

Летние учебно-тренировочные сборы по астрономии Практический тур — IAO & IOAA

28 июня – 12 июля 2016 года

Задача 1. Планетная система

О.С. Угольников

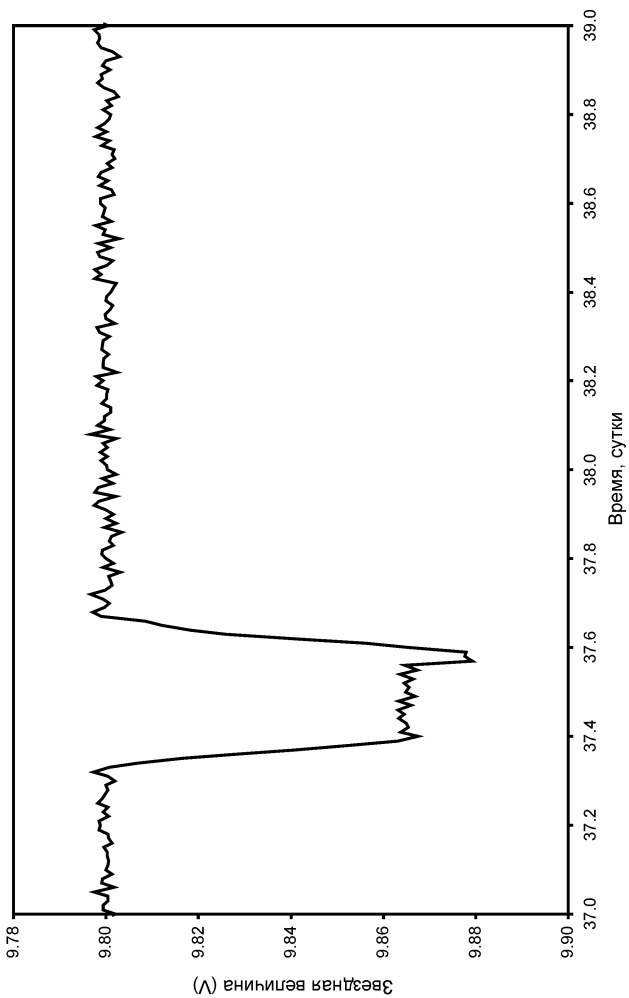
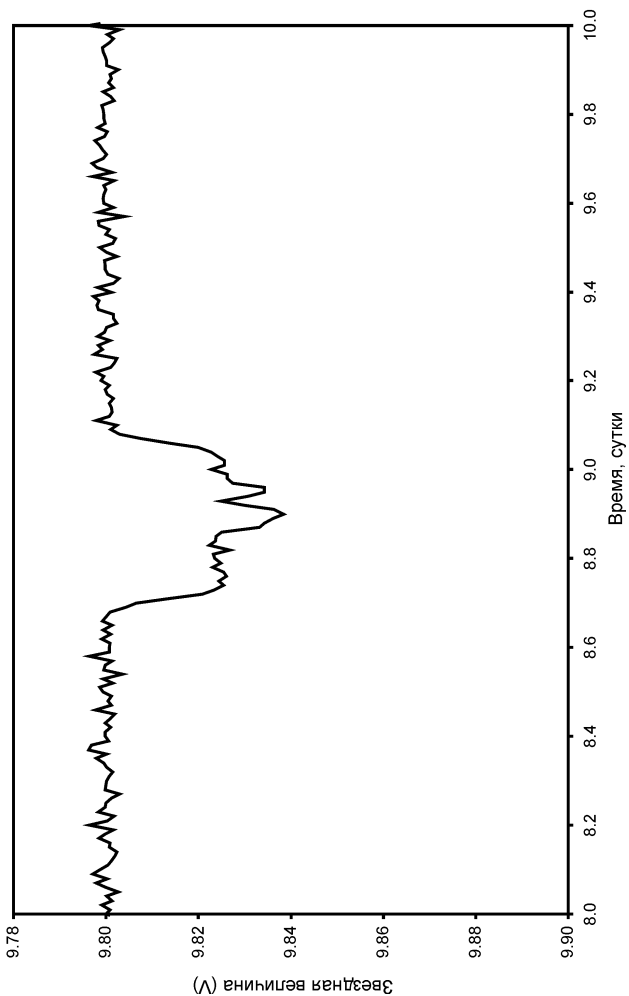
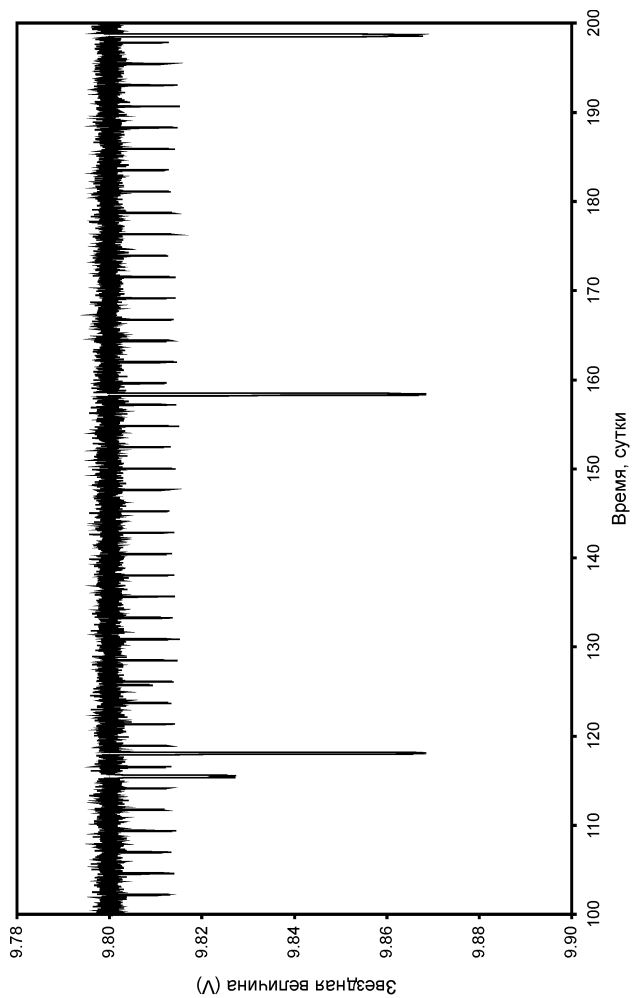
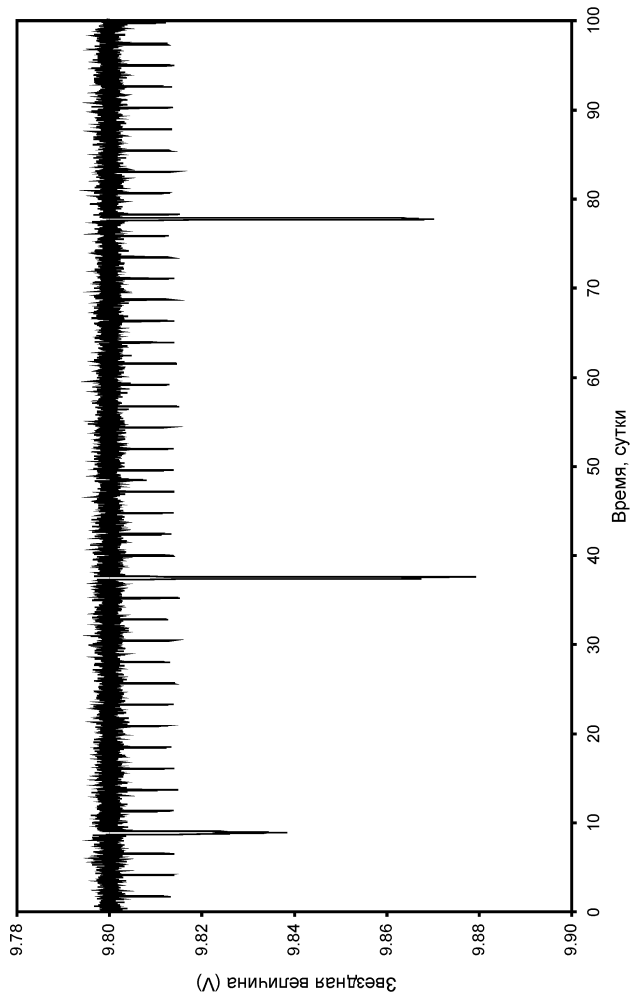
Перед Вами график изменения видимой звездной величины далекой звезды с физическими свойствами, аналогичными Солнцу. Звезда не имеет звезд-спутников, но имеет планетную систему. Первые два графика соответствуют общему периоду наблюдений в 200 суток, на остальных графиках приведены подробные фрагменты кривой блеска для отдельных интервалов этого периода. Планеты считать тугоплавкими, их взаимное притяжение не учитывать. Исходя из графиков, определите:

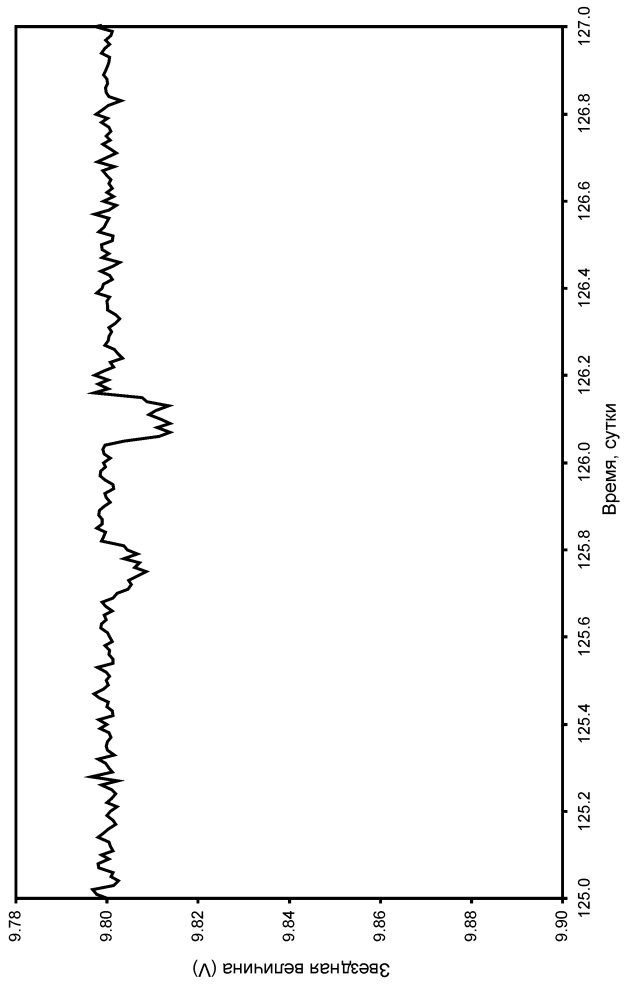
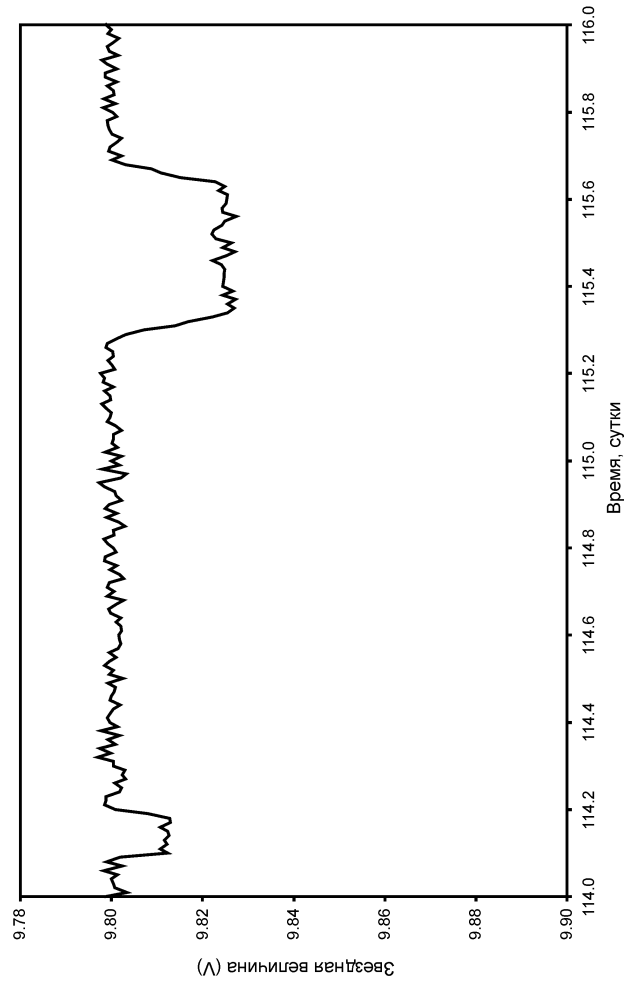
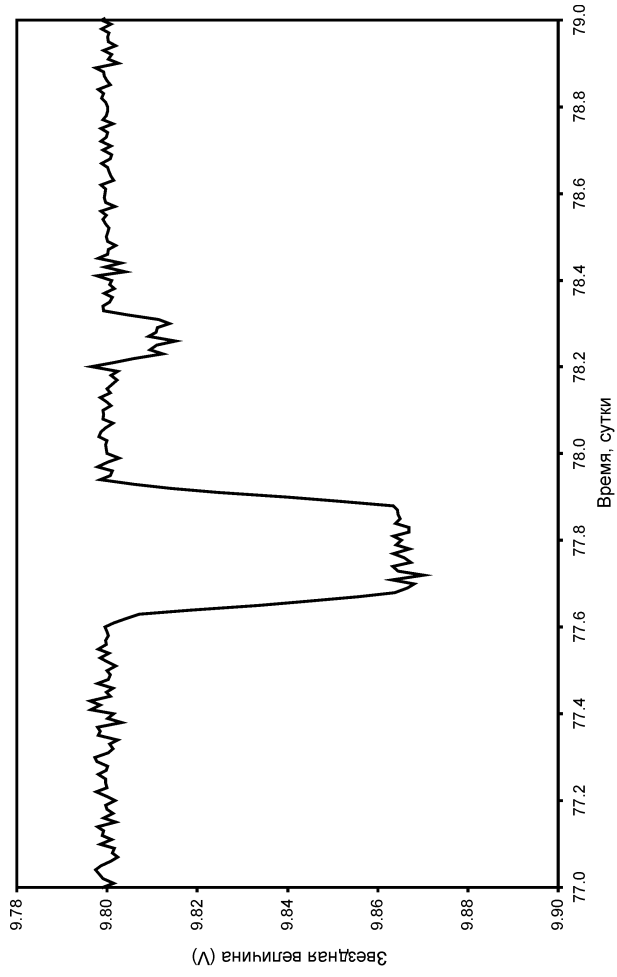
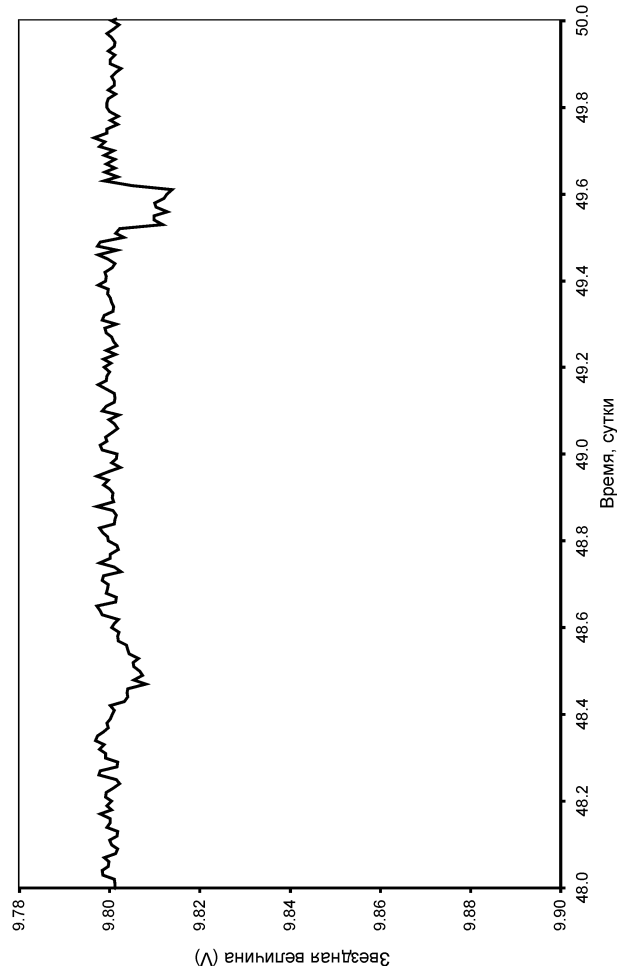
- а) Расстояние до звезды (не учитывая межзвездное поглощение света);
- б) Минимальное количество планет, обращающихся вокруг этой звезды.

Для каждой из планет по возможности оцените:

1. Радиус орбиты в а.е.;
2. Эксцентриситет орбиты (в предположении, что линия апсид направлена на наблюдателя);
3. Минимально возможное значение наклона орбиты планеты к лучу зрения;
4. Радиус планеты в радиусах Юпитера;
5. Среднюю температуру на планете («парниковый эффект» не учитывать);
6. Возможность существования атмосферы из молекулярного кислорода на планете;
7. Высоту однородного столба кислородной атмосферы на планете (на Земле она равна 8 км).

Плотность планет считать равной плотности Земли.





Решение:

Для ответа на первый вопрос задачи обратим внимание, что звездная величина звезды вне затмений планетами m_0 равна $+9.80^m$. Коль скоро звезда такая же, как Солнце, ее абсолютная звездная величина в полосе V составляет $+4.80^m$, то есть с расстояния в 10 пк звезда светила бы в 100 раз ярче. Отсюда мы получаем расстояние до звезды: 100 пк.

На графиках видны минимумы блеска, вызванные прохождением планет между звездой и наблюдателем. Вне зависимости от орбиты каждой фиксированной планеты, минимумы блеска, связанные с ней, должны иметь одинаковую форму (с точностью до погрешности измерений) и наступать через равные промежутки времени. Чтобы определить минимальное число планет, которые могут вызвать все наблюдаемые эффекты, выделим группы минимумов блеска, имеющие одинаковую глубину и разделенные равными временными промежутками.

Легче всего найти семейство частых минимумов глубиной 0.015^m , повторяющиеся примерно через 2.5 дня. Этот временной интервал можно уточнить, заметив, что за 100-дневный отрезок времени проходит 41.5 периода затмений. Отсюда сам период составляет 2.4 дня. Обозначим эту планету цифрой 1. Также заметны глубокие минимумы почти в 0.08^m , происходящие с интервалом в 40 дней. Первый из этих минимумов (37.5 суток) несколько глубже остальных, он совпадает по времени с прохождением планеты 1. В это время наблюдается одновременное прохождение сразу двух планет по диску звезды, в чем можно убедиться по детальному графику для этого момента. Следующий минимум соответствует моменту 77.8 суток, из чего можно определить период обращения планеты (даем ей индекс 2): 40.3 суток.

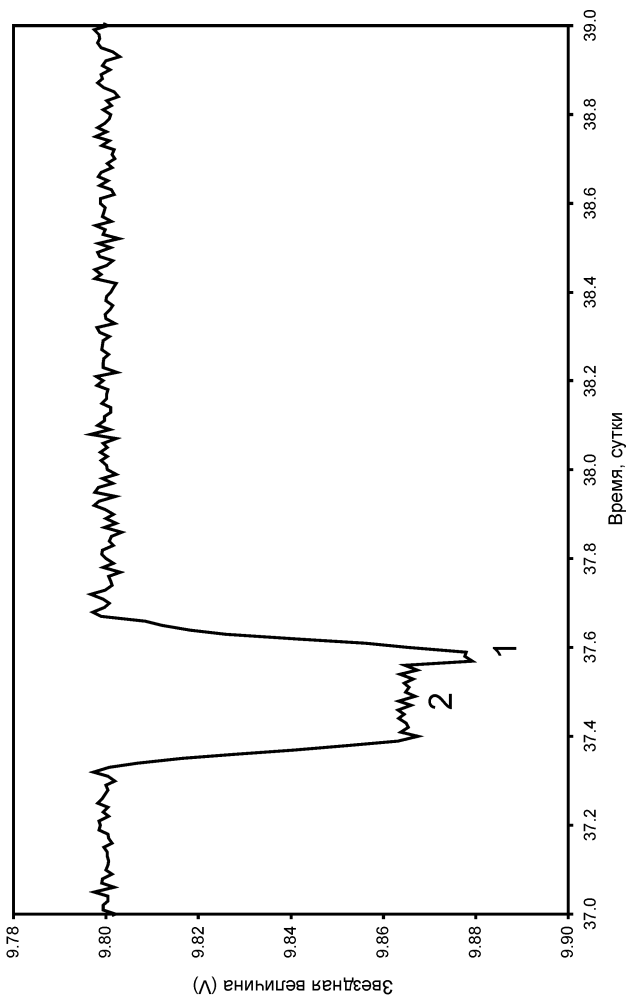
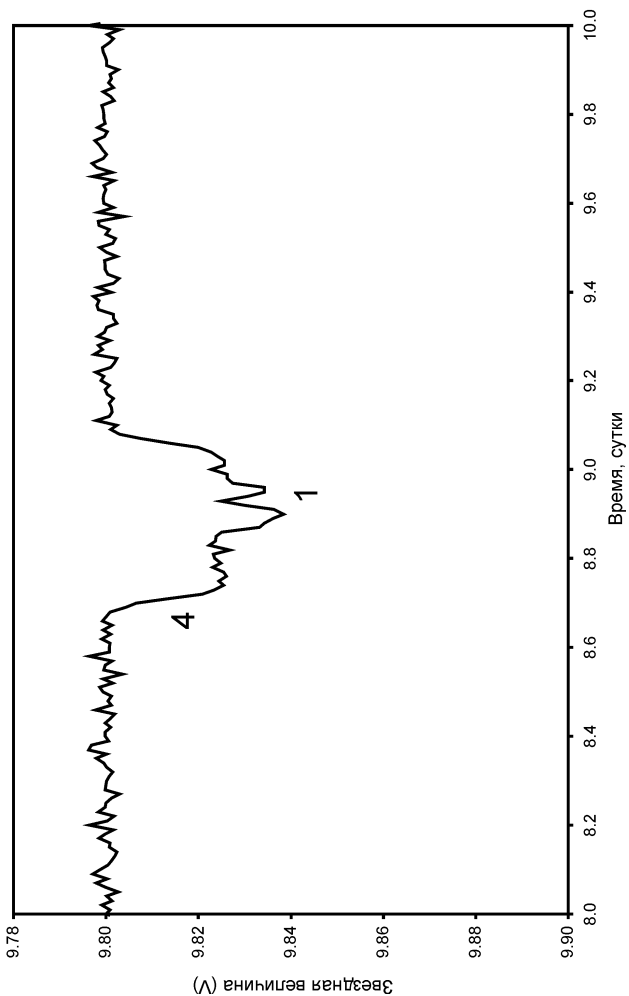
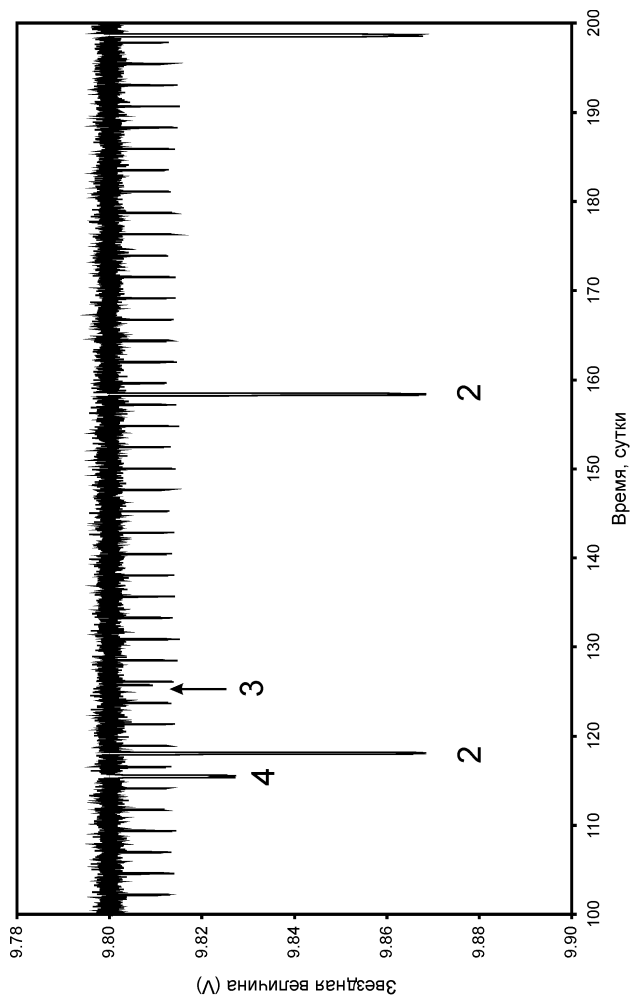
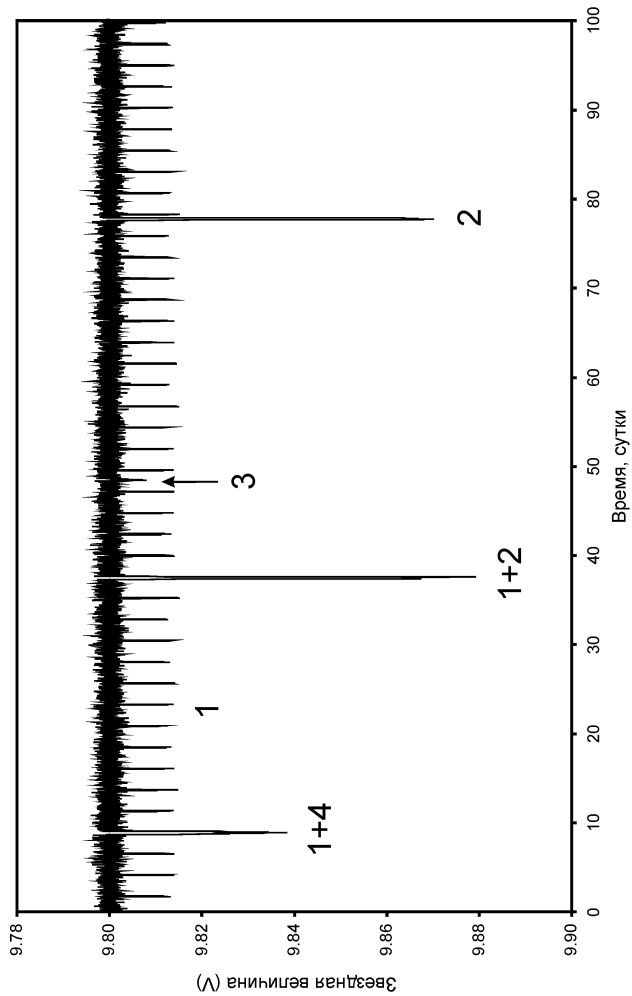
Нам остается найти на графике минимумы блеска, не связанные с планетами 1 и 2. Этих минимумов всего четыре. Два из них достаточно слабые и соответствуют моментам 48.5 и 125.7 суток, оба они показаны на подробных графиках. Профили очень похожи, и они вполне могут соответствовать одной и той же планете (в условии задачи требуется исследовать конфигурацию с минимальным числом планет). Тогда период обращения планеты 3 будет равен 77.2 дня. Обратим внимание, что у данных двух минимумов нет заметного «плато» на кривой блеска, что указывает на неполное вступление планеты на диск звезды.

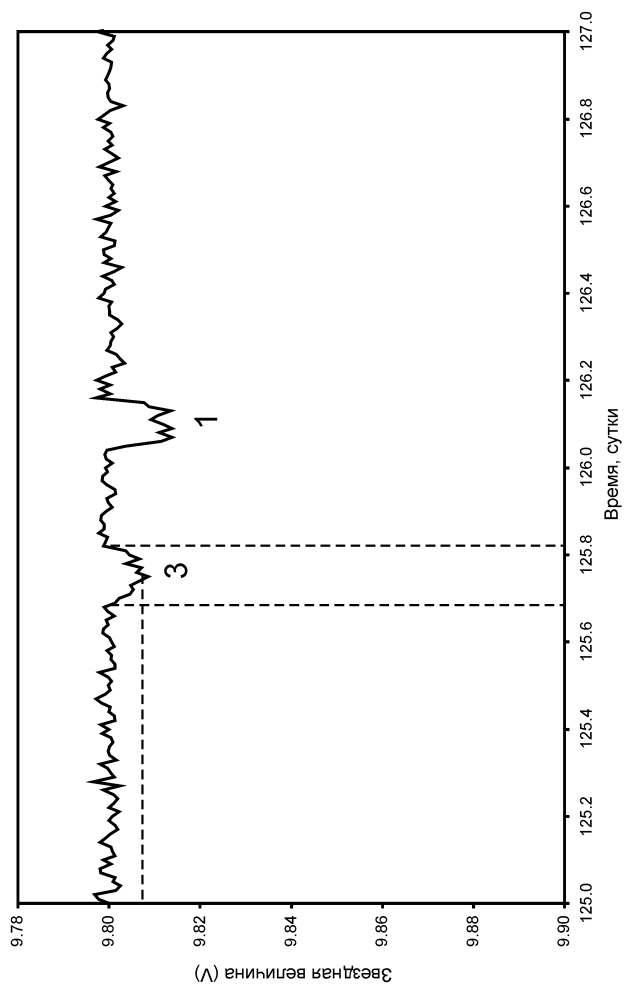
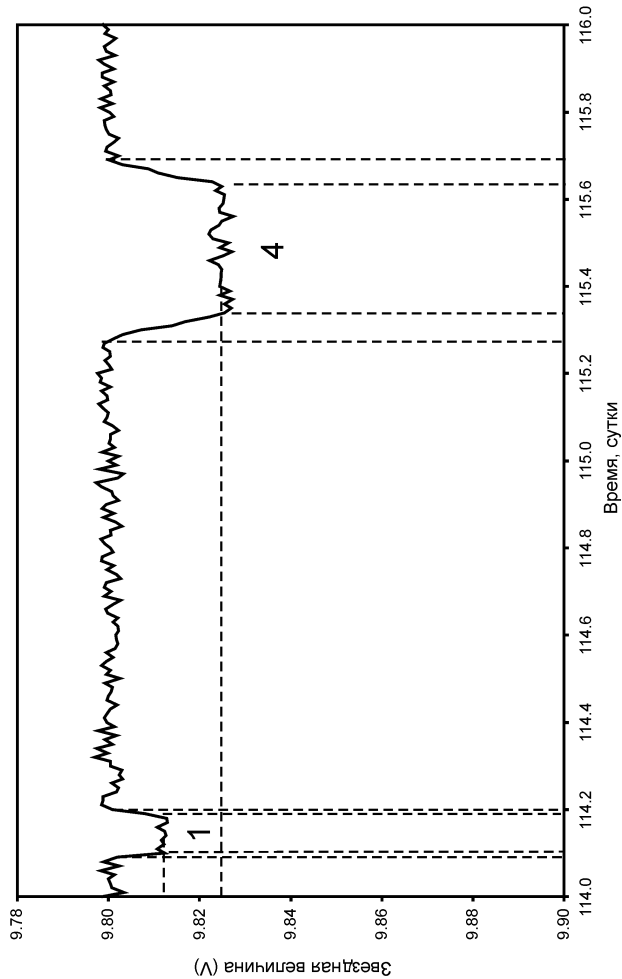
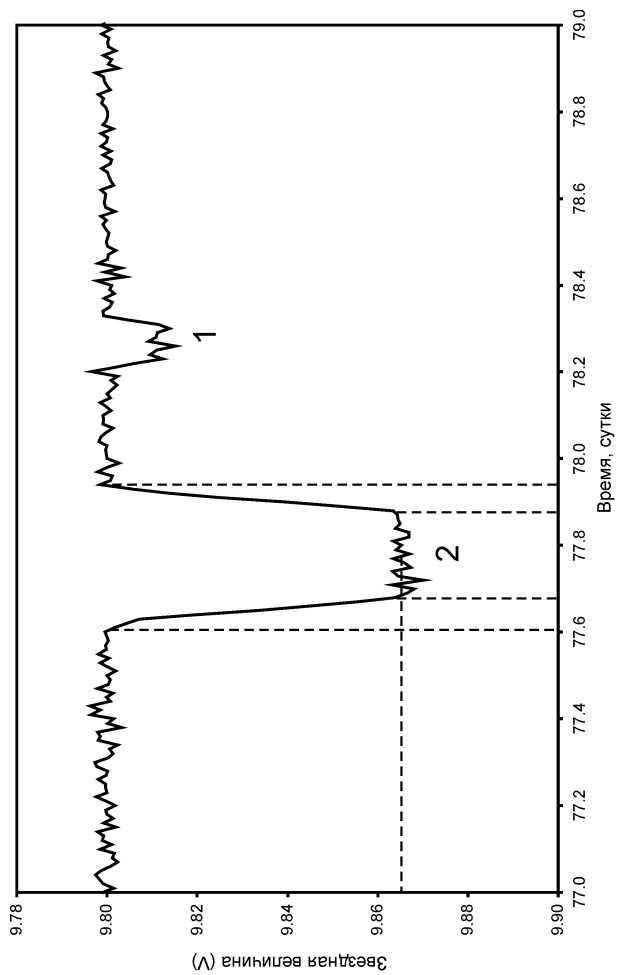
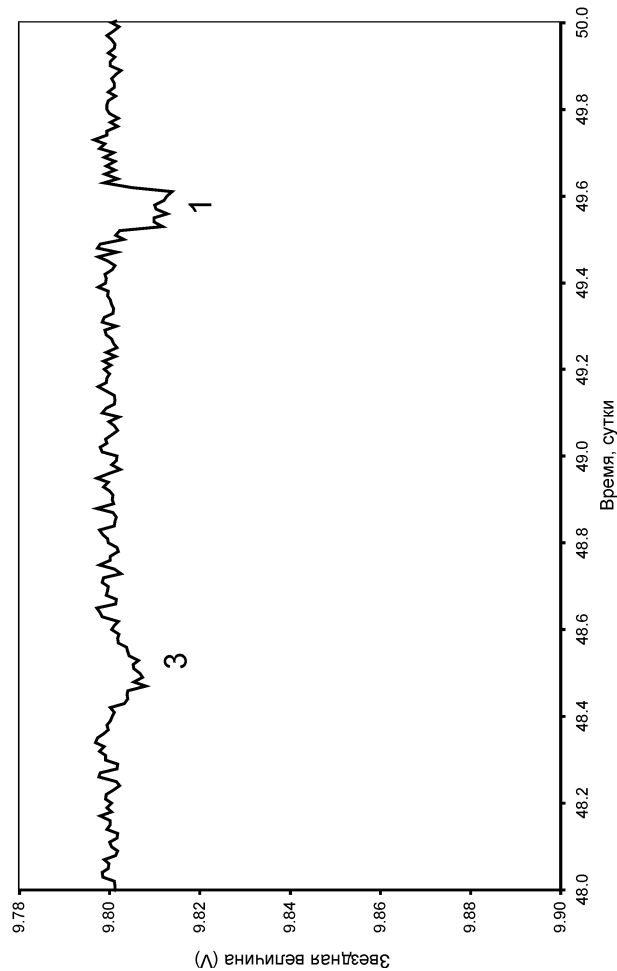
Еще два заметных минимума соответствуют моментам времени 8.9 и 115.5 дней. Эти минимумы, вообще говоря, различаются по своему профилю, но первый из них вновь совпадает с минимумом, вызванным прохождением планеты 1. На подробных графиках мы видим, что минимумы похожи по глубине «плато» (около 0.026^m), но на моменте времени 8.9 дней на него накладывается двойной минимум, связанный с планетой 1. Его двойственная структура с максимумом посередине объясняется тем, что в момент времени 8.92 дня обе планеты не только находятся на диске звезды, но и перекрываются друг с другом. Основной широкий минимум похож на минимум на 115.5 днях, и мы можем приписать их одной и той же планете 4, период обращения которой составляет 106.6 суток.

Итак, в данной системе присутствуют как минимум 4 планеты. Зная, что масса звезды равна массе Солнца, мы можем определить радиусы орбит планет из простого III закона Кеплера:

Планета	Период T , сут.	Период T , годы	Радиус орбиты a , а.е.
1	2.4	0.0066	0.035
2	40.3	0.110	0.230
3	77.2	0.211	0.354
4	106.6	0.292	0.440

Для дальнейшего решения задачи нам понадобится детально изучить форму профилей минимумов блеска, вызванных каждой из четырех планет. Для этого используем подробные графики. Очевидно, что нужно использовать "чистые" профили, при которых по диску звезды проходит только одна исследуемая планета. Для каждой из планет мы должны определить продолжительность частной (τ) и полной (t) фазы прохождения и глубину минимума Δm . Результаты заносим в таблицу:





Планета	τ , сут.	Период t , годы	Δm
1	0.01	0.09	0.011
2	0.07	0.20	0.064
3	0.14	-	0.007
4	0.06	0.30	0.024

Для планет 1, 2 и 4, вступающих на диск звезды полностью, можно определить радиус, исходя из величины падения блеска:

$$1 - \frac{r^2}{R^2} = 10^{-0.4\Delta m} \approx 1 - 0.4 \ln 10 \cdot \Delta m = 1 - 0.921\Delta m;$$

$$r = R\sqrt{0.921\Delta m} = 0.96R\sqrt{\Delta m}.$$

Здесь R — радиус звезды, равный радиусу Солнца. Для планеты 3, вступающей на диск звезды лишь частично, данная формула дает нижнее возможное значение радиуса. Результаты занесем в таблицу:

Планета	r/R	$r, r_{\pm}$	$i_{\min}, ^\circ$	e
1	0.10	1.0	0	0
2	0.24	2.4	0	0
3	>0.08	>0.8	0.7	-
4	0.15	1.5	0	0

Теперь мы можем выяснить, являются ли прохождения центральными, либо же планета пересекает диск звезды по хорде, характеризуемой углом α (см. рисунок). Рассмотрим планеты 1, 2 и 4, у которых полная фаза длится существенно дольше частной, то есть угол α существенно меньше 90° . В этом случае продолжительность полной фазы (планета целиком на диске звезды) составит

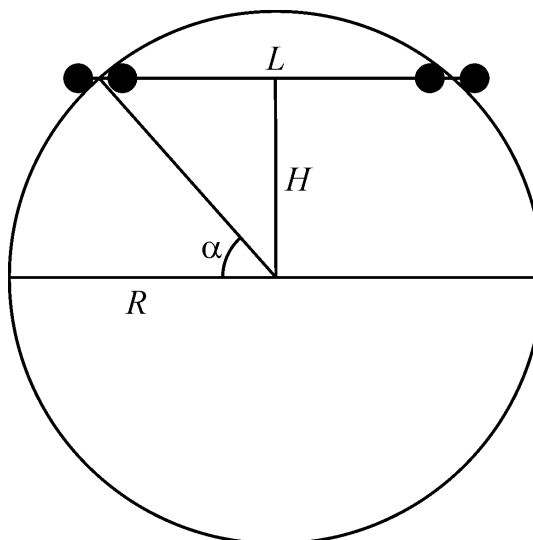
$$t = \frac{L}{v} = \frac{2(R-r) \cos \alpha}{v}.$$

Здесь v — тангенциальная скорость планеты во время прохождения. Продолжительность частной фазы составит

$$\tau = \frac{2r}{v \cos \alpha}.$$

Соотношение интервалов частной и полной фазы есть

$$\frac{\tau}{t} = \frac{r}{R-r} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$



Так как соотношение времен и радиусов нам известны, мы можем определить по этой формуле величину $\cos \alpha$, которая получается равной примерно 1.0 для всех трех планет 1, 2 и 4. Следовательно, прохождения этих планет можно считать центральными, а значит, минимально возможный наклон орбит этих планет к лучу зрения равен нулю.

Для планеты 3, где полных затмений не наблюдается, минимальное значение величины H (см. рисунок) может быть определено как $R - r$. Соответствующее значение также приведено в таблице. Минимальный наклон орбиты планеты, соответствующий положению узлов в картинной плоскости, определяется как

$$i = \arcsin \frac{H}{a} = 0.7^\circ.$$

Определим теперь эксцентриситет орбит планет в предположении, что линия апсид направлена к нам, то есть планета при прохождении по диску находится в перигентре или апоцентре орбиты. Сразу скажем, что для планеты 3 этого сделать нельзя. Для остальных планет мы знаем, что они движутся практически по диаметру диска звезды. Тогда мы можем определить ее тангенциальную скорость:

$$v = \frac{2(R - r)}{t}.$$

Эту скорость можно соотнести с круговой скоростью v_R , учитывая, что звезда похожа на Солнце:

$$K = \frac{v}{v_R} = \frac{2(R - r)}{v_\oplus t} \cdot \sqrt{\frac{a}{a_\oplus}}.$$

Здесь $v_\oplus$ — орбитальная скорость Земли (29.8 км/с), a и $a_\oplus$ — радиусы орбит планеты и Земли. Для всех трех планет величина K оказывается равной 1, то есть скорость равна круговой. В предположении, что линия апсид направлена на наблюдателя это означает, что орбиты всех трех планет круговые.

Если предположить, что плотность планет такая же, как у Земли, то мы можем легко определить ускорение силы тяжести g и вторую космическую скорость V на поверхности каждой из планет:

$$g = g_\oplus \frac{r}{r_\oplus}; \quad V = V_\oplus \frac{r}{r_\oplus}.$$

Здесь индекс « $\oplus$ » относится к Земле. Средняя температура на поверхности планеты будет равна

$$T_S = T_{S\oplus} \sqrt{\frac{a_\oplus}{a}}.$$

Здесь $T_{S\oplus}$ — средняя температура на Земле без учета «парникового эффекта», равная 250 К (ее можно получить, рассчитав поток энергии от Солнца вблизи Земли). Тепловая скорость молекул кислорода равна

$$V_T = \sqrt{\frac{5kT_S}{m}} = \sqrt{\frac{5kT_{S\oplus}a_\oplus}{ma}} = \sqrt{\frac{5\mathcal{R}T_{S\oplus}a_\oplus}{\mu a}}$$

Здесь μ — молярная масса молекулярного кислорода (0.032 кг/моль). Занесем полученные значения в таблицу (для планеты 3 мы берем минимальное значение радиуса):

Планета	g , м/с ²	V , км/с	T_S , К	V_T , км/с	h , км
1	110	125	1300	1.3	3.8
2	260	300	520	0.85	0.6
3	>90	>100	420	0.75	<1.5
4	160	190	380	0.70	0.7

Мы видим, что кислородная атмосфера могла бы удерживаться в поле тяжести всех четырех планет, но на первой из них при температуре 1300 К молекулы кислорода не могли бы существовать. Наконец, высота однородного столба атмосферы есть

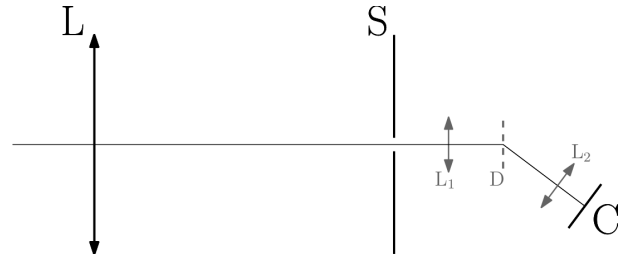
$$h = \frac{kT_S}{mg} = \frac{\mathcal{R}T_S}{\mu g} = h_\oplus \frac{T_S}{T_{S\oplus}} \cdot \frac{g_\oplus}{g} = h_\oplus \sqrt{\frac{a_\oplus}{a}} \cdot \frac{r_\oplus}{r}.$$

Задача 2. Установка на победу

И.А. Утешев

При прохождении света через оптическое стекло или другие оптические материалы наблюдается дисперсия. Это явление заключается в том, что показатель преломления среды отличается для лучей света различных длин волн: более короткие волны преломляются сильнее. Поэтому единого фокусного расстояния у линзы не существует, у луча каждой длины волны фокус свой. Возникающую в результате aberrацию оптической системы называют *хроматической*. Оптическая установка состоит из объективной линзы L и спектрографической системы низкого разрешения (экран S с длинной и узкой щелью, линзы L_1 и L_2 , дифракционная решётка D , ПЗС-матрица C).

Расстояние между линзой и экраном соответствует фокусному расстоянию F_0 объектива для света с длиной волны $\lambda_0 = 520$ нм, при которой показатель преломления стекла линзы $n_0 = 1.520$.



В данной задаче вы рассматриваете хроматическую aberrацию этой установки. Гарантируется, что иными (монокроматическими) aberrациями в данной системе можно пренебречь.

а) На описанной установке исследуется удалённый монокроматический источник с $\lambda \neq \lambda_0$, расположенный на её оптической оси. Как выглядит создаваемая линзой картина на экране? Каково распределение интенсивности в этой картине?

б) Как зависит вид данной картины от размера объективной линзы?

В дальнейшем будем считать, что на оптической оси установки расположен удалённый абсолютно чёрный эталонный источник с эффективной температурой $T = 7200$ К.

с) Как выглядит создаваемая линзой картина на экране в таком случае?

Щель экрана S много уже рассмотренной вами картины. Полученное на матрице изображение (рис. 1) имеет две перпендикулярные оси: пространственную R , соответствующую координате точки на щели, и волновую Λ , соответствующую длине волны луча, попавшего в эту точку.

д) Укажите расположение осей R и Λ на рис. 1. Направление отсчёта не имеет значения. Рассмотрим простейшую физическую зависимость показателя преломления от длины волны:

$$n(\lambda) = n_0 + k(\lambda - \lambda_0).$$

е) Найдите коэффициент k в рамках предложенной модели.

Известно, что масштаб пространственной оси $\mu_R = 22.0$ мкм/см, волновой оси — $\mu_\lambda = 6.9$ нм/см. Диаметр объектива $w = 20.0$ мм.

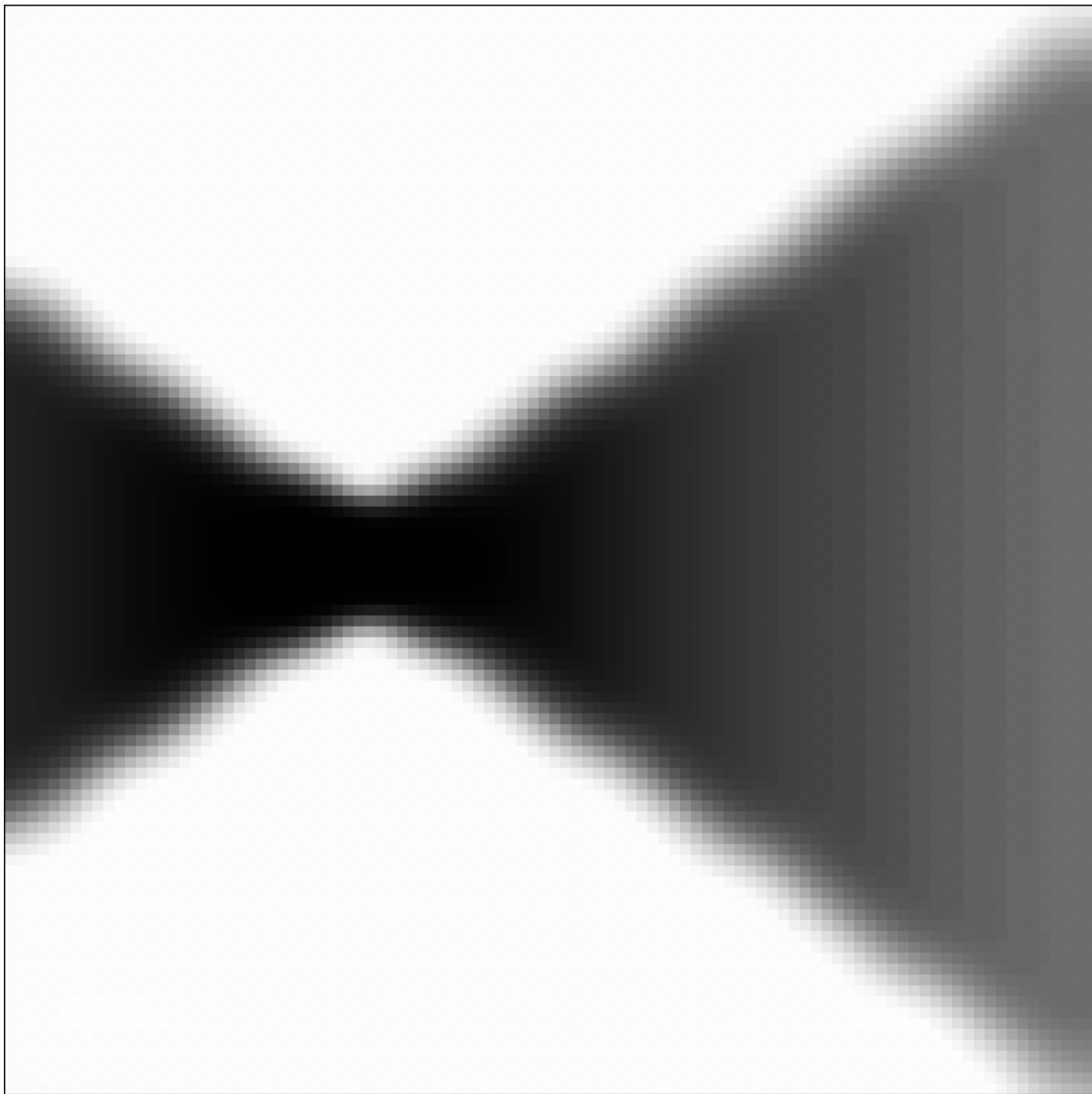
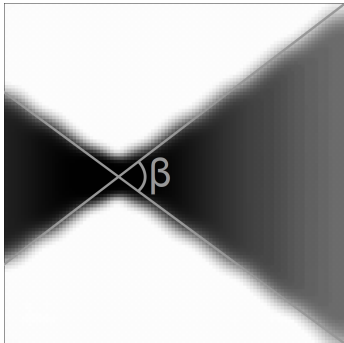
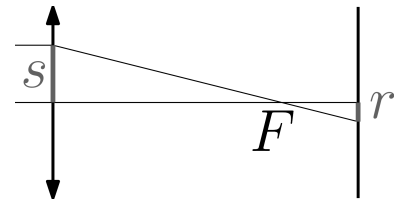


Рис. 1: Изображение, полученное с помощью описанной оптической установки (негатив).

Решение:

- а) Из подобия треугольников $r/s = \text{const}$ — на экране будет наблюдаться светлый кружок. Из соображений подобия кружок освещён равномерно.
- б) Край кружка освещены краями линзы — $r_{\text{max}} \propto$ размеру линзы.
- с) Из подобия треугольников $r = s \frac{|F_0 - F|}{F}$. По формуле тонкой линзы, $F \propto (n - 1)^{-1}$. Подстановка даёт $r = s \frac{|n - n_0|}{n_0 - 1}$. Спектр абсолютно чёрного тела непрерывен. Для лучей разных длин волн числитель $|n - n_0|$ будет различным. Изображение — цветное пятно с центральной симметрией.



- д) Спектрограф «нарезает» картину на круги разных длин волн, поведение которых изучено в (а). Каждый кружок освещён равномерно. На рис. 1 видно, что интенсивность по вертикалям в пределах освещённой области не меняется, значит, ось R нужно направить вертикально, а ось Λ — горизонтально.

- е) Предельный радиус освещённой светом с длиной волны λ области $r_{\text{max}}(\lambda) = \frac{wk|\lambda - \lambda_0|}{2(n_0 - 1)}$, то есть $\left| \frac{\Delta r_{\text{max}}(\lambda)}{\Delta \lambda} \right| = \frac{w|k|}{2(n_0 - 1)} = \frac{\mu_R}{\mu_\lambda} \tan \frac{\beta}{2}$. Измерения дают $\beta \simeq 74^\circ$, откуда $|k| = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ нм}^{-1}$.

«Более короткие волны преломляются сильнее» — $k = -1.25 \cdot 10^{-4} \text{ нм}^{-1}$