

Теоретический тур

10 – 19 ноября 2016 года

Задача 1. Приказ 66

И.А. Утешев

Преследуемый эскадрой штурмовиков, мастер Кота решил укрыться на планете Мрлсст системы Меннаалии (орбитальный период $T \simeq 60$ стандартных лет, эксцентриситет орбиты $e = 0.44$). Бортовая энергосистема его истребителя сильно пострадала в ходе погони, так что нам придётся помочь мастеру с расчётами.

а) Запишите соотношение между секториальной скоростью σ и удельным моментом импульса $\vec{l}$ тела, находящегося в центральном поле.

б) Введите обозначение $\mu \equiv GM$, где G — гравитационная постоянная, M — масса звезды Меннаалии. Запишите соотношение между удельным моментом импульса $\vec{l}$, удельной механической энергией E орбитального движения тела и эксцентриситетом e его орбиты.

В момент, когда Мрлсст вступила в верхнее соединение с Меннаалии и находилась точно за её диском в апоцентре своей орбиты, Кота придал кораблю импульс такой, что его скорость $\vec{v}_0$ оказалась перпендикулярна направлению на звезду и равна параболической для астроцентрического расстояния r_0 , на котором корабль находился.

Мастеру повезло: угловые скорости истребителя и планеты относительно звезды оказались противоположно направленными, а орбиты — расположенными в одной плоскости. Через время t , не превышающее трети T , корабль совершил жёсткую посадку на Мрлсст при астроцентрическом расстоянии r_1 , равном большой полуоси орбиты планеты.

с) Найдите t , пренебрегая гравитационным взаимодействием корабля и планеты.

д) Введите обозначение $k \equiv r_0/a$. Найдите k .

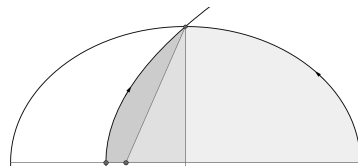
Решение:

а) $\sigma = |\vec{l}|/2;$

б) $e^2 = 1 + \frac{2l^2}{\mu^2}E;$

с) Второй закон Кеплера (см. рис.):

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2}ea \cdot a\sqrt{1-e^2}}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi} \Rightarrow t = 0.32T \simeq \mathbf{20 \text{ std лет.}}$$



д) Секториальные скорости планеты и корабля: $\sigma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2} \cdot \sqrt{\mu a}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{k}{2}} \cdot \sqrt{\mu a}.$

В точке встречи $t = A_1/\sigma_1 = A_2/\sigma_2$, где A_1 и A_2 — площади, замечённые радиусами-векторами тел.

Для Мрлсст $A_1 = \frac{1}{4}\pi a^2 \sqrt{1-e^2} + \frac{1}{2}ea \cdot a\sqrt{1-e^2} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{e}{2}\right)a^2\sqrt{1-e^2}$; для истребителя (площадь куска параболы $\rightarrow$ интеграл):

$$A_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)pb^3 - \frac{1}{2}ea \cdot a\sqrt{1-e^2}, \quad \text{где } p = \frac{(e+k)a}{a^2(1-e^2)} \Rightarrow A_2 = \left(\frac{2k}{3} + \frac{e}{6}\right)a^2\sqrt{1-e^2}.$$

$$\frac{A_1}{\sigma_1} = \frac{A_2}{\sigma_2} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} + e}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\frac{2k}{3} + \frac{e}{6}}{\sqrt{k/2}} \Rightarrow \underbrace{\frac{3(\pi + 2e)}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-e^2}}}_{\alpha} \sqrt{k} = k + \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} k^2 + \left(\frac{e}{2} - \alpha^2\right)k + \frac{e^2}{16} = 0; \\ \alpha \simeq 2.3750; \\ k < 1 - e. \end{cases}$$

Окончательно $k \simeq 2.23 \cdot 10^{-3}$.

Задача 2. Реактивная тригонометрия

М.А. Пирогов

Во время тура один из участников ЮАА-2016 случайно отправился в космический полёт и оказался над городом проведения олимпиады — Бхубанешваром ($\varphi_0 \approx 20^\circ$; $\lambda_0 \approx 86^\circ$) — на высоте $h = R_\oplus$.

- Найдите, какая часть поверхности Земли открылась его взору.
- Найдите координаты самой западной W и самой восточной E точек этой области.
- Пусть самолёт летит из W в E по кратчайшей траектории. Какой наибольшей широты $\varphi_{\max}$ он достигает в полёте?

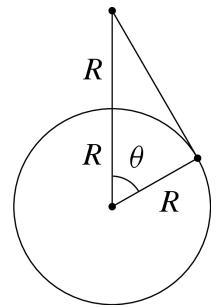
Землю считать идеальным шаром, рефракцией пренебречь.

Решение:

а) Угловой радиус указанной области: $\theta = \arccos \frac{R}{2R} = 60^\circ \Rightarrow \frac{S}{S_0} = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1}{4}$.

б) Уравнение малого круга с центром в точке $(\varphi_0; \lambda_0)$ и радиусом 60° записывается в виде $\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda = \frac{1}{2}$. Условие экстремальности $\cos \Delta\lambda$:

$$\left(\frac{\frac{1}{2} - \sin \varphi \sin \varphi_0}{\cos \varphi \cos \varphi_0}\right)' = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 2 \sin \varphi_0. \Rightarrow \varphi \approx 43^\circ \Rightarrow \Delta\lambda \approx \pm 67^\circ.$$



Искомые координаты точек: **W(43°; 19°), E(43°; 153°)**.

с) Самолёт летит по дуге большого круга, проходящего через W и E. Пусть координаты одного из его полюсов $(\varphi_p \lambda_p)$;

$$\begin{cases} \sin \varphi_p \sin \varphi + \cos \varphi_p \cos \varphi \cos(\lambda_0 + \Delta\lambda - \lambda_p) = 0, \\ \sin \varphi_p \sin \varphi + \cos \varphi_p \cos \varphi \cos(\lambda_0 - \Delta\lambda - \lambda_p) = 0. \end{cases} \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_p \text{ или } \lambda_0 = \lambda_p + 180^\circ.$$

$$\text{Возьмём } \lambda_p = \lambda_0 \Rightarrow \tan \varphi_p = -\cot \varphi \cos \Delta\lambda \Rightarrow \varphi_p \approx -22.5^\circ.$$

Искомая точка тоже лежит на круге: $\tan \tilde{\varphi} = -\cot \varphi_p \cos(\tilde{\lambda} - \lambda_p)$. Понятно, что $\cos(\lambda_{\max} - \lambda_p) = 1$, откуда следует $\lambda_{\max} = \lambda_0$. В результате $\tan \varphi_{\max} = -\cot \varphi_p \Rightarrow \varphi_{\max} = \varphi_p + 90^\circ \approx 67.5^\circ$.

Задача 3. Побег из атмосферы

М.А. Пирогов

Предположим, что у Луны когда-то была изотермическая ($T = 300$ К) воздушная атмосфера. Грубо оцените минимальную высоту, на которой молекулы со средней энергией были способны покинуть Луну. Выразите ответ в лунных радиусах.

Решение:

$$\sqrt{\frac{3\mathcal{M}T}{\mu}} \approx \sqrt{\frac{2G\mathcal{M}_\zeta}{h + R_\zeta}} \Rightarrow h \approx 20R_\zeta$$

Задача 4. Не шути со временем

И.А. Утешев

«Сегодня 24 сентября, самый длинный день в году. Он вдвое длиннее, чем 25 марта.»

В какой ближайшей к нам (60° N 30° E, 2016 г. н.э.) точке пространства (где на Земле?) и времени (когда?) может находиться наблюдатель? Уравнением времени, рефракцией и угловыми размерами Солнца пренебречь.

Решение:

Часовой угол захода Солнца h связан с его склонением δ и широтой φ соотношением $\cos h = -\tan \delta \tan \varphi$. Продолжительность дня $\simeq 2h$ максимальна, когда 24 сентября Солнце проходит точку солнцестояния.

День летнего солнцестояния наступал 24 сентября $\frac{\min\{20.VI \rightarrow 24.IX\}}{(365.25/25\,800) \text{ сут/год}} \approx 6.8$ тысяч лет назад.

Соответственно, день зимнего солнцестояния будет наступать 24 сентября через ≈ 6.8 тысяч лет. Заметим, что около 25 марта будет наступать противоположное солнцестояние.

$$\arccos(\mp \tan \varepsilon \tan \varphi) = 2 \arccos(\pm \tan \varepsilon \tan \varphi) \Rightarrow \pm \tan \varepsilon \tan \varphi = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \simeq \begin{cases} +49^\circ, & \text{лето;} \\ -49^\circ, & \text{зима.} \end{cases}$$

Ближайшая к нам точка с заданной широтой, очевидно, имеет долготу, равную нашей, и находится в северном полушарии.

Ответ: 49° N 30° E, ≈ 8.8 тыс. лет н.э.

Задача 5. О бедной L_3 замолвите слово!

И.А. Утешев

Точки Лагранжа — точки в системе из двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействие никаких других сил, кроме гравитационных, со стороны двух первых тел, может оставаться неподвижным относительно этих тел. . .

Точка L_3 лежит на соединяющей тела прямой и находится за телом с большей массой.

[wikipedia]

Выразите расстояние x между точкой L_3 и более массивным телом через расстояние R между телами и отношение их масс $\beta \ll 1$.

Подсказка. Очевидное соотношение $\frac{|x - R|}{R} \ll 1$ может оказаться весьма полезным.

Решение:

Запишем условие равновесия тела, помещённого в начало отчёта: $\vec{0} = \frac{G\mathfrak{M}_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{G\mathfrak{M}_2}{r_2^3}\vec{r}_2 - \omega^2\vec{c}$,

где $\omega^2 = \frac{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}{R^3}$ — угловая скорость обращения системы, $\vec{c} = \frac{\mathfrak{M}_1\vec{r}_1 + \mathfrak{M}_2\vec{r}_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}$ — вектор центра масс.

$\Rightarrow \mathfrak{M}_1\vec{r}_1(r_1^{-3} - R^{-3}) + \mathfrak{M}_2\vec{r}_2(r_2^{-3} - R^{-3}) = \vec{0}$. Заменим $\vec{r}_1 \equiv R(1 + \zeta)$, $\vec{r}_2 \equiv R(2 + \zeta)$, $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1 \equiv \beta$:

$$0 = (1 + \zeta) \left[\frac{1}{(1 + \zeta)^3} - 1 \right] + (2 + \zeta) \left[\frac{1}{(2 + \zeta)^3} - 1 \right] \beta \simeq -3\zeta - \frac{7}{4}\beta \Rightarrow \zeta \simeq -\frac{7}{12}\beta \Rightarrow \boxed{x = R \left(1 - \frac{7}{12}\beta \right)}$$

Задача 6. Oxygen

Фольклор

Спутник летит на высоте $h = 100$ км над поверхностью Земли в верхних слоях атмосферы. Концентрация молекул составляет $n = 1.4 \cdot 10^{13}$ см³, температура — $T = 237$ К. В лобовой части спутника установлен манометр, который соединяется с атмосферой через диафрагму радиуса $r = 0.5$ мм, поверхность диафрагмы перпендикулярна направлению движения спутника.

Температура в объёме манометра ($T_1 = 300$ К) поддерживается постоянной. Оцените давление P , которое покажет манометр после установления равновесия.

Решение:

Скорость спутника $V = \sqrt{GM_{\oplus}/(R_{\oplus} + h)} = 7850$ м/с значительно превышает тепловую скорость молекул атмосферы. В стационарном режиме поток молекул в полость манометра равен потоку из него:

$$nV\sigma = \frac{1}{4}n_1V_1\sigma,$$

где n_1 и V_1 — соответственно концентрация и средняя скорость молекул (допустимо использовать rms-выражение) в полости. Атмосфера в основном состоит из азота ($\bar{\mu} = 29$ г/моль). Искомое давление

$$P = n_1kT_1 = \frac{4nV}{V_1}kT_1 \approx 4 \text{ Па}.$$

Примечание. Использованные приближения справедливы в случае, если r много меньше длины свободного пробега.

Задача 7. Одна фамилия

И.А. Утешев

Межгалактический маяк представляет собой изотропный, компактный и яркий абсолютно чёрный источник. Для земного наблюдателя его болометрическая звёздная величина $m = 5.2$.

Какую спектральную плотность потока излучения маяка на частоте $f = 32$ ГГц могут измерить на ракете «Нейтрон», находящейся на стартовом столе, если максимальная интенсивность излучения приходится на длину волны $\lambda_0 = 500$ нм? Выразите ответ в Янских. Поглощением пренебречь.

Решение:

По закону смещения Вина эффективная температура источника составляет $T \simeq 5800$ К $\simeq T_{\odot}$. Спектральная кривая источника похожа на солнечную.

Источник слабее Солнца в $\xi = 10^{0.4(m-m_{\odot})} = 6.3 \cdot 10^{12}$ раз. В радиодиапазоне ($c/f \gg \lambda_0$) применимо приближение Рэлея – Джинса. Искомая плотность потока

$$r = \frac{2\pi f^2 kT}{c^2} \cdot \frac{4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a_{\oplus}^2} \cdot \frac{1}{\xi} \simeq 2.0 \cdot 10^{-6} \text{ Ян.}$$

Задача 8. Операция «Ag⁺»

И.А. Утешев

По главной оптической оси тонкой плосковыпуклой линзы с постоянной скоростью V ползёт муха. В некоторый момент времени скорость её изображения составила aV . Линзу быстро заменяют на такую же с посеребрённой выпуклой поверхностью, и скорость изображения становится равной bV . Какие значения может принимать отношение b/a ? Показатель преломления стекла $n = 1.4$.

Решение:

Продифференцируем формулу тонкой линзы (Ньютона): $xy = D^{-2} \Rightarrow \dot{x}y \pm x\dot{y} = 0$, где D — оптическая сила линзы. Отношение скорости изображения к скорости объекта $k = D^2 x^2$. Изначальная оптическая сила линзы $D_0 = \frac{1}{F} = \frac{n-1}{R}$, так что $a = D_0^2 (\tilde{x} - 1/D_0)^2$, где $\tilde{x}$ — расстояние от объекта до линзы;

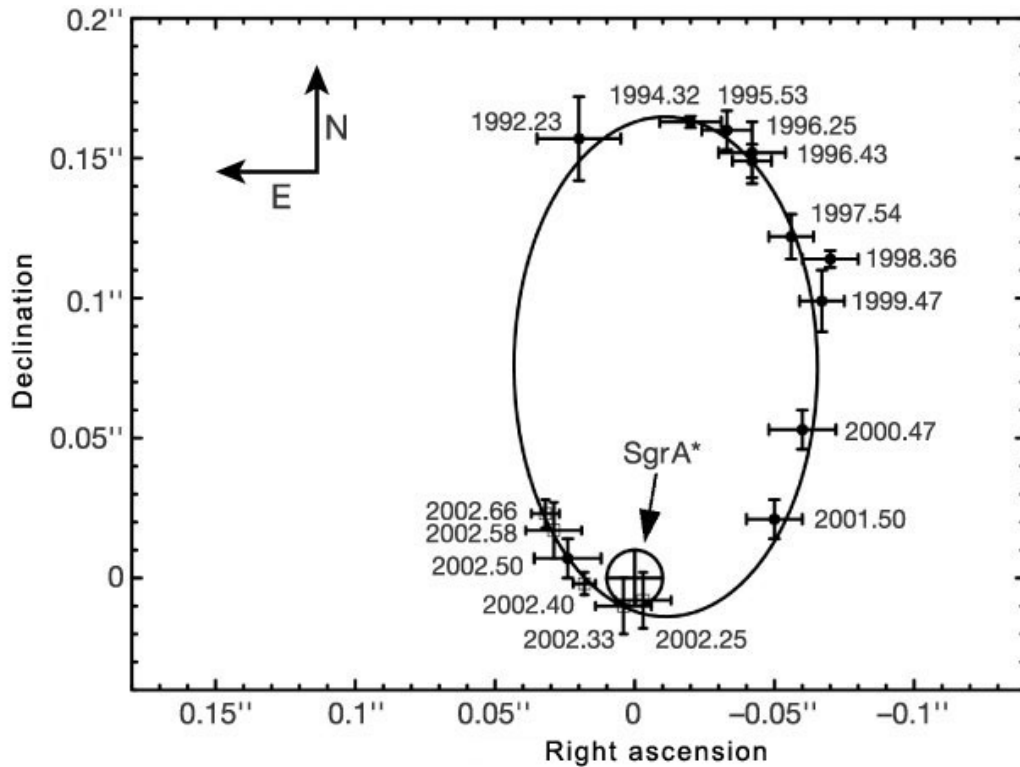
$$\tilde{x} = \frac{\sqrt{a} + 1}{D_0}.$$

Серебрение выпуклой поверхности линзы изменяет оптическую силу линзы. Возможны два варианта расположения линзы относительно объекта:

$$|D_1| = \frac{2}{R} = \frac{2}{n-1} D_0 \quad \text{или} \quad |D_2| = \frac{1}{F} + \frac{2}{R} + \frac{1}{F} = \frac{2n}{n-1} D_0.$$

$$\text{Таким образом, } b/a = \frac{1}{a} \left(\left| \frac{D}{D_0} \right| (\sqrt{a} + 1) - 1 \right)^2 \Rightarrow \begin{cases} b/a = \frac{(5\sqrt{a} + 1)^2}{16a}; \\ b/a = \frac{(7\sqrt{a} + 6)^2}{a}. \end{cases}$$

Оцените базу радиointерферометра, способного разрешить сверхмассивную чёрную дыру Sgr A* в центре Млечного Пути в диапазоне 230 – 450 ГГц. На иллюстрации приведён трек известной близкой к центральному объекту звезды S2.



Решение:

Оценим для начала массу чёрной дыры. Для этого найдём из иллюстрации большую полуось орбиты звезды $\tilde{a} \simeq 0.1'' \Rightarrow a = \tilde{a} \times 8 \text{ кпк} = 10^3 \text{ а.е.}$ и период обращения $T = 15 \text{ лет}$. Отсюда масса чёрной дыры $M = 4\pi^2 a^3 / (GT^2) = 4 \cdot 10^6 M_\odot$, а её шварцшильдовский размер $D_s = 4GM/c^2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ м}$.

Указанному диапазону частот соответствуют ($c = \nu\lambda$) длины волн 0.67 – 1.30 мм. Длина базы интерферометра $P = \lambda/D_s \times 8 \text{ кпк} \sim 10^4 \text{ км}$.

Задача 10. Космодром на Юпитере

М.И. Волобуева

Необъяснимо, но факт: на юпитерианской научной станции, парящей в верхних слоях атмосферы Юпитера, был построен космодром для межзвездных перелетов! Дескать, поближе к границе Солнечной системы. Оцените минимальную скорость, с которой должен стартовать космический корабль с этого космодрома, чтобы действительно улететь к другим звездам.

Решение:

Очевидно, нам требуется посчитать так называемую «третью космическую» скорость для Юпитера. Орбитальная скорость Юпитера равна

$$v_{\text{ж}} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{ж}}}}.$$

Чтобы в дальнейшем покинуть Солнечную систему, космический корабль на расстоянии $a_{\text{ж}}$ от Солнца должен иметь скорость не меньше $\sqrt{2}v_{\text{ж}}$, т.е. относительно Юпитера его скорость должна составлять не менее $v = (\sqrt{2} - 1)v_{\text{ж}}$.

Чтобы иметь такую скорость после выхода из сферы притяжения Юпитера, по закону сохранения энергии начальная скорость при запуске должна составлять

$$u = \sqrt{v^2 + \frac{2Gm_{\text{ж}}}{R_{\text{ж}}}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{ж}}} + \frac{2Gm_{\text{ж}}}{R_{\text{ж}}}} \approx 60 \text{ км/с}.$$

Запускать с Земли гораздо проще...

Задача 11. Тройной альфа-процесс

М.И. Волобуева

Оцените, сколько ядер углерода ^{12}C ежесекундно образуется в звезде с абсолютной звездной величиной, равной $-0^m.3$, если известно, что вклад горения гелия в светимость этой звезды составляет 30%. Масса гелия ^4He и углерода ^{12}C составляет 4.002603 и 12.000000 а.е.м. соответственно.

Подсказка: как можно догадаться из названия, в сокращенном виде реакцию горения гелия можно записать как $3\ ^4\text{He} \rightarrow\ ^{12}\text{C} + \gamma$.

Решение:

Звезда имеет абсолютную звездную величину на 5^m меньше солнечной, а значит, ее светимость в 100 раз больше и равна $3.88 \cdot 10^{28}$ Вт. При синтезе одного ядра углерода выделяется энергия

$$E = \Delta mc^2 = (3m_{\text{He}} - m_{\text{C}})c^2 = (3 \cdot 4.002603 - 12.000000) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1.17 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$$

(Тут требуется перевести а.е.м. во что-нибудь более удобное. Можно вспомнить, что молярная масса определенного вещества, выраженная в граммах на моль, численно совпадает с массой молекулы этого вещества, выраженной в а.е.м. Это значит, что $1 \text{ а.е.м.} = (1/N_A) \text{ г} = (k/\mathfrak{N} \cdot 10^{-3}) \text{ кг}$, где N_A , k , $\mathfrak{N}$ – число Авогадро, постоянная Больцмана и универсальная газовая постоянная соответственно.)

Таким образом, за 1 секунду образуется $0.3 \cdot 3.88 \cdot 10^{28} / (1.17 \cdot 10^{-12}) \approx 1 \cdot 10^{40}$ ядер углерода.

Задача 12. Ежик в тумане

М.И. Волобуева, Парадоксальная Вселенная

Для некоторой звезды, похожей на Вега, величина межзвездного поглощения в видимой области спектра составляет $2^m.4$. Чему равен наблюдаемый показатель цвета $B - V$ этой звезды?

Решение:

Вега — звезда спектрального класса A0, а значит, ее истинный показатель цвета $(B - V)_0$ равен 0^m . Известно, что в среднем для межзвездного поглощения A_V в полосе V выполняется соотношение

$$A_V \approx 3 \cdot E_{B-V},$$

где $E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0$ — избыток цвета. Таким образом,

$$(B - V) = (B - V)_0 + E_{B-V} = (B - V)_0 + A_V/3 = 0 + 2.4/3 = 0^m.8.$$