке должно быть первым. В таблице приведена правильная последовательность и годы, в которые были сделаны фотографии.

1	D	2007-2008
2	A	2009-2010
3	C	2012
4	B	2014

Алгоритм оценивания. Для оценивания решения определяется N – число правильных пар ответов, состоящих в нужной последовательности друг с другом (например, если ответ A в работе участника стоит раньше ответа B, как и должно быть, число N увеличивается на единицу). У точного ответа число N составляет 6. Оценка за задачу в зависимости от числа N определяется в соответствии с таблицей.

N	Оценка
0, 1, 2	0
3	2
4	4
5	6
6	8

При наличии повторов в ответе участника (например, дважды указана буква A) они идут в зачет, но не более одного раза. Например, при ответе D, D, A, A пара D-A является правильной, но засчитывается только один раз. Число N=1, оценка составляет 0 баллов.

Пример. Правильный ответ – D, A, C, B, а участник теста дал ответ C, D, B, A. Ответ содержит три правильные пары (C-B, D-A, D-B). Оценка составляет 2 балла.

IX/X.3 ИСКУССТВО И РЕАЛЬНОСТЬ

О.С. Угольников

Условие. Перед Вами четыре картины знаменитого русского художника И.К. Айвазовского. Отметьте в таблице, какие из ситуаций, изображенных на картинах, ***не могли*** иметь место в реальности.

Решение. На всех четырех картинах присутствует растущая Луна (если предположить, что мы находимся в северном полушарии Земли), ее вид и положение определяют возможность наступления такой ситуации на реальном небе. На картинах A и D можно также отметить положение Солнца (как линия пересечения лучей на картине A и как световое пятно на картине D). На картине D рога серпа Луны не направлены от Солнца. Подобная картина не могла наблюдаться. Аналогичный эффект виден на картине A, хотя серп Луны там плохо заметен. Даже если не обратить на это внимание, ситуация на картине A все равно невозможна: Солнце находится практически за правым краем дома, и его тень должна была быть направлена в сторону наблюдателя. В реальности она отклонена на значительный угол в левую сторону.

На картине B Луна имеет значительную фазу (больше 0.5), что указывает на ее большое угловое расстояние от Солнца (больше 90°). При этом полуденная линия Луны образует большой угол с вертикалью, этот же угол составляет линия "Солнце-Луна" и горизонт. Следовательно, Солнце должно располагаться глубоко под горизонтом, и в пункте наблюдения должна быть темная ночь. На картине же изображена яркая заря. Подобная ситуация не могла случиться в реальности.

Наконец, на картине C изображен серп молодой Луны. По направлению его рогов можно судить о положении Солнца – оно находится у горизонта или неглубоко под ним в правой части картины. Но в этом случае большое кучевое облако должно быть темным, так как Солнце располагается за ним. Оно же изображено светлым, каким облака бывают утром и вечером с противоположной от Солнца стороны. Ситуация на картине 3 также нереальна. Итак, окончательный ответ:

A	V
B	V
C	V
D	V

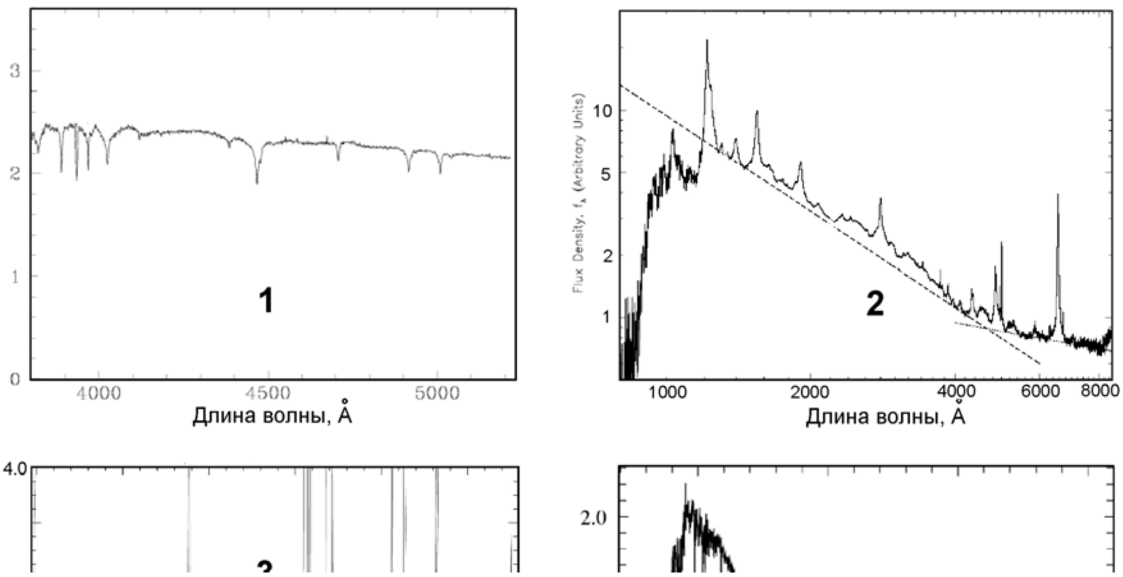
Алгоритм оценивания. Оценка за задание определяется числом правильных ответов N:

N	Баллы
0	0
1	1
2	2
3	5
4	8

XI.3 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

М.И. Волобуева

Условие. Перед вами спектры различных астрономических объектов: звезды главной последовательности (A), белого карлика (B), газовой туманности (C) и квазара (D). Расставьте соответствующие буквы в таблице.



Решение. Обратим внимание, что в двух предложенных спектрах (2 и 3) присутствуют линии излучения, а в двух других (1 и 4) – линии поглощения. Из этого можно сделать вывод, что спектры 1 и 4 принадлежат звездам. В спектре 4 видны линии бальмеровской серии водорода, а вот в спектре 1 их нет (по крайней мере, там нет линии Hβ с длиной волны 4861 ангстрем). Учитывая, что спектр 4 имеет максимум вблизи 5000 ангстрем, а его вид похож на планковский, можно сделать вывод, что спектр 4 относится к звезде главной последовательности (A), а спектр 1 – к белому карлику (B).

Спектры 2 и 3 заметно отличаются друг от друга. В спектре 3 континуум характеризуется небольшим наклоном зависимости от длины волны, а значительная доля энергии излучается в линиях, среди которых можно найти линии азота и кислорода. Спектр 2 имеет сильный континуум со степенной зависимостью яркости от длины волны. Спектр 2 принадлежит квазару (D), спектр 3 – планетарной туманности (C). Итак, ответы выглядят следующим образом:

Спектр	Ответ
1	B

2	D
3	C
4	A

Алгоритм оценивания. На первом этапе производится поиск совпадающих ответов (например, буква А стоит в двух или более клетках). Такие ответы, даже если среди них есть правильные, аннулируются. Далее за каждый правильный ответ выставляется 2 балла. Если участник путает спектры звезды главной последовательности (A) и белого карлика (B), или спектр газовой туманности (C) и спектр квазара (D) – это считается частичной ошибкой, за эти ответы ставится по 1 баллу. В итоге, таблица оценок выглядит следующим образом:

Спектр	Пропуск	Повтор	A	B	C	D
1	0	0	1	2	0	0
2	0	0	0	0	1	2
3	0	0	0	0	2	1
4	0	0	2	1	0	0

IX.4 ОТ МАЛОГО К ВЕЛИКОМУ

М.И. Волобуева

Условие. Расположите объекты в порядке возрастания их линейных размеров, расставив под соответствующими буквами номера от 1 (самый маленький) до 16 (самый большой).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

A	Белый карлик	I	Нейтронная звезда
B	Бетельгейзе	J	Нептун
C	Большое Магелланово Облако	K	Орбита Земли
D	Квазар	L	Плутон
E	Комета Чурюмова-Герасименко (ядро)	M	Скопление M13
F	Крабовидная туманность	N	Солнце
G	Луна	O	Туманность Андромеды
H	Местная группа галактик	P	Туманность Кольцо

Решение. Перечислим все объекты в порядке возрастания размера (в скобках - характерный радиус):

1. Комета Чурюмова-Герасименко (3-5 км)
2. Нейтронная звезда (10-20 км)
3. Плутон (1187 км)
4. Луна (1738 км)
5. Белый карлик (~ радиус Земли)
6. Нептун (25 тыс. км)
7. Солнце (695 тыс. км)
8. Орбита Земли (1 а.е.)
9. Бетельзейзе (красный сверхгигант, ~ 4.5 а.е.)
10. Квазар (~ размер Солнечной системы)

11. Туманность Кольцо (планетарная туманность, 0.75 св. лет)
12. Крабовидная туманность (остаток вспышки сверхновой, 5.5 св.лет)
13. Скопление M13 (шаровое скопление, 84 св.лет)
14. Большое Магелланово Облако (карликовая галактика, 7 тыс. св.лет)
15. Туманность Андромеды (галактика, 110 тыс. св.лет)
16. Местная группа (скопление галактик, ~ 1 Мпк)

Впишем ответы в таблицу:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
5	9	14	10	1	12	4	16	2	6	8	3	13	7	15	11

Алгоритм оценивания. Для оценивания решения определяется N – число правильных пар ответов, состоящих в нужной последовательности друг с другом (например, если ответ 1 в работе участника стоит раньше ответа 2, как и должно быть, число N увеличивается на единицу). Оценка равна целому частному (без округления вверх) от деления числа (N–56) на 8. Оценка в 8 баллов может быть выставлена только при точном ответе (N=120). При числе правильных пар 56 и менее оценка составляет 0 баллов.

При наличии повторов в ответе участника они идут в зачет, но не более одного раза. Например, при первых четырех цифрах 5, 5, 9, 9 пара 5-9 является правильной, но число N увеличивается только на 1.

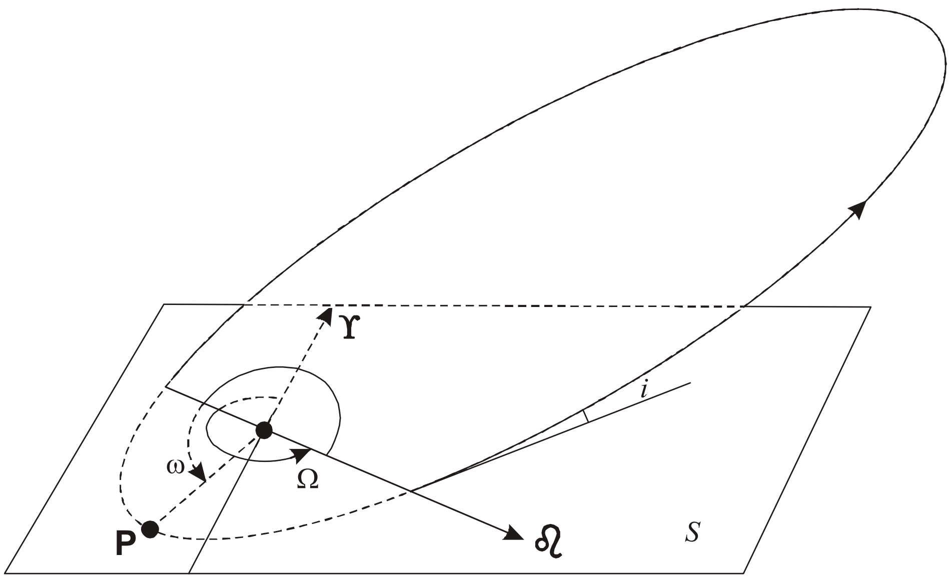
Пример. В ответе пропущено число 5, остальные числа написаны правильно. Общее число правильных пар составит (15*14/2)=105. Оценка за решение составляет (105-56) Div 8 = 6 баллов.

X/XI.4 ПРОЛЕТ СКВОЗЬ СКОПЛЕНИЕ

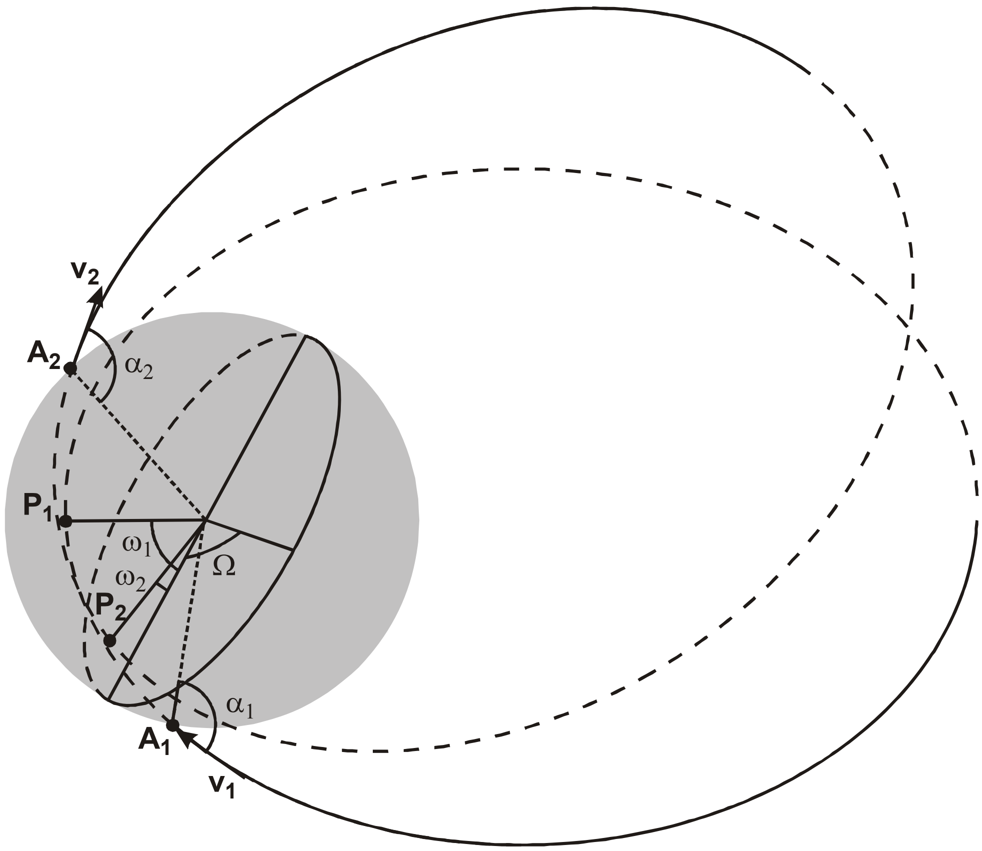
О.С. Угольников

Условие. Звезда – спутник шарового звездного скопления сначала движется по эллиптической орбите вне скопления, а потом пролетает сквозь скопление, не испытывая тесных сближений с его отдельными звездами. Отметьте галочками, какие элементы орбиты звезды после вылета из скопления останутся такими же, какими они были до попадания в скопление. Элементы орбиты отсчитываются относительно некоторой фиксированной плоскости *S*, проходящей через центр скопления, и некоторого направления в этой плоскости ϒ (для долготы восходящего узла), аналогично плоскости эклиптики и направлению на точку весеннего равноденствия для элементов орбит в Солнечной системе. Графическое объяснение элементов дано на рисунке. Распределение плотности внутри скопления сферически симметрично. Действие тел вне скопления на звезду не учитывать.

1	Большая полуось	*a*
2	Эксцентриситет	*e*
3	Долгота восходящего узла (угол между направлением ϒ и направлением на восходящий узел ☊ в плоскости *S*)	Ω
4	Наклонение (угол между плоскостью *S* и плоскостью орбиты)	*i*
5	Аргумент перицентра (угол между направлениями на восходящий узел ☊ и перицентр **P** в плоскости орбиты)	ω



Решение. По условию задачи, скопление сферически симметрично, и до вступления внутрь него звезда движется по эллиптической орбите в плоскости, проходящей через центр скопления. Сила притяжения всегда будет направлена к центру скопления, в этой же плоскости, и звезда останется в ней после пролета через скопление. Неизменность самой плоскости означает постоянство наклонения i и долготы восходящего узла Ω. Изобразим путь этой звезды в данной плоскости.



Обозначим точки влета звезды в скопление и ее вылета как $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$. Они находятся на одном расстоянии от центра скопления, равном ее радиусу. По закону сохранения энергии, величины скорости звезды в этот момент v_1 и v_2 одинаковы.

В любой момент времени, находится ли звезда снаружи или внутри скопления, она движется в сферически симметричном поле тяжести центрального тела. Это означает, что для нее справедлив II закон Кеплера, в соответствии с которым за любой малый промежуток времени радиус-вектор звезды будет описывать одинаковую малую площадь. Это относится и к моментам влета и вылета звезды из скопления. Следовательно, угол α между радиусом-вектором и скоростью по модулю будет одинаков. Данный вывод можно получить и из закона сохранения момента импульса, а также еще из одного простого принципа: орбита должна оставаться симметричной относительно линии, соединяющей центр скопления и ближайшую к нему точку орбиты.

Равенство скоростей и углов между радиус-вектором и скоростью на равном расстоянии от центральной массы означает геометрическое равенство эллипсов орбиты до и после пролета звезды через скопление. Большая полуось a и эксцентриситет орбиты e не изменяются.

В результате пролета звезды сквозь скопление изменяется только ориентация эллипса в картинной плоскости или, что то же самое, угловое положение точки перицентра ($\mathbf{P_1}$ и $\mathbf{P_2}$). Это эквивалентно изменению аргумента перицентра (ω_1 и ω_2). Итак, окончательный ответ:

1	2	3	4	5
V	V	V	V	

Алгоритм оценивания. Наиболее простым выводом в решении является неизменность плоскости орбиты звезды, что означает неизменность параметров Ω и i. Каждый из этих двух выводов оценивается по 1 баллу. Выводы о неизменности большой полуоси a и эксцентриситета e оцениваются по 2 балла. Наконец, 2 балла выставляется за указание на изменения аргумента перицентра ω.

№	1	2	3	4	5
V	2	2	1	1	0
-	0	0	0	0	2